

郑哲敏先生逝世周年纪念专刊

泡沫子弹冲击固支单梁的耦合分析模型¹⁾张元瑞 朱玉东 郑志军²⁾ 虞吉林

(中国科学技术大学近代力学系, 中国科学院材料力学行为和 Design 重点实验室, 合肥 230027)

摘要 使用泡沫金属子弹进行冲击可以模拟爆炸载荷的作用, 这一加载技术已被应用于防护结构的抗冲击性能测试中, 然而泡沫子弹作用于被测试结构上的真实载荷以及二者间的相互作用过程尚不明晰. 本文以泡沫子弹冲击固支梁的情形为例, 开展了对该冲击过程的理论分析和数值模拟研究. 基于泡沫材料的冲击波模型与固支单梁的结构冲击动力学响应模型, 构建了描述泡沫子弹冲击固支梁过程的耦合分析模型. 给出了不同响应阶段下子弹和单梁的动力学控制方程, 并采用 Runge-Kutta 方法得到了方程的数值解. 基于三维 Voronoi 技术, 建立了泡沫子弹冲击固支单梁的有限元模型并进行了数值模拟. 通过与有限元模拟结果的对比发现, 相较于经典的脉冲加载模型, 耦合分析模型能更好地预测泡沫子弹和单梁的速度变化规律, 也能准确地预测子弹对单梁的真实冲击压强. 当泡沫子弹的初始动量相同时, 由于子弹自身的压溃行为, 子弹的初始冲击速度、密度和长度的改变都会对冲击过程产生影响. 最后, 通过耦合分析模型分别分析了泡沫子弹的密度、长度、初速度对冲击压强的峰值、衰减速度和持续时间的影响, 并针对具有不同特征的目标模拟载荷给出了泡沫子弹的筛选策略. 所构建的耦合分析模型为研究泡沫子弹与被测试结构之间的相互作用规律以及泡沫子弹的设计提供了理论基础.

关键词 泡沫子弹, 固支单梁, 冲击波, 耦合分析模型, 有限元模拟

中图分类号: O389 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-22-223

A COUPLING ANALYSIS MODEL OF CLAMPED MONOLITHIC BEAM IMPACTED BY FOAM PROJECTILES¹⁾Zhang Yuanrui Zhu Yudong Zheng Zhijun²⁾ Yu Jilin

(CAS Key Laboratory of Mechanical Behavior and Design of Materials, Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China)

Abstract The impact of foam metal projectiles may simulate the effect of explosion load. This loading technology has been applied in the impact resistance test of different protective structures. However, the actual impact load on the tested object and the interaction mechanism between the projectile and the tested object are still unclear. In this paper, the theoretical analysis and numerical simulation of the impact process of a foam projectile on a beam fixed at both ends were carried out. Based on the shock wave model of the foam and the structural dynamic response model of the clamped beam, a coupling analysis model describing the impact process was developed. The governing equations of different response stages were presented, and the numerical solution of the governing equations was obtained by using the Runge-Kutta method. The finite element model of a clamped monolithic beam impacted by a foam projectile was constructed by using the Voronoi technique and the impact process was simulated. Compared with the simulation results, it is found that

2022-05-27 收稿, 2022-07-07 录用, 2022-07-08 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11872360).

2) 郑志军, 副教授, 主要研究方向: 冲击动力学. E-mail: zjzheng@ustc.edu.cn

引用格式: 张元瑞, 朱玉东, 郑志军, 虞吉林. 泡沫子弹冲击固支单梁的耦合分析模型. 力学学报, 2022, 54(8): 2161-2172

Zhang Yuanrui, Zhu Yudong, Zheng Zhijun, Yu Jilin. A coupling analysis model of clamped monolithic beam impacted by foam projectiles. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(8): 2161-2172

the coupling analysis model can not only predict the velocity variation of projectiles and beams better than the impulsive loading model, but also obtain the actual impact pressure accurately. When the initial momentum of the foam projectile is identical, the change in the initial velocity, density, and length of the projectile can still affect the impact process due to the crushing behavior of the projectile. Finally, the effects of the density, length, and initial velocity of foam projectiles on the peak value, attenuation velocity, and duration of impact pressure were analyzed through the coupling analysis model, and the selection strategy of foam projectiles was proposed for the target simulation loads with different characteristics. The coupling analysis model provides a theoretical basis for studying the interaction mechanism between foam projectiles and the tested structure and the design guide of foam projectiles.

Key words foam projectile, clamped monolithic beam, shock wave propagation, coupling analysis model, finite element simulation

引言

泡沫材料作为吸能材料已被广泛应用于防冲击、抗爆炸等吸能缓冲装置中^[1-2]。泡沫材料在高速冲击下以逐层压溃的模式发生变形,并且由于塑性冲击波的传播会产生应力增强现象^[3-5],这一特性使得利用泡沫材料模拟爆炸载荷成为可能。Radford等^[6]提出采用由泡沫金属制成的子弹可以实现对水下或空中爆炸载荷的模拟,改变泡沫子弹的速度、密度和长度可以控制冲击载荷的脉冲幅值和持续时间。Radford等^[7-9]使用泡沫子弹测试并比较了实心结构和夹芯结构的抗冲击能力,验证了泡沫子弹这一测试手段的可靠性。

相较于真实爆炸实验,泡沫子弹加载技术更加安全、简便和易调控,因此许多学者采用泡沫子弹对多种防护夹芯结构进行了测试研究^[10-16]。例如,宋延泽等^[10]以及Jing等^[11-12]分别研究了夹芯梁、夹芯壳结构在泡沫子弹冲击下的变形与破坏模式,并分析了泡沫子弹的初始冲量对结构响应的影响。这些研究均通过泡沫金属子弹的冲击加载对各类夹芯结构的抗冲击性能及优化策略进行了探讨,但尚未有研究探讨泡沫金属子弹施加在结构上的实际冲击载荷形式以及该冲击载荷是否可以准确地模拟爆炸载荷。

