

用均匀化理论分析蜂窝结构的等效弹性参数¹⁾

王 飞 庄守兵 虞吉林

(中国科学技术大学力学与机械工程系, 合肥 230026)

摘要 在线弹性范围内, 根据均匀化理论, 并结合有限元方法推导出适用于二维周期性结构的均匀化的有限元格式 (Homo FEM), 计算出不同相对密度下的规则蜂窝结构的等效弹性模量 E_e 和泊松比 ν_e . 同时, 利用蜂窝结构的代表胞元模型, 用常规的有限元方法 (FEM) 模拟计算出相应的等效弹性参数. 最后将两种数值计算结果与已有的理论公式进行了比较和分析讨论. 结果表明: 在考察的相对密度全场范围内 (0~0.4), Homo FEM 得到的蜂窝结构的 E_e 和 ν_e 与 FEM 使用平面实体单元模拟计算得到的结果一致吻合, 反映出 Homo FEM 数值方法的客观准确性和可行性. 而 Gibson 公式和 W-K 得到的等效弹性模量值 E_e 只是在较小相对密度的情况下 (小于 0.15) 与数值计算结果吻合. 当结构的相对密度较大时, 必须考虑胞棱附近区域由应力集中导致的复杂的应力和应变分布的影响.

关键词 蜂窝结构, 等效弹性参数, 均匀化理论, 有限元, 代表胞元

引 言

孔洞材料是一种多相材质的复合材料系统, 其中包含固体基体介质, 流体或气体相孔洞介质. 固体孔洞材料由于具有高比强度, 隔热隔震性能好等优点, 日益受到广泛的运用, 二维的蜂窝结构材料, 尤其是金属蜂窝结构, 就是一种典型的超轻固体孔洞材料. 在实际分析中, 蜂窝结构常被处理成均质连续材料, 并用一系列弹性参数和宏观本构方程来描述其宏观等效的力学性质^[1,2]. 因此, 分析蜂窝结构的等效弹性参数, 如等效弹性模量 E_e 和等效泊松比 ν_e 具有明显的重要意义. 早期的研究中, Gibson^[3] 利用简化的胞壁梁模型, 同时考虑胞壁的伸缩变形和剪切变形, 计算出蜂窝结构的二维等效弹性参数, 称之为 Gibson 公式. 对于规则的单型蜂窝结构, Gibson 公式给出的等效弹性参数 E_e 和 ν_e 为

$$\frac{E_e}{E_s} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{t^3}{l^3} \cdot \frac{1}{1 + (5.4 + 1.5\nu_s)(t/l)^2} \quad (1)$$

$$\nu_e = \frac{1 + (1.4 + 1.5\nu_s)(t/l)^2}{1 + (5.4 + 1.5\nu_s)(t/l)^2} \quad (2)$$

式 (1), 式 (2) 中 E_s 和 ν_s 分别代表蜂窝结构基体材料的弹性模量和泊松比, l 为蜂窝结构胞元的长度, t 为胞壁厚度. 对于规则的蜂窝结构, 相对密度 $\rho^*/\rho_s = 2t/\sqrt{3}l - t^3/3l^3$. 当 ρ^*/ρ_s 较小时 (< 0.20), ρ^*/ρ_s 近似等于 $2t/\sqrt{3}l$. 实验结果表明, Gibson 公式在蜂窝结构相对密度 ρ^*/ρ_s 较小 (< 0.1) 的情况下, 是足够精确的, 但是在较大的相对密度情况下, Gibson 胞壁梁模型的适用性缺乏客观的实验验证. 可以设想, 与胞壁相连的胞棱或节点处的受力和变形具有与胞壁

2001-02-08 收到第一稿, 2001-09-29 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10072059) 和中国科学院“九五”基础研究重大项目 (KJ 951-1-201) 资助项目.

不同的特征,当相对密度较大时,胞壁厚度与胞壁长度已可相比较,仅用梁模型来模拟蜂窝结构中胞体的弹性变形行为具有一定的欠缺.为此,Warren 和 Kraynik^[4]根据规则蜂窝结构中胞元周期性重复排列的特点,对其中的一个代表性胞元进行了分析,建立了简单应变情况下的宏观弹性本构方程,并引入简化的梁模型柔性系数,得到了相应结构的宏观等效弹性参数近似解析解(W-K 结果)

$$\frac{E_e}{E_s} = \frac{3}{2}\phi^3 \left(1 + \frac{9}{4}\phi + \frac{21}{16}\phi^2 + \dots \right) \quad (3)$$

