

任意轴对称弹性体吸附接触的广义 Maugis 模型¹⁾

郑志军 虞吉林²⁾

(中国科学技术大学中国科学院材料力学行为和 Design 重点实验室, 合肥 230027)

摘要 通过线性叠加 Sneddon 方法和 Lowengrub-Sneddon 方法分别给出的解, 得到了一个弹性半空间轴对称混合边值问题的一般解, 进而研究了两个一般轴对称弹性体的正向无摩擦吸附接触问题. 考虑任意有效的表面形状 (要求中心部分首先进入接触) 和任意的表面吸附作用, 推广得到了广义 Maugis 模型. 该模型是一个半解析的模型, 它可以分解成表面形状和表面吸附作用的分别独立影响的两部分, 以及一个关联变形和吸附作用的式子. 利用 Dugdale 模型近似表面吸附作用, 得到了具有任意有效的表面形状的广义 M-D 模型. 它在强吸附或软材料条件下的极限形式是广义 JKR 模型, 而在弱吸附或硬材料下的另一个极限形式是广义 DMT 模型.

关键词 吸附, 接触, 广义 M-D 模型, 广义 JKR 模型, 广义 DMT 模型

中图分类号: O343.3 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2007)03-0382-07

引 言

弹性球体吸附接触行为作为接触力学的基础, 已经得到了广泛的研究^[1,2], 从不同的近似角度建立了诸多的理论模型^[3~15], 从而展示了连续介质模型在接触力学领域的重要作用, 也为接触力学的研究提供了重要的概念和方法. 如何正确表征变形和相互作用之间的协调关系是接触力学模型成功的关键. 接触模型定量地研究了材料的接触性能, 无论对实验获取力学参数和吸附性能, 还是对指导材料设计都很有帮助.

假设应力在接触区边缘有限, Hertz 首先建立了一个研究两个弹性球体之间无摩擦、无吸附作用的接触模型, 从而开创了接触力学的历史^[1]. 在许多宏观接触问题中, 经典的 Hertz 模型得到了广泛的应用, 然而大量的实验研究表明, 随着接触体尺寸的减小, 接触体表面间的吸附作用不再可以忽略. 基于热动力学方法, Johnson 等^[3]和 Derjaguin 等^[4]分别建立了著名的 JKR 模型和 DMT 模型. 对于 DMT 模型, 它似乎不考虑吸附作用对变形的影响, 因此又发展了直接积分表面吸附作用的方法^[5,6], 称为改进型 DMT 模型 (IDMT 模型). 由于描述吸附作用的断裂力学概念的成功引入, Maugis 和 Barquins^[7]发现 JKR 模型实际上采用了应力在接触区边缘奇异的假

设, 对应于 I 型应力集中因子. DMT 模型和 JKR 模型之间关于拔出力的不同曾引起很大的争议, 这在 Tabor 数^[8]的引入后得到了澄清. 实际上, DMT 模型适用于 Tabor 数较小的情况, 而 JKR 模型适用于 Tabor 数较大的情况. 基于 L-J 势表征材料的表面相互作用, Muller 等人^[9,10]建立了一个完全自洽模型 (full self-consistent model, FSCM), 通过数值计算^[9~13]发现了从 DMT 模型到 JKR 模型的一致转变 (MYD 转变). 同时期, Hughes^[14]基于 Hertz 接触的假设建立了一个受约自洽模型 (restricted self-consistent model, RSCM), 该模型同样需要大量的数值计算. 基于 Dugdale 近似表面吸附作用并运用断裂力学概念, Maugis^[15]建立了一个半解析的理论模型 (M-D 模型), 该模型也得到了从 DMT 模型到 JKR 模型的一致转变. 基于 M-D 模型, Johnson 和 Greenwood^[16]建立了以 Tabor 数和无量纲载荷表示的双参数吸附图, 指出了各近似模型的有效适用范围.

在微纳米尺度下, 表面效应包括吸附、摩擦、磨损以及表面形貌, 极大地影响材料的接触行为^[17]. 对于无摩擦正向接触问题, 这里主要讨论表面形状和吸附作用对接触行为的影响. 事实上, 上述所有的模型是基于抛物型表面来近似球体而建立的, 对于理想球体直接采用上述近似模型是不合适的, Gao

2006-08-14 收到第 1 稿, 2007-01-16 收到修改稿.

1) 中国科学技术大学研究生创新基金 (KD2004036) 资助项目.