对于单梁、单板、夹芯梁及夹芯板等经典结构在外载下的动态响应问题,已有学者开展了大量的研究并建立了力学分析模型。文献[17-18]首先提出单梁及夹芯梁在全局脉冲加载^[17]和局部脉冲加载^[18]下响应的脉冲加载模型,后文中简称其为QDF模型。在QDF模型的基础上,Qin等^[19-20]修正了夹芯梁的屈服准则,并通过膜力因子法^[21]应用了夹芯梁的准

确屈服面,得到了夹芯梁在脉冲加载下更为精确的冲击响应。Radford等^[7]将泡沫子弹对单梁和夹芯梁的冲击视为脉冲加载,将子弹的初始动量视为输入脉冲并使用QDF模型对单梁的响应过程进行了预测,然而理论预测值与实验结果存在较大的差距。此外,也有一些学者构建并发展了一维模型来描述夹芯结构在外载下的动态响应过程。文献[22-23]将夹芯板中的面板等效为质量块,研究了夹芯板在冲击载荷作用下的能量耗散过程。Li等^[24]根据能量等效原理将夹芯梁的面梁等效为SDOF模型(质量块-弹簧系统),考虑了面梁在大挠度变形时的弯曲/拉伸响应行为,构建了夹芯梁的一维响应模型,但是其等效原理限制了该模型只适用于常值加载的情形。

已有的研究或是将外部加载与被加载结构解耦,将外载等效为脉冲加载,通过冲量的传递与守恒关系对结构响应进行分析,往往只关注被加载结构的响应行为;或是将被加载结构简化为一维模型,分析过程虽然简单但难以研究爆炸载荷等复杂非线性载荷作用下结构的响应行为。当采用泡沫子弹作为加载测试手段时,泡沫子弹发生塑性压溃形成的冲击波传播会对冲击过程造成影响,其作用在被测试结构上的真实冲击载荷也尚未得知。因此有必要考虑泡沫压溃过程与梁变形过程的耦合关系,构建一个可以准确描述泡沫子弹冲击可变形靶体过程的力学分析模型。

本文拟以固支梁结构为例,基于泡沫材料的冲击波模型与梁的结构冲击动力学模型构建泡沫子弹冲击单梁的耦合分析模型,确定泡沫子弹作用在梁上的真实冲击载荷,研究泡沫子弹的相对密度、冲击速度等参数对其加载过程产生的影响,为泡沫子弹这一加载测试方法的应用提供更为深入的认识和设计指导。

1 理论模型

1.1 问题描述

考虑一基体材料密度为 ρ_s 、相对密度为 ρ 、初始长度为 l_0 的均匀泡沫子弹以 V_0 的初始速度冲击一可变形的固支单梁, 泡沫子弹在平行于梁长度方向的宽度为 $2a$ 。梁的密度为 ρ_b , 总长为 $2l$, 厚度为 h , 梁受载区域的长度为 $2a$, 梁与泡沫子弹在垂直纸面方向的宽度相同, 如图 1(a)。在泡沫子弹的冲击下, 单梁开始发生弯曲变形, 与此同时子弹从冲击端开始发生逐层压溃, 压溃带像冲击波一样从冲击端向远端传播, 如图 1(b)。

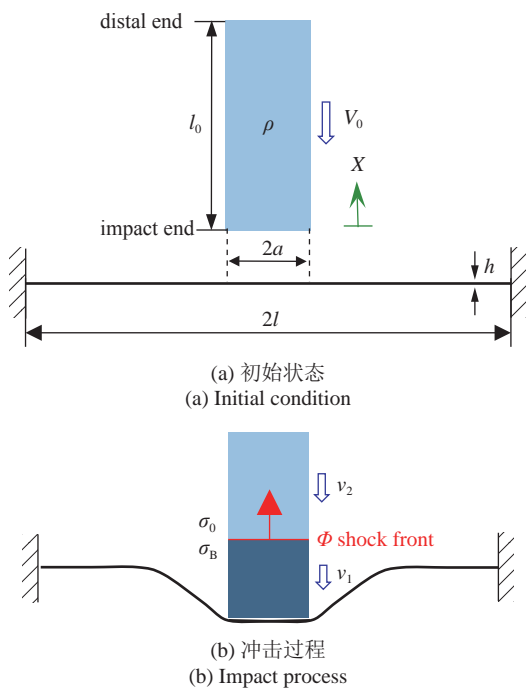


图 1 冲击情形示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the impact situation

1.2 泡沫子弹的冲击波模型

采用塑性冲击波理论能够有效地描述泡沫材料在动态冲击下的压溃行为, 结合泡沫材料的应力-应变关系可以构建泡沫子弹的冲击波模型. 采用 Zheng 等^[25-26] 提出的刚性-塑性硬化 (R-PH) 模型描述泡沫材料在单轴压缩下的应力-应变关系

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{C\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} \quad (1)$$

式中, ε 为泡沫的应变, σ_0 为初始压溃应力, C 为应变硬化参数. 材料参数 σ_0 和 C 与相对密度间的关系可

以表示为幂律形式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0(\rho) &= k_1 \sigma_{ys} \rho^{n_1} \\ C(\rho) &= k_2 \sigma_{ys} \rho^{n_2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中, σ_{ys} 为泡沫基底材料的屈服强度, k_1, n_1, k_2, n_2 均为拟合参数.