$$\nu_e = 1 - 3\phi^2 - \frac{2}{3}\phi^3 + \dots \quad (4)$$

其中 ϕ 表示蜂窝结构的相对密度. Shi 和 Tong^[5,6]利用均匀化理论和有限元方法分析了蜂窝结构平面内的等效弹性参数和垂直于平面的等效横贯剪切刚度.但是文献[5]的理论推导得到的规则蜂窝结构的等效弹性模量 E_e 正比于相对密度 ρ^*/ρ_s 的一次方项,这与 Gibson 公式(1)和实验结果有明显的差异.因此有必要对蜂窝结构的等效弹性参数做一个重新的评定和讨论.

蜂窝结构的胞元具有宏观周期分布的性质,但在胞元细观尺度上,胞壁和孔洞之间高度异质和不均匀性使得结构受力时在任一宏观点的邻域内应力和应变的变化都非常剧烈.因此,常规的计算多相复合材料等效力学性质的理论(见 Hashin 的评论^[7])和有限元方法都无法模拟蜂窝材料的细观结构对材料宏观力学性质的影响.尽管如此,针对蜂窝结构周期性的特点,我们可以利用均匀化理论并结合有限元方法,同时引入结构的宏观和细观两个尺度来考察蜂窝结构的宏观细观力学性质.

本文在线弹性范围内,采用虚位移原理弱解形式表达的均匀化理论^[8],并结合有限元方法推导出适用于二维的均匀化的有限元格式(Homo FEM),计算出不同相对密度下的规则蜂窝结构的等效弹性模量和泊松比,并进一步利用蜂窝结构的代表胞元模型^[9,10],运用常规的有限元方法(FEM)计算出相应的等效弹性参数.最后将两种数值计算结果与已有的理论公式结论进行了比较.结果表明:在所考察的相对密度范围内(0~0.4),Homo FEM 得出的等效弹性参数 E_e 和 ν_e 与 FEM 使用平面实体单元计算得到的结果一致吻合,而 Gibson 公式和 W-K 给出的等效弹性模量 E_e 只是在结构相对密度较小的情况下(小于 0.15)与数值计算结果吻合.当结构的相对密度较大时,Gibson 公式和 W-K 结果应被均匀化的有限元数值结果所修正.

1 均匀化理论和有限元法

1.1 均匀化理论

考虑由不同材料或非均匀材料组成基础胞元(base cell)而形成的复合材料,其胞元具有周期分布的性质.设基础胞元的无量纲特征尺寸为 ε ,与宏观尺度相比, ε 是一个非常小的量.当结构受外载作用时,结构场变量如位移和应力将随宏观位移的改变而产生变化.但是由于细观胞元结构的高度非均质性,使得结构的场变量在宏观位置 \boldsymbol{x} 的非常小的邻域 ε 内也有很大变化.因此可以同时引入两个尺度, \boldsymbol{x} 和 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}/\varepsilon$,来描述结构宏观细观场变量的性质,其中 \boldsymbol{x} 是宏观尺度, \boldsymbol{y} 表示细观尺度.以 Ω^ε 表示随两尺度变化的材料实体部分. Y 对应于一个基础胞元, Y 表示胞元的实体部分,则根据线弹性范围的虚位移原理(弱解形式)

$$\int_{\Omega^\varepsilon} E_{ijkl} \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i d\Gamma \quad (5)$$

其中 f_i^e 为体积力, t_i 表示施加在 Ω^e 力边界 Γ_t 上的外载荷, u^e 为真实位移, v 为满足外固定边界条件的任意虚位移, $u^e, v \in V^e = \{v \in (H^1(\Omega^e))^3 | v|_{\Gamma_d} = 0\}$, H^1 是 R^3 空间的 Hausdorff 维, 并假设结构基础胞元中孔内无作用力. 根据均匀化理论, u^e 和 v 可以按 ε 渐近展开为

$$u^e(x) = u^0(x) + \varepsilon u^1(x, y) + O(\varepsilon^2) \quad (6)$$

$$v(x) = v^0(x) + \varepsilon v^1(x, y) + O(\varepsilon^2) \quad (7)$$

将式 (6), 式 (7) 代入式 (5), 运算后得

$$\int_{\Omega^e} E_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} \right) d\Omega + \varepsilon \int_{\Omega^e} E_{ijkl} \left[\frac{\partial u_k^1}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} \right) + \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \right] d\Omega = \int_{\Omega^e} f_i(v_i^0 + \varepsilon v_i^1) d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i(v_i^0 + \varepsilon v_i^1) d\Gamma + O(\varepsilon^2) \quad (8)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则方程 (8) 可以简化为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^e} E_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} \right) d\Omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega^e} f_i v_i^0 d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i^0 d\Gamma \right\} \quad (9)$$

