

# 非线性应力波传播理论的发展及应用\*

王礼立<sup>1\*\*</sup> 任辉启<sup>2</sup> 虞吉林<sup>3</sup> 周风华<sup>1</sup> 吴祥云<sup>2</sup>  
唐志平<sup>3</sup> 胡时胜<sup>3</sup> 杨黎明<sup>1</sup> 董新龙<sup>1</sup>

(<sup>1</sup>宁波大学力学和材料科学研究中心, 机械工程与力学学院, 宁波, 315211)

(<sup>2</sup>总参工程兵科研三所, 洛阳, 471023) (<sup>3</sup>中国科学技术大学中科院材料力学行为和设计重点实验室, 合肥, 230026)

**摘要** 应力波传播理论是分析结构和材料在爆炸/冲击载荷作用下的响应及破坏特性的基础, 在国防和民用工程上有重大价值. 论文对作者们近半个世纪来在非线性应力波传播理论的发展及其工程应用方面所开展的主要研究作一回顾和讨论, 包括: 几类非线性应力波相互作用及失效, 非线性粘弹性波传播理论及应用, 动态破坏和应力波相互作用, 以及应力波理论在防护工程中的应用等.

**关键词** 非线性应力波, 卸载波, 应变率效应, 率相关本构关系, 动态损伤演化, 动态碎裂

## 0 引言

上世纪 60 年代以来, 随着高新技术的快速发展, 国防科技、航天航空、新型材料等领域广泛涉及爆炸与冲击问题, 特别在核武器和常规武器侵彻与爆炸、高速撞击、材料动态响应、结构毁伤及防护等方面, 动态力学问题的现实挑战日益凸显. 这类问题的基础和应用研究涉及国家安全范畴, 而应力波理论是解决各种爆炸与冲击问题的基础和主线, 需要我国科学工作者自主创新、合力攻关.

冲击载荷以极短时间发生高强度的加载和卸载为特征. 与准静载荷下的固体力学问题相比较, 冲击动载荷作用下的固体动力学问题以计及惯性效应和应变率效应为主要特征和难点. 前者导致各种形式的、精确或简化的波传播的研究, 促进了结构冲击动力学发展; 而后者则导致各种类型的应变率相关的(率型)本构关系和失效准则的研究, 促进了材料动力学发展<sup>[1]</sup>.

事实上, 当具有特征尺度  $L_s$  的结构受到具有特征时间  $T_L$  的短历时冲击/爆炸载荷作用时, 由于结构微元的惯性效果将导致应力波传播. 当应力波以特征波速  $C$  传播时, 结构动态响应的特征时间可用  $T_w (=L_s/C)$  表征. 当  $T_L < T_w$  时, 任何结构响应都离不开应力波分析. 由于特征波速  $C$  取决于材料的

物理-力学特性, 因此应力波传播特征内禀地依赖于材料动态特性. 另一方面, 人们由位错动力学等理论和实验研究认识到, 固体材料的动态流变和破坏本质上是一个时间(速率)相关的过程, 设分别由材料的内禀流变特征时间  $T_D$ , 以及材料的内禀破坏特征时间  $T_F$  来表征, 则当  $T_D$  和  $T_F$  与冲击/爆炸载荷特征时间  $T_L$  可比较时, 就应计及固体动态流变和破坏的时间(速率)相关性.

问题的难点还在于: 应力波传播问题总是和材料的动态力学性能相互耦合, 相互影响. 一方面, 在应力波传播的研究中, 材料动态本构方程是组成整个问题基本控制方程组所不可缺少的部分; 换言之, 波传播以材料动态本构关系已知为前提, 并且波传播特性强烈地依赖于材料动态本构关系; 而另一方面, 在进行材料高应变率下动态本构关系的试验研究时, 又必须计及试验装置中和试件中的应力波传播及相互作用; 换言之, 材料动态响应研究中又要依靠所试验材料中应力波传播的知识来分析. 于是, 人们在应力波效应和材料应变率效应的研究中, 遇到了“狗咬尾巴”类型的难题.

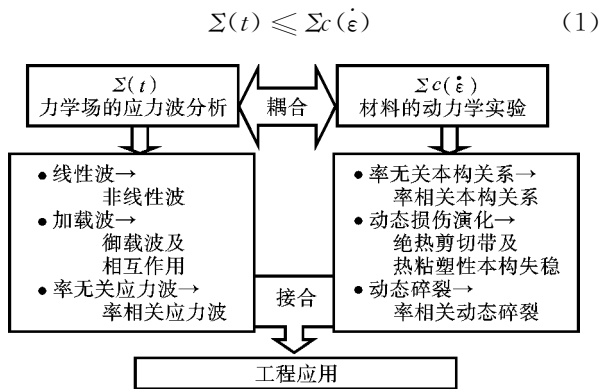
这些明显导致材料/结构冲击动力学响应研究的高度复杂性和必要性, 也启示我们几十年来把应力波和材料动态特性密切结合, 进行跨力学、材料学和工程应用的持久研究.

针对上述难题, 本文的研究思路可以用这张框

\* 国家自然科学基金项目(11032001, 90916026)和宁波大学王宽诚幸福基金资助.  
2013-03-08 收到第 1 稿, 2013-03-12 收到修改稿.

\*\* 通讯作者. Tel: 0574-87600451, E-mail: wanglili@nbu.edu.cn.

图来说明:



如框图所示,一个典型的破坏准则通过不等式  $\Sigma \leq \Sigma_c$ , 将力学特征量  $\Sigma$  和材料临界参数  $\Sigma_c$  相联系. 在强动载荷作用下,  $\Sigma$  是随时间  $t$  动态变化的,  $\Sigma(t)$ , 要依靠力学场的波分析得到; 而  $\Sigma_c$  是随应变率  $\dot{\epsilon}$  变化的,  $\Sigma_c(\dot{\epsilon})$ , 要依靠材料的动力学实验确定; 并且力学场的波分析是以掌握材料动态本构关系为前提的, 而材料的动力学实验又有赖于应力波分析, 都比准静载荷下的情况复杂得多.

在应力波分析方面, 相比于前人更多关注线性波、加载波、以及应变率无关应力波, 我们更多关注非线性波、卸载波及卸载效应、以及应变率相关的应力波理论.

在材料的动态力学特性研究方面, 我们强化了应变率相关本构关系的研究以及材料动态响应研究中的应力波效应, 致力于材料的动态损伤演化与动态破坏相结合的研究, 以计及应变率效应的绝热剪切和碎裂为重点.

特别是, 把率相关本构关系与率相关应力波的研究结合, 发展了非线性粘弹性波理论.

最后, 以应力波与材料动态特性研究相结合, 针对国防工程建设, 开展工程应用研究, 致力于解决若干重大工程建设和设计问题.

下面, 就我们在这方面的研究进展作一个综述介绍.

### 1 几类非线性应力波相互作用及卸载失效

固体冲击响应以时间上短历时和高速率以及空间上应力应变分布高度局域化为特征, 必然涉及大变形的几何非线性, 不可逆弹塑性加载-卸载和高应变率相关的本构非线性, 以及动态损伤演化和动态破坏的非线性行为等. 这些复杂行为造成复杂的非

线性应力波相互作用.

区别于前人主要关注加载波的相互作用及加载失效, 我们更多关注冲击载荷下特有的卸载波相互作用及相应的卸载失效的研究.

#### 1.1 确定了加载-卸载边界在各种条件下的传播规律, 为卸载失效分析提供了理论基础

在静载下, 结构的破坏通常发生在加载过程中. 然而, 冲击载荷(脉冲载荷)本身包括快速的加载和卸载, 因此以应力波传播为特征的力学过程既包含加载波、又包含卸载波的传播, 涉及加-卸载波的相互作用, 并且可能发生卸载失效. 材料和结构在冲击压缩载荷作用下, 往往能经受相当高的压力加载而不破坏, 却常常在卸载波相互作用下形成拉应力而导致拉伸卸载失效(大多数材料的拉伸强度显著低于压缩强度). 人们熟知的冲击载荷下结构背面(自由表面)的层裂(Spalling)就是一个典型实例<sup>[1]</sup>.

由于材料在冲击大变形下的加载过程和卸载过程遵循不同的本构关系, 因此加载波和卸载波的传播分别遵循不同的控制方程组. 相对地, 在描述波传播的时间-空间坐标中, 必须区分由不同的控制方程组控制的加载区和卸载区. 随着应力波的传播和相互作用, 区分加载区和卸载区的边界也在时间-空间坐标中推进传播着. 问题在于加载-卸载边界的传播轨迹是事先未知的(属于不定边界问题). 因此, 如何确定事先未知的加载-卸载边界的传播轨迹就成为解题的关键所在. 这一领域的研究工作首先在四十年代由 Karman T von 等<sup>[2]</sup>, Рахматулин Х А<sup>[3]</sup> 和 Lee E H 等<sup>[4]</sup> 开拓, 但一直缺乏系统深入的研究结果.

事实上, 由于弹塑性材料的加载、卸载本构方程的不同, 即使在一维波的情况下, 如何在  $X-t$  空间时间坐标中确定加-卸载边界的传播轨迹  $X = f(t)$  及其传播速度  $C = \frac{dX}{dt} = f'(t)$  也很复杂, 包括卸载区有可能进入二次加载区域、以及二次加载区有可能进入再次卸载区域等(参见图 1).

当加载-卸载边界在传播中通过一个物质质点时, 这个质点或者从弹性状态加载进入塑性状态, 或者从塑性状态卸载回复到弹性状态. 这时, 材料应力应变曲线  $\sigma-\epsilon$  的斜率  $\frac{d\sigma}{d\epsilon}$  发生了间断, 从而应力波波速  $C \left( = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\epsilon}} \right)$  发生了间断. 我们首次指出, 正是

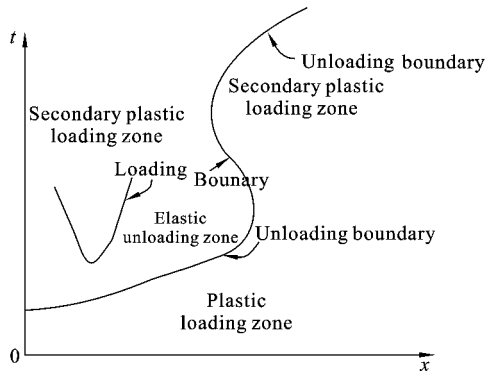


图 1 两类弹塑性边界:加载边界和卸载边界

Fig. 1 Two categories of elastic-plastic boundaries: loading boundary and unloading boundary

由于材料本构关系所包含的这种斜率上的奇异性,使得状态参量应力  $\sigma$  和质点速度  $v$ , 或其导数, 在加载-卸载边界两侧出现了间断, 形成一种新型奇异面. 这种奇异面是和代表力学扰动传播的波阵面完全不同的特殊奇异面. 波阵面作为力学扰动在介质中传播时扰动区与未扰动区的界面, 单纯地是在介质中力学扰动状态出现间断的奇异面, 而加-卸载边界作为奇异面在介质中传播时则是带着材料本构关

系斜率的奇异性以及状态参量的奇异性一起传播; 并且本构关系斜率的奇异性在传播过程中保持不变, 而状态参量的奇异性还可能在传播过程中发生变化(如强间断转化为弱间断, 或反之). 为此我们把加载-卸载边界上波速出现间断这一奇异性称为基本奇异性, 把它作为研究加载-卸载边界传播问题的基本出发点.

这样, 我们从应力波的基本特性和材料在加-卸载转变时其应力应变关系斜率发生间断的奇异性出发, 证明了除非与特征线重合, 高于二阶的弱间断弹塑性边界不可能存在, 并给出了各种不同情况下加载和卸载边界分别满足的条件. 该领域研究结果汇总如表 1. 表中除三处分别为 von Karman (1942)<sup>[2]</sup>, Clifton 和 Ting (1968)<sup>[5]</sup>, 以及 Ting (1971)<sup>[6]</sup> 的结果外, 其余均由我们提出<sup>[7-10]</sup>. 表中最后一行还对由于屈服状态下应力波波速的多值性引起的双变量动态屈服准则的补充条件等作了系统的分析<sup>[1,11]</sup>. 这一研究不仅为后期研究材料在复杂应力波作用下的卸载失效问题打下了良好基础, 也是检验数值模拟方案有效性及精确性的一个良好的评效问题(benchmark problem).

表 1 确定加载-卸载边界传播速度的基本关系

Table 1 Basic relationships for determining propagation speeds of loading-unloading boundaries

The point Successive boundary	1 <sup>st</sup> order weak-discontinuous point	2 <sup>nd</sup> order weak-discontinuous point	n <sup>th</sup> order weak-discontinuous point
1 <sup>st</sup> order weak-discontinuous boundary	$[K_1 + \gamma J_1] = 0$ $[\frac{1}{C}(J_1 + \gamma K_1)] = 0$ $[(1 - \gamma^2)K_1] = 0$ Karman et al. (1942)	$[(1 + \gamma^2)K_2 + 2\gamma J_2] = 0$ $[\frac{1}{C}\{(1 + \gamma^2)J_2 + 2\gamma K_2\}] = 0$ $[(1 - \gamma^2)(K_2 + \gamma J_2)] = 0$ Ting (1971)	$[\phi_n K_n + \psi_n J_n] = 0$ $[\frac{1}{C}(\phi_n J_n + \psi_n K_n)] = 0$ $[(1 - \gamma^2)(\phi_{n-1} K_n + \psi_{n-1} J_n)] = 0$
2 <sup>nd</sup> order weak-discontinuous boundary		$K_2 + \gamma J_2 = 0$ $[\frac{1}{C}(J_2 + \gamma K_2)] = 0$ $[(1 - \gamma^2)K_2] = 0$ Clifton and Ting (1968)	$\phi_{n-1} K_n + \psi_{n-1} J_n = 0$ $[\frac{1}{C}(\phi_{n-1} J_n + \psi_{n-1} K_n)] = 0$ $[(1 - \gamma^2)(\phi_{n-2} K_n + \psi_{n-2} J_n)] = 0$
Supplementary conditions on loading boundary	$\frac{d\sigma_m}{dX} = \frac{1}{C}(K_1 + \gamma J_1)$	$\frac{d^2\sigma_m}{dX^2} = \frac{1}{C^2}\{(1 + \gamma^2)K_2 + 2\gamma J_2\}$	$\frac{d^n\sigma_m}{dX^n} = \frac{1}{C^n}(\phi_n K_n + \psi_n J_n)$

表中:  $K_1 \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho_0 C_e \frac{\partial v}{\partial X}$ ,  $J_1 \equiv \rho_0 C \frac{\partial v}{\partial t} = C \frac{\partial \sigma}{\partial X}$ ,  $(e, p)$ ,  $\gamma = \frac{\bar{C}}{C}$ ,  $(e, p)$ ,  $(e, p)$  表示公式对边界两侧的弹性区和塑性区均成立,  $\rho_0$  为物质密度,  $\sigma$  为应力

(以拉为正),  $v$  为质点速度(以  $X$  正向为正);  $K_2 \equiv \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \rho_0 C^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial X} = C^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial X^2}$ ,  $J_2 \equiv \rho_0 C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = C \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t \partial X} = \rho_0 C^2 \frac{\partial^2 v}{\partial X^2}$ ; 而  $K_n, J_n, \phi_n$  和  $\psi_n$  定义如下:

$$\left(C^i \frac{\partial^n \sigma}{\partial X^i \partial t^{n-i}}\right)_M = \begin{cases} \left(\frac{\partial^n \sigma}{\partial t^n}\right)_M \equiv K_n, & (i\text{-even number}) \\ \rho_0 \left(C \frac{\partial^n v}{\partial t^n}\right)_M \equiv J_n, & (i\text{-odd number}) \end{cases}$$

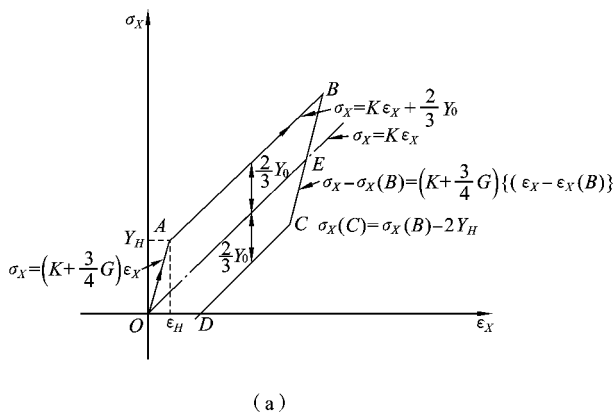
$$\left(C^i \frac{\partial^n v}{\partial X^i \partial t^{n-i}}\right)_M = \begin{cases} \left(\frac{\partial^n v}{\partial t^n}\right)_M \equiv \frac{J_n}{\rho_0 C}, & (i\text{-even number}) \\ \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{C} \frac{\partial^n \sigma}{\partial t^n}\right)_M \equiv \frac{K_n}{\rho_0 C}, & (i\text{-odd number}) \end{cases}$$