2) E-mail: jlyu@ustc.edu.cn

等人^[18]对理想球体的接触模型进行了修正. 对于一般幂次型的表面形状, 上述模型在很大程度上也得到了推广^[19~23]. 表面吸附作用是表面效应对接触性能影响的又一个重要因素, 它可能源自不同的物理机理, 种类繁多, 如毛细力、氢键、静电荷力、van der Waals 力、“化学”力等^[17]. Barthel^[24]将 Maugis 模型拓展到具有任意形式的表面吸附作用的情况, 讨论了几种较为普遍的形式, 如阶跃近似、线性近似、二次型近似、指数形式和 van der Waals 形式, 并指出表面吸附作用的具体形式对 DMT 模型到 JKR 模型的转变并不敏感.

本文将 Maugis 模型推广到具有任意有效表面形状和任意表面相互作用的情况, 分析了表面形状和表面相互作用分别对模型的影响, 以及它们之间的耦合关系. 利用 Dugdale 模型来近似表面吸附作用, 从而推广了 M-D 模型, 并考察了其极限形式.

1 理论模型

1.1 弹性半空间轴对称问题的一般解

我们首先考虑这样一个弹性半空间 i 的轴对称问题, 它满足在边界上切向应力 $\tau_{rz}^{(i)}$ 处处为零, 在半径为 a 的圆域内给定正向位移 $u_z^{(i)}$, 而在圆域外给定正向应力 $\sigma_z^{(i)}$, 记作

$$\left. \begin{aligned} u_z^{(i)}(r, 0) &= w_i(r), \quad 0 \leq r \leq a \\ \sigma_z^{(i)}(r, 0) &= \sigma_i(r), \quad r \geq a \\ \tau_{rz}^{(i)}(r, 0) &= 0, \quad r \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

该问题可以利用 Hankel 变换的方法直接进行求解, 实际上 Sneddon^[25]已经给出了 $\sigma_i(r) = 0$ 情况下的解, 而 Lowengrub 和 Sneddon^[26]给出了 $w_i(r) = 0$ 情况下的解, 因此我们只需将这两组解进行线性叠加即可得到我们所关心的问题的解.

当 $\sigma_i(r) = 0$ 时, Sneddon 方法^[25]给出的解为

$$P_i \equiv - \int_0^\infty \sigma_z^{(i)}(s, 0) 2\pi s ds = 2\pi \int_0^a \phi_i(s) ds \quad (2)$$

$$u_z^{(i)}(r, 0) = \frac{2}{E_i^*} \int_0^a \frac{\phi_i(s)}{\sqrt{r^2 - s^2}} ds, \quad r \geq a \quad (3)$$

$$\sigma_z^{(i)}(r, 0) = \frac{-\phi_i(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \int_r^a \frac{\phi_i'(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}}, \quad r \leq a \quad (4)$$

式中, P_i 为边界上正向应力的合力; $E_i^* = E_i/(1 - \nu_i^2)$, E_i 为杨氏模量; ν_i 为泊松比; $\phi_i(s)$ 定义为

$$\phi_i(s) = \frac{E_i^*}{\pi} \left[w_i(0) + s \int_0^s \frac{w_i'(t)}{\sqrt{s^2 - t^2}} dt \right] \quad (5)$$

当 $w_i(r) = 0$ 时, Lowengrub-Sneddon 方法^[26]给出的解为

$$P_i \equiv - \int_0^\infty \sigma_z^{(i)}(s, 0) 2\pi s ds = 2\pi \int_a^\infty \varphi_i(s) ds \quad (6)$$

$$u_z^{(i)}(r, 0) = \frac{2}{E_i^*} \int_a^r \frac{\varphi_i(s)}{\sqrt{r^2 - s^2}} ds, \quad r \geq a \quad (7)$$

$$\sigma_z^{(i)}(r, 0) = \frac{\varphi_i(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \int_a^\infty \frac{\varphi_i'(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}}, \quad r \leq a \quad (8)$$

式中, $\varphi_i(s)$ 定义为

$$\varphi_i(s) = - \frac{2}{\pi} \int_s^\infty \frac{t \sigma_i(t)}{\sqrt{t^2 - s^2}} dt \quad (9)$$