由虚位移 $v = v^0 + \varepsilon v^1$ 的任意性, 由上式可得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^e} E_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} d\Omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega^e} f_i v_i^0 d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i^0 d\Gamma \right\} \quad (10)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^e} E_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} d\Omega = 0 \quad (11)$$

式 (10) 和式 (11) 不是相互独立的, 它们共同依赖于项 $(\partial u_k^0/\partial x_l + \partial u_k^1/\partial y_l)$.

考虑细观尺度上的胞元体积积分. 根据 Y -周期函数的性质^[8], 任意函数 $\Phi(y)$ 满足

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^e} \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) d\Omega = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega^e} \int_Y \Phi(y) dY d\Omega \quad (12)$$

其中 $|Y|$ 代表基础胞元的体积 (或面积). 根据式 (12), 方程 (10), (11) 可以分别转化为

$$\int_{\Omega^e} \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_Y E_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} dY \right\} d\Omega = \int_{\Omega^e} \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i v_i^0 dY \right\} d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i^0 d\Gamma \quad (13)$$

$$\int_{\Omega^e} \frac{1}{|Y|} \int_Y E_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} dY d\Omega = 0 \quad (14)$$

由于式 (14) 中 v_i^1 的任意性, 选取 $v_i^1 = v_i^1(y)$, 则式 (14) 可以简化为

$$\int_Y E_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} dY = 0 \quad (15)$$

将 x 看成参数, 则方程 (15) 关于 u^1 解的存在性由文献 [11] 中的 Lemma 2.1 所保证. 考虑到方程 (15) 关于 $\partial u_k^0/\partial x_l$ 是线性的, u^1 可以表示为

$$u_i^1(x, y) = -\chi_i^{kl}(y) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \quad (16)$$

式 (16) 中 $\chi_i^{kl} (i = 1, 2)$ 是细观尺度上表征结构和变形特征的附加参数. 将式 (16) 代入式 (15), 可得附加参数 $\chi_i^{kl} \in V_Y$ 的计算式

$$\int_Y \left(E_{ijkl} - E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} \right) \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} dY = 0, \quad \forall v \in V_Y \quad (17)$$

最后将式 (16) 代入式 (13), 得到均匀化的宏观虚位移方程

$$\int_{\Omega^\epsilon} D_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega^\epsilon} b_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma_\epsilon} t_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) d\Gamma, \quad \forall v \in V_\Omega \quad (18)$$

其中

$$D_{ijkl}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(E_{ijkl} - E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} \right) dY \quad (19)$$

$$b_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i dY \quad (20)$$

式 (18) 中 D_{ijkl} 就是均匀化的宏观等效弹性张量, b_i 是平均体力. 下面根据式 (16) 和式 (18) 并结合有限元方法, 推导出适用于二维蜂窝结构的均匀化的有限元格式, 数值计算出规则蜂窝结构的等效弹性模量和泊松比.

1.2 平面蜂窝结构的有限元方法

1.2.1 均匀化的有限元格式 (Homo FEM)

图 1 所示是典型的平面规则蜂窝结构周期性的几何结构示意图. 图中虚线所示区域表示所选择的蜂窝结构的基础胞元, 如图 2 所示.

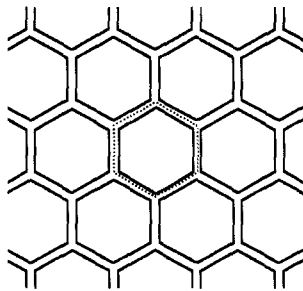


图 1 规则蜂窝结构周期性几何结构图
Fig.1 Geometry of a regular honeycomb; dashed hexagon, repeating unit

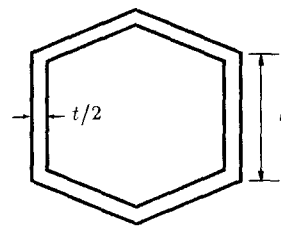


图 2 细观结构 - 基础胞元几何结构图
Fig.2 Mesostructure of a regular honeycomb-base cell

根据均匀化理论, 结构的宏观等效弹性张量 D_{ijkl} 必须通过在基础胞元结构中求解附加参数 χ^{kl} 来得到. 由于蜂窝结构可简化为二维平面问题, 因此只需求解三个细观尺度上 (基础胞元) 的附加参数, 即 $\chi^{11}, \chi^{22}, \chi^{12} = \chi^{21}$.