(i=0, 1, 2, ..., n)

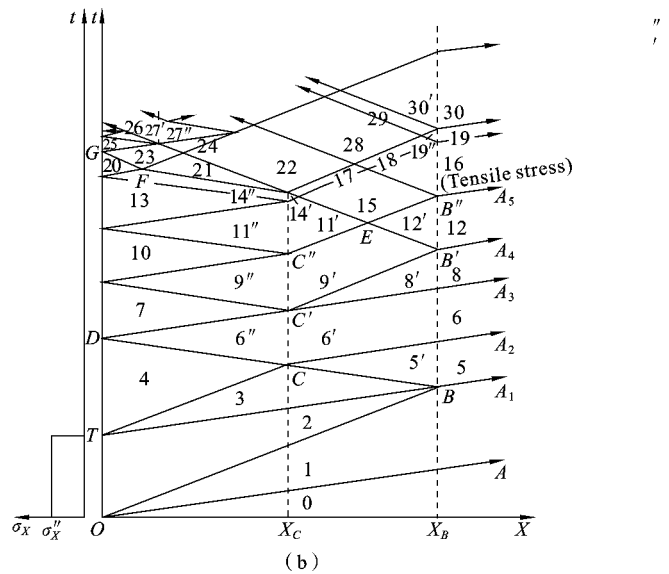
$$\phi_n = C_n^0 + C_n^2 \gamma^2 + C_n^4 \gamma^4 + \dots = \frac{1}{2} \{ (1 + \gamma)^n + (1 - \gamma)^n \}$$

$$\psi_n = C_n^1 \gamma + C_n^3 \gamma^3 + C_n^5 \gamma^5 + \dots = \frac{1}{2} \{ (1 + \gamma)^n - (1 - \gamma)^n \}$$

对于上述我们在 80 年代早期以中文发表的系  
统研究成果,由于历史原因当时并未在国际期刊发  
表. 尽管如此,国际知名学者,非线性应力波理论权  
威,《应用力学评论》副主编 Ting T C T 曾在专辑  
《固体的塑性和失效行为》上撰写专文详细加以介  
绍<sup>[12]</sup>,并指出:“This is a remarkable result(这是一  
个出众的结果)”,“A highlight of the results is the  
one discovered by Yu, Wang and Zhu(本文结果的  
要点就是虞、王和朱所发现的)”.



(a)



(b)

图 2 (a) 一维应变弹性-理想塑性轴向  $\sigma_x-\epsilon_x$  曲线; (b) 塑性卸载对一维应变波传播的影响, 导致“正面层裂”

Fig. 2 (a) Axial elastic perfectly-plastic  $\sigma_x-\epsilon_x$  curve in 1-D strain condition; (b) The influence of plastic unloading on the propagation of 1-D strain wave, resulting in the “front spalling”

1.3 揭示不同粒子高速冲蚀损伤的共同机理, 指出  
冲蚀表面环状裂纹的产生是 Rayleigh 表面卸  
载波造成的拉伸卸载失效  
冲蚀(erosion)机理是飞行器雨蚀、冰蚀和沙蚀

1.2 塑性卸载(反向屈服)效应可导致临近加载面  
的正面产生“正面层裂”

人们熟知的冲击载荷下的层裂(Spalling)通常  
是由于入射压缩波在自由表面反射成卸载波、再与  
入射卸载波相互作用、形成拉应力所产生的卸载失  
效. 因此它通常发生在临近结构背面(自由表面)附  
近. 我们发现,在塑性卸载波的作用下,可在临近加  
载面的正面产生“正面层裂”<sup>[1,13,14]</sup>. 分析表明,如图  
2 所示,在一维应变弹塑性波传播过程中,仅仅由于  
塑性卸载效应(对应于图 2(a)中的 CD 线段所表示  
的反向屈服),也会在承受冲击压缩脉冲载荷的表面  
附近形成拉应力区,并且相应的质点速度与冲击加  
载时的符号相反. 这种具有相反质点速度的拉应力  
区的出现,在一定条件下,尤其是对于抗拉强度低的  
介质或已具有裂纹的脆性材料等,可促进或导致冲  
击表面附近动态断裂的发展,即发生结构的另一种  
动态卸载破坏:“正面层裂”. 这对于材料和结构在爆  
炸冲击载荷下的动态破坏的研究,从而对于抗冲击  
防护装置的设计具有理论指导意义.

破坏,以及工业中大量二相流粒子冲蚀问题研究  
的基础,其实质可归结为弹-靶非平面撞击的冲击动  
力学问题.  
当平面靶受到球形弹的非平面撞击时,弹和靶

中都会形成两个区域<sup>[15]</sup>，一个是接触边界的传播速度快于应力波的传播速度之“接触区”，在此区由于接触边界的超光速传播，应力波的效应被掩盖和抑制；另一个是应力波快于接触区边界扩展速度之“非接触区”，在此区应力波起主导作用。前人对此现象的理论分析只考虑了可变形弹体与刚性靶的撞击。我们将之发展到研究弹和靶都是可变形体的更普遍和实际的情况<sup>[16]</sup>。

我们在加载-卸载波传播分析的基础上，从理论上阐明：在弹-靶的非接触区，沿着靶体自由表面擦射的诸波中，唯有 Rayleigh 表面波会在弹-靶尚未接触的表面产生波纹状表面变形，并由于形成卸载拉应力而导致一圈圈的环状表面裂纹，首次从理论上合理地解释了图 3 所示的环状纹现象。在实验上则解决了冰弹在高速飞行中自身不碎的技术，首次实现了冰弹对靶板的高速冲蚀的完整实验(图 3)。针对冰雹、雨滴、和尼龙弹等对高速飞行器的冲蚀现象存在如图 3 所示的相似现象，通过计及可变形靶体的波阻抗特性，引入弹的有效冲击速度：

$$V = \frac{V_0}{2} \left[ 1 + \frac{(\rho C)_{tar}}{(\rho C)_{pro} + (\rho C)_{tar}} \right] = \alpha V_0 \quad (1)$$

从而基于波传播理论的波阻抗作用，发现可用如下

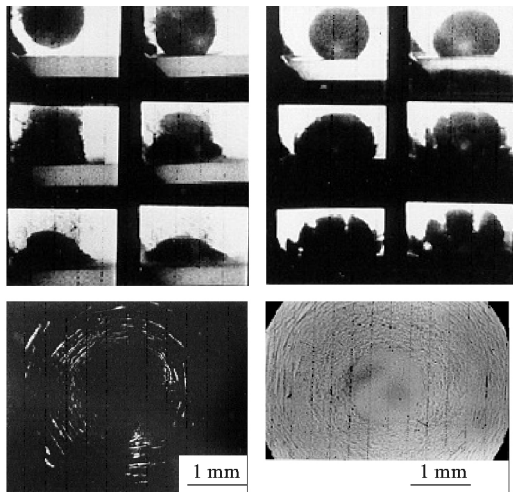


图 3 直径  $D=14.3$  mm 的冰弹以  $143$  m/s 速度撞击 PM-MA 靶板：(上) 高速摄影记录 ( $20 \mu\text{s}$ /帧)，左：冰弹，右：尼龙弹；(下) 靶板“非接触区”表面的环状表面裂纹，左：冰弹，右：尼龙弹撞击 PMMA 靶板的对比。

Fig. 3 Left: high-speed sequences (upper) and surface damage (below) for an ice ball impacted onto a PMMA plate (interframe time  $20 \mu\text{s}$ ). Right: high-speed sequences (upper) and surface damage (below) for a nylon ball impacted onto a PMMA plate (interframe time  $20 \mu\text{s}$ )

的无量纲公式来统一表述表面裂纹区域的临界半径  $r_{cr}$  (或临界直径  $d$ )：

$$\frac{r_{cr}}{R} = \frac{d}{D} = \frac{V}{C_R} \left[ 1 + \left( \frac{V}{C_R} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (2a)$$

$$\frac{r_{cr}}{R} = \frac{d}{D} = \frac{V}{C_R} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{V}{C_R} \right)^2 \right] \quad \text{for } \frac{V}{C_R} \leq 0.6 \quad (2b)$$

此处  $R(=D/2)$  为弹的半径， $C_R$  为材料的 Rayleigh 波速， $V_0$  为弹的碰撞速度， $\rho C$  为波阻抗(下标“pro”和“tar”分别表示弹和靶)。对于弹对靶的斜碰撞，以  $V \cos \theta$  代替式中的  $V$ ，上式仍然成立，此处  $\theta$  是对靶板法线而言的撞击角。

图 4 给出式(2a)理论预示(实线)和式(2b)理论预示(虚线)与一系列实验结果(包括我们的冰弹和尼龙弹冲蚀试验以及前人的水滴冲蚀试验)的无量纲理论预示和众多试验结果的良好相符为我们的理论提供了一个充分的证明。

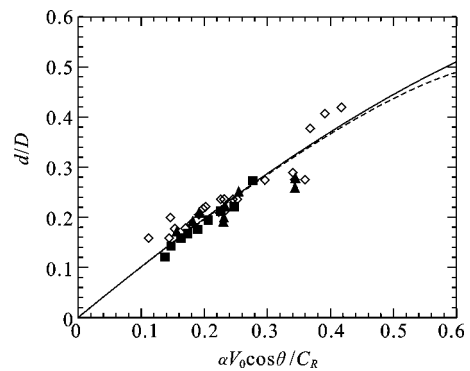


图 4 无量纲式(2a)的理论预示(实线)，无量纲式(2b)的理论预示(虚线)和众多试验结果(包括冰弹(◇)，水滴(■)，和尼龙弹(▲))。

Fig. 4 Comparisons between the theoretical predictions (solid line by Eq. (2a) and dashed line by Eq. (2b)) and the experimental data for the undamaged diameters on PM-MA plates impacted by ice balls (◇), water drops (■) and nylon balls (▲), as a function of effective impact velocity of projectile.

剑桥大学 Cavendish 实验室的 Walley 和 Field 在总结固体粒子冲蚀机理的研究时指出<sup>[17]</sup>，除了雨滴和沙外，冰雹是飞行器冲蚀问题的一种主要危害；并且引用我们上述的研究成果指出，可以通过材料的波阻抗，把尼龙、冰和液体产生的冲击损伤联系起来。

#### 1.4 针对梁的横向冲击破坏，建立了基于波传播理论的“移行剪切铰”理论，并提出了三种卸载失效模式，包括一种新的绝热剪切模式

关于横向冲击载荷下梁的破坏和失效，一般公

认有三种模式<sup>[18]</sup>,即韧性大变形 (Mode I), 拉伸撕裂 (Mode II) 和横向剪切 (Mode III). 前人的大量研究主要集中在前两种失效模式.

对于冲击载荷下梁的横向剪切失效问题, 过去都把六十年代的 Nonaka 解<sup>[19]</sup> 奉为经典. 但我们发现 Nonaka 的“驻定剪切铰”经典理论实际上没有同时满足跨过剪切铰 (奇异面) 所应满足的动力学和运动学相容条件. 我们建立了更完善的、基于波传播理论的“移行剪切铰”失效理论<sup>[20]</sup>, 既能同时满足跨过剪切铰 (奇异面) 的动力学和运动学相容条件, 而且除了常规剪切大挠度失效模式和剪切应变失效模式外, 还提出了一种新的梁的绝热剪切失效模式. 也就是说, 梁在冲击载荷作用下的剪切失效至少有以下三种可能的横向剪切失效模式: (1) 横向大挠度失效模式: 当横向位移  $w_f$  超过设计规定的临界横向位移  $w_c$  时, 即  $w_f \geq w_c$ , 发生这种模式的失效; (2) 横向剪切大变形失效: 当最大横向剪切应变  $\gamma_s$  超过设计规定的临界剪切应变 (或材料的剪切断裂应变)  $\gamma_c$  时, 即  $\gamma_s \geq \gamma_c$ , 发生这种模式的失效; 并指出材料的剪切断裂应变一般是应变率相关的; (3) 绝热剪切失效模式: 在足够高的应变率下, 材料内部的变形会集中发生在高度局域化的所谓“绝热剪切带”内, 并当满足我们创立的率相关绝热剪切临界准则 ( $\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_c$  双变量本构失稳准则) 时, 最终导致绝热剪切失效. 具体哪一种模式起主导作用, 取决于上述三种模式中哪一个首先满足; 而不论哪一种失效模式, 都是在剪应力随时间 (随“移行剪切铰”传播) 减小的卸载条件下发生的, 都属于卸载失效. 还进一步证明, 被奉为经典的 Nonaka 解仅是我们“移行剪切铰”理论在无量纲最终塑性区长度  $\bar{L}_s$  趋近于 0 ( $\bar{L}_s \cong 0$ ) 条件下的近似解.

Nonaka 本人肯定了我们的工作, 在他 2000 年分析 1993 年纽约世贸中心遭遇恐怖袭击后一个钢支架破坏时, 强调剪切失效扮演重要作用, 并直接引用我们这篇论文<sup>[21]</sup>. 此后, 其他研究者们把我们提出的绝热剪切失效模式推广称为梁的第四种失效模式 (Mode IV)<sup>[22, 23]</sup>.

## 2 非线性粘弹性波传播理论及应用

众所周知, 研究应力波传播时, 不论什么物体, 其基本控制方程组都是由动量、质量和能量守恒方程, 加上物体的本构方程所组成. 守恒方程反映了问题的共性方面, 本构方程则反映了问题的特性方面.

因此, 应力波的传播特性强烈地依赖于材料的动态本构特性.

经典的应力波理论是建立在理想化的率无关本构关系的基础上的, 属于“率无关应力波理论”. 然而, 实际固体在快速变形时都有不同程度的率相关性. 为此需同时开展“率相关本构关系”和“率相关应力波”的研究. 尤其在强动载荷下, 涉及大变形的几何非线性和高应变率相关的本构非线性, 使问题变得更为复杂.

对于金属类材料, 人们已发展了率相关的粘塑性本构方程和相应的粘塑性应力波理论<sup>[1, 24]</sup>. 例如, 被计算机商用软件广泛采用的 Johnson-Cook 方程把应变率效应表述为: 作用应力  $\sigma$  与应变率的对数  $\ln \dot{\epsilon}$  之间存在线性关系. 其物理基础是晶体位错运动的热激活机制, 并假定热激活势垒与作用应力之间存在线性函数关系<sup>[1, 25]</sup>. 其实, 大量实验结果表明, 在更大应变率范围内这一线性关系不再成立. 我们建议了一个基于热激活势垒与作用应力之间存在双曲型非线性函数关系的热粘塑性本构方程<sup>[26]</sup>.

随着高聚物成为三大工程材料之一, 高聚物被作为典型的粘弹性材料加以研究, 得到众多学者的重视<sup>[1, 27]</sup>. 但过去大量研究主要集中在准静载荷下的线性粘弹性行为. 对于冲击载荷下的非线性粘弹性本构关系和相应的波传播问题, 不论是正问题还是反问题, 在理论和实验上都尚待深入探讨. 这一研究不仅对于高聚物及其复合材料具有重要意义, 而且对于岩土和混凝土等也具有重要意义, 因为在奥应变率下这类材料即使在小应变下实际上也常常表现出非线性粘弹性特性.

### 2.1 创立 ZWT 弱非线性粘弹性本构模型和建立相应的非线性粘弹性波理论框架

按非线性粘弹性本构理论框架, 在一维应力情况下, 我们可以从如下的 Green-Revlin 多重积分方程<sup>[28]</sup> 出发, 来研究粘弹性材料的非线性粘弹性本构参数, 以及相应的非线性粘弹性波传播特征:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \phi_1(t - \tau_1) \dot{\epsilon}(\tau_1) d\tau_1 + \iint_{-\infty}^t \phi_2(t - \tau_1, t - \tau_2) \dot{\epsilon}(\tau_1) \dot{\epsilon}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \iiint_{-\infty}^t \phi_3(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \dot{\epsilon}(\tau_1) \dot{\epsilon}(\tau_2) \dot{\epsilon}(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots \quad (3)$$

式中  $\phi_i$  是松弛函数, 式右第一项单重积分是遵循迭加原理的线性项, 第二项双重积分是由  $\tau_1$  时刻的应变增量和  $\tau_2$  时刻的应变增量共同作用对现时刻  $t$

材料行为所产生影响的累积,第三项三重积分则是  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  三个时间应变增量对现时材料行为影响的累积,依此类推. 但式(3)不适合于工程应用,即使仅取前三项,要确定松弛函数  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , 也至少需要 28 组不同的实验<sup>[29]</sup>. 因此,探索工程适用的非线性粘弹性本构关系就成为非线性粘弹性波理论发展的瓶颈.