那么满足应力和位移混合边值条件式 (1) 的解为

$$\begin{aligned} P_i &= 2E_i^* \left[a w_i(0) + \int_0^a w_i'(t) \sqrt{a^2 - t^2} dt \right] - \\ &4 \int_a^\infty t \sigma_i(t) \arccos(a/t) dt \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u_z^{(i)}(r, 0) &= \frac{2}{\pi} w_i(0) \arcsin(a/r) + \\ &\frac{2}{\pi} \int_0^a w_i'(t) \arctan \sqrt{\frac{a^2 - t^2}{r^2 - a^2}} dt - \\ &\frac{4}{\pi E_i^*} \int_a^r \int_s^\infty \frac{t \sigma_i(t) dt ds}{\sqrt{(r^2 - s^2)(t^2 - s^2)}}, \quad r \geq a \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(i)}(r, 0) &= - \frac{E_i^* w_i(0)}{\pi \sqrt{a^2 - r^2}} - \\ &\frac{E_i^* a}{\pi \sqrt{a^2 - r^2}} \int_0^a \frac{w_i'(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt + \\ &\frac{E_i^*}{\pi} \int_r^a \int_0^s \frac{(t w_i'(t))' dt ds}{\sqrt{(s^2 - r^2)(s^2 - t^2)}} - \\ &\frac{2}{\pi} \int_a^\infty \frac{t \sigma_i(t)}{t^2 - r^2} \sqrt{\frac{t^2 - a^2}{a^2 - r^2}} dt, \quad r \leq a \end{aligned} \quad (12)$$

1.2 广义 Maugis 模型

现在我们来考虑两个轴对称弹性体正向无摩擦接触问题. 如图 1 所示, 虚线为弹性体未变形时的表面形状, 在柱坐标系下半径为 r 处轴向高度分别为 $z_1(r)$ 和 $z_2(r)$, 并取 $z_1(0) = z_2(0) = 0$. 粗实线为弹性体变形后的表面形状, 两表面在半径为 a 的圆域内完全接触, 即表面间隔 $H(r) \equiv [u_z(r, 0)]$ 为

$$H(r) = \begin{cases} 0, & r \leq a \\ -\delta + z(r) + u_z(r, 0), & r \geq a \end{cases} \quad (13)$$

式中, $\delta \equiv \delta_1 + \delta_2$ 为两弹性体的相对位移, 表面方程和表面总变形分别为

$$z(r) \equiv z_1(r) + z_2(r) \quad (14)$$

$$u_z(r, 0) \equiv u_z^{(1)}(r, 0) + u_z^{(2)}(r, 0) \quad (15)$$

那么接触区内部 $0 \leq r \leq a$ 总的变形为 $u_z(r, 0) = w(r) \equiv w_1(r) + w_2(r) = \delta - z(r)$.

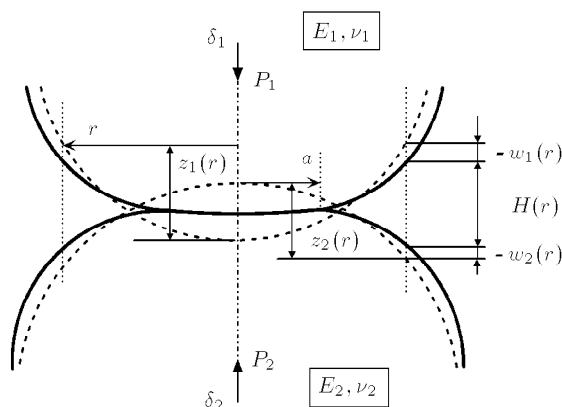


图 1 轴对称弹性体吸附接触变形示意图
(粗实线为变形表面, 虚线为未变形表面)

Fig.1 Schematic representation of the adhesive contact deformation of two axisymmetric elastic objects. Solid curves represent the deformed surfaces and dashed curves represent the undeformed surfaces

我们考虑这样一类任意有效的轴对称表面的接触, 它们的表面方程至少需要满足 $z'(r) \geq 0$ 的条件, 使得它们的中心部分首先进入接触, 在接触过程中接触半径 a 连续地变化, 接触区内部是完全接触的。

将两弹性体分别近似看作半空间, 在相同半径上具有相同的表面相互作用

$$\sigma_z(r, 0) \equiv \sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0) \quad (16)$$

其中, 在接触区外部的相互作用为 $\sigma_1(r) = \sigma_2(r) = -p_a(r)$. 将式 (12) 代入式 (16), 对于任意的半径成立的条件是

$$E_1^* w_1(r) = E_2^* w_2(r) \quad (17)$$

联合式 (11) 知, 两弹性体的表面变形和总变形之间满足如下关系

$$u_z^{(i)}(r, 0) = \frac{1}{E_i^*} E^* u_z(r, 0), \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

式中, 等效弹性模量 E^* 为

$$1/E^* = 1/E_1^* + 1/E_2^* \quad (19)$$

式 (18) 表明我们可以将两个轴对称弹性体简化成一个刚性压头和一个弹性半空间的接触问题, 其中刚性压头的表面方程为式 (14), 而半空间的等效弹性模量为式 (19).