定义 4 个矢量 P^{ij} 为

$$P^{ij} = y_j \delta_{ik} e_k \quad (i, j = 1, 2; k = 1, 2) \quad (21)$$

其中 e_k 表示笛卡儿坐标的基矢量, δ_{ik} 为 Kronecker 符号. 由式 (21), 方程 (17) 可写为

$$\int_{\mathcal{Y}} \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} dY = \int_{\mathcal{Y}} \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} E_{ijpm} \frac{\partial P_p^{kl}}{\partial y_m} dY \quad (22)$$

对方程 (22) 进行离散化, 即对基础胞元的实体域 \mathcal{Y} 采用有限单元离散. 采用平面四边形等参元 (QUAD4), 并利用相应的插值函数对 $\mathbf{y}, \mathbf{v}^1(\mathbf{y}), \chi^{kl}(\mathbf{y})$ 进行插值

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y} &= \sum_{\alpha=1}^4 \mathbf{y}^{\alpha} N^{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \\ \mathbf{v}^1(\mathbf{y}) &= \sum_{\alpha=1}^4 (\mathbf{v}^1)^{\alpha} N^{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \\ \chi^{kl}(\mathbf{y}) &= \sum_{\alpha=1}^4 (\chi^{kl})^{\alpha} N^{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

其中形状函数 $N^{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}(1 + \xi^{1\alpha}\xi_1)(1 + \xi^{2\alpha}\xi_2)$, $(\xi^{1\alpha}, \xi^{2\alpha})$, $\alpha = 1, \dots, 4$ 是母单元中节点坐标.

对蜂窝结构采用平面应力问题假设, 引入预应变矢量 $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{kl}(k, l = 1, 2)$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0^{11} = [1 \ 0 \ 0]^T, \boldsymbol{\varepsilon}_0^{22} = [0 \ 1 \ 0]^T, \boldsymbol{\varepsilon}_0^{12} = \boldsymbol{\varepsilon}_0^{21} = [0 \ 0 \ 1]^T \quad (24)$$

则将式 (23) 代入式 (22) 得

$$\sum_e \int_{\mathcal{Y}^e} \mathbf{v}^1 \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{E}} \mathbf{B} \chi^{kl} |\mathbf{J}| d\xi_1 d\xi_2 = \sum_e \int_{\mathcal{Y}^e} \mathbf{v}^1 \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{E}} \boldsymbol{\varepsilon}_0^{kl} |\mathbf{J}| d\xi_1 d\xi_2 \quad (25)$$

其中 $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}$, \mathbf{J} 是雅可比矩阵, \mathbf{N} 为插值形状函数矩阵, \mathbf{L} 为平面问题的微分算子, \mathbf{B} 是应变矩阵. 弹性系数矩阵 $\bar{\mathbf{E}}$ 采用平面应力假设条件. 由于节点虚位移 v_{α}^1 的任意性, 式 (25) 可以简化为

$$\sum_e \int_{\mathcal{Y}^e} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{E}} \mathbf{B} \chi^{kl} |\mathbf{J}| d\xi_1 d\xi_2 = \sum_e \int_{\mathcal{Y}^e} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{E}} \boldsymbol{\varepsilon}_0^{kl} |\mathbf{J}| d\xi_1 d\xi_2 \quad (26)$$

式 (26) 就是均匀化的有限元求解附加参数 χ^{kl} , $(k, l = 1, 2)$ 的方程, 其中单元刚度矩阵 \mathbf{K}_e 为

$$\mathbf{K}_e = \int_{\mathcal{Y}^e} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{E}} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi_1 d\xi_2 \quad (27)$$

根据方程 (26) 求解出单元各节点的 χ^{kl} , 再由式 (19) 便可求解出宏观等效弹性张量 D_{ijkl} , 最后根据平面应力假设, 就可得到规则蜂窝结构的等效弹性模量和泊松比 E_e, ν_e .

实际的有限元计算中, 我们令蜂窝结构胞元的长度 $l = 6.5 \text{ mm}$ 保持不变, 选取不同的胞壁厚度 t 使得结构的相对密度在 $0 \sim 0.4$ 范围内均匀地取 8 个值. 根据对称性, 取有限元计算模型为基础胞元的一半, 在实体胞壁区域内划分平面四边形单元网格, 单元的个数随胞壁厚度的不同而不同, 并根据数值计算的收敛性和误差分析来确定. 图 3 所示的是结构相对密度为 0.30 的基础胞元划分的单元网格, 其单元个数为 $3 \times 30 \times 8 = 720$ 个.