从八十年代初以来,我们对典型工程塑料(如环氧树脂、有机玻璃 PMMA、聚碳酸酯 PC、尼龙 PA、ABS、PBT, PP/PA 共混塑料等)进行了一系列实验研究,发现在准静载荷到冲击载荷的广阔应变率范围内,即在应变率为  $10^{-4}$  到  $10^3 \text{ s}^{-1}$  范围内,高聚物(包括热塑性和热固性的)的非线性粘弹性本构行为可以令人满意地由如下非线性粘弹性本构关系(简称为朱王唐方程或 ZWT 方程)来描述<sup>[30-35]</sup>:

$$\sigma = f_e(\epsilon) + E_1 \int_0^t \dot{\epsilon} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_1}\right) d\tau + E_2 \int_0^t \dot{\epsilon} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_2}\right) d\tau \quad (4a)$$

$$f_e(\epsilon) = E_0 \epsilon + \alpha \epsilon^2 + \beta \epsilon^3, \text{ or} \quad (4b)$$

$$f_e(\epsilon) = \sigma_m \left[ 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(m\epsilon)^i}{i}\right) \right] \quad (4c)$$

其对应的流变学模型如图 5 所示,即由一个非线性弹簧与两个线性 Maxwell 单元组成. 式中  $f_e(\epsilon)$  描述非线性弹性平衡响应,当以式(4b)描述时  $E_0, \alpha$  和  $\beta$  是对应的弹性常数<sup>[30]</sup>,当以式(4c)描述时  $\sigma_m$  是  $\epsilon \rightarrow \infty$  时  $f_e(\epsilon)$  的渐近最大值,  $m$  是  $E_0$  和  $\sigma_m$  的比值,而正整数  $n$  是表征  $f_e(\epsilon)$  初始线性度的材料参数<sup>[32]</sup>;第一个积分项描述低应变率下的粘弹性响应,  $E_1$  和  $\theta_1$  分别是所对应的 Maxwell 单元 I 的弹性常数和松弛时间;而后一个积分项描述高应变率

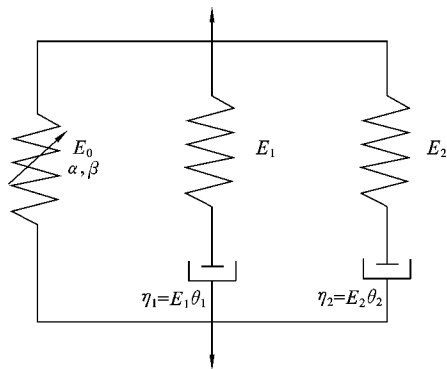


图 5 ZWT 方程(式(4))的流变模型  
Fig. 5 Rheological model of ZWT Eq. (4)

下的粘弹性响应,  $E_2$  和  $\theta_2$  则分别是所对应的 Maxwell 单元 II 的弹性常数和松弛时间.

理论上,式(4)既可以从 Coleman-Noll 的有限线性粘弹性理论<sup>[36,37]</sup>,也可以从 Green-Revlin 的多重积分式(3)简化得到.事实上,令式(3)中的前三个松弛函数  $\phi_i$  分别化为如下形式:

$$\phi_1(t-\tau_1) = E_0 + E_1 \exp\left(-\frac{t-\tau_1}{\theta_1}\right) + E_2 \exp\left(-\frac{t-\tau_1}{\theta_2}\right)$$

$$\phi_2(t-\tau_1, t-\tau_2) = \text{const.} = \alpha$$

$$\phi_3(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3) = \text{const.} = \beta$$

这时(式(3))就立即化为 ZWT 方程(式(4)).

实验上,我们与很多研究者只关注材料的加载响应不同,我们特别强调只有全面研究材料的“加载-卸载”全过程,才有助于确定材料不同的本构特性.事实上,如果只知道材料的加载应力-应变曲线,而不了解其卸载应力-应变曲线,就不足以区分材料究竟是非线性弹性、非线性弹塑性、非线性粘弹性、还是非线性粘弹塑性等等.国外不少学者对高聚物冲击行为的实验研究常常只停留在加载阶段,我们正是首先对高聚物注重其加载-卸载特性的全面研究,在实验和理论研究的基础上,提出了上述 ZWT 弱非线性热粘弹性本构关系.图 6 是一个典型的从准静态到冲击动态八个量级应变率范围的实测应力应变曲线实例<sup>[38]</sup>,ZWT 方程理论预示与实测结果相符.

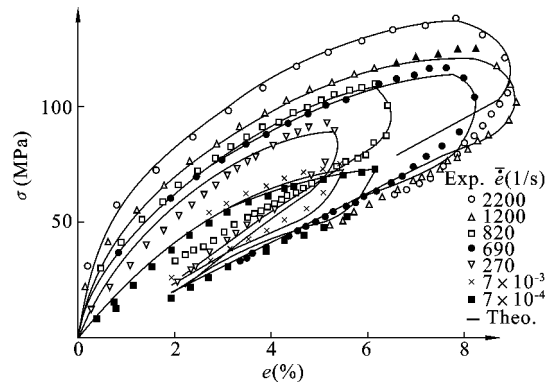


图 6 聚碳酸酯 PC 的实测  $\sigma\epsilon$  曲线  
Fig. 6 Experimental  $\sigma\epsilon$  curves for PC

为方便起见,以下对于遵循式(4)的材料简称为 ZWT 材料.对典型高聚物环氧树脂、有机玻璃 PMMA 和聚碳酸酯 PC 等实测的 ZWT 本构参数如表 2 所示:

表2 环氧树脂、有机玻璃 PMMA、聚碳酸酯 PC 的 ZWT 本构参数

Table 2 The typical ZWT parameters experimentally determined for Epoxy, PMMA and PC

	Epoxy	PMMA-1	PMMA-2	PMMA-3	PC
$\rho_0$ (kg/m <sup>3</sup> )	$1.20 \times 10^3$	$1.19 \times 10^3$	$1.19 \times 10^3$	$1.19 \times 10^3$	$1.20 \times 10^3$
$E_0$ (GPa)	1.96	2.04	2.19	2.95	2.20
$\alpha$ (GPa)	4.12	4.17	4.55	10.9	23
$\beta$ (GPa)	-181	-233	-199	-96.4	-52
$E_1$ (GPa)	1.47	0.897	0.949	0.832	0.10
$\theta_1$ (s)	157	15.3	13.8	7.33	470
$E_2$ (GPa)	3.43	3.07	3.98	5.24	0.73
$\theta$ ( $\mu$ s)	8.57	95.4	67.4	40.5	140

对照表 2 和图 5, ZWT 非线性粘弹性本构方程 (式(4))揭示出以下几个值得注意的特征:

(a) 本构非线性仅来自纯弹性响应, 而所有的粘弹性响应, 或即速率(时间)相关的响应, 则本质上是线性的. 这样的本构非线性是一种'弱非线性', 或许可称之为'率无关非线性'. 对于这类 ZWT 材料, 不难把成熟的线性粘弹性理论推广到处理其率相关响应.

(b) 典型工程塑料的实验表明, 比值  $\alpha/E_0$  为 1~10 量级, 而比值  $\beta/E_0$  为  $10 \sim 10^2$  量级. 这意味着, 如果  $\epsilon > 0.01$ , 应计及非线性; 反之, 如果  $\epsilon < 0.01$ , 则可近似忽略非线性.

(c) 实验还表明, 如表 2 所示,  $\theta_1$  通常是  $10 \sim 10^2$  s 量级, 而  $\theta_2$  通常是  $10^{-4} \sim 10^{-6}$  s 量级. 相差大约 6 个量级. 由于每一松弛时间的影响范围(“有效影响域”)约占 4.5 个量级<sup>[39]</sup>, 所以不难理解,  $\theta_1$  对低应变率响应负责, 而对  $\theta_2$  高应变率响应负责. 并且  $\theta_1$  和  $\theta_2$  将各自在自己的“有效影响域”范围内发挥作用.

(d) 这样, 在时间尺度以  $1 \sim 10^2$  秒计的准静加载条件下, 具有松弛时间  $\theta_2$  为  $10^0 \sim 10^2$  微秒的高频 Maxwell 单元从准静加载一开始起就已经完全松弛了. 于是式(4)化为:

$$\sigma = f_e(\epsilon) + E_1 \int_0^t \dot{\epsilon}(t) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_1}\right) d\tau \quad (5)$$

(e) 反之, 在时间尺度以  $1 \sim 10^2$  微秒计的冲击加载条件下, 具有松弛时间  $\theta_1$  为  $10 \sim 10^2$  秒的低频 Maxwell 单元将无足够的时间来松弛(直到加载结束). 这时, 低频 Maxwell 单元化为弹性常数为  $E_1$  的简单弹簧, 而式(4)则化为:

$$\sigma = f_e(\epsilon) + E_1 \epsilon + E_2 \int_0^t \dot{\epsilon}(t) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_2}\right) d\tau = \sigma_e(\epsilon) + E_2 \int_0^t \dot{\epsilon}(t) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_2}\right) d\tau \quad (6)$$

这说明聚合物在冲击载荷下的非线性粘弹性波的传播特性实际上由式(6)控制.

值得注意, 式(5)和式(6)虽然在形式上相当于三单元模型, 但由于各自具有不同的物理含义, 适用于不同的载荷条件, 式中的本构参数又必须在特定的应变率下确定, 特别是式(6)中的  $\sigma_e(\epsilon)$  既包含了弹性平衡响应也包含了低应变率 Maxwell 单元的弹性响应, 因此不宜简单地看作普通的三单元模型, 而应看作 ZWT 模型在特定条件下的简化特例.

由于 ZWT 弱非线性粘弹性本构模型具有上述特征, 使大量工程问题的处理可以大大简化, 并有利于非线性粘弹性波传播的研究分析. 杨挺青等在专著《粘弹性理论与应用》中介绍了 ZWT 方程<sup>[40]</sup>; 冯震宇等将 ZWT 模型编成子程序用于有限元分析<sup>[41]</sup>; 美国罗德岛大学的 Sharma 和美国陆军的 Prosser 等在论文中大段引用和介绍了 ZWT 模型及粘弹性应力波分析<sup>[42]</sup>. 研究者们还进一步发现, ZWT 方程不仅适用于描述塑料和橡胶<sup>[43]</sup>的动态本构特性, 而且还可满意地用于描述其他材料和结构元件的非线性粘弹性动态响应, 包括复合材料<sup>[44,45]</sup>、泡沫材料<sup>[46]</sup>、混凝土<sup>[47-49]</sup>以及船桥相撞防护装置中钢丝绳圈<sup>[50,51]</sup>等. 并且还进一步发展到计及温度效应(和应变率-温度的等价效应)的非线性热粘弹性本构方程<sup>[52,53]</sup>, 以及计及率相关动态损伤演化的含损伤非线性粘弹性本构方程<sup>[32,54-57]</sup>.

正如我们在本节一开始所述, 研究应力波传播的控制方程组由守恒方程和材料动态本构关系组



成。以往,非线性粘弹性应力波的研究难点主要在于缺乏既有理论依据又简易实用的非线性粘弹性本构方程。ZWT 非线性粘弹性本构方程的提出,为解决这一理论研究难题打开了一个通道,奠定了基础。由此,我们可以对非线性粘弹性应力波的传播特性作进一步的探索。

以一维应力条件下的非线性粘弹性应力波为例,其控制方程组由动量守恒方程、连续方程和高应变率下的 ZWT 方程(式(6))组成,在数学上归结为解一阶偏微分方程组。通过特征线解法,问题可转化为求解如下三族常微分方程组,每一族由特征线方程和沿特征线的相容条件所组成:

$$dx = \pm C_V dt, \quad dv = \pm \frac{1}{\rho_0 C_V} d\sigma \pm \frac{\sigma - \sigma_e(\epsilon)}{\rho_0 C_V \theta_2} dt \quad (7a, b)$$

$$dx = 0, \quad d\epsilon - \frac{d\sigma}{\sigma'_e + E_2} - \frac{\sigma - \sigma_e(\epsilon)}{\sigma'_e + E_2} \frac{dt}{\theta_2} = 0 \quad (7c)$$

(7a, b)中的正、负号分别对应于正向波(右行波)和负向波(左行波),而沿特征线波速  $C_V$  为:

$$C_V = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{d(\sigma_e(\epsilon) + E_2 \epsilon)}{d\epsilon}} = \sqrt{\frac{f'_e(\epsilon) + E_1 + E_2}{\rho_0}} \quad (7d)$$

不难看出,在上述相容条件中,高频松弛时间  $\theta_2$  总是以  $(\sigma - \sigma_e) dt / \theta_2$  的形式出现在含  $dt$  的项中,粘弹性波的弥散和衰减实际上由这些项所描述。这一结果解析地揭示出,粘弹性波的弥散和衰减主要依赖于高频松弛时间  $\theta_2$  和所谓的“过应力” $(\sigma - \sigma_e)$ ;随  $\theta_2$  之增大,衰减变弱。不难证明,在线性粘弹性强间断

波的特例下,满足如下的指数衰减解析式<sup>[1]</sup>:

$$\begin{cases} \sigma = \sigma^* \exp(-\alpha_a X) \\ \alpha_a = \frac{E_2}{2\theta_2 C_{V0}(E_0 + E_1 + E_2)} = \frac{\rho_0 C_{V0}}{2\eta_2 [1 + (E_0 + E_1)/E_2]^2} \end{cases} \quad (7e)$$

式中  $\sigma^* = \sigma(0, 0)$ ,  $\alpha_a$  是衰减因子,  $C_V = \sqrt{(E_0 + E_1 + E_2)/\rho_0}$  是线性粘弹性波波速(式(7d)的线性化波速),而  $\eta = E_2 \theta_2$ 。

以表 2 中  $\theta_2 = 95.4 \mu s$  的有机玻璃(PMMA 1)和  $\theta_2 = 8.57 \mu s$  的环氧树脂为例进行研究比较,两者的高频松弛时间  $\theta_2$  相差一个量级。当一半无限长杆受恒速冲击(80 m/s)时,由特征线数值计算求得的距冲击端不同位置处的应力波形和应变波形,对有机玻璃分别如图 7 的(a)和(b)所示;而对环氧树脂则分别如图 8 的(a)和(b)所示<sup>[58]</sup>。

由图 7 和图 8 可见,不论对有机玻璃(PMMA),还是对环氧树脂,与线弹性波不同,粘弹性应力波与应变波之间不再存在简单的正比关系。作为粘性效应的体现,应力剖面会呈现“应力松弛”型特性,而应变剖面会呈现“蠕变”型特性。这意味着,任一点  $X$  处的粘弹性动态应力  $\sigma(X, t)$  不能简单地由该点处实测获得的动态应变  $\epsilon(X, t)$  乘以表观弹性模量来求得。图 7 中还以虚线给出线性近似(令非线性弹性常数  $\alpha = \beta = 0$ )的计算结果,可见本构非线性弹性对于波衰减和波剖面形状的影响一般是不可忽略的。

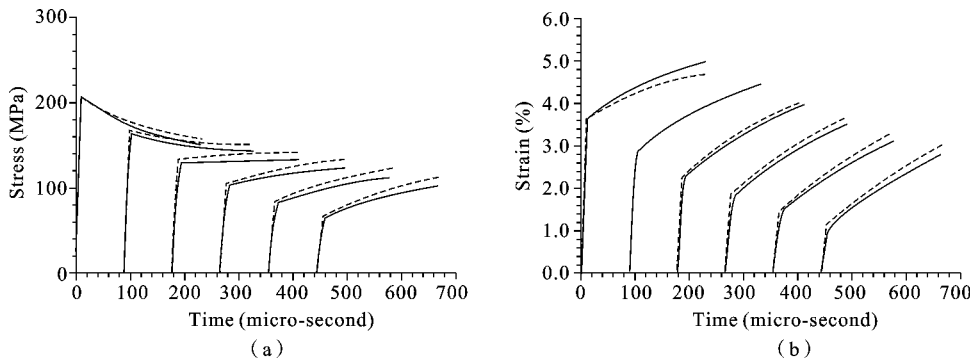


图 7 PMMA 半无限长杆受恒速冲击(80 m/s)下,不同截面( $X=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  m)处的应力(左)和应变(右)粘弹性波。实线和虚线分别为非线性和线性模型结果

Fig. 7 Nonlinear (solid lines) and linear (dashed lines) viscoelastic waves in PMMA bar under constant-velocity (80 m/s) impact condition, showing (a) stress profiles and (b) strain profiles, at  $X=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  m, respectively

在讨论 ZWT 方程的特征(c)时,已经指出:任一  $\theta_\varphi$  存在一个“有效影响区”,约 4.5 个量级的应变率范围<sup>[38]</sup>。因此就粘弹性波的传播而言,也存在一

个由  $\theta_2$  占统治地位的“有效传播时间” $t_{eff} = \theta_2$ , 或“有效传播距离” $X_{eff} = C_V \theta_2$ <sup>[58]</sup>。例如:对 PMMA 有  $X_{eff} = 0.214$  m,而对环氧树脂有  $X_{eff} = 0.0205$  m。超

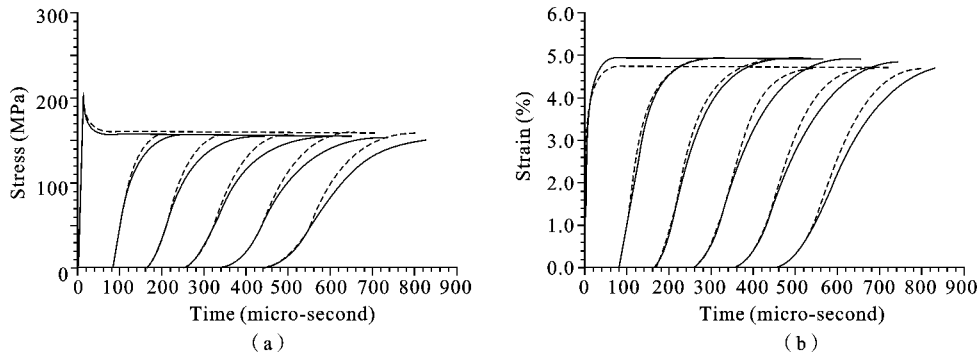


图8 环氧树脂半无限长杆受恒速冲击(80 m/s)下,不同截面( $X=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  m)上观察到的应力(左)和应变(右)粘弹性波. 实线和虚线分别为非线性模型和线性模型结果

Fig.8 Nonlinear (solid lines) and linear (dashed lines) viscoelastic waves in epoxy bar under constant-velocity (80 m/s) impact condition, showing (a) stress profiles and (b) strain profiles, at  $X=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  m, respectively

出此“有效传播时间”或“有效传播距离”占统治地位的区域,  $\theta_2$  不再发挥显著的影响作用. 这不论对于研究粘弹性波的传播特性(正问题), 还是由粘弹性波传播的实测波形反推材料本构关系(反问题), 都有直接的指导意义.