表面正向应力可以写作

$$\sigma_z(r, 0) = -\frac{E^*}{\pi} \int_r^a \int_0^s \frac{(tz'(t))' dt ds}{\sqrt{(s^2 - r^2)(s^2 - t^2)}} - \frac{E^*}{\pi \sqrt{a^2 - r^2}} \left[\delta - a \int_0^a \frac{z'(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt \right] + \frac{2}{\pi} \int_a^\infty \frac{tp_a(t)}{t^2 - r^2} \sqrt{\frac{t^2 - a^2}{a^2 - r^2}} dt, \quad r \leq a \quad (20)$$

Maugis^[15] 假设在半径 a 上应力非奇异, 即满足条件

$$\lim_{r \rightarrow a} \sqrt{2\pi(a - r)} \sigma_z(r, 0) = 0 \quad (21)$$

那么位移必须为

$$\delta = a \int_0^a \frac{z'(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt + \frac{2}{E^*} \int_a^\infty \frac{tp_a(t)}{\sqrt{t^2 - a^2}} dt \quad (22)$$

相应的合力 ($P \equiv P_1 = P_2$), 正向应力和正向位移为

$$P = 2E^* \int_0^a \frac{t^2 z'(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} + 4a \int_a^\infty \frac{tp_a(t) dt}{\sqrt{t^2 - a^2}} + 4 \int_a^\infty tp_a(t) \arccos(a/t) dt \quad (23)$$

$$\sigma_z(r, 0) = -\frac{E^*}{\pi} \int_r^a \int_0^s \frac{(tz'(t))' dt ds}{\sqrt{(s^2 - r^2)(s^2 - t^2)}} + \frac{2}{\pi} \int_a^\infty \frac{tp_a(t)}{(r^2 - t^2)} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{t^2 - a^2}} dt, \quad r \leq a \quad (24)$$

$$u_z(r, 0) = \frac{2}{\pi} \delta \arcsin(a/r) - \frac{2}{\pi} \int_0^a z'(t) \arctan \sqrt{\frac{a^2 - t^2}{r^2 - a^2}} dt + \frac{4}{\pi E^*} \int_a^r \int_s^\infty \frac{tp_a(t) dt ds}{\sqrt{(r^2 - s^2)(t^2 - s^2)}}, \quad r \geq a \quad (25)$$

一方面, 式 (13), (24) 和式 (25) 表明表面间隔决定于表面相互作用的分布情况. 另一方面, 接触体在半径为 r 处通常被近似看作间隔为 $H(r)$ 的两个半空间, 从而假定表面相互作用只依赖于表面的间隔, 即 $p_a(r) = p^*(H(r))$. 因此, 表面间隔和表面相互作用存在自洽关系, 如果采用 Hughes^[14] 的术语, 该模型可以称为受约自洽模型 (RSCM). 该模型需要进行大量的数值迭代求解, 因此采用有效的算法是该

模型成功的关键, 倘若数值计算方法处理不当将可能导致错误的结果. 实际上该模型在推广和应用方面的研究并不是很多, 而完全自洽模型 (FSCM, 习惯上也称作 MYD 模型) 似乎更受青睐, 原因是后者并不加区别接触区和非接触区, 它认为相互作用体之间具有可以不断靠近但又总是有间距的特质, 这使得它可以获取相互作用体从很远的地方开始靠近的完整行为.

由于断裂力学概念的引入, 具有半解析解的模型显示出巨大的理论和应用价值, 因此以下我们着重讨论这样的模型. 在两球体吸附接触问题的研究中, Maugis^[15] 假定表面相互作用可以划分成接触区 ($r < a$), 内聚力作用区 ($a < r < c$) 和无相互作用区 ($a > c$), 其中在内聚力作用区, 选择一个相对合理的相互作用随半径的分布形式 $p_a(r)$, 并满足基于能量平衡条件的 Griffith 关系, 即应变能释放率 G 等于表面能 $\Delta\gamma$

$$G \equiv - \int_{r=a}^{r=c} p_a(r) dH(r) = \Delta\gamma \quad (26)$$

我们将这一思想推广到更加一般的轴对称体, 并称之为广义 Maugis 模型, 对于给定的接触半径 a , 利用关系式 (26) 可以通过数值计算给出半径 c , 进而由式 (22) 和 (23) 可以得到位移和载荷. 与 RSCM 或 FSCM 相比, 该模型是半解析的, 需要的计算量大大减少. 该模型的一个重要意义是可以用来在实验中拟合数据^[24], 并选择简单而且合适的模型预测进一步的实验结果, 甚至指导材料表面几何形状的设计.