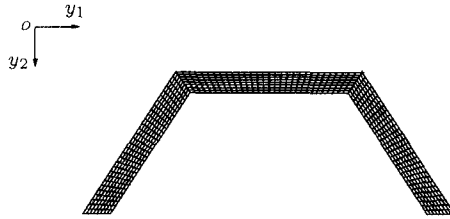


图 3 基础胞元 (对称的一半) 单元网格划分示意图

Fig.3 Element discretization of base cell (a symmetric half)

1.2.2 代表胞元的有限元方法 (FEM)

Kyriakides^[12] 指出：结构的变形和失稳问题可以通过分析与母体力学结构相似的结构特征单元在相同载荷下的变形和失稳现象得到比较简单而又直接的解决。蜂窝结构的代表胞元模型能反映出与全场多胞体结构一致的变形、失稳和破坏现象及相应的力学机制。Papka 和 Kyriakides^[9] 以及作者^[10] 分别利用代表胞元模型 (representative unit cell) 数值模拟并研究了低相对密度的双型和单型铝蜂窝结构单向压缩过程中的结构宏观变形和塑性失稳问题，得到的数值模拟结果与实验结果符合得很好。鉴于此，我们采用与文献 [10] 相同的代表胞元模型，用有限元方法模拟出规则蜂窝结构线弹性范围的变形响应，并数值计算出结构的等效弹性模量和泊松比 E_s, ν_s 。

图 4 显示出有限元计算中所采用的规则蜂窝结构代表胞元模型的几何尺寸及形状。考虑到所模拟的蜂窝结构相对密度的变化，我们仍保持胞元的长度 $l = 6.5 \text{ mm}$ 不变，选取与上节中相同的胞壁厚度 t ，即相同的相对密度。对代表胞元中各胞壁分别采用梁单元模型 (BE) 和平面实体单元模型 (SE) 进行数值模拟。梁单元模型中，代表胞元的每条胞壁沿全长 l 被划分成 10 个 3 节点的梁单元，采用 Timoshenko 梁单元以允许梁单元节点有较大的旋转变形和切向应力。平面实体单元模型中，采用四节点平面应力单元对实体胞壁区域内进行有限单元离散和单元网格划分，划分的网格形状与上节中基础胞元划分的有限单元网格相同，单元的个数根据数值计算结果的收敛性确定。图 5 所示的是相对密度为 0.30 的代表胞元，采用平面实体单元模型时划分单元网格，其单元个数为 $12 \times 20 \times 6 = 1440$ 个。

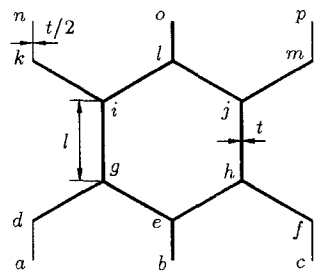


图 4 规则蜂窝结构的代表胞元几何模型

Fig.4 Geometry of representative unit cells (RUC)

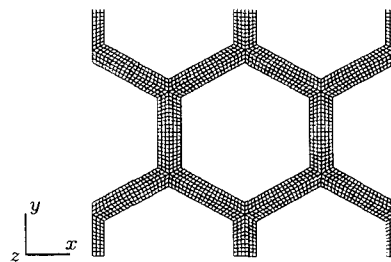


图 5 代表胞元采用平面实体单元网格划分

Fig.5 Discretization of base cell with plane solid elements

根据 Papka^[9] 的分析，为了使代表胞元模型能正确反映出全场大范围蜂窝结构的变形和失稳扩展特征，必须使代表胞元满足三个方面的条件。鉴于此，我们对代表胞元施加与文献 [10] 中相同的边界条件和对称性条件 (平面实体单元模型中，对称性条件仅施加在边界处纵向胞壁

的外侧单元节点上). 胞元基体材料的应力应变响应取为线弹性, 杨氏模量 E_s 可任意选取, 泊松比 ν_s 取为 0.3.