以泡沫子弹的冲击端为原点建立子弹的拉格朗日坐标系, 令 t 时刻波阵面在该坐标系中的位置为 $\Phi(t)$, 波阵面以 $\dot{\Phi}(t)$ 的波速从子弹的冲击端向远端传播. 波阵面前后方的速度、应力、应变分别为 $\{v_2(t), \sigma_0(t), 0\}$ 和 $\{v_1(t), \sigma_B(t), \varepsilon(t)\}$, 梁和泡沫子弹的相互作用区内压强 $p(t)$ 均匀分布, 如图 1(b) 所示. 根据冲击波理论, 波阵面上的质量守恒与动量守恒关系^[27] 分别给出

$$v_1 - v_2 = -\dot{\Phi}(t)(\varepsilon - 0) \quad (3)$$

$$\sigma_B - \sigma_0 = -\rho_s \rho \dot{\Phi}(t)(v_1 - v_2) \quad (4)$$

由此, 可以得到波阵面后方的应力

$$\sigma_B = \sigma_0 + \frac{\rho_s \rho (v_2 - v_1)^2}{\varepsilon} \quad (5)$$

结合式 (1) 和式 (5), 可得到冲击波波速与冲击速度之间的关系为

$$\frac{d\Phi}{dt} = v_2 - v_1 + c \quad (6)$$

将式 (6) 代入式 (4) 中可得波后应力为

$$\sigma_B = \sigma_0 + \rho_s \rho (v_2 - v_1)(v_2 - v_1 + c) \quad (7)$$

式中, $c = \sqrt{C/(\rho\rho_s)}$. 对于子弹波阵面前方的未压实区, 由牛顿第二定律可得

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{-\sigma_0}{m_p - m_1} \quad (8)$$

式中, $m_p = \rho_s \rho l_0$ 为子弹单位面积上的质量, $m_1 = \rho_s \rho \Phi$ 为子弹压实区的单位面积质量. 对于泡沫子弹波阵面后方的压实区有

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\sigma_B - p}{m_1} \quad (9)$$

泡沫子弹将一直保持上述运动状态直至压溃区速度 v_1 与未变形区速度 v_2 相等, 此时塑性波阵面停止传播, 子弹整体以相同速度 v_1 向前运动, 其加速度可表示为

$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{p}{m_p} \tag{10}$$

1.3 单梁结构冲击动力学模型

在结构冲击动力学框架下, 采用动量和动量矩定理描述单梁在大挠度变形时的结构响应行为. 忽略材料弹性对响应过程的影响, 假定梁为刚性-理想塑性材料, 其屈服强度为 σ_Y . 本文中假设梁的屈服面为正方形屈服面, 即梁的弯矩 M 和轴力 N 满足^[28]

$$|M| = M_0, |N| = N_0 \tag{11}$$

式中, $M_0 = \sigma_Y h^2/4$ 为极限弯矩, $N_0 = \sigma_Y h$ 为极限轴力.

在子弹的作用下, 单梁的中心区域受到冲击压强 $p(t)$ 的作用发生变形. 考虑到所研究问题的对称性, 下面仅对右半部分梁进行分析. 假设单梁只在垂直于其初始轴线的方向上发生变形, 其位移场为 $w(x,t)$, 速度场为 $\dot{w}(x,t)$ (这里的 \dot{w} 表示 w 对 t 的偏导), 梁跨中处的位移与速度分别为 $w_0(t)$ 和 $\dot{w}_0(t)$. 本文采用 QDF 模型^[18] 对单梁速度场的假设, 将单梁的运动与变形过程划分为 3 相, 如图 2 和图 3.

当运动处于第 1 相时, 单梁上有两个移动塑性铰产生, 内侧塑性铰向跨中处移动, 外侧塑性铰向固支端移动, 梁的速度场呈梯形分布, 如图 2. 内侧塑性铰处的弯矩 $M = M_0$, 外侧塑性铰处的弯矩 $M = -M_0$, 内外塑性铰之间的弯矩由 M_0 变化至 $-M_0$, 在内塑性铰与跨中处之间的平台区域内弯矩保持 M_0 不变, 外塑性铰与固支端之间的平台区域内弯矩为 $-M_0$, 由梁的拉伸行为引起的轴力为 N_0 , 如图 3. 由于移动塑性铰上的剪力为 0, 且单梁外塑性铰到固支端之间的部分处于静止状态, 因此固支端无剪力. 以单梁的跨中点为坐标原点, 由动量定理可知压强 $p(t)$ 对梁输入的冲量等于梁的动量改变量, 即

$$a \int_0^t p(\tau) d\tau = \int_0^l m \dot{w}(x,t) dx \tag{12}$$

式中, $m = \rho_b h$ 为梁的单位长度质量. 以梁的跨中点为参考点, 由动量矩定理可得

$$2M_0 t + N_0 \int_0^t w_0(\tau) d\tau + \frac{a^2}{2} \int_0^t p(\tau) d\tau = \int_0^l m \dot{w} x dx \tag{13}$$

当单梁的内侧塑性铰移动至跨中点时, 运动进入第 2 相, 该阶段中单梁的外侧塑性铰继续向外移动, 速度场呈三角形分布, 如图 2. 单梁跨中点至内塑性铰之间的弯矩由 M_0 变化至 $-M_0$, 如图 3, 动量与动量矩仍满足式 (12) 和式 (13).

当单梁的外侧塑性铰移动至固支端时, 运动进入第 3 相, 如图 2. 此时梁的固支端已产生剪力, 式 (12) 不再成立. 为避免在公式中引入剪力项, 以梁的夹持端为参考点, 动量矩定理表达式由式 (13) 变为

$$\int_0^t \int_0^a p(\tau)(l-x) dx d\tau - 2M_0 t - N_0 \int_0^t w_0(\tau) d\tau = \int_0^l m \dot{w}(l-x) dx \tag{14}$$

此后单梁的速度场分布形状不再改变直至运动停止.