2.2 把粘弹性波分析应用于材料动态本构行为的研究, 一方面建立了粘弹性材料动态本构关系的反分析法; 另一方面率先提出了聚合物 SHPB 实验技术和分析方法, 以解决软材料动态本构特性的实验难题

材料在高应变率下的率型动态行为是力学界和材料学界的共同研究热点. 由于应力波效应和应变率效应之间的耦合关系使问题变得格外复杂. 目前最常用的有两类方法: 或者采用应力波效应和应变率效应解耦的方法(如 SHPB 技术), 或者采用由波传播信息来反演材料本构关系的方法(解反问题).

对于 ZWT 材料, 如同我们在讨论其特征时指出过的, 由于其非线性弹性本构参数和低频粘弹性本构参数都可以通过低应变率(准静态)下的实验确定, 其动态响应的研究难点就归结为高频粘弹性本构参数  $E_2$  和  $\theta_2$  的确定. 从这一思路出发, 我们提出了一种利用粘弹性波衰减特性测量来确定  $E_2$  和  $\theta_2$  的新方法<sup>[59]</sup>, 原理相当于 Hopkinson 压杆实验的透射杆换成粘弹性长试件. 入射杆 1 和撞击杆 3 是已知其杨氏模量  $E_{e1}$  和密度  $\rho_{e1}$  的金属弹性杆, 透射杆 2 是待测粘弹性材料长杆, 其密度  $\rho_v$  为已知. 当杆 3 以速度  $V_0$  撞击静止的杆 1 时, 由弹性杆上应变片  $G_1$  可测得入射弹性波和反射弹性波, 从而确定入射杆 1 和透射杆 2 界面处的透射波. 这样, 由入射波  $\sigma_i(x_1, t)$  和透射波  $\sigma_t(x_1, t)$  的实测波头值可确定粘弹

性杆的瞬态波阻抗  $\rho_v C_v$ , 并进而确定其特征波速  $C_v$ :

$$(\rho_0 C_v)_v = \frac{\sigma_t (\rho_0 C_v)_e}{2\sigma_i - \sigma_t}, \quad \text{或} \quad C_v = \frac{\sigma_t (\rho_0 C_v)_e}{(\rho_0)_v (2\sigma_i - \sigma_t)} \quad (8a)$$

另一方面, 由粘弹性长杆上的应变片  $G_2$  处测得的粘弹性应变波波头值  $\epsilon_t(x_{g2})$  和  $G_3$  测得的波头值  $\epsilon_t(x_{g3})$ , 按照式(7e)或即下式, 可以确定衰减因子  $\alpha_a$ :

$$\alpha_a = \frac{\ln(\epsilon_t(x_{g3})) - \ln(\epsilon_t(x_{g2}))}{x_{g3} - x_{g2}} \quad (8b)$$

这样, 可由实测  $C_v$  和  $\alpha_a$  值来确定试验粘弹性体的动态本构参数  $E_2$  和  $\theta_2$ .

基于线性和非线性粘弹性球面波的分析<sup>[60,61]</sup>, 发现强间断粘弹性球面波具有类似式(7e)的、沿球半径  $r$  指数衰减的特性:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_m r_o \exp\left[-\frac{2G_2}{(3K+4G)C_k\theta_2}(r-r_o)\right]}{r} = \frac{\sigma_m r_o \exp[-\alpha_s(r-r_o)]}{r} \\ \alpha_s &= \frac{2G_2}{(3K+4G)C_k\theta_2} = \frac{2G_2}{3\rho_0 C_k^3 \theta_2} \end{aligned} \right. \quad (9)$$

于是, 上述反分析原理和方法也可推广到球面波, 即通过球面波实验中测量一系列球面质点速度波形, 由实测的球面波衰减因子  $\alpha_s$  和波速  $C_k$  ( $=\sqrt{\frac{1}{\rho_0}\left(K+\frac{4G_2}{3}\right)} = \sqrt{\frac{(1-\nu)E_2}{\rho_0(1+\nu)(1-2\nu)}}$ ), 可以反演所试验粘弹性体的动态本构参数  $E_2$  和  $\theta_2$ .

另一方面, 国际上普遍采用分离式 Hopkinson 压杆技术(SHPB)对材料在冲击载荷下的动态本构关系进行的实验研究<sup>[62]</sup>. 这一技术建立在两个基本

假定之上,即应满足一维应力波传播假定和应力沿试件长度均匀分布的假定.对于粘弹性类材料(包括混凝土等),我们基于粘弹性波分析,对其在 SHPB 试验过程中是否满足应力沿试件长度均匀分布的假定作了细致分析,明确了 SHPB 实验有效性的条件<sup>[32,63,64]</sup>.对于低波阻抗软材料(如火箭固体推进剂、炸药、泡沫材料、生物材料等),由于传统的 SHPB 采用高波阻抗的金属杆,其弹性波阻抗( $\rho_0 C_0$ )高达约 40 MPa/m/s,已不再适用于研究波阻抗约为 0.1 MPa/m/s~1 MPa/m/s 量级的软材料.人们曾经试图改用低波阻抗的有机玻璃杆(PMMA)来代替高波阻抗的钢杆,但在数据处理上仍沿用传统弹性杆的假设.实际上有机玻璃是一种粘弹性材料,应力波在粘弹性杆中的传播会产生由本构粘性引起的粘弹性波衰减和弥散,应力与应变间不再存在正比关系,对数据的处理必然带来很大误差.基于粘弹性波传播理论,我们率先提出了聚合物 SHPB 实验技术和分析方法<sup>[65,66]</sup>,首次通过采用粘弹性波理论来解相应的正问题和反问题,解决了软材料动态本构特性的 SHPB 实验难题.

剑桥大学 Cavendish 实验室的 Balzer 等把该技术成功应用于炸药动态力学性能的研究<sup>[67]</sup>.董新龙和余同希等把这一方法应用于 mini-Hopkinson 拉

杆实验<sup>[68]</sup>.英国皇家会员、著名冲击物理学家 John Field 在对 80 年代以来高应变率实验技术进行评论时,把该技术列为近代重要发展之一<sup>[69]</sup>.

2.3 首次建立了以任意多层为一周期、在层间不连续条件下的粘弹性比拟方法,为层状岩土介质中深埋高抗力结构设计提供了理论依据

针对层状介质中的瞬态波传播问题,我们发展了以  $n$  层为周期的层状介质的粘弹比拟理论<sup>[70]</sup>,其基本思想是以一个等效粘弹性体来模拟层状介质.该理论不仅发展了 Ting T C T 以两层为周期的粘弹性比拟方法,而且考虑了层间不连续条件,从而揭示了应力波跨过软弱结构面时的衰减规律,直接给出层状介质中应力波传播规律的解析表达式,并成功预计了带有软弱夹层的层状岩体中的波传播问题.

考虑一周期层状介质(如图 9 所示),每一周期厚度为  $2\omega$ ,由  $n$  层均匀、各向同性、线弹性或粘弹性材料组成,层间具有裂隙或夹有充填物.第  $i$  层的厚度用  $2h_i$  表示.层间裂隙的宽度或充填物的厚度分别用  $d_1, d_2, \dots, d_n$  表示,用带下标  $i$  的量分别表示第  $i$  种材料的特性.在垂直层面的方向建立坐标系  $Ox$ ,原点  $O$  选在第一层的中面上,并规定该中面为荷载作用面.初始时该系统处于静止状态.

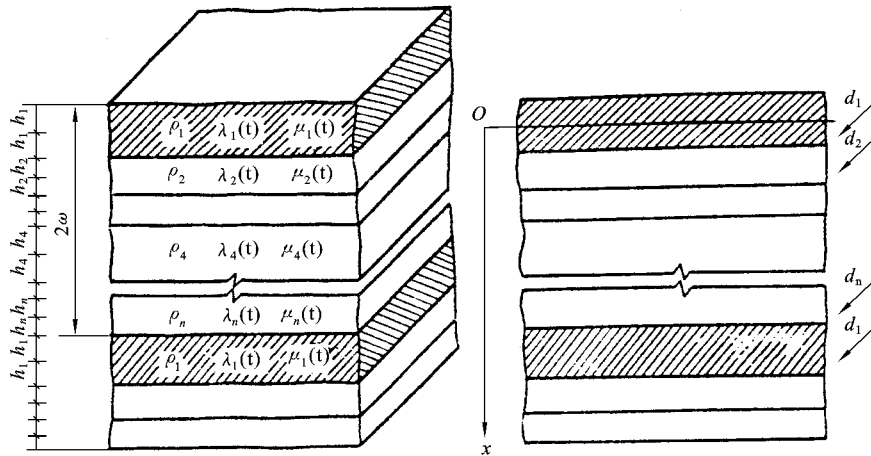


图 9 层状介质力学模型

Fig. 9 The mechanical model of stratified material

对于沿垂直层面方向(即沿  $x$  轴正向)传播的一维平面波问题,控制方程组由一维波惯用的运动方程,位移连续性方程和本构关系组成,其中粘弹性本构关系是本问题中关键,我们采用如下的 Stieltjes 卷积形式:

$$\sigma_i(x, t) = \int_0^t g_i(t - t') d\epsilon_i(x, t') \quad (10a)$$

$$g_i(t) = \lambda_i(t) + 2\mu_i(t) \quad (10b)$$

式中  $\lambda_i(t)$  和  $\mu_i(t)$  为第  $i$  层材料的松弛函数;对于弹性材料它们退化为与时间  $t$  无关的 Lamè 常数,式

(10)就退化为胡克定理. 该式与一维应变条件下 ZWT 方程经线性简化后的积分形式一致.

我们先用 Laplace 变换方法来确定控制方程组在象空间  $(x, s)$  中的解, 此处  $s$  是拉氏变量. 与前人不同, 我们考虑了层间不连续条件, 即在瞬态波跨过层面的传播过程中, 其位移、速度和应力都可能是不连续的. 根据层状岩体中平面装药地冲击试验研究结果, 应力和速度在跨过层面时服从下述变化规律:

$$\bar{u}_i(\omega_{i-1} + h_i, s)e^{-\alpha_i d_i} = \bar{u}_{i+1}(\omega_{i-1} + h_i, s) \quad (11)$$

式中  $\bar{u}$  可以是应力  $\sigma$  也可以是速度  $v$ ;  $d_i$  为第  $i$  个层面的裂隙宽度或充填物厚度, 在整体坐标系中忽略其占据的空间;  $\alpha_i$  为应力波在跨过第  $i$  个层面时的综合衰减因子, 通常可由试验确定.

另一方面, 考虑到具有周期系数的微分方程系统, 按照 Floquet 理论有下式成立:

$$\bar{u}_i(2m\omega + x, s) = \bar{u}_i(x, s)e^{-m(\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i + 2\omega k)} \quad (12)$$

这里  $k$  为特征指数;  $m$  取零和正整数 ( $m=0, 1, 2, 3, \dots$ ).

在上述基础上, 我们详细讨论该问题在象空间解的性质和层间条件, 同时在象空间给出了待定系数  $\bar{A}_i, \bar{B}_i$  和特征指数  $k$  的通项式, 以及各层中心的应力和速度表达式.

由于所研究问题的复杂性, 直接对象空间解进行拉氏反演是十分困难的. 为此, 我们寻求一个等效粘弹体, 使得该粘弹体在象空间中的应力和速度与多层介质的象空间解的形式相同, 亦即在象空间中建立两个不同的力学问题之间数学上的对应关系. 基于这一思想, 我们得到了象空间中等效松弛函数  $G$  的表达式, 用数值方法进行拉氏反演, 即可求出等效粘弹体的等效松弛函数.

最后, 我们建立了层状介质体与等效粘弹体中应力和速度在象空间的一一对应关系, 由修正后的等效粘弹体中的平面波解求得层状介质平面波解.

### 3 动态破坏和应力波相互作用

当材料动态破坏特征时间与应力波动态载荷的短历时特征时间相比为同一量级时, 一方面材料破坏就必须作为一个时间(速率)相关过程来研究和处理, 并计及此过程中各种基本形式损伤(空洞、微裂纹、局域化剪切带等)的演化过程, 另一方面破坏区的传播(破坏波)以及破坏引起的应力释放所诱发的次生应力波, 与外界(应力波)载荷互相作用导致破

坏进程发生变化. 我们对于应力波作用下两种重要形式的材料动态破坏, 即高应变率准绝热条件下材料微观上形成高度局域化剪切带的绝热剪切破坏, 和应力波条件下多源损伤动态演化和率相关的脆性碎裂, 分别展开研究并建立了新的模型.

3.1 创建了绝热剪切演化的“应变-应变率-温度”三变量热粘塑性本构失稳准则, 并推广到剪切带与裂纹相互作用问题. 在应用研究上, 发现了钨合金杆在预扭状态下绝热剪切发展机制, 为钨合金长杆穿甲弹实现“自锐”提供了理论指导

与准静态下的破坏不同, 材料在冲击载荷下的动态破坏常常表现为热-力学耦合以及与动态卸载失效密切相关的率相关过程.

典型形式之一是绝热剪切失效. 材料或结构在冲击载荷下发生的高速变形时, 一方面存在应变硬化和应变率强化等强化机制, 另一方面由于塑性变形导致的热量在冲击短历时内来不及传导扩散, 造成局部升温并引起材料软化, 成为强化机制和软化机制共存并竞争的过程. 当温度软化效应超过材料的各种强化效应时, 材料出现本构失稳(由本构加载转为本构卸载), 即其表现应力应变曲线由应变硬化 ( $d\sigma/d\epsilon > 0$ ) 转向应变软化 ( $d\sigma/d\epsilon < 0$ ), 相应地其显微组织可观察到高度局域化的剪切带. 这一现象被称为绝热剪切 (Adiabatic shearing), 普遍存在于高速撞击、穿甲、侵彻、冲孔、高速成型、切削、冲蚀等过程中.

绝热剪切机理研究始于 Zener 和 Hollomon (1944)<sup>[71]</sup>, 他们提出了热塑失稳模型. 在此基础上, 曾建立起各种绝热剪切临界准则, 如 Recht 的临界应变率准则<sup>[72]</sup>和 Culver 的临界应变准则<sup>[73]</sup>等. 但尚未同时考虑应变和应变率效应的影响. 我们通过对绝热剪切过程进行了宏-微观结合的系列实验研究, 揭示了高应变率下材料绝热剪切是一个包含形变带孕育发展、向相变带转化、相变带发展、直到裂纹沿剪切带传播而导致破坏等一系列发展阶段的应变率相关过程<sup>[74]</sup>, 提出了热粘塑性本构失稳概念, 建立了绝热剪切演化的“应变-应变率-温度”三变量热粘塑性本构失稳准则<sup>[75-78]</sup>.