2 数值结果及分析

图 6 和图 7 分别显示了由理论公式 (1)~(4) 和有限元数值方法计算得到的规则蜂窝结构的等效弹性模量和泊松比随结构的相对密度变化的曲线. 从图中不难发现, 均匀化的有限元方法计算得到的 E_e 和 ν_e (图中 Homo FEM 曲线) 与常规有限元方法利用平面实体单元 (SE) 计算得到 E_e 和 ν_e (图中 FEM(SE) 曲线) 在考察的结构相对密度全场范围内 (0~0.4) 一致吻合, 并且其值介于 Gibson 公式结果和 W-K 结果之间. 由于 Gibson 公式中所采用的模型是 Timoshenko 修正形式的梁模型^[13], 因此图 6 和图 7 中显示出 Gibson 公式 (1),(2) 得到的 $E_e-\rho^*/\rho_s$ 和 $\nu_e-\rho^*/\rho_s$ (图中 Gibson 曲线) 与常规有限元方法利用 Timoshenko 梁单元计算得到的结果 (图中 FEM(BE) 曲线) 也是全场吻合的. 同时数值结果还表明, 当蜂窝结构的相对密度小于 0.15 时, Gibson 公式和 W-K 结果与 Homo FEM 计算得到的等效弹性参数结果近似相等, 相对误差均小于 10%; 但是当结构的相对密度较大时 (如大于 0.25), Gibson 公式, W-K 和 Homo FEM 三者得到的结构等效弹性模量 E_e 相互之间存在着明显的偏差. 然而, 对于等效泊松比 ν_e , 理论公式和数值计算结果尽管也存在着一定的差异, 但这种数值偏差并不明显. 例如, 当蜂窝结构的相对密度为 0.4 时, Gibson 公式得到的 E_e 仅为 Homo FEM 计算结果的 1/2, 而相应的 W-K 结果却接近于 Homo FEM 结果的 2 倍. 此外不难发现, 同样的数值偏差现象也存在于使用不同的单元, 有限元模拟结构代表胞元计算得出的等效弹性参数结果之中, 如图 (6), 图 (7) 中 FEM(SE) 和 FEM(BE) 曲线所示的结果及相应的数值偏差现象.

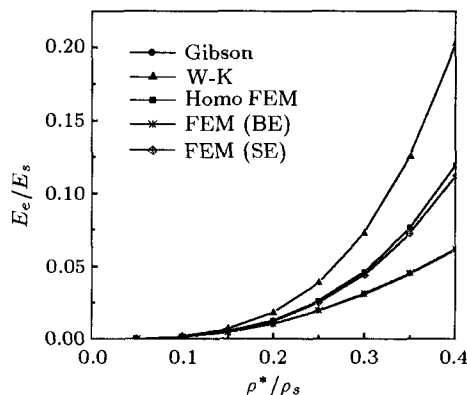


图 6 等效弹性模量随相对密度的变化曲线
Fig.6 Effective Young's modulus versus relative density of the regular honeycomb structure

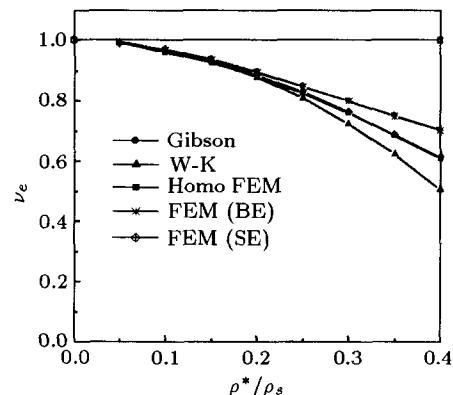


图 7 等效泊松比随相对密度的变化曲线
Fig.7 Effective Poisson's ratio versus relative density of the regular honeycomb structure

由于均匀化的有限元方法建立在严格的均匀化理论的基础上, 避免了在建立模型过程中引入近似假设, 因此由此计算得到的规则蜂窝结构的等效弹性参数能够准确地反映出周期性蜂窝结构的宏观等效弹性性质. 然而, Gibson 公式和 W-K 结果在蜂窝结构相对密度较大时, 尤其是当结构中胞壁的厚度 t 较之胞壁长度 l 可比的情况下, 与 Homo FEM 计算得到的 E_e 存在着明显的偏差. 这表明对这些理论公式中所采用的近似梁模型和相应的假设条件的合理性需要作进一步的分析. 当蜂窝结构的相对密度较小, 即 $t \ll l$ 时, 结构中胞壁所占的实体质量比可