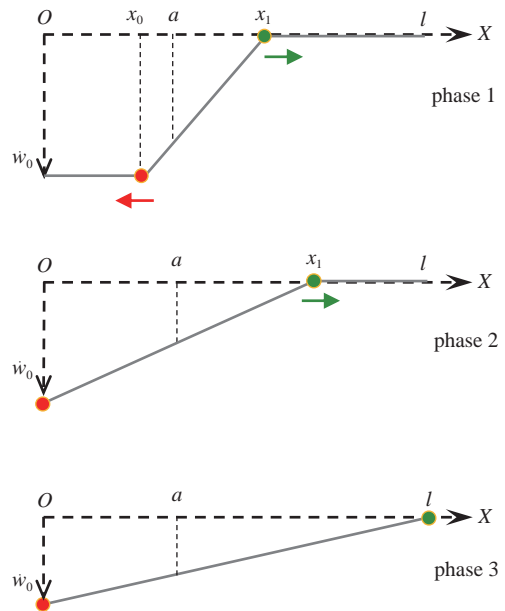


图 2 梁的速度场示意图

Fig. 2 Velocity field of the beam

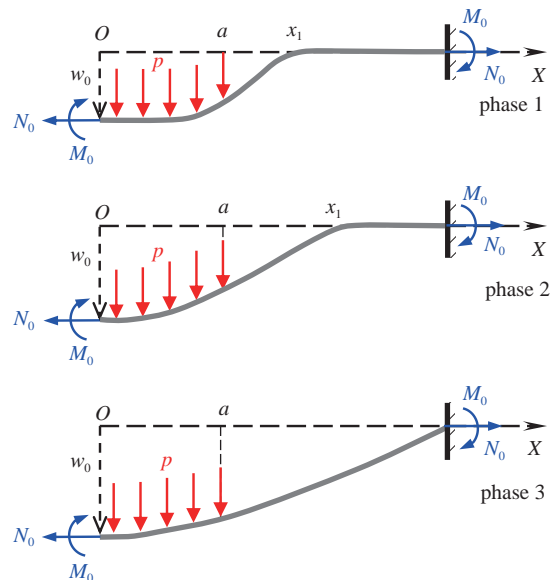


图 3 梁的位移场示意图

Fig. 3 Deflection field of the beam

1.4 泡沫子弹冲击单梁的耦合分析模型

基于泡沫子弹的冲击波模型与单梁的结构冲击动力学模型, 结合子弹冲击端与单梁之间各物理量的耦合关系, 可以建立描述泡沫子弹冲击单梁过程的耦合分析模型. 根据 1.2 节中泡沫子弹运动状态的变化及 1.3 节中受载单梁响应行为的三相, 可以将该整个冲击过程分为 4 个阶段进行分析.

第 I 阶段: 泡沫子弹冲击端有一道冲击波形成并向远端传播, 单梁承受来自子弹冲击端的压强 $p(t)$. 单梁的速度场 $\dot{w}(x, t)$ 整体呈梯形分布. 子弹的冲击端前端始终与梁紧密接触, 因此认为单梁的跨中速度 $\dot{w}_0(t)$ 与子弹冲击端的速度 $v_1(t)$ 始终相等. 单梁内侧塑性铰与外侧塑性铰间的速度呈线性变化, 速度场可表达为

$$\dot{w}(x, t) = \begin{cases} v_1, & 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} v_1, & x_0 \leq x \leq x_1 \\ 0, & x_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad (15)$$

式中, x_0 和 x_1 分别为内、外塑性铰的位置. 由于移动塑性铰上的剪力为 0, 梁两侧内塑性铰之间的部分的加速度即为^[29]

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{p}{m} \quad (16)$$

联立式 (9) 和式 (16) 可得冲击压强 p

$$p = \frac{m\sigma_B}{m + m_1} \quad (17)$$

以及梁的跨中加速度

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\sigma_B}{m + m_1} \quad (18)$$

式中, σ_B 见式 (7). 将速度场代入式 (12) 和式 (13) 并对 t 求导后可得

$$m\dot{v}_1(x_1 + x_0) + mv_1(\dot{x}_0 + \dot{x}_1) = 2ap \quad (19)$$

$$(2mv_1x_0 - B_2)\dot{x}_0 + (2mv_1x_1 - B_2)\dot{x}_1 - B_1\dot{v}_1 = C_1 \quad (20)$$

式中, B_1, B_2, C_1 分别定义为

$$B_1 = 3ma(x_1 + x_0) - 2m(x_0^2 + x_0x_1 + x_1^2) \quad (21)$$

$$B_2 = 3mv_1a - 2mv_1(x_0 + x_1) \quad (22)$$

$$C_1 = 24M_0 + 12N_0w_0 \quad (23)$$

将式 (17) 代入式 (19) 中可得

$$m(x_0 + x_1)\dot{v}_1 + mv_1(\dot{x}_0 + \dot{x}_1) = 2a \frac{m\sigma_B}{m + m_1} \quad (24)$$

综合子弹冲击波模型中的式 (6)、式 (8) 及耦合模型中的式 (18)、式 (20) 和式 (24), 可得关于第 I 阶段中 $v_2(t), \Phi(t), v_1(t), x_0(t), x_1(t), w_0(t)$ 各物理量的控制方程组.

第 II 阶段: 泡沫子弹内的冲击波继续传播, 梁的内侧塑性铰到达跨中点, 即 $x_0 = 0$. 该阶段内梁的速度场呈三角形分布, 可表示为

$$\dot{w}(x, t) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1} v_1, & 0 \leq x \leq x_1 \\ 0, & x_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad (25)$$

将式 (25) 代入式 (12) 和式 (13) 并分别对 t 求导后可化简得

$$mx_1\dot{v}_1 + mv_1\dot{x}_1 = 2ap \quad (26)$$

$$m\dot{v}_1(3ax_1 - 2x_1^2) + m\dot{x}_1(3av_1 - 4v_1x_1) = -C_1 \quad (27)$$

联立式 (9) 和式 (26) 可得

$$(mx_1 + 2m_1a)\dot{v}_1 + mv_1\dot{x}_1 = 2a\sigma_B \quad (28)$$

综合式 (6)、式 (8) 以及式 (27) 和式 (28) 即可得第 II 阶段的泡沫子弹和单梁的控制方程组.