由剪切形式的热粘塑性本构方程  $\tau = \tau(\gamma, \dot{\gamma}, T)$  出发, 本构失稳的临界条件为:

$$\frac{d\tau}{d\gamma} = \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} + \frac{\partial \tau}{\partial \dot{\gamma}} \dot{\gamma} + \frac{\partial \tau}{\partial T} \frac{dT}{d\gamma} = 0 \quad (13a)$$

再计及绝热温升效应:

$$dT = \frac{\beta \tau d\gamma}{\rho c} \quad (13b)$$

式中  $\beta$  为 Taylor-Quinney 系数(代表应变能转化为热能的百分比). 联立解这两个方程就得出绝热剪切演化的“应变率-应变-温度”三变量准则<sup>[75,77]</sup>. 例如, 当本构方程具有如下形式时:

$$\tau = \tau_0 \gamma^n \left(1 + g \ln \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0}\right) \left(1 - \alpha \frac{T}{T_0}\right) \quad (14)$$

其中  $n, g$  和  $\alpha$  分别为表征材料应变强化、应变率强化和热软化的材料参数, 可得到如下绝热剪切临界

条件:

$$\left(1 + g \ln \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0}\right) \left(A(T) - \frac{\alpha \beta \tau_0}{T_0 \rho c} \gamma\right) \gamma^n = 1 \quad (15)$$

式中积分常数  $A(T)$  是表征绝热剪切过程中所处状态的参量. 给定试验温度  $T$  下, 不同的  $A$  值给出  $\dot{\gamma}$ - $\gamma$  平面上的一族临界曲线(图 10(a)), 分别对应于绝热剪切演化过程中的不同状态, 如形成形变剪切带、相变剪切带、以及沿剪切带断裂等. 随着温度降低, 绝热剪切的敏感性增加, 如图 10(b) 所示. 图 10 表明, 理论预示和实验结果符合得相当好.

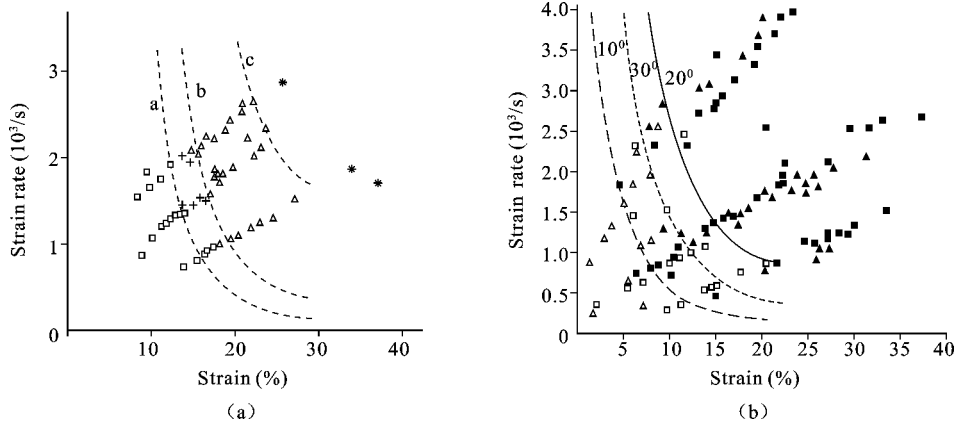


图 10 钛合金绝热剪切带演化对于应变, 应变率和温度的依赖关系: (a) 室温下试验结果: - 无剪切带, + 形变带,  $\Delta$ -相变带, \* 开裂; 理论曲线 a, b, c 对应于  $A = 1.1536, 1.1382, 1.1143$ ; (b) 不同温度下试验结果:  $\circ$ -20 °C,  $\Delta$ -90 °C,  $-$ 110 °C; 空心-无剪切带, 实心-有剪切带

Fig. 10 Dependence of the adiabatic shear band evolution of titanium alloy on the strain, strain-rate and temperature. (a) experimental results under room temperature, -without shear band, +-deformation band,  $\Delta$ -phase transformation band, \*-fracture; theoretical curves a, b and c corresponding to  $A = 1.1536, 1.1382$  and  $1.1143$ , respectively. (b) experimental results under different temperature,  $\circ$ -20 °C,  $\Delta$ -90 °C,  $-$ 110 °C; hollow symbol-without shear band, solid symbol-with shear band

值得指出, 本构失稳的临界条件(式(13a))等号右边的第二项  $\frac{\partial \tau}{\partial \dot{\gamma}} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma}$  体现了应变率对热粘塑性本构失稳的整体影响. 虽然大多数材料显示应变率强化效应( $\partial \tau / \partial \dot{\gamma} > 0$ ), 但在绝热剪切演化过程中,  $\partial \dot{\gamma} / \partial \gamma$  可正可负, 因此应变率在此过程中视情况既可以扮演强化也可以扮演弱化作用, 具有双重调控作用<sup>[79]</sup>, 这正是“热粘塑性失稳”与经典“热塑失稳”的重要区别之所在.

上述绝热剪切准则的研究还进一步推广到剪切带与裂纹的相互作用问题. Kalthoff 首先报道, 冲击载荷下的 II 型裂纹在动态扩展时, 在一定条件下会发生绝热剪切型扩展<sup>[80,81]</sup>. 对于这一现象, 我们用 Hopkinson 压杆技术定量地研究了裂纹体绝热剪切断裂的起始条件, 发现在裂尖前方先形成剪切带, 然

后裂纹沿剪切带传播(图 11(a)); 并将热粘塑性绝热剪切准则用于裂尖塑性区, 得到了在沿裂纹方向离裂尖  $r = r_0$  处发生绝热剪切并导致断裂起始的“应力强度因子  $K_{II}$ -应力强度率  $\dot{K}_{II}$ ”双变量准则<sup>[82,83]</sup>:

$$\left[1 + g \ln \frac{2(1+\nu)K_{II}\dot{K}_{II}}{\pi E \sigma_{e0} r_c}\right] \left[\frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{(1+\nu)K_{II}^2}{\pi E \sigma_0 r_c}\right] \cdot \left[A - \frac{\alpha \beta E_1 (1+\nu) K_{II}^2}{\rho C_v T_e \pi E \sigma_0 r_c}\right] = 1 \quad (16)$$

理论预测与 Ti6Al4V 钛合金的实验结果吻合得较好, 如图 11(b) 所示.

上述绝热剪切研究的工程应用包括: 钛合金的应力波铆接技术<sup>[84]</sup>, 靶板的绝热剪切冲塞<sup>[85-87]</sup>, 横向冲击载荷下梁的绝热剪切失效<sup>[20]</sup>, 以及钨合金穿甲弹的“自锐”等.

通常认为, 用于高速穿甲的钨合金对绝热剪切

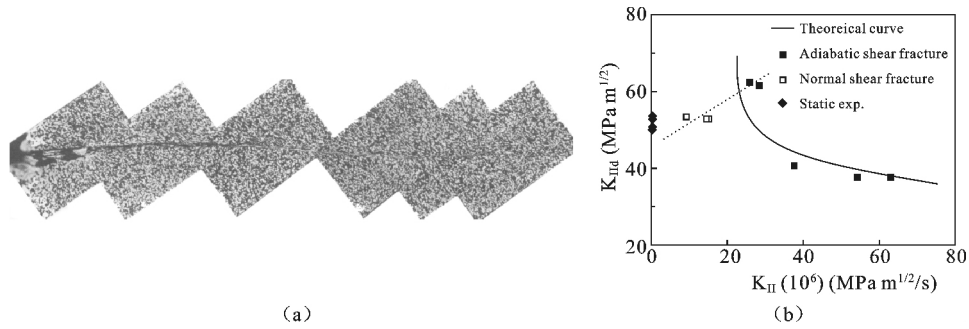


图 11 (a) 室温下 II 型裂纹绝热剪切起裂; (b) 及其对于应力强度因子和应力强度率的依赖关系  
 Fig. 11 (a) Mode II crack initiation within an adiabatic shear band under room temperature, and (b) its associated relationship between the stress intense factor and its temporal rate

不敏感, 因此钨合金长杆穿甲弹会由于头部蘑菇形钝化而降低穿甲能力. 我们比较系统地研究了钨合金微观组织形态、应力状态和结构几何形状等因素对绝热剪切的影响, 发现斜切预扭钨合金杆可以发生绝热剪切破坏<sup>[88-90]</sup>, 如图 12 所示. 这些结果为改进钨合金长杆穿甲弹的性能, 实现弹头“自锐”提供了理论指导.

美国冲击动力学专家, 中国科学院李薰奖获得者 Batra 采用我们的实验作为其数值模拟对象<sup>[91]</sup>. 美国陆军研究所 Clayton 引用该研究认为“促进弹体的‘自锐’效应, 可以产生更大穿深...”<sup>[92]</sup>. 在 Dodd 和白以龙院士的新著《绝热剪切局部化》第二版《前沿和进展》中, 选用我们上述成果的绝热剪切照片为该书的封面(图 13)<sup>[93]</sup>.

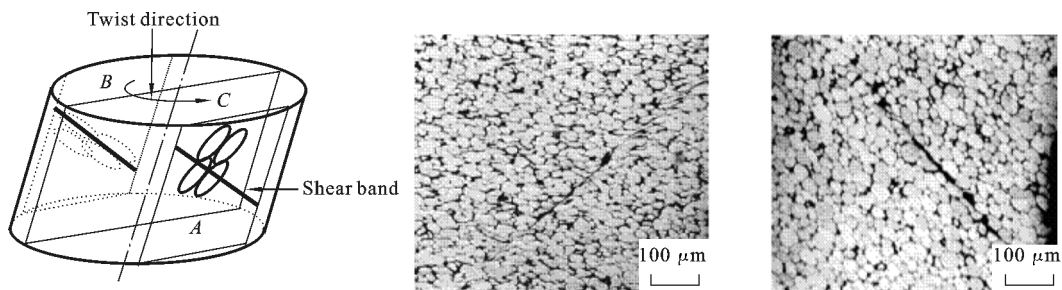


图 12 预扭钨合金试件的微观结构、绝热剪切带及其形成机理

Fig. 12 Microstructure of the pre-twisted tungsten alloy specimen, the adiabatic shear band and its formation mechanism

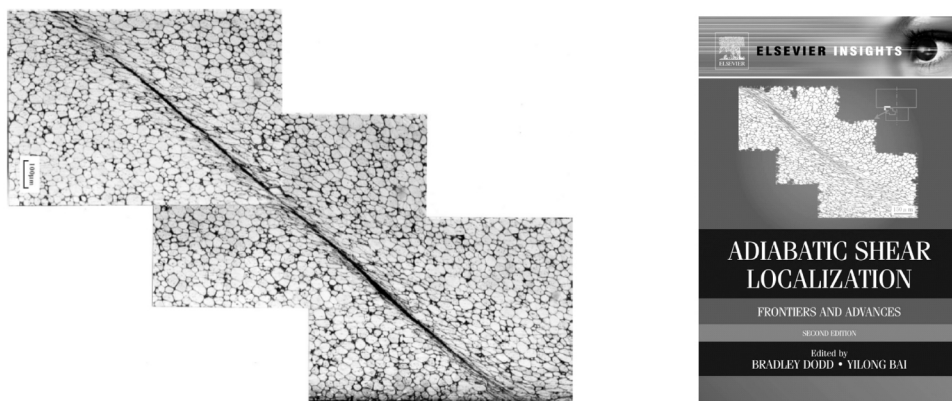


图 13 预扭钨合金绝热剪切微观照片被 Dodd 和 Bai 选作他们新著《绝热剪切局部化》的封面  
 Fig. 13 Microstructure photo of the pre-twisted tungsten alloy specimen is used as the cover of the new book “Adiabatic shear localization” edited by Dodd, B. and Bai Y

3.2 建立了快速加载下脆性材料大面积碎裂模型，揭示了卸载波影响碎片特征尺度及其分布的机制，提出了碎片尺度的评价公式

以弹壳的爆炸碎裂为代表，物体出现大面积碎裂的过程是冲击载荷下固体动态失效的另一个重要形式。Mott<sup>[94]</sup>在研究炸弹壳体的动态断(碎)裂时，提出了一种关于碎裂(fragmentation)问题的分析方法，指出一个正在发生拉伸变形的理想塑性圆环发生瞬时断裂时，以有限的速度向外传播的卸载波(Mott 波)在控制碎片尺度上起着关键作用。Grady 等人在 Mott 分析模型中引入断裂能，从而给出了材料断裂时间，得到韧性材料碎片尺度的理论公式<sup>[95]</sup>。对于陶瓷、岩石等脆性材料，Grady 提出基于局域能量守恒的碎片尺度判据<sup>[96]</sup>，他假设：如果一个快速膨胀的物体碎裂成许多碎片，则破碎前物质相对于各个碎片质心的运动动能(称为“局域动能”)将被转换为碎片的断裂能。换言之，破碎后每块碎片仅作刚体运动，保留其原有的质心动能。根据此原则，Grady 给出一个用于计算碎片的平均尺度  $s$  的表达式：

$$s_{Grady} = \left( \frac{24G_c}{\rho \dot{\epsilon}^2} \right)^{1/3} \quad (17a)$$

其中  $G_c$  为材料的破坏能， $\rho$  为密度， $\dot{\epsilon}$  为材料的线膨胀应变率。Glenn 和 Chudnovsky<sup>[97]</sup>对 Grady 理论进行修正，他们注意到，材料在断裂时刻(断裂应力为  $\sigma_c$ )单位体积已储存了弹性应变能( $\sigma_c^2/(2E)$ )，其中  $E$  为杨氏模量)，计及这项能量贡献之后，可以导出：

$$\begin{cases} s_{G\&C} = 4 \sqrt{\frac{\alpha}{3}} \sinh\left(\frac{\varphi}{3}\right) \\ \varphi = \sinh^{-1} \left[ \beta \left(\frac{3}{\alpha}\right)^{3/2} \right] \\ \alpha = \frac{3\sigma_c^2}{\rho E \dot{\epsilon}^2}, \quad \beta = \frac{3}{2} \frac{G_c}{\rho \dot{\epsilon}^2} \end{cases} \quad (17b)$$

在高应变率下，材料的膨胀动能密度远大于应变能密度，Grady 公式和 Glenn-Chudnovsky 公式给出相同结果，即  $\log(s) \sim \log(\dot{\epsilon})$  在图上为重合的斜率为  $-2/3$  的直线。而在低应变率下，Glenn-Chudnovsky 公式给出一个恒值碎片尺度： $s_{quasistatic} |_{Glenn\&Chudnovsky} = G_c / [\sigma_c^2 / (2E)]$ ，由材料的断裂能和破坏时刻的应变能密度的比值所决定。在中等应变率情况下，Glenn-Chudnovsky 公式中也包括材料的弹性模量  $E$  和破坏应力  $\sigma_c$  的影响。

公式(17)来源于能量守恒关系，物理图象简单，公式简洁。然而，尽管公式(17)给出的高应变率下的标度关系(Scaling Law)在相当大的范围内准确，但

对 Grady 关于碎裂过程中的能量转换假设，一直存在争议。近年的一些数值模拟和理论分析的工作，显示 Grady 公式显著高估了碎片尺度<sup>[98-100]</sup>。原因在于材料的动态碎裂是一个涉及裂纹成核，扩展，以及相互作用等动态机制的复杂过程，而推导这些公式时完全忽略了这些机制，碎裂的物理过程被过分简化。我们建立了一个计算模型，考虑脆性材料碎裂过程中裂纹的随机产生、断裂过程、以及多个裂纹之间弹性卸载波的复杂相互作用。在给定初始速度梯度(即膨胀应变率)下，材料的整个变形、破坏和碎裂过程，包括裂纹之间的相互作用，可以用处理应力波传播的特征线方法计算<sup>[1]</sup>。采用这个模型，我们以一种特定脆性材料为例计算其碎裂过程。结果表明，碎片的平均尺度对应变率的依赖关系明显不同于公式(17)的表述<sup>[101]</sup>。进一步，我们发现，在材料的碎裂过程中有两个特征参量，即特征应变率  $\dot{\epsilon}_0$  和特征碎片尺度  $s_0$ ： $\dot{\epsilon}_0 = c\sigma_c^2 / (E^2 G_c)$ ， $s_0 = EG_c / \sigma_c^2$ ，这两个量表征了碎裂过程的关键特征。注意  $\dot{\epsilon}_0$  和  $s_0$  由材料参数  $E$ ， $c$ ， $G_c$ ，和  $\sigma_c$  唯一地确定，从而也是材料参数。外部应变速率的快慢，以及生成碎片的大小，分别以  $\dot{\epsilon}_0$  和  $s_0$  为标准衡量。用  $\dot{\epsilon}_0$  和  $s_0$  定义无量纲应变率和无量纲碎片尺度： $\bar{s} = s/s_0$ ， $\bar{\epsilon} = \dot{\epsilon}/\dot{\epsilon}_0$ ，则基于能量准则的碎片公式(17)可以简化为：

$$\begin{cases} \bar{s}_{Grady} = \left[ \frac{24}{(\bar{\epsilon})^2} \right]^{1/3} \\ \bar{s}_{G\&C} = \frac{4}{\bar{\epsilon}} \sinh \left[ \frac{1}{3} \sinh^{-1} \left( \frac{3}{2} \bar{\epsilon} \right) \right] \\ \bar{s}_{quasistatic} |_{G\&C} = 2 \end{cases} \quad (18)$$