忽略不计,胞棱对结构的宏观变形影响甚微,因此可用简单的 Timoshenko 梁模型较好地模拟和反映蜂窝结构中胞壁的变形和承载的力学特征,并由此计算出结构宏观等效的弹性参数,如 Gibson 公式和 W-K 理论结果.但是,当蜂窝结构的相对密度较大时 (> 0.25),此时 t 与 l 在量级上可比,结构中胞棱所占的实体质量比不可忽略 ($> 9\%$),由于胞棱附近区域的应力集中和复杂的应力和应变分布显著地影响蜂窝结构胞体的弹性变形行为,仅用简单的梁模型模拟结构中胞壁的变形行为无法较好地反映和刻画胞棱区域的变形和受力特征对结构宏观力学性质的影响. Gibson 理论公式中采用的胞壁梁模型由于忽略了结构胞棱处的复杂状态,从而导致得出的等效弹性模量 E_e 在结构相对密度较大的情况下明显地低于 Homo FEM 数值结果,相应的等效泊松比 ν_e 略微偏高.同样的原因使得用 Timoshenko 梁单元有限元方法计算得到的 E_e 亦明显地偏离 Homo FEM 数值结果. W-K 理论计算模型中同样采用了胞壁梁模型,但是由于在计算简化的梁模型柔性系数时引入了结构胞棱区域刚性化的假设,因而使得 W-K 结果得到的 E_e 较之 Homo FEM 数值结果明显地偏高,而等效泊松比 ν_e 则相应地偏低.由此可见,蜂窝结构在较大的相对密度情况下,结构胞棱区域复杂的变形和受力特征对结构宏观等效的弹性力学行为有着不可忽视的影响.类似的情况和分析讨论见文献 [1,14].

此外,需要指出的是, Shi 和 Tong 在文献 [5] 中利用均匀化理论直接推导出蜂窝结构平面内的等效弹性参数,但是文中得到的规则蜂窝结构的等效弹性模量 E_e 却正比于结构相对密度 ρ^*/ρ_s 的一次方项,这与我们用数值方法计算得到的结果以及 Gibson 等所作的实验结果有着明显的差异.从文献 [5] 中不难发现,作者在根据变分原理计算蜂窝结构的细观结构——基础胞元中实体胞壁总应变能 Π 时遗漏了起始应变场中的 e^0 项,尽管这一项在细观结构坐标中为常量,但它仍对变分公式的推导起作用.类似的例子(见文献 [15])指出,在微结构尺度上,利用位移和应力场杂化的方法独立插值表达的总应变能形式和相应的变分公式中,必须考虑宏观尺度应变 e^0 的影响,才能构造出合理的均匀化的方程,即 Euler 方程.因此可以认为由于公式推导中遗漏项的存在从而导致文献 [5] 得到的经过均匀化的蜂窝结构宏观等效弹性参数结果不正确.

最后,我们还考察了蜂窝结构基体材料的泊松比 ν_s 的变化对于规则蜂窝结构的等效弹性参数 E_e 和 ν_e 大小的影响.当 ν_s 在 $0\sim 0.5$ 范围内, Homo FEM 和常规 FEM(BE 和 SE) 数值计算结果表明:在计算的结构相对密度全场范围内, ν_s 的变化对于蜂窝结构的 E_e 和 ν_e 大小影响程度很小,最大的相对偏差小于 5% .同时 Gibson 公式 (1) 也表明,尽管 ν_s 对结构的等效弹性模量 E_e/E_s (相对)和等效泊松比 ν_e 有影响,但是影响程度很小,最大的相对偏差小于 6% .因此规则蜂窝结构的宏观等效弹性参数主要由结构的相对密度来确定.

3 结 论

本文利用二维周期性结构的均匀化的有限元格式 (Homo FEM),计算出不同相对密度下规则蜂窝结构的等效弹性模量和泊松比 E_e 和 ν_e .同时,基于蜂窝结构的代表胞元模型,分别采用 Timoshenko 梁单元和平面应力实体单元,运用常规的有限元方法 (FEM) 模拟计算出相应的等效弹性参数结果.数值计算结果表明:在考察的相对密度全场范围内 ($0\sim 0.4$), Homo FEM 得到的蜂窝结构的等效弹性参数 E_e 和 ν_e 与 FEM 使用平面实体单元模拟计算得到的结果一致吻合,并且其值介于 Gibson 公式和 W-K 结果之间.当蜂窝结构的相对密度较大时 (> 0.25) Gibson 公式和 W-K 模型得到的等效弹性模量 E_e 与由 Homo FEM 得到的数值结果存在着明显

的偏差. 这说明当平面蜂窝结构的相对密度较大时, 其等效弹性力学性能受到胞核附近区域应力集中导致的复杂应力和应变状态的影响, 因而须采用均匀化的或使用平面实体单元的有限元方法计算相应的等效弹性参数.