第 III 阶段: 子弹内的波阵面停止传播, 冲击波消失, 子弹整体以速度 v_1 运动, 单梁的速度场形状仍与第 II 阶段中的相同, 呈三角形, 因此式 (26) 和式 (27) 仍然成立. 将泡沫子弹此时的加速度式 (10) 代入式 (26) 可得

$$(mx_1 + 2m_p a)\dot{v}_1 + mv_1\dot{x}_1 = 0 \quad (29)$$

综合式 (29) 和式 (27) 可得第 III 阶段内子弹和单梁运动的控制方程组.

第 IV 阶段: 子弹以速度 v_1 继续运动, 单梁外侧塑性铰到达固支端, 即 $x_1 = l$, 该阶段单梁的速度场可表达为

$$\dot{w}(t) = \frac{l - x}{l} v_1 \quad (30)$$

将式 (30) 代入式 (14) 后并对 t 求导可得

$$p\left(al - \frac{1}{2}a^2\right) - 2M_0 - N_0w_0 = \frac{1}{3}m\dot{v}_1l^2 \quad (31)$$

将式 (10) 代入式 (31)

$$\dot{v}_1 = -\frac{12M_0 + 6N_0w_0}{2ml^2 + 3m_p(2al - a^2)} \quad (32)$$

式 (32) 即为第 IV 阶段的控制方程. 当 $v_1 = 0$ 时, 认为

子弹冲击单梁的响应过程结束, 该时刻为单梁的响应结束时刻 T_0 , 此时单梁的跨中挠度为永久挠度 W_0 .

对于初始时刻的子弹和单梁, 有 $m_1 = 0, v_1 = 0, v_2 = V_0, w_0 = 0, \sigma_B = p_0$, 将该初始条件代入式 (18)、式 (20) 和式 (24) 可化简得到初始时刻单梁内外塑性铰的位置分别为

$$x_0(0) = a - \sqrt{\frac{12M_0}{p_0}}, \quad x_1(0) = a + \sqrt{\frac{12M_0}{p_0}} \quad (33)$$

式中, $p_0 = \sigma_0 + \rho_s \rho V_0(V_0 + c)$. 基于该初始条件, 采用一阶 Runge-Kutta 方法对第 I 阶段的控制方程组进行数值求解可得第 I 阶段各物理量随时间的变化, 再以第 I 阶段结束时各物理量的值作为第 II 阶段的初始条件进行数值求解. 以此类推, 最终可求解得到整个响应过程中各物理量的解.

2 有限元模拟

构建闭孔泡沫子弹冲击单梁的有限元模型, 并采用有限元软件 ABAQUS/Explicit 进行求解. 利用三维 Voronoi 技术^[26]构造了闭孔泡沫模型, 如图 4. 泡沫子弹的横截面为正方形, 边长为 35 mm, 相对密度 ρ 和初始长度 l_0 如表 1 所示. 其中, P1 的密度最小, P7 的密度最大; P3, P4, P5 的初始冲击速度 V_0 、初始动量 I_0 、初始动能 E_{k0} 均相同, 相对密度 ρ 和长度 l_0 不同; P2, P4, P6 的相对密度 ρ 、初始动量 I_0 相同, 初始冲击速度 V_0 和长度 l_0 不同. 泡沫子弹的基体材料为铝, 采用弹性-理想塑性的材料模型, 密度 ρ_s 为 2700 kg/m³, 杨氏模量为 69 GPa, 泊松比为 0.3, 屈服应力 σ_{ys} 为 165 MPa. 将泡沫子弹的模型划分成 S3R 壳单元, 由网格敏感性分析确定网格尺寸约为 0.3 mm. 通过拟合单轴数值压缩试验中泡沫铝的应力-应变曲线^[30]可以得到式 (2) 中的参数 $k_1 = 0.885, n_1 = 1.37, k_2 = 0.115, n_2 = 1.50$.

单梁的总长度 $2l$ 为 250 mm, 厚度 h 为 2 mm, 宽度与子弹的截面边长相等, 即 35 mm. 单梁材料为 304 钢, 采用弹塑性材料模型, 其密度 ρ_b 为 7750 kg/m³, 杨氏模量为 193 GPa, 泊松比为 0.3, 屈服强度 σ_Y 为 340 MPa. 采用 C3D8R 实体单元对单梁进行了网格划分, 由网格收敛性分析确定网格尺寸约为 0.5 mm. 限制了梁左右两端面上所有节点的所有自由度以实现梁两端的固支约束, 如图 5. 该模型中采用了通用接触, 摩擦系数为 0.02.

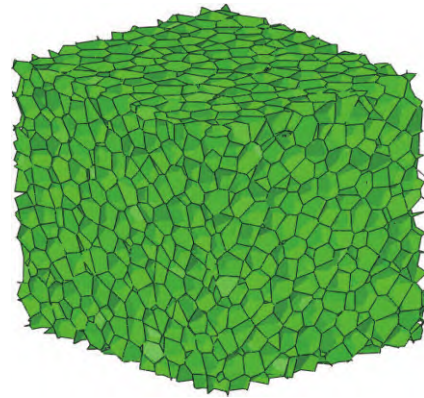


图 4 泡沫子弹的 Voronoi 模型
Fig. 4 Voronoi model of a foam projectile

表 1 不同泡沫子弹的参数
Table 1 Parameters of uniform foam projectiles

Type	ρ	$V_0/(m \cdot s^{-1})$	l_0/mm	$I_0/(kN \cdot s \cdot m^{-1})$	$E_{k0}/(kJ \cdot m^{-2})$
P1	0.10	100	45	1.215	60.75
P2	0.15	100	60	2.43	121.5
P3	0.10	200	45	2.43	243
P4	0.15	200	30	2.43	243
P5	0.20	200	22.5	2.43	243
P6	0.15	300	20	2.43	364.5
P7	0.30	200	15	2.43	243