2 讨 论

2.1 广义 Maugis 模型的分解

广义 Maugis 模型是以接触半径 a 为参数的, 它要求接触体在接触区域内完全接触, 因此接触体至少需要满足 $z'(r) \geq 0$ 的条件. 考虑到表面形状和表面吸附作用对理论模型的不同贡献, 我们可以将其形式上分解成两个独立的部分

$$\delta \equiv \delta_H + \delta_a \quad (27)$$

$$P \equiv P_H + P_a \quad (28)$$

$$\sigma_z(r, 0) \equiv \sigma_H(\rho) + \sigma_a(\rho) \quad (29)$$

$$u_z(r, 0) \equiv w_H(\rho) + w_a(\rho) \quad (30)$$

式中, $\rho = r/a$. 其中, 第 1 部分不考虑吸附作用对接触性能的影响, 称为广义 Hertz 模型, 它对应于在

Sneddon^[25] 方法的解的基础上施加了 Hertz 关于接触区边缘应力有限的条件, 用下标 H 表示, 记作

$$\delta_H = \int_0^1 \frac{f'(\ell)}{\sqrt{1-\ell^2}} d\ell \quad (31)$$

$$P_H = 2E^*a \int_0^1 \frac{\ell^2 f'(\ell)}{\sqrt{1-\ell^2}} d\ell \quad (32)$$

$$\sigma_H(\rho) = -\frac{E^*}{\pi a} \int_0^1 \int_0^k \frac{(\ell f'(\ell))' d\ell dk}{\sqrt{(k^2 - \ell^2)(k^2 - \rho^2)}}, \quad \rho \leq 1 \quad (33)$$

$$w_H(\rho) = \frac{2}{\pi} \delta_H \arccsc \rho - \frac{2}{\pi} \int_0^1 f'(\ell) \arctan \sqrt{\frac{1-\ell^2}{\rho^2-1}} d\ell, \quad \rho \geq 1 \quad (34)$$

第 2 部分为吸附作用对接触行为的影响, 用下标 a 表示, 记作

$$\delta_a = \frac{2a}{E^*} \int_1^m \frac{\ell p(\ell)}{\sqrt{\ell^2-1}} d\ell \quad (35)$$

$$P_a = 4a^2 \int_1^m \ell p(\ell) \left(\frac{1}{\sqrt{\ell^2-1}} + \operatorname{arcsec} \ell \right) d\ell \quad (36)$$

$$\sigma_a(\rho) = \frac{2}{\pi} \int_1^m \frac{\ell p(\ell)}{\rho^2 - \ell^2} \sqrt{\frac{1-\rho^2}{\ell^2-1}} d\ell, \quad \rho \leq 1 \quad (37)$$

$$w_a(\rho) = \frac{2}{\pi} \delta_a \arccsc \rho + \frac{4a}{\pi E^*} \times \int_1^\rho \int_k^m \frac{\ell p(\ell) d\ell dk}{\sqrt{(\ell^2 - k^2)(\rho^2 - k^2)}}, \quad \rho \geq 1 \quad (38)$$

以及关联表面形状和表面吸附作用影响的关系式 (26), 可以改写作

$$- \int_1^m p(\rho) (f'(\rho) + w'_H(\rho) + w'_a(\rho)) d\rho = \Delta\gamma \quad (39)$$

式中, 表面方程为 $f(\rho) = z(r)$, 吸附作用为 $p(\rho) = p_a(r)$, 参数 $m = c/a$.

2.2 两类特殊的表面形状

对于两个理想椭球体沿对称轴无摩擦接触的问题, 其表面形状方程可以记为

$$z(r) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \left(1 - \sqrt{1 - r^2/\beta_i^2} \right) \quad (40)$$

式中, α_i 和 β_i 为椭球体的半轴, 对于理想球体 $\alpha_i = \beta_i = R_i$. 由式 (31) 和 (32), 我们有

$$\delta_H = \frac{a}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i}{\beta_i} \ln \frac{\beta_i + a}{\beta_i - a} \quad (41)$$

$$P_H = \frac{E^*}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i}{\beta_i} \left[(a^2 + \beta_i^2) \ln \frac{\beta_i + a}{\beta_i - a} - 2a\beta_i \right] \quad (42)$$

这两个式子分别给出了表面形状方程 (40) 对位移和载荷的贡献. 另外, 将式 (40) 代入式 (34) 并求其一阶导数, 我们可以得到式 (39) 中有关的量 $w'_H(\rho)$ 为

$$w'_H(\rho) = \frac{2\delta_H \sqrt{\rho^2 - 1}}{\pi \rho} - \frac{2a^2 \rho}{\pi \sqrt{\rho^2 - 1}} \times \sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i}{\beta_i^2} \frac{\arctan \varphi(\rho)}{\varphi(\rho)}, \quad \rho \geq 1 \quad (43)$$

式中, $\varphi(\rho) = \sqrt{(1 - a^2 \rho^2 / \beta_i^2) / (\rho^2 - 1)}$, 位移 δ_H 由式 (41) 给出.