只要使用特征应变率和特征碎片尺度来描述脆性材料碎裂过程无量纲化的应变率唯一地确定。从量纲分析角度，假设碎片尺度  $s$  由  $E$ ， $c$ ， $G_c$ ， $\sigma_c$  和  $\dot{\epsilon}$  确定： $s = f(E, c, \sigma_c, G_c, \dot{\epsilon})$ ，简单的量纲分析将给出： $\bar{s} = \bar{f}(\bar{\sigma}_c, \bar{\epsilon})$ ，其中  $\bar{f}$  是一个无量纲的函数形式，而  $\bar{\sigma}_c = \sigma_c/E = \epsilon_f$ ，即材料的脆性断裂应变，是另一个无量纲数。根据前述的理论模型(公式(18))，无量纲碎片尺度仅依赖于无量纲应变率，而  $\epsilon_f$  不参与碎裂过程。这对于一个真实的动力学碎裂过程是否成立，需要加以验证。为此，我们模拟了 11 种脆性材料在不同应变率下的动态碎裂过程，获得各个材料的平均碎片尺度  $s$  对应变率  $\dot{\epsilon}$  的依赖曲线。这些曲线各不相同，然而，所获得的数据经无量纲化后，所有的  $\bar{s} - \bar{\epsilon}$  数据点均汇于一条主曲线(图 14)。即对于大多数脆性材料，由于破坏应变  $\epsilon_f$  变化范围不大(千分之几范围)，预计不对碎片尺度产生重要影响。近似地，

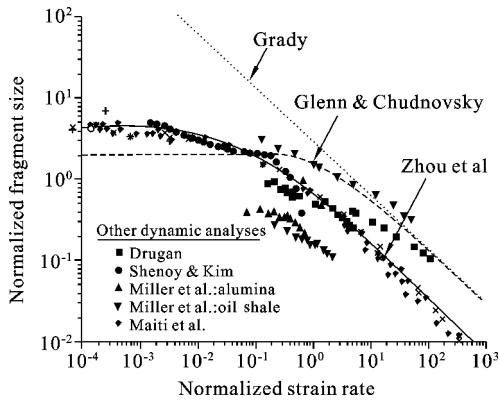


图 14 脆性材料碎片尺度随应变率变化的关系:几种理论及数值模型结果的比较

Fig. 14 The non-dimensional fragment size vs. the non-dimensional strainrate, comparisons of the results from several theoretical and numerical models

图 13 的主曲线可以用如下公式拟合<sup>[102]</sup>:

$$\bar{s} = \frac{4.5}{1 + 6.0 \bar{\epsilon}^{2/3}}, \quad \bar{s}_{quasistatic} = 4.5 \quad (19)$$

比较图 14 中的各条曲线,可以看出:首先,在准静态区域( $\bar{\epsilon} \ll 1$ ),我们的动力学模型(式(19))给出的碎片尺度数值 4.5 比 Glenn-Chudnovsky 模型的数值 2.0 大一倍以上.这是因为在准静态区域,一旦碎裂过程发生,材料内部的快速能量释放诱导产生应力波.其结果,超过一半的应变能为应力波所消耗,剩余的转换为断裂能.因此产生的碎片尺度相应地也比 Glenn-Chudnovsky 预测大一倍.另一方面,在动态区域( $\bar{\epsilon} \gg 1$ ),动力学模型曲线与能量模型曲线基本平行,这表明两种模型具有相同的标度率.然而,就绝对数值而言,我们的模型预测的碎片尺度只是 Grady 模型预测尺度的 1/4~1/5,这意味着 Grady 的局域动能假设不够准确.事实上,无论动态碎裂进行得多么迅速,它总是一个有一定时间的过程.在此过程中,材料系统可以从整体动能中提取远比“局域动能”多的能量,用于转换成断裂能,产生出更多更细的碎片.

除了与能量模型比较之外,通过无量纲化,我们还可以定量地比较不同动力学的数值模型<sup>[98-100,103]</sup>所得到的结果,如图 14 所示,可见我们提出的关于脆性材料碎片尺寸公式与大多数数值模拟工作接近.在实验方面,目前报道的实验结果都表明,动态碎裂过程中,碎片尺度明显小于采用 Grady 模型的估计<sup>[104-106]</sup>,进一步证明对于脆性碎裂过程,有必要采用新公式预计碎片尺度.

#### 4 应力波理论在防护工程中的应用

国防工程抗武器爆炸与冲击问题,涉及试验技术、应力波传播规律、介质与结构相互作用等,与强动载下非线性应力波的传播和材料的非线性率相关特性的基础研究密切相关.

##### 4.1 开发了岩体中大压力、大面积、波形可控的平面波加载技术,解决了强爆炸条件下一维应变波环境的模拟难题

岩体中强爆炸加载技术,实现了上升时间、峰值压力和正压作用时间可控,加载面积高达 400 m<sup>2</sup>,爆腔底部超压达到 100 MPa,可有效模拟强爆炸一维应变波环境.在试验研究和理论分析的基础上,提出了自由场直接地冲击参数的工程预计方法,为地下结构破坏效应研究提供了不可或缺的手段.

试验研究表明:岩体中影响应力波衰减的主要因素有:

##### (1) 耗散对应力波衰减的影响

岩体结构面的耗散特性对应力波衰减的影响是相当大的,软弱夹层由于孔隙率较大,一般是可压缩的,只有当介质压实后,应力波才能跨过层面,孔隙度愈大,应力波衰减愈快;

##### (2) 特征波长对应力波衰减的影响

特征波长表征了加载波与结构特征尺度之间的关系,峰值应力衰减指数是随着特征波长的增加而减小的;

##### (3) 耦合入地的能量对应力波衰减的影响

装药爆炸后能量泄露越快,则作用于自由场岩体中的应力波衰减越快;

##### (4) 弥散对应力波衰减的影响

这里所说的弥散包含了频散、几何弥散、粘性弥散、非粘性弥散.对于层状岩体,在一定范围内频散比较突出;

##### (5) 空间散射对应力波衰减的影响

当入射波传播方向与岩体结构面不垂直时,该结构面对应力波有很强的制导作用,沿着结构面传播的能量有聚集的趋势,对应力波衰减有较大影响.

平面装药爆炸条件下,峰值应力随传播距离的衰减规律为:

$$\sigma_z = 0.324 \Delta P e^{-0.333Z} \quad Z \geq 1.0$$

式中  $a_z$  (单位 MPa) 为距爆腔底部  $Z$  (单位 m) 处垂直向峰值应力,  $\Delta P$  (单位 MPa) 为作用于爆腔底部的



冲击波超压。

峰值质点加速度随传播距离的衰减规律为：

$$a_z = 10.7 \times 10^3 \Delta P (\rho_0 C_0 t_s) e^{-0.5Z}$$

$$Z \geq 1.0$$

式中  $a_z$  (单位  $g$ ) 为距爆腔底部  $Z$  (单位  $m$ ) 处垂向峰值加速度,  $\rho_0$  (单位  $kg/m^3$ ) 为介质的初始密度,  $t_s$  (单位  $s$ ) 为爆腔底部冲击波超压升压时间。

4.2 给出了岩土介质中常规武器不同深度钻地爆炸“等效当量埋深系数”和峰值应力随比例距离的衰减规律

为了对不同钻地深度爆炸产生的地冲击破坏效应进行预计, 研究并提出了“等效当量埋深系数”这一工程概念, 并用来描述不同埋深爆炸对地冲击效应的影响. 该系数反映了同一介质、同一距离上、产生相同地冲击强度的两种不同埋深的装药量之比, 即  $\eta = Q_a / Q_b$ , 称为  $b$  爆炸相当于  $a$  爆炸的等效当量埋深系数. 当定义  $Q_a$  为触地爆装药量时, 则等效当量埋深系数是指不同埋深爆炸相当于触地爆的等效当量埋深系数。

通过在土、混凝土和石灰岩中不同埋深爆炸自由场地冲击效应试验, 获得了不同埋深爆炸条件下应力峰值和质点加速度峰值随比例距离的衰减曲线, 如图 15-20 所示。

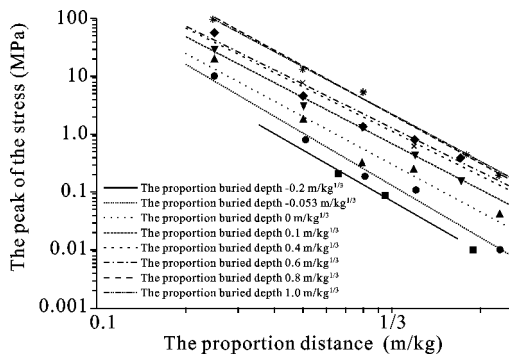


图 15 土中不同埋深爆炸应力峰值随比例距离的衰减曲线  
Fig. 15 Attenuation curve of the stress peak value corresponding to the proportion distance in soil

根据定义, 可以分别得到不同介质、不同埋深爆炸自由场地冲击参数相对于触地爆等效当量埋深系数的计算公式。

(1) 土中不同埋深爆炸相对于触地爆的应力等效当量埋深系数：

$$\eta_{\sigma} = \begin{cases} 2.10 + 20.28h - 11.14h^2 + 0.77h^3 & 0 \leq h \leq 0.8 \\ 12 & h > 0.8 \end{cases} \quad (20)$$

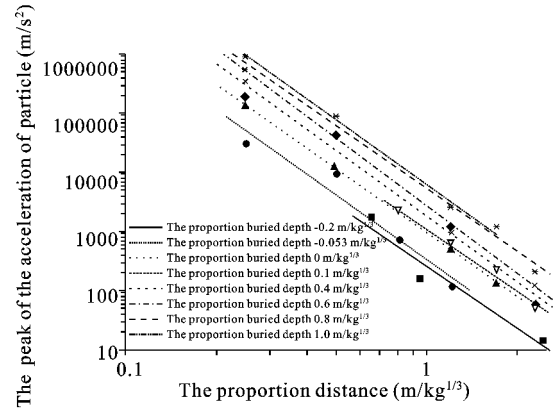


图 16 土中不同埋深爆炸质点加速度峰值随比例距离的衰减曲线

Fig. 16 Attenuation curve of the particle acceleration peak value corresponding to the proportion distance in soil

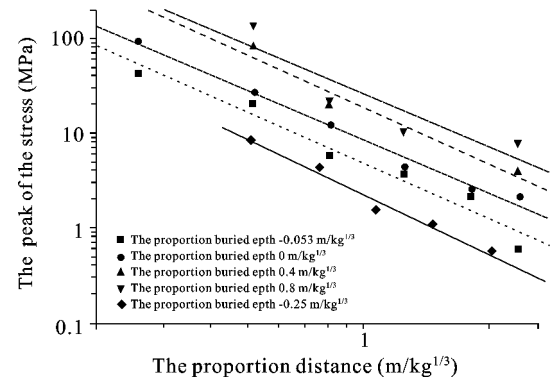


图 17 混凝土中不同埋深爆炸应力峰值随比例距离的衰减曲线

Fig. 17 Attenuation curve of the stress peak value corresponding to the proportion distance in concrete

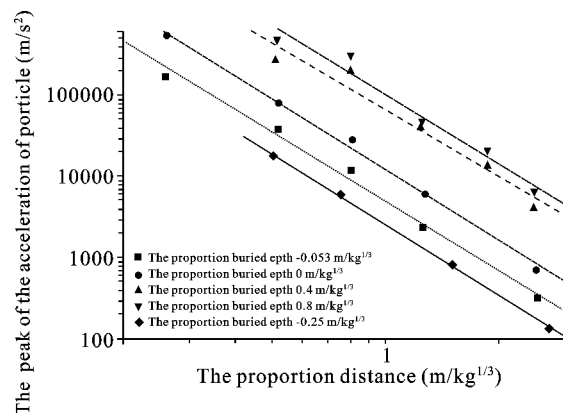


图 18 混凝土中不同埋深爆炸质点加速度峰值随比例距离的衰减曲线

Fig. 18 Attenuation curve of the particle acceleration peak value corresponding to the proportion distance in concrete

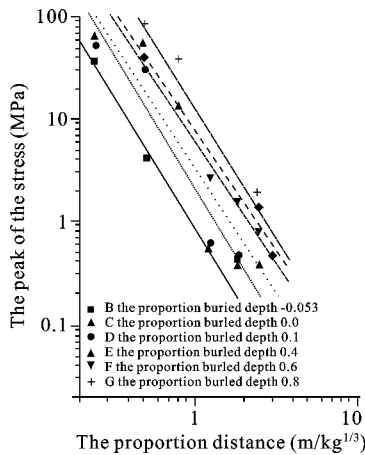


图 19 岩石中不同埋深爆炸应力峰值随比例距离的衰减曲线

Fig. 19 Attenuation curve of the stress peak value corresponding to the proportion distance in rock

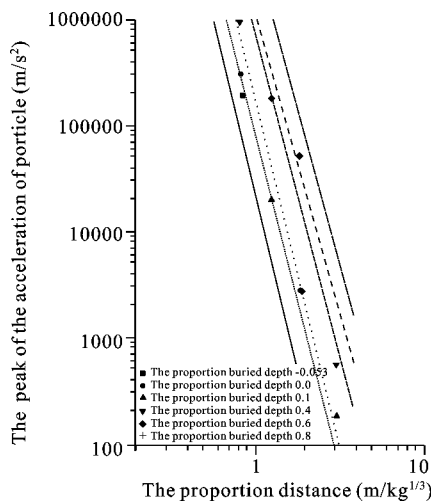


图 20 岩石中不同埋深爆炸质点加速度峰值随比例距离的衰减曲线

Fig. 20 Attenuation curve of the particle acceleration peak value corresponding to the proportion distance in rock

式中  $h$  (单位  $m/kg^{1/3}$ ) 为爆炸装药比例埋深. 土中不同埋深爆炸相对于触地爆质点加速度等效当量埋深系数:

$$\eta_{ta} = \begin{cases} 1.49 + 6.55h + 0.79h^2 - 2.82h^3 & 0 \leq h \leq 0.8 \\ 6 & h > 0.8 \end{cases} \quad (21)$$

(2) 混凝土中不同埋深爆炸相对于触地爆的应力等效当量埋深系数:

$$\eta_{ta} = \begin{cases} 2.22 + 19.14h + 5.35h^2 - 16.68h^3 & 0 \leq h \leq 0.8 \\ 16 & h > 0.8 \end{cases} \quad (22)$$

混凝土中不同埋深爆炸相对于触地爆质点加速度等效当量埋深系数:

$$\eta_{ta} = \begin{cases} 1.61 + 6.27h + 29.83h^2 - 16.66h^3 & 0 \leq h \leq 0.8 \\ 12 & h > 0.8 \end{cases} \quad (23)$$

(3) 岩石中不同埋深爆炸相对于触地爆的应力等效当量埋深系数:

$$\eta_{st} = \begin{cases} 2.68 + 32.01h + 5.18h^2 - 15.87h^3 & 0 \leq h \leq 0.8 \\ 24 & h > 0.8 \end{cases} \quad (24)$$

岩石中不同埋深爆炸相对于触地爆质点加速度等效当量埋深系数:

$$\eta_{sa} = \begin{cases} 1.41 + 4.37h + 11.30h^2 - 8.05h^3 & 0 \leq h \leq 0.8 \\ 9 & h > 0.8 \end{cases} \quad (25)$$

由以上等效当量埋深系数即可求得自由场地冲击参数随比例距离的衰减规律.