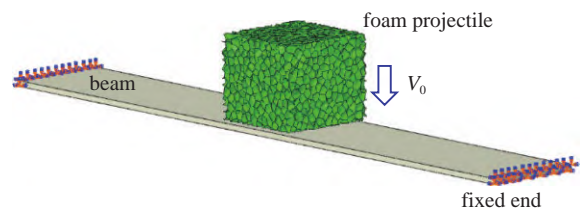


图 5 泡沫子弹冲击单梁的有限元模型
Fig. 5 Finite element model of a foam projectile and a beam

3 结果与讨论

3.1 变形模式

观察泡沫子弹 P4 冲击单梁的有限元模拟结果可以发现, 在冲击初始, 泡沫子弹的冲击端形成了一道压溃带, 压溃带将子弹的未变形区与压实区分隔开来, 并向子弹远端传播. 单梁在跨中处附近及受载区域的外侧均形成了塑性铰, 如图 6(a). 随着冲击的进行, 单梁两侧的内塑性铰移动到跨中点处汇聚, 外塑性铰继续向外移动, 如图 6(b). 随后, 子弹内的波

阵面移动速度逐渐变慢直至停止, 此时子弹停止压溃, 其整体以相同的速度向前运动, 如图 6(c). 泡沫子弹与单梁的变形模式与耦合分析模型中的设想基本相同. 整个冲击过程中, 子弹的冲击端与单梁的受载区域始终紧密接触. 虽然子弹的冲击端面实际为曲面, 但各处的速度差别较小, 因此可将子弹冲击端的位移和速度近似为单梁的跨中位移和速度.

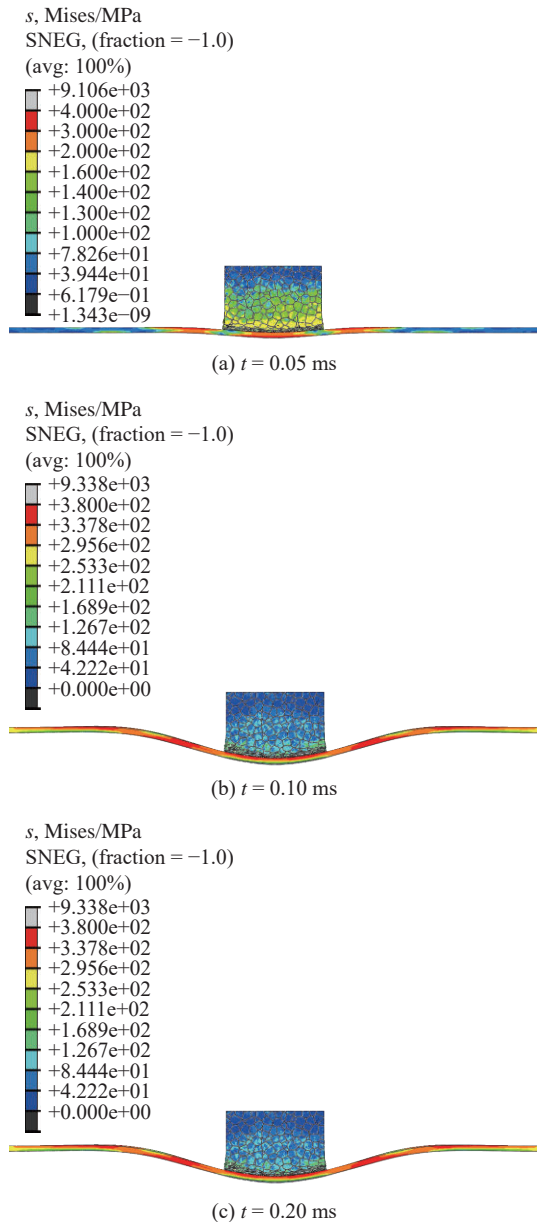


图 6 子弹和梁的 Mises 应力云图

Fig. 6 The Mises stress nephogram of the foam projectile and the beam

3.2 与有限元结果的比较

以泡沫子弹 P4 冲击单梁的情形为例, 将 QDF 模型^[18]和耦合分析模型预测的理论结果与有限元结果进行对比和分析. 理论分析中泡沫子弹和单梁

的结构、材料参数与有限元模型中的对应参数保持一致. 在有限元模拟中, 取固支梁受载区域中心附近 (如 $2\text{ mm} \times 2\text{ mm}$ 的区域内) 的节点速度的平均值为 v_1 , 泡沫子弹远端端面上节点速度的平均值为 v_2 , 提取固支梁受载区域内的节点在加载方向上节点力, 由其总和除以子弹横截面面积计算冲击压强 p .

在初始阶段, QDF 模型预测的 v_1 保持恒定不变, 随后快速衰减至 0. 与有限元结果中的 v_1 相比, 两者的变化趋势有显著的差异, 如图 7. QDF 模型预测的响应结束时间 T_0 约为有限元结果的一半, 而其预测的永久挠度 W_0 为 23.04 mm , 高于有限元结果的 20.51 mm . 采用 QDF 模型预测该冲击过程相当于认为泡沫子弹的动量在初始时刻全部传递给了单梁的受载区域, 不仅忽略了单梁的加速过程, 也使得单梁被赋予了过高的初速度, 导致预测的最终挠度偏高, 这与 Radford 等^[7]的研究中梁最终挠度的实验结果低于预测值的现象一致. 将泡沫子弹的加载简单地等效为脉冲加载会导致无法准确地预测梁的响应过程, 因此必须考虑子弹内的冲击波传播以及子弹与梁之间的相互作用.