对于两个具有幂次型表面的轴对称体沿对称轴无摩擦接触的问题, 其表面形状方程为

$$z(r) = \sum_{i=1}^2 C_i r^{n_i} \quad (44)$$

式中, C_i 为系数, n_i 为幂指数. 将该方程代入式 (31) 和 (32), 我们得到由表面形状影响的位移和载荷部分分别为

$$\delta_H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 B\left(\frac{n_i}{2}, \frac{1}{2}\right) n_i C_i a^{n_i} \quad (45)$$

$$P_H = E^* \sum_{i=1}^2 B\left(\frac{n_i}{2} + 1, \frac{1}{2}\right) n_i C_i a^{n_i+1} \quad (46)$$

式中, B 为 Beta 函数. 将式 (44) 代入式 (34) 并求一阶导数得

$$w'_H(\rho) = - \sum_{i=1}^2 \frac{B\left(\frac{n_i}{2} + 1, \frac{1}{2}\right) C_i a^{n_i}}{\pi \rho \sqrt{\rho^2 - 1}} \left[(n_i + 1) - {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{n_i}{2}; \frac{n_i + 3}{2}; \rho^{-2}\right) \right], \quad \rho \geq 1 \quad (47)$$

式中, ${}_2F_1$ 为超几何函数.

2.3 广义 M-D, JKR 和 DMT 模型

在两球体吸附接触问题的研究中, Maugis^[15] 采用 Dugdale 模型来近似表面相互作用, 即接触区外的吸附作用为常量 $-\sigma_0$, 作用范围从半径 a 到半径 c . 由式 (35)~(38) 可以得到

$$\delta_a = -\frac{2\sigma_0 a}{E^*} \sqrt{m^2 - 1} \quad (48)$$

$$P_a = -2\sigma_0 a^2 (m^2 \operatorname{arcsec} m + \sqrt{m^2 - 1}) \quad (49)$$

$$\sigma_a(\rho) = \frac{2\sigma_0}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{m^2 - 1}{1 - \rho^2}}, \quad \rho \leq 1 \quad (50)$$

$$w_a(\rho) = -\frac{4\sigma_0 a}{\pi E^*} [\sqrt{m^2 - 1} \operatorname{arccsc} \rho + mE(\rho/m) - mE(\operatorname{arccsc} \rho, \rho/m)], \quad \rho \geq 1 \quad (51)$$

式中, $E(k)$ 为以 k 为模的第 2 类完整椭圆积分, $E(\phi, k)$ 为第 2 类椭圆积分, 而半径 $c = am$ 由式 (39) 来确定, 进一步整理得

$$1 = \frac{\sigma_0}{\Delta \gamma} \left[f(m) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{f'(\ell)}{\sqrt{1 - \ell^2}} d\ell \operatorname{arcsec} m - \frac{2}{\pi} \int_0^1 f'(\ell) \arctan \sqrt{\frac{1 - \ell^2}{m^2 - 1}} d\ell \right] + \frac{4\sigma_0^2 a}{\pi \Delta \gamma E^*} (\sqrt{m^2 - 1} \operatorname{arcsec} m + 1 - m) \quad (52)$$

因此, 对于任意有效的表面形状, 我们得到了广义 M-D 模型.

当 $m \rightarrow 1$ 时, 说明此时吸附是近程的 (或者接触体很软), 吸附起主导作用, 式 (52) 中的第 1 项相对第 2 项可以忽略, 因此我们有

$$m^2 - 1 \rightarrow \frac{\pi \Delta \gamma E^*}{2\sigma_0^2 a} \quad (53)$$

进而可以得到

$$\delta_a = -\sqrt{2\pi \Delta \gamma a / E^*} \quad (54)$$

$$P_a = -\sqrt{8\pi E^* \Delta \gamma a^3} \quad (55)$$

以及

$$\sigma_a(\rho) = \sqrt{\frac{2E^* \Delta \gamma}{\pi a(1 - \rho^2)}}, \quad \rho \leq 1 \quad (56)$$

那么

$$K_I = \lim_{r \rightarrow a} \sqrt{2\pi(a - r)} \sigma_z(r, 0) = \sqrt{2E^* \Delta \gamma} \quad (57)$$

吸附部分的贡献形式上与 JKR 模型^[3] 是一致的, Yao 和 Gao^[23] 通过对 JKR 模型的直接推广得到了对应于任意有效的表面形状的广义 JKR 模型, 它是广义 M-D 模型的一个极限形式.