土中不同埋深爆炸自由场地冲击应力峰值随比例距离的衰减规律:

$$\sigma = 0.143 \left[ \frac{R}{(\eta_{st} Q)^{1/3}} \right]^{-2.727}$$

混凝土中不同埋深爆炸自由场地冲击应力峰值随比例距离的衰减规律:

$$\sigma = 4.923 \left[ \frac{R}{(\eta_{st} Q)^{1/3}} \right]^{-1.787}$$

岩石中不同埋深爆炸自由场地冲击应力峰值随比例距离的衰减规律:

$$\sigma = 0.9592 \left[ \frac{R}{(\eta_{st} Q)^{1/3}} \right]^{-2.49}$$

#### 4.3 基于应力波传播理论,给出了多层介质中地下结构安全防护层厚度的工程实用计算方法

安全防护层厚度的计算是多层介质中地下深埋结构防护设计的关键. 过去的方法只能计算单层介质,且缺乏理论依据,有较大局限性. 我们深入研究了地下结构破坏效应主要影响因素,确定了地下结构不同破坏等级及相应的破坏标准,总结出劈裂、压剪、弯曲、横向断裂、震塌、剥离等主要破坏形式,及完全、严重、中等和轻微破坏四个等级,揭示了各种介质中地下结构的破坏机理和特征. 同时,根据波传播理论,推导了多层不同介质中地下结构安全防护层厚度的计算方法.

当自然防护层倾斜时,安全防护层厚度  $H_0$  如下图所示,即  $C$  点上覆盖层的厚度  $|CD|$  为安全防护层厚度,可由下式确定:

$$H_0 \geq \frac{h_q - e}{\cos \alpha} + R_0$$

$$R_0 = K_a K_0 \bar{K} (\eta, Q)^{1/3}$$

$$K_0 = \begin{cases} K_z & \text{对于单层介质} \\ \bar{h}_{qm} & \text{对于 } m \text{ 层介质} \end{cases}$$

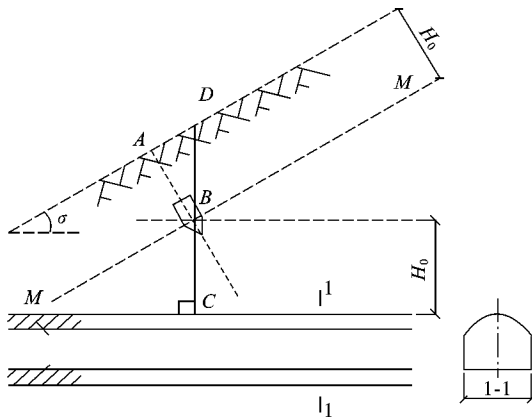


图 21 安全防护层厚度示意图

Fig. 21 The sketch of the safety-protection-layer thickness

### 5 结语

应力波理论是分析材料和结构在爆炸或冲击载荷下动态响应的重要基础,在国防和民用工程中都具有重要的应用价值。

经过近半个世纪来对非线性应力波传播理论的探索研究,我们首次确定了弹塑性材料中加、卸载边界在各种条件下的传播规律,为卸载失效分析奠定了理论基础;建立了弱非线性粘弹性本构模型,发展了非线性粘弹性波理论;创建了绝热剪切演化的“应变-应变率-温度”三变量热粘塑性本构失稳准则;发现预扭钨合金杆的绝热剪切机制,为穿甲弹实现自锐提供了理论依据;建立了大面积碎裂模型,阐明破片形成机制;揭示了强爆炸条件下应力波在分层介质中的传播规律。非线性应力波理论的发展为重大国防工程设计提供了有力的理论支撑。应用应力波理论,我们首次解决了岩土体中强爆炸的模拟难题,提出了钻地爆炸的“等效当量埋深系数”,给出了地下深埋结构安全距离的计算方法。

随着科学技术的不断发展,新的更为复杂的材料和结构不断涌现,大量涉及高速撞击现象的新问题需要解决。原则上,当所研究问题按应力波速度和问题特征长度计算得到的时间尺度与所研究现象的特征时间可以相比较时,都应该考虑应力波的传播。除了武器和防护方面的问题外,民用领域也有大量

需求,例如,飞行器、汽车、船舶和高速列车的撞击安全,地震波对大型建筑的破坏,人员的冲击伤害和防护,新型冲击吸能装置的研制,撞击探测和动态测量,等等。这些工程需求对应力波传播理论的发展和提出了新的挑战 and 更高的要求,有待我们进一步研究。

### 参考文献

- [1] 王礼立. 应力波基础 [M]. 北京:国防工业出版社出版,1985,第二版,2005. English Edition: Wang L L. Foundations of Stress Waves [M]. Amsterdam: Elsevier,2007.
- [2] Karman T von, Bohnenblust H F, Hyers D H. The Propagation of Plastic Waves in Tension Specimens of Finite Length, Theory and Methods of Integration [R]. 1942, NDRC Report A-103.
- [3] Рахматулин Х А. Распространении волны разгрузки [J]. Прикладная Математика и Механика, 1945, 9: 91-100.
- [4] Lee E H. A boundary value problem in the theory of plastic wave propagation [J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1952, 10: 335-346.
- [5] Clifton R J, Ting T C T. The elastic-plastic boundary in one dimensional wave propagation [J]. Journal of Applied Mechanics, 1968, 35: 812-814.
- [6] Ting T C T. On the initial speed of elastic-plastic boundaries in longitudinal wave propagation in a rod [J]. Journal of Applied Mechanics, 1971, 38: 441-447.
- [7] 虞吉林, 王礼立, 朱兆祥. 杆中弱间断弹塑性边界的传播速度 [J]. 科学通报, 1981, 26(19): 1213-1214. (Yu J L, Wang L L, Zhu Z X. Propagation velocity of elastic-plastic boundaries with weak discontinuities [J]. A Monthly Journal of Science, 1981, 26(19): 1213-1214. (in Chinese))
- [8] 虞吉林, 王礼立, 朱兆祥. 杆中应力波传播过程中弹塑性边界的基本性质 [J]. 固体力学学报, 1982, 3: 313-324. (Yu J L, Wang L L, Zhu Z X. Basic properties of elastic-plastic boundaries in stress wave propagation in a bar [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 1982, 3: 313-324. (in Chinese))
- [9] 王礼立, 朱兆祥, 虞吉林. 弹塑性平面波传播中弹塑性边界的间断性质 [J]. 爆炸与冲击, 1983, 3(1): 1-8. (Wang L L, Zhu Z X, Yu J L. On discontinuous properties of elastic-plastic boundaries in elastic-plastic plane waves propagation [J]. Explosion and Shock Waves, 1983, 3(1): 1-8. (in Chinese))
- [10] 虞吉林, 王礼立, 朱兆祥. 杆中弹塑性边界传播速度的

- 确定 [J]. 固体力学学报, 1984, 5 (1): 16-26. (Yu J L, Wang L L, Zhu Z X. Determination of propagation velocity of elastic-plastic boundaries in a bar [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 1984, 5 (1): 16-26. (in Chinese))
- [11] 王礼立. 塑性波, 动态屈服准则和动态塑性本构关系//李和娣. 固体力学进展及应用[C]. 庆贺李敏华院士 90 华诞文集. 北京: 科学出版社, 2007: 20-28. (Wang L L. Plastic Waves, Dynamic Yield Criterion and Dynamic Plastic Constitutive Relationship//Li H D. The Progress and Application of Solid Mechanics [C]. Collected works to celebrate the 90 anniversary of the academician Li Minhua. Beijing: Science Press, 2007: 20-28. (in Chinese))
- [12] Ting T C T. Nonexistence of Higher Order Discontinuities Across Elastic/Plastic Boundary in Elastic-plastic Wave Propagation//Sih G C, Ishlinsky A J, Mileiko S T. Plasticity and Failure Behaviors of Solids. Mem. Vol. dedicated to Prof. Yuriy Nickolaevich Rabotnov. Kluwer Academic Pub., 1990: 115-136.
- [13] 王礼立. 一维应变弹塑性压缩波传播中反向塑性变形引起的拉应力区 [J]. 爆炸与冲击, 1982, 2(2): 39-44. (Wang L L. Tensile stress regions caused by reverse plastic deformation in one dimensional strain elastic-plastic compressive wave propagation [J]. Explosion and Shock Waves, 1982, 2(2): 39-44. (in Chinese))
- [14] Wang L L. Unloading waves and unloading failures in structures under impact loading [J]. International Journal of Impact Engineering, 2004, 30 (8/9): 889-900.
- [15] Bowden F P, Field J E. The brittle fracture of solids by liquid impact, by solid impact and by shock [J]. Proceedings of the Royal Society London, 1964, A282: 331-352.
- [16] Wang L L, Field J E, Sun Q, Liu J. Surface damage of polymethylmethacrylate plates by ice and nylon ball impacts [J]. Journal of Applied Physics, 1995, 78(3): 1643-1649.
- [17] Walley S M, Field J E. The contribution of the Cavendish Laboratory to the understanding of solid particle erosion mechanisms [J]. Wear, 2005, 258: 552-566.
- [18] Menkes S B, Opat H J. Broken beams [J]. Experimental Mechanics, 1973, 13: 480-486.
- [19] Nonaka T. Some interaction effects in a problem of plastic beam dynamics, part 1; interaction analysis of a rigid-perfectly plastic beams [J]. Journal of Applied Mechanics, 1967, 34 (3): 623-630.
- [20] Wang L L, Jones N. An analysis of the shear failure of rigid-linear hardening beam under impulsive loading [J]. Acta Mechanica Sinica, 1996, 12(4): 338-348.
- [21] Nonaka T. Shear failure of a steel member due to a blast [J]. International Journal of Impact Engineering, 2000, 24 (3): 231-238.
- [22] Li Q M, Jones N. Shear and adiabatic shear failures in an impulsively loaded fully clamped beam [J]. International Journal of Impact Engineering, 1999, 22(6): 589-607.
- [23] Chen X W, Li Q M, Fan S C. Initiation of adiabatic shear failure in a clamped circular plate struck by a blunt projectile [J]. International Journal of Impact Engineering, 2005, 31(7): 877-893.
- [24] Meyers M A. Dynamic Behavior of Materials [M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1994.
- [25] 王礼立. 爆炸力学数值模拟中本构建模问题的讨论 [J]. 爆炸与冲击, 2003, 23(2): 106-113. (Wang L L. On constitutive modeling in numerical simulation of explosion mechanics [J]. Explosion and Shock Waves, 2003, 23(2): 106-113. (in Chinese))
- [26] Wang L L. A thermo-viscoplastic constitutive equation based on hyperbolic shape thermo-activated barriers [J]. Transactions ASME, Journal of Engineering Materials and Technology, 1984, 106: 331-336.
- [27] Ward I M. Mechanical Properties of Solid Polymers [M], 2nd edition. Wiley-Interscience, 1983.
- [28] Green A E, Rivlin R S. The mechanics of nonlinear materials with memory, part 1 [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1957, 1: 1-21.
- [29] Lockett F J. Nonlinear Viscoelastic Solids [M]. London: Academic Press, 1972.
- [30] 唐志平, 田兰桥, 朱兆祥, 王礼立. 高应变率下环氧树脂的力学性能 [C]. 第二届全国爆炸力学会议论文集, 中国扬州: 1981: 4-1-2. (Tang Z P, Tian L Q, Zhu Z X, Wang L L. Mechanical Behavior of Epoxy Resin Under High Strain Rates [C]. Proceedings of 2<sup>nd</sup> National Conference on Explosion Mechanics, Yangzhou, China, 1981: 4-1-12. (in Chinese))
- [31] 王礼立, 杨黎明. 固体高分子材料非线性粘弹性本构关系//王礼立, 余同希, 李永池. 冲击动力学进展 [M]. 合肥: 中国科技大学出版社, 1992: 88-116. (Wang L L, Yang L M. A Class of Nonlinear Viscoelastic Constitutive Relation of Solid Polymeric Materials//Wang L L, Yu T X, Li Y C. Progress in Impact Dynamics [M]. Hefei: The Press of China University of Science and Technology, 1992: 88-116. (in Chinese))
- [32] 周风华, 王礼立, 胡时胜. 有机玻璃在高应变率下的损伤型非线性粘弹性本构关系及破坏准则 [J]. 爆炸与冲击, 1992, 12(4): 333-342. (Zhou F H, Wang L L, Hu S S. A damage modified nonlinear viscoelastic

- constitutive relation and failure criterion of PMMA at high strain rates [J]. *Explosion and Shock Waves*, 1992, 12: 333-342. (in Chinese)
- [33] 王礼立, 施绍裘, 陈江瑛, 黄得进. ZWT 非线性热粘弹性本构关系的研究与应用 [J]. *宁波大学学报: 理工版*, 2000, 13(增刊): 141-149. (Wang L L, Shi S Q, Chen J Y, Huang D J. Studies on ZWT non-linear thermo-viscoelastic constitutive relation and its application [J]. *Journal of Ningbo University: NSEE*, 2000, 13(Supplement): 141-149. (in Chinese))
- [34] Kobayashi Akira, Wang L L. *Quest for Dynamic Deformation and Fracture of Viscoelastic Solids* [M]. Ryojin Publishers, Japan, 2001.
- [35] Wang L L. Stress wave propagation for nonlinear viscoelastic polymeric materials at high strain rates [J]. *Chinese Journal of Mechanics, Series A*, 2003, 19(1): 177-183.
- [36] Coleman B D, Noll W. An approximation theorem for functionals with applications in continuum mechanics [J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1960, 6: 355.
- [37] Coleman B D, Noll W. Foundation of linear viscoelasticity [J]. *Reviews of Modern Physics*, 1961, 33: 239.
- [38] 杨黎明, 朱兆祥, 王礼立. 短纤维增强对聚碳酸酯非线性粘弹性性能的影响 [J]. *爆炸与冲击*, 1986, 6(1): 1-9. (Yang L M, Zhu Z X, Wang L L. Effects of short glass fiber reinforcement on nonlinear viscoelastic behavior of polycarbonate [J]. *Explosion and Shock Waves*, 1986, 6(1): 1-9. (in Chinese))
- [39] Zhu Z X, Wang L L, Xu D B. A Nonlinear Thermo-viscoelastic Constitutive Equation for Thermoset Plastics at High Strain Rates [C]//Chien W Z. *Proceedings of International Conference on Nonlinear Mechanics*, Beijing, China: Science Press, 1985: 92-97.
- [40] 杨挺青, 罗文波, 徐平, 等. *粘弹性理论与应用* [M]. 北京: 科学出版社, 2004. (Yang T Q, Luo W B, Xu P, et al. *Viscoelastic Theory and Its Application* [M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese))
- [41] 冯震宙, 王新军, 王富生, 等. 朱-王-唐非线性粘弹性本构模型在有限元分析中的实现及其应用 [J]. *材料科学与工程学报*, 2007, 25(2): 269-272. (Feng Z Z, Wang X J, Wang F S, et al. Implementation and its application in finite element analysis of constitutive model for ZWT nonlinear viscoelastic material [J]. *Journal of Materials Science and Engineering*, 2007, 25(2): 269-272. (in Chinese))
- [42] Sharma A, Shukla A, Prosser R A. Mechanical characterization of soft materials using high speed photography and split Hopkinson pressure bar technique [J]. *Journal of Materials Science*, 2002, 37: 1005-1017.
- [43] Yang L M, Shim V P W, Lim C T. A visco-hyperelastic approach to modeling the constitutive behaviour of rubber [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2000, 24(6/7): 545-560.
- [44] 杨黎明, 王礼立. 用 Eshelby 理论研究复合材料线粘弹性本构关系 [J]. *爆炸与冲击*, 1991, 11(3): 244-251. (Yang L M, Wang L L. An investigation on the linear viscoelastic constitutive relation for a composite on the basis of Eshelby's theory [J]. *Explosion and Shock Waves*, 1991, 11(3): 244-251. (in Chinese))
- [45] 杨黎明, 王礼立, 朱兆祥. 刚性微粒填充的高聚物非线性粘弹性本构关系的微力学分析 [J]. *力学学报*, 1993, 25(5): 606-614. (Yang L M, Wang L L, Zhu Z X. A micromechanical analysis of the nonlinear elastic and viscoelastic constitutive relation of a polymer filled with rigid particles [J]. *Acta Mechanica Sinica (English Series)*, 1994, 10(2): 176-185. (in Chinese))
- [46] Yang L M, Shim V P W. A visco-hyperelastic constitutive description of elastomeric foam [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2004, 30(8/9): 1099-1110.
- [47] 陈江瑛, 王礼立. 水泥砂浆的率型本构方程 [J]. *宁波大学学报 (理工版)*, 2000, 13(2): 1-5. (Chen J Y, Wang L L. Rate-dependent constitutive equation of cement mortar [J]. *Journal of Ningbo University: NSEE*, 2000, 13(2): 1-5. (in Chinese))
- [48] 王礼立, 施绍裘, 陈江瑛, 等. 高应变率下水泥砂浆计及损伤演化的率型本构关系 [C]//徐秉业, 黄筑平. *塑性力学和地球动力学进展*. 北京: 万国学术出版社, 2000: 257-262. (Wang L L, Shi S Q, Chen J Y, et al. Rate-dependent Constitutive Relation for Cement Mortar at High Strain-rates by Taking Account of Damage Evolution [C]//Xu B Y, Huang Z P. *Advances in Plasticity and Geodynamics (80th Anniversary Volume in Honor of Academician Ren Wang)*. Beijing: International Academic Publishers, 2000: 257-262. (in Chinese))
- [49] Wang L L, Shi S Q, Chen J Y, et al. Influence of strain-rate and stress-state on dynamic response of cement mortar [J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamic*, 2003, 3(3): 419-433.
- [50] 王礼立, 张忠伟, 黄德进, 等. 船撞桥的钢丝绳圈柔性防撞装置的冲击动力学分析 [C]//洪友士. *应用力学进展—祝贺郑哲敏先生八十华诞*. 北京: 科学出版社, 2004: 172-180. (Wang L L, Zhang Z W, Huang D J, et al. An Impact Dynamics Analysis on a Steel-wire-rope-coil Flexible Crashworthy Device Against Ship-bridge Collision [C]//Hong Youshi. *Advances in Ap-*