参 考 文 献

- 1 Grenested JL. Effective elastic behavior of some models for 'perfect' cellular solids. *Int J Solids Structures*, 1999, 36: 1471~1501
- 2 Chen JY, Huang Y. Fracture analysis of cellular materials. *J Mech Phys Solids*, 1998, 46: 789~828
- 3 Gibson LJ, Ashby MF. *Cellular Solids: Structure and Properties*. Cambridge Univ Press, 1997
- 4 Warren WE, Kraynik AM. Foam mechanics: the linear elastic response of two-dimensional spatially periodic cellular materials. *Mechanics of Materials*, 1987, 6: 27~37
- 5 Shi G, Tong P. Equivalent transverse shear stiffness of honeycomb cores. *Computational Mechanics*, 1995, 15: 395~407
- 6 Shi G, Tong P. The derivation of equivalent constitutive equations of honeycombs structures by a two scale method. *Int J Solids Structures*, 1995, 32: 1383~1393
- 7 Hashin Z. Analysis of composite materials—a survey. *J Appl Mech*, 1983, 50: 481~501
- 8 Guedes JM, Kikuchi N. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1990, 83: 143~198
- 9 Papka S, Kyriakides S. In-plane compressive response and crushing of honeycomb. *J Mech Phys Solids*, 1994, 42: 1499~1532
- 10 王飞, 李剑荣, 虞吉林. 铝蜂窝结构单向压缩变形、失稳和破坏机制的数值研究. *力学学报*, 2001, 33(6): 741~748 (Wang Fei, Li Jianrong, Yu Jilin. Numerical analysis of deformation, instability and collapse of aluminum honeycombs under axial compression. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 33(6): 741~748 (in Chinese))
- 11 Lions JL. *Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and Their Control*. Beijing: Science Press, and New York: Gordon and Beach, 1981
- 12 Kyriakides S. Propagating instabilities of structures. *Advances in Applied Mechanics*, Boston: Academic Press, 1993, 30: 67~189
- 13 Timoshenko SP, Goodier JN. *Theory of Elasticity*. 3rd edn, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1970
- 14 Simone AE, Gibson LJ. Effects of solids distribution on the stiffness and strength of metallic foams. *Acta Mater*, 1998, 46: 2139~2150
- 15 Ghosh S, Lee K, Moothy S. Two scale analysis of heterogeneous elastic-plastic materials with asymptotic homogenization and Voronoi cell finite element model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 132: 63~116

APPLICATION OF HOMOGENIZATION FEM TO THE EQUIVALENT ELASTIC CONSTANTS OF HONEYCOMB STRUCTURES¹⁾

Wang Fei Zhuang Shoubing Yu Jilin

(Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract In this paper the equivalent in-plane elastic moduli of two-dimensional honeycomb structures are evaluated. Starting from the weak form of virtual displacement equations, the homogenization method is introduced for linear elastic problems. Then a homogenization finite element method (Homo FEM) is developed for the 2-D periodic structures and applied to the calculation of the equivalent elastic constants E_s and ν_s of a regular honeycomb structure with various relative densities. Simultaneously, we use the model of representative unit cell (RUC) to simulate the equivalent mechanical properties of the honeycomb by conventional finite element method (FEM). The numerical results of E_s and ν_s obtained by both Homo FEM and conventional FEM are then compared with some of the existing analytical results. It transpires that the Homo FEM technique works well on the honeycomb structures. Within the range of the relative densities considered (0~0.4), the calculated values of E_s and ν_s by Homo FEM coincide well with those by conventional FEM using plane solid elements, indicating the feasibility and accuracy of the new method. On the other hand, only at low relative density of less than 0.15 did earlier theoretical analyses give the same results of honeycomb's equivalent elastic constants as those obtained by the present methods. When the relative density is higher than 0.25, obvious deviation between the theoretical prediction and the numerical results is found. When the relative density is large, the honeycomb's equivalent mechanical properties are affected significantly by the complicated distribution of stresses and strains in the solid areas neighboring the cell edges due to the stress concentration, which was ignored in the theoretical model.

Key words honeycomb structure, equivalent elastic constants, homogenization, FEM, representative unit cell (RUC).

Received 8 February 2001, revised 29 September 2001.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10072059) and the Chinese Academy of Sciences (major research project No. KJ951-1-201).