当 $m \rightarrow \infty$ 时, 此时吸附是长程的, 接触体相对来说很硬, 模量很大, 通过比较式 (52) 中的各项可知

$$f(m) \rightarrow \Delta \gamma / \sigma_0 \quad (58)$$

由此确定出参数 m , 进而可以得到

$$\delta_a \rightarrow -(2\sigma_0 a / E^*) m \quad (59)$$

$$P_a \rightarrow -\pi \sigma_0 a^2 m^2 \quad (60)$$

对于近球形表面 $f(\rho) = a^2 \rho^2 / 2R$, 其中等效半径 $R = (1/R_1 + 1/R_2)^{-1}$, 由式 (58) 有 $m \rightarrow \sqrt{2R\Delta\gamma/\sigma_0 a^2}$, 再由式 (59) 和式 (60), 有 $\delta_a \rightarrow 0$ 和 $P_a \rightarrow -2\pi R\Delta\gamma$, 该结果对应于 DMT 模型, 这一点已经为 Maugis^[15] 所指出. 对于任意有效的表面形状, 我们称上述结果对应广义 DMT 模型. 也就是说, 广义 M-D 模型的另一个极限形式为广义 DMT 模型. 这在原始的 DMT 模型^[4] 基础上是很难直接推广得到, 而假设吸附作用对变形没有影响 ($w_a(\rho) \approx 0$) 进而直接积分表面吸附作用得到 P_a 的改进型 DMT 模型 (IDMT 模型)^[5,6] 却是较容易推广的, 但它并未考虑吸附作用对变形和相互作用的协调关系的影响, 因而缺乏物理依据, 只是在材料严格为刚性的情况下成立, 那时我们将称之为广义 Bradley(刚性) 模型. 事实上, 由式 (51) 可见, $w_a(\rho)$ 并不总是为零的, 也就是说吸附作用对变形是有些影响, 它反映了吸附作用下变形分布情况的变化. 变形和吸附作用的协调关系的考虑使得该模型的物理意义明确, 因此在这个意义上我们得到的模型有别于原始的 DMT 模型以及 IDMT 模型, 但为了方便我们仍沿用 DMT 这个术语.

3 结 论

本文首先考虑一个弹性半空间轴对称问题, 它在边界上满足位移和应力的混合边值条件, 通过线性叠加 Sneddon 方法^[25] 和 Lowengrub-Sneddon 方法^[26] 对应的解得到了问题的一般形式的解. 利用该解我们研究了两个一般轴对称弹性体的正向无摩擦吸附接触问题, 它可以等效成一个刚性压头和一个弹性半空间的接触问题.

对于任意有效的表面形状以及任意的表面吸附作用, 我们推广得到了广义 Maugis 模型. 该模型可以形式上分解成两部分, 分别对应于表面形状和表面吸附作用的独立贡献, 以及一个关联变形和相互作用的式子, 其中对应于表面形状的部分可以称为广义 Hertz 模型, 它在接触区边缘应力有限. 广义 Maugis 模型是一个半解析的模型, 它不像 RSCM 和 FSCM 那样需要相当复杂的数值迭代求解, 选择一个较为合理的吸附作用的分布形式, 不难得到结果. 因此, 它在实验中作为拟合数据是很有意义的, 进而也可以指导材料表面形状的设计.

以两个理想椭球体的轴向接触和两个幂次型表面形状的轴对称体的轴向接触为例, 探讨了两种特殊类型的表面形状对接触行为的影响. 利用 Dugdale

模型来近似表面吸附作用, 得到了具有任意有效的表面形状的广义 M-D 模型. 与基于近球形接触的 M-D 模型一样, 该模型也可以写出两个极限形式. 在强吸附或软材料条件下, 它的极限形式对应于广义 JKR 模型; 而在弱吸附或硬材料条件下, 它的另一个极限形式对应于广义 DMT 模型.