- plied Mechanics, Beijing: Science Press, 2004; 172-180. (in Chinese))
- [51] Wang L L, Yang L M, Huang D J, et al. An impact dynamics analysis on a new crashworthy device against ship-bridge collision [J]. International Journal of Impact Engineering, 2008, 35(8): 895-904.
- [52] 朱兆祥, 徐大本, 王礼立. 环氧树脂在高应变率下的热粘弹性本构方程和时温等效性 [J]. 宁波大学学报(理工版), 1988, 1(1): 58-68. (Zhu Z X, Xu D B, Wang L L. Thermoviscoelastic constitutive equation and time-temperature equivalence of epoxy resin at high strain rates [J]. Journal of Ningbo University: NSEE, 1988, 1(1): 58-68. (in Chinese))
- [53] 施绍裘, 干苏, 王礼立. 国产航空有机玻璃在冲击载荷下的热粘弹性力学响应 [J]. 宁波大学学报(理工版), 1990, 3(2): 66-75. (Shi S Q, Gan S, Wang L L. The thermo-viscoelastic mechanical behavior of an aeronautical PMMA under impact loading [J]. Journal of Ningbo University: NSEE, 1990, 3(2): 66-75. (in Chinese))
- [54] 王礼立, 蒋昭镡, 陈江瑛. 材料微损伤在高速变形过程中的演化及其对率型本构关系的影响 [J]. 宁波大学学报(理工版), 1996, 9(3): 47-55. (Wang L L, Jiang Z B, Chen J Y. Micro-damage in high velocity deformation and its influence on rate-dependent constitutive relation of materials [J]. Journal of Ningbo University: NSEE, 1996, 9(3): 47-55 (in Chinese)).
- [55] Wang L L, Jiang Z B, Chen J Y. Studies on Rheological Relation of Materials by Taking Account of Rate-dependent Evolution of Internal Defects at High Strain rates [C]//Wang R. IUTAM Symposium on Rheology of Bodies with Defects. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1999: 167-178.
- [56] Sun Z J, Wang L L. Studies on dynamic damage evolution for PP/PA polymer blends under high strain rates [J]. International Journal of Modern Physics B, 2008, 22(9-11): 1409-1416.
- [57] Wang L L, Zhou F H, Sun Z J, et al. Studies on rate-dependent macro-damage evolution of materials at high strain rates [J]. International Journal of Damage Mechanics, 2010, 19: 805-820.
- [58] Wang L L, Huang D J, Gan S. Nonlinear Viscoelastic Constitutive Relations and Nonlinear Viscoelastic Wave Propagation for Polymers at High Strain Rates [C]//Kawata K, Shioiri J. Constitutive Relation in High/Very High Strain Rates. Tokyo: Springer-Verlag, 1996: 137-146.
- [59] Labibes K, Wang L L, Pluvina G. On determining the viscoelastic constitutive equation of polymers at high strain-rates [J]. DYMAT Journal, 1994, 1(2): 135-151.
- [60] 赖华伟, 王占江, 杨黎明, 王礼立. 线性粘弹性球面波的特征线分析 [J]. 爆炸与冲击, 2013, 33(1): 1-10. (Lai H W, Wang Z J, Yang L M, Wang L L. Characteristics analyses of linear visco-elastic spherical waves [J]. Explosion and Shock Waves, 2013, 33(1): 1-10. (in Chinese))
- [61] Wang L L, Lai H W, Wang Z J, Yang L M. Studies on nonlinear visco-elastic spherical waves by characteristics analyses and its application [J], International Journal of Impact Engineering, 2013, 55: 1-10.
- [62] Kolsky H. An investigation of the mechanical properties of materials at very high rates of loading [J]. Proceedings of the Physical Society, 1949, B62: 676-700.
- [63] Zhu J, Hu S S, Wang L L. An analysis of stress uniformity for viscoelastic materials during SHPB tests [J]. Latin American Journal of Solids and Structures, 2006, 3(2): 125-148.
- [64] Zhu J, Hu S S, Wang L L. An analysis of stress uniformity for concrete-like specimens during SHPB tests [J], International Journal of Impact Engineering, 2009, 36(1): 61-72.
- [65] Wang L L, Labibes K, Azari Z, Pluvina G. On the Use of Viscoelastic Bar in the Split Hopkinson Bar Technique [C]//Maekawa I. Proceedings of International Symposium on Impact Engineering, 1992, 1: 532-537.
- [66] Wang L L, Labibes K, Azari Z, Pluvina G. Generalization of split Hopkinson bar technique to use viscoelastic bars [J]. International Journal of Impact Engineering, 1994, 15(5): 669-686.
- [67] Balzer J E, Siviour C R, Walley S M, Proud W G, Field J E. Behaviour of ammonium perchlorate-based propellants and a polymer-bonded explosive under impact loading [J]. Proceedings of the Royal Society London, 2004, A460: 781-806.
- [68] Dong X L, Leung, M Y, Yu T X. Characteristics method for viscoelastic analysis in a Hopkinson tensile bar [J]. International Journal of Modern Physics B, 2008, 22(9-11): 1062-1067.
- [69] Field J E, Walley S M, Proud W G, Goldrein H T, Siviour C R. Review of experimental techniques for high rate deformation and shock studies [J]. International Journal of Impact Engineering, 2004, 30: 725-775.
- [70] 任辉启, 李砚召. 层状介质中平面波垂直层面传播的粘弹比拟方法: 理论部分 [J]. 防护工程, 1994, 1: 15-27. (Ren H Q, Li Y Z. The viscoelastic analogy meth-

- od for plane waves vertically propagating in a laminated media; theoretical part[J]. Protective Engineering, 1994, 1:15-27. (in Chinese))
- [71] Zener C, Hollomon J H. Effect of strain-rate upon plastic flow of steel [J]. Journal of Applied Physics, 1944, 15:22-32.
- [72] Recht R F. Catastrophic thermoplastic shear [J]. Journal of Applied Physics, 1964, 31:189-193.
- [73] Culver R S. Thermal Instability Strain in Dynamic Plastic Deformation[C]//Rohde R W, Butcher B M, Holland J R, Karnes C H. Metallurgical Effect at High Strain Rates. New York: Plenum Press, 1973:519-575.
- [74] Wang L L, Lu W X, Hu S S, Tang Z P. Study on the Initiation and Development of Adiabatic Shear Bands for a Titanium Alloy Under High Strain Rates[C]//Kawata K, Shioiri J. Macro-and Micro-Mechanics of High-Velocity Deformation and Fracture. Berlin: Springer-Verlag, 1987:359-406.
- [75] Wang L L. A Criterion of Thermo-viscoplastic Instability for Adiabatic Shearing[C]//Zheng Z M, et al. Proceedings of International Symposium on Intense Dynamic Loading and Its Effects. Beijing: Science Press, 1986:787-792.
- [76] 徐天平, 王礼立, 卢维娴. 高应变率下钛合金 Ti-6Al-4V 的热粘塑性特性和绝热剪切变形 [J]. 爆炸与冲击, 1987, 7(1):1-8. (Xu T P, Wang L L, Lu W X. The thermo-viscoplasticity and adiabatic shear deformation for a titanium alloy Ti-6Al-4V under high strain rates[J]. Explosion and Shock Waves, 1987, 7(1):1-8. (in Chinese))
- [77] Wang L L, Bao H S, Lu W X. The dependence of adiabatic shear banding on strain rate, strain and temperature [J]. Journal de Physique; Colloq. C3, Supplement, 1988, 49(9):C3, 207-214.
- [78] Wang L L. Adiabatic Shearing the Constitutive Instability of Materials Under Impact Loading[C]//Wang L L, Yu T X, Li Y C. Progress in Impact Dynamics. Hefei: The Press of University of Science and Technology of China, 1992:3-33.
- [79] Wang L L, Bao H S. A Strain-localization Analysis for Adiabatic Shear Band at Different Environmental Temperatures(invited lecture) [C]//Joho M, Inoue T. Mechanical Behaviour of Materials-VI. Pergamon Press, 1991, 1:479-486.
- [80] Kalthoff J F, Winkler S. Failure Mode Transition at High Rates of Shear Loading[C]//Chem C Y, et al. Impact Loading & Dynamic Behavior of Materials (1). DGM, 1988:185-195.
- [81] Kalthoff J F, Winkler S. Transition in the failure behavior of dynamically shear loaded cracks [J]. Applied Mechanics Review, 1990, 43(5):287-250.
- [82] Wang L L, Dong X L, Hu S S, Yu J L. A macro- and microscopic study of adiabatic shearing extension of mode-II crack at dynamic loading [J]. Journal de Physique IV, Colloque C8, Supp., 1994, 4:465-470.
- [83] 董新龙, 虞吉林, 胡时胜, 王悟, 王礼立. 高加载率下 II 型裂纹试样的动态应力强度因子及断裂行为 [J]. 爆炸与冲击, 1998, 18(1):62-68. (Dong X L, Yu J L, Hu S S, Wang W, Wang L L. Dynamic stress intensity factor and fracture behavior of mode-II crack under higher loading rate[J]. Explosion and Shock Waves, 1998, 18(1):62-68. (in Chinese))
- [84] 卢维娴, 陆在庆, 王礼立.  $\beta$ -Ti 合金在高应变率下的绝热剪切现象 [J]. 金属学报, 1986, 22(4):A317-320, A41-42P. (Lu W X, Lu Z Q, Wang L L. The adiabatic shear of  $\alpha$ -titanium alloy under high strain rates[J]. Acta Metallurgica Sinica, 1986, 22(4):A317-320, A41-42P. (in Chinese))
- [85] Yu J L, Wang L L. A Model of Plugging Based on Thermo-viscoplastic Shear Instability[C]//Zheng Z M, et al. Proceedings of International Symposium on Intense Dynamic Loading and Its Effects. Beijing: Science Press, 1986:546-551.
- [86] 陈立, 李永池, 王礼立. 长杆弹对钛合金靶的冲塞实验研究 [J]. 爆炸与冲击, 1994, 14(3):217-224. (Chen L, Li Y C, Wang L L. Experimental investigation on adiabatic shear plugging of Titanium alloy targets impacted by long steel rods[J]. Explosion and Shock Waves, 1994, 14(3):217-224. (in Chinese))
- [87] Chen L, Wang L L, Li Y C. Analysis of adiabatic shear plugging of thermo-viscoplastic plates [J]. DYMAT Journal, 1995, 2(3/4):167-181.
- [88] Wei Z G, Yu J L, Hu S S, Li Y C. Influence of microstructure on adiabatic shear localization of pre-twisted tungsten heavy alloys [J]. International Journal of Impact Engineering, 2000, 24(6-7):747-758.
- [89] Wei Z G, Yu J L, Li J R, Li Y C, Hu S S. Influence of stress condition on adiabatic shear localization of tungsten heavy alloys [J]. International Journal of Impact Engineering, 2001, 26(1-10):843-852.
- [90] Li J R, Yu J L, Wei Z G. Influence of specimen geometry on adiabatic shear instability of tungsten heavy alloys [J]. International Journal of Impact Engineering, 2003, 28(3):303-314.
- [91] Batra R C, Love B M. Consideration of microstructural effects in the analysis of adiabatic shear bands in a tungsten heavy alloy [J]. International Journal of Plasticity, 2006, 22:1858-1878.
- [92] Clayton J D. Dynamic plasticity and fracture in high

- density polycrystals: constitutive modeling and numerical simulation [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, 53: 261-301.
- [93] Dodd Bradley, Bai Y L. *Adiabatic Shear Localization: Frontiers and Advances* [M]. Amsterdam, Boston: Elsevier, 2012.
- [94] Mott N F. Fragmentation of shell cases [J]. *Proceedings of the Royal Society London, Ser. A*, 1947, 189 (1018): 300-308.
- [95] Kipp M E, Grady D E. Dynamic fracture growth and interaction in one dimension [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1985, 33(4): 399-415.
- [96] Grady D E. Local inertial effects in dynamic fragmentation [J]. *Journal of Applied Physics*, 1982, 53: 322-325.
- [97] Glenn L A, Chudnovsky A. Strain-energy effects on dynamic fragmentation [J]. *Journal of Applied Physics*, 1986, 59: 1379-1380.
- [98] Miller O, Freund L B, Needleman A. Modeling and simulation of dynamic fragmentation in brittle materials [J]. *International Journal of Fracture*, 1999, 96: 101-125.
- [99] Drugan W J. Dynamic fragmentation of brittle materials: analytical mechanics-based models [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2001, 49: 1181-1208.
- [100] Shenoy V B, Kim K S. Disorder effects in dynamic fragmentation of brittle materials [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2003, 51: 2023-2035.
- [101] Zhou F, Molinari J F, Ramesh K T. A cohesive-model based fragmentation analysis: effects of strain rate and initial defects distribution [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42: 5181-5207.
- [102] Zhou F, Molinari J F, Ramesh K T. Effects of material properties on the fragmentation of brittle materials [J]. *International Journal of Fracture*, 2006, 139: 169-196.
- [103] Maiti S, Rangaswamy K, Geubelle P H. Mesoscale analysis of dynamic fragmentation of ceramics under tension [J]. *Acta Materialia*, 2005, 53: 823-834.
- [104] Lankford J, Blanchard C R. Fragmentation of brittle materials at high rates of loading [J]. *Journal of Material Science*, 1991, 26: 3067-3072.
- [105] Shih C J, Meyers M A, Nesterenko V F, Chen S J. Damage evolution in dynamic deformation of silicon carbide [J]. *Acta Materialia*, 2000, 48: 2399-2420.
- [106] Wang H, Ramesh K T. Dynamic strength and fragmentation of hot-pressed silicon carbide under uniaxial compression [J]. *Acta Materialia*, 2004, 52: 355-367.

## DEVELOPMENT AND APPLICATION OF THE THEORY OF NONLINEAR STRESS WAVE PROPAGATION

Lili Wang<sup>1</sup>   Huiqi Ren<sup>2</sup>   Jilin Yu<sup>3</sup>   Fenghua Zhou<sup>1</sup>   Xiangyun Wu<sup>2</sup>  
Zhiping Tang<sup>3</sup>   Shisheng Hu<sup>3</sup>   Liming Yang<sup>1</sup>   Xinlong Dong<sup>1</sup>

<sup>(1)</sup> *Mechanics and Material Science Research Center, Mechanical Engineering  
and Mechanics Faculty, Ningbo University, Ningbo, 315211*

<sup>(2)</sup> *The Third Research Institute of Engineer Troops, Luoyang, 471023*

<sup>(3)</sup> *CAS Key Laboratory of Mechanical Behavior and Design of Materials, University of Science  
and Technology of China, Hefei, 230026*

**Abstract** Stress wave propagation theory is the basis for analyzing the dynamic response and failure characteristics of structures and materials under explosion/impact loads. It is of significant value in the defense and civil engineering. A review and some discussions on the development of the theory of nonlinear stress wave propagation and its engineering applications, carried out by the authors in nearly half a century, are presented in this paper, which includes the interaction of nonlinear stress waves and unloading failure due to the unloading stress wave, the theory of nonlinear viscoelastic wave propagation and its application, the interaction between dynamic damage/failure and stress wave, as well as the application of stress wave theory in protective engineering.

**Key words** nonlinear stress wave, unloading wave, strain rate effect, rate-dependent constitutive relationship, dynamic damage evolution, dynamic fragmentation