相较于 QDF 模型, 耦合分析模型预测的 v_1 和 v_2 与有限元结果的整体趋势吻合得更好, 如图 8, 跨中挠度的变化趋势也基本一致, 如图 9. 在耦合分析模型中, 由于子弹内冲击波的传播, 第 I 和第 II 阶段中子弹的压实区和单梁一起加速, 子弹的未压实区不断减速. 从第 III 阶段开始, 由于冲击波消失, 子弹整体和单梁跨中点一起减速 (图中的虚线标记了每一阶段的结束时刻). 耦合分析模型预测的 v_1 峰值与有限元结果相比偏低, 这是由于本文中采用的是正方形屈服准则, 较高地估计了单梁的屈服强度. 需要注意的是, 在冲击后期 (第 IV 阶段), 无论是 QDF

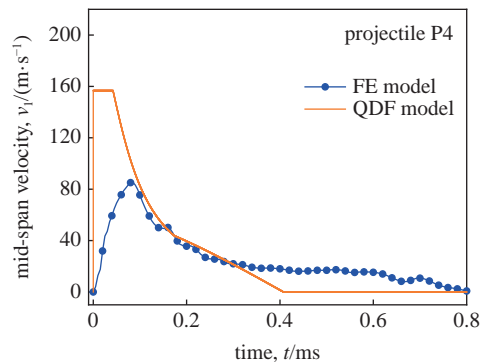


图 7 有限元模拟与 QDF 模型预测的速度 v_1

Fig. 7 Velocity v_1 predicted by simulation and QDF model

模型还是耦合分析模型,其预测的 v_1 与有限元结果相比均衰减得更快,产生这种差别的原因是对冲击后期单梁速度场的假设不够准确,需要在后续研究中进一步修正。

QDF 模型由于其“冲量传递”的分析方法,无法得到泡沫子弹对单梁施加的载荷,而耦合分析模型预测的压强 p 与有限元结果中单梁所受压强吻合较好,如图 10 所示。在有限元模拟中,泡沫子弹的初始压溃需要响应时间,接触区的压强实际是从 0 开始

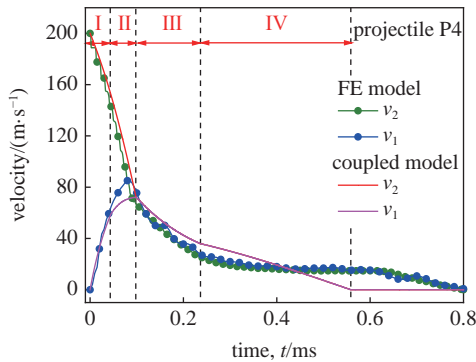


图 8 有限元模拟与耦合分析模型预测的速度
Fig. 8 Velocity predicted by simulation and coupled model

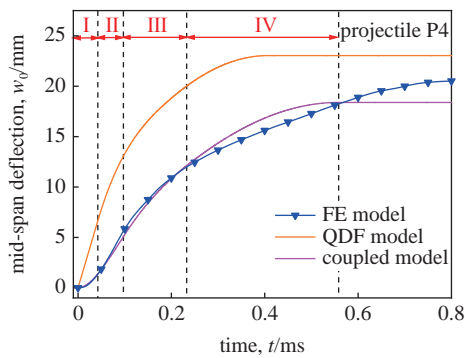


图 9 跨中挠度 w_0 时程曲线
Fig. 9 Time history curves of mid-span deflection w_0

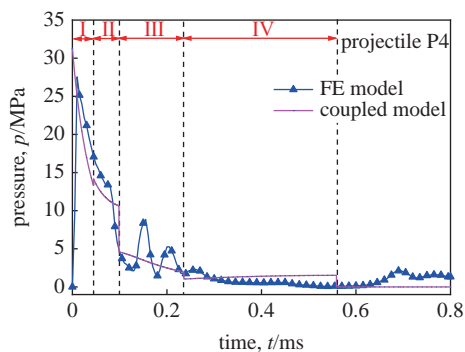


图 10 冲击压强 p 随时间的变化
Fig. 10 Variation of impact pressure p with time

迅速增加至峰值,但由于这一过程过于短暂且迅速,因此耦合分析模型忽略了该响应过程,认为在泡沫子弹的冲击端与固支梁接触的瞬间就发生了冲击压溃并达到了峰值压强。在耦合分析模型中,随着波阵面前后速度差距的减小和子弹压实区质量的逐渐增大,第 I 和第 II 阶段的冲击压强快速衰减。当冲击过程由第 II 阶段进入第 III 阶段时,即 $t = 0.1 \text{ ms}$ 时,理论和模拟中的冲击压强均出现了明显的阶跃。此时,子弹中的冲击波阵面的消失和子弹运动状态的突变导致冲击压强发生了突变。第 III 阶段中,冲击压强的衰减速度明显变慢。冲击过程后期,即 0.7 ms 后,单梁的弹性回弹使得其与泡沫子弹间产生了一些接触与碰撞,因此压强出现了小幅度的上升。由于泡沫材料在动态压缩下的初始压溃应力高于其准静态下的初始压溃应力^[26],而耦合分析模型中使用的 R-PH 模型描述的是泡沫材料在准静态压缩下的应力-应变关系,因此有限元结果中的冲击压强略高于理论预测压强。

通过对理论结果与有限元结果中速度、挠度、冲击压强的比较,耦合分析模型的有效性和准确性得以验证。观察冲击过程的 4 个响应阶段可以发现,第 I 和 II 阶段中,即泡沫子弹中有冲击波传播时,子弹对单梁的做功最多、影响最大,说明泡沫子弹中冲击波传播的效应无法忽略(后文中对于冲击压强的分析也主要针对第 I 和 II 阶段中的压强)。由于明显的阶跃特征与各阶段不同的衰减速度,均匀泡沫子弹产生的载荷形式与爆炸载荷仍存在一定的差距。因此,若想实现模拟具有连续非线性衰减特征的爆炸载荷,还需对泡沫子弹进行进一步的设计。

3.3 冲击过程的其他情形

当泡沫子弹的参数发生改变时,冲击过程还存在一些其他情形。若单梁的第 I 阶段速度场满足 1.4 节中的梯形假设,则初始时刻一定满足 $x_0 > 0$,由式 (33) 可得该情况下初始冲击压强 p_0 应满足

$$p_0 > \frac{3\sigma_Y h^2}{a^2} \tag{34}$$

当泡沫子弹的密度和初速度均较小时(如子弹 P1,其相对密度为 0.1,初始冲击速度为 100 m/s),初始冲击压强 p_0 也较小。当 $p_0 < 3\sigma_Y h^2/a^2$,不足以使单梁在其跨中处附近形成两个内侧的塑性铰,因此单梁的第 I 阶段速度场即为三角形速度场(如图 2(b))

而非梯形速度场. 这种情况下子弹与单梁的初始阶段的控制方程即为 1.4 节中第 II 阶段的控制方程组, 由边界条件 $m_1 = 0, v_1 = 0, v_2 = V_0, w_0 = 0, x_0 = 0, \sigma_B = p_0$ 可化简得到单梁外塑性铰的初始位置分别为

$$x_1(0) = \frac{3}{2}a + \frac{6M_0}{ap_0} \quad (35)$$

子弹与单梁随后的响应过程与 1.4 节中的相同.

当泡沫子弹的密度较大而总重较轻时 (如子弹 P7), 子弹的初始冲击压强 p_0 较大, 但由于总质量较轻, 子弹的压实区与未压实区的速度很快达到相等, 单梁的加速过程很快结束. 在此期间泡沫子弹对单梁的加载峰值虽高但衰减也快, 使得子弹内的冲击波消失时单梁的两个内侧塑性铰还未汇聚到跨中处. 此后内塑性铰的位置将保持不变, 外塑性铰的位置继续向外移动. 比较这些情形下耦合分析模型的预测结果与有限元模拟结果发现, 无论是速度 (如图 11 和图 12) 还是冲击压强 (如图 13) 均吻合得较好. 当子弹的截面边长较长时, 还可能出现子弹冲击波消失前外塑性铰已到达固支端的情形, 本文中不

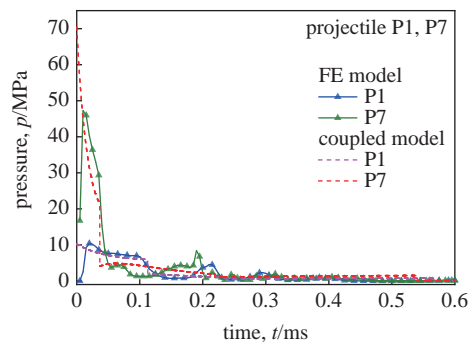


图 13 泡沫子弹 P1 和 P7 的冲击压强历程曲线
Fig. 13 Pressure history curves of foam projectiles P1 and P7

再详细讨论.

3.4 相同初始动量的泡沫子弹的参数影响分析

在泡沫子弹初始动量不变的前提下, 研究初速度、密度等参数变化对冲击过程产生的影响. 以表 1 中的泡沫子弹 P3, P4, P5 为例, 其相对密度 ρ 和初始长度 l_0 不同, 初始冲击速度 V_0 和总质量 m_p 相同, 因此初始动量 I_0 和初始动能 E_{k0} 均保持不变. 由于 3 种子弹的初始动量相同, 采用 QDF 模型预测的响应过程也完全相同, 但有限元结果中 3 种子弹冲击下单梁的跨中速度 v_1 具有显著差异, 这再次说明了泡沫子弹的加载不能等效于脉冲加载, 如图 14. QDF 模型不适用于预测泡沫子弹的冲击过程, 也无法研究初始动量相同时子弹的参数变化对冲击响应产生的影响.

采用耦合分析模型进行预测时, 可以发现其对子弹 P3, P4 和 P5 冲击过程的预测结果与有限元结果均有较好的一致性, 如图 15. 当相对密度 ρ 越大时, 子弹的波前和波后应力越大, 冲击压强 p 也越大, 使得子弹未变形区速度 v_2 和单梁跨中速度 v_1 变化

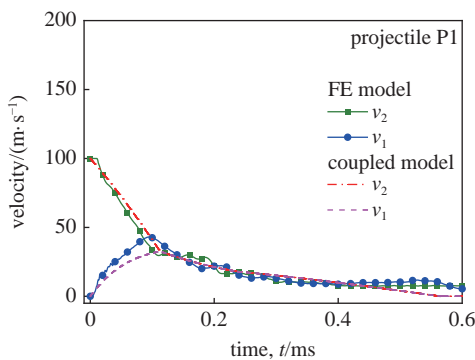


图 11 泡沫子弹 P1 的速度历程曲线
Fig. 11 Velocity history curves of foam projectile P1

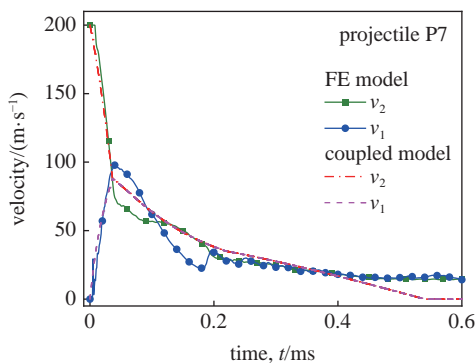


图 12 泡沫子弹 P7 的速度历程曲线
Fig. 12 Velocity history curves of foam projectile P7

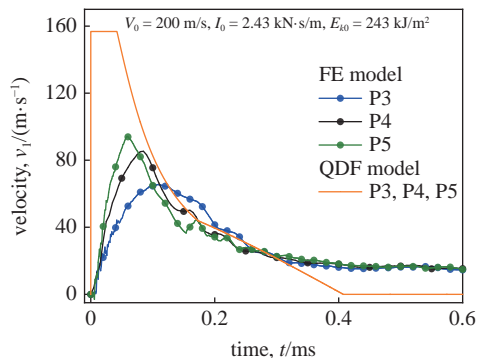


图 14 QDF 模型预测速度 v_1 与有限元结果比较
Fig. 14 Comparison between prediction velocity v_1 of the QDF model and simulation results

得更快, 因此 v_1 和 v_2 会更快达到一致 (由于压实区质量相较于子弹总重和单梁质量很小, 这里忽略压实区质量变化带来的影响), 如图 15(a). 因此, 密度越大的泡沫子弹形成的冲击压