参 考 文 献

- 1 Johnson KL. Contact Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 1985
- 2 Maugis D. Contact, Adhesion and Rupture of Elastic Solids. Berlin: Springer-Verlag, 2000
- 3 Johnson KL, Kendall K, Roberts AD. Surface energy and the contact of elastic solids. In: Proc R Soc Lond A, 1971, 324: 301~313
- 4 Derjaguin BV, Muller VM, Toporov YP. Effect of contact deformation on the adhesion of particles. *J Colloid Interface Sci*, 1975, 53(2): 314~326
- 5 Muller VM, Derjaguin BV, Toporov YP. On two methods of calculation of the force of sticking of an elastic sphere to a rigid plane. *Coll Surf*, 1983, 7: 251~259
- 6 Pashley MD. Further consideration of the DMT model for elastic contact. *Coll Surf*, 1984, 12: 69~77
- 7 Maugis D, Barquins M. Fracture mechanics and the adherence of viscoelastic bodies. *J Phys D*, 1978, 11: 1989~2023
- 8 Tabor D. Surface forces and surface interactions. *J Colloid Interface Sci*, 1977, 58(1): 1~13
- 9 Muller VM, Yushchenko VS, Derjaguin BV. On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane. *J Colloid Interface Sci*, 1980, 77(1): 91~101
- 10 Muller VM, Yushchenko VS, Derjaguin BV. General theoretical consideration of the influence of surface forces on contact deformations and the reciprocal adhesion of elastic spherical particles. *J Colloid Interface Sci*, 1983, 92(1): 92~101
- 11 Attard P, Parker JL. Deformation and adhesion of elastic bodies in contact. *Physical Review A*, 1992, 46(12): 7959~7971
- 12 Greenwood JA. Adhesion of elastic spheres. In: Proc Roy Soc Lond A, 1997, 453: 1277~1297
- 13 Feng JQ. Contact behavior of spherical elastic particles: a computational study of particle adhesion and deformations. *Coll Surf A*, 2000, 172: 175~198
- 14 Hughes BD, White LR. 'Soft' contact problems in linear elasticity. *Q J Mech Appl Math*, 1979, 32: 445~471
- 15 Maugis D. Adhesion of sphere: the JKR-DMT transition using a Dugdale model. *J Colloid Interface Sci*, 1992, 13: 243~269
- 16 Johnson KL, Greenwood JA. An adhesion map for the contact of elastic spheres. *J Colloid Interface Sci*, 1997, 192: 326~333

- 17 Zhao YP, Wang LS, Yu TX. Mechanics of adhesion in MEMS – a review. *J Adhesion Sci Technol*, 2003, 17(4): 519~546
- 18 Gao H, Wang X, Yao H, et al. Mechanics of hierarchical adhesion structures of Geckos. *Mechanics of Material*, 2005, 37: 275~285
- 19 Carpick RW, Agrait N, Ogletree DF, et al. Measurement of interfacial shear (friction) with an ultrahigh vacuum atomic force microscope. *J Vac Sci Technol B*, 1996, 14(2): 1289~1295 & 1996, 14(4): 2772
- 20 Borodich FM, Galanov BA. Molecular adhesive contact for indenters of non-ideal shapes. In: Gutkowski W, Kowalewski TA, eds. *Mechanics of the 21st Century*. International Congress of Theoretical and Applied Mechanics IC'TAM04, Warsaw, 2004. Berlin: Springer, 2005
- 21 Spolenak R, Gorb S, Gao H, et al. Effects of contact shape on the scaling of biological attachments. In: *Proc R Soc Lond A*, 2005, 461(2054): 305~319
- 22 Goryacheva IG, Makhovskaya YY. Adhesive interaction of elastic bodies. *J Appl Math Mech*, 2001, 65(2): 273~282
- 23 Yao H, Gao H. Optimal shapes for adhesive binding between two elastic bodies. *J Colloid Interface Sci*, 2006, 298(2): 564~572
- 24 Barthel E. On the description of the adhesive contact of spheres with arbitrary interaction potentials. *J Colloid Interface Sci*, 1998, 200: 7~18
- 25 Sneddon IN. The relation between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile. *Int J Engng Sci*, 1965, 3: 47~57
- 26 Lowengrub M, Sneddon IN. The distribution of stress in the vicinity of an external crack in an infinite elastic solid. *Int J Eng Sci*, 1965, 3: 451~460

A GENERALIZED MAUGIS MODEL FOR ADHESIVE CONTACT OF ARBITRARY AXISYMMETRIC ELASTIC OBJECTS¹⁾

Zheng Zhijun Yu Jilin²⁾

(CAS Key Laboratory of Mechanical Behavior and Design of Materials University of Science and Technology of China,
Hefei 230027, China)

Abstract Based on a linear combination of the solutions derived from the Sneddon method and the Lowengrub-Sneddon method, a general solution of the axisymmetric problem is obtained for the elastic half-space with mixed boundary conditions. And then, the frictionless and adhesive contact between two general axisymmetric elastic objects is studied. With an arbitrary effective surface profile, where the initial contact occurs at the central part, and with an arbitrary surface adhesive interaction, a generalized Maugis model is derived, which can be divided into two parts corresponding to the contributions of the surface profile and the surface adhesive interaction, respectively, together with a coupling relation between the deformation and the adhesive interaction. Based on the Dugdale model for the surface adhesive interaction, a generalized M-D model is derived for an arbitrary effective surface profile. Two extremes are found for this model. For a short-range strong interaction or compliant material, its limiting form corresponds to the generalized JKR model. And for a long-range weak interaction or for stiff materials, another limiting form corresponds to a generalized DMT model.

Key words adhesion, contact, generalized M-D model, generalized JKR model, generalized DMT model

Received 14 August 2006, revised 16 January 2007.

1) The project supported by the Graduate Innovation Fund of USTC (KD2004036).

2) E-mail: jlyu@ustc.edu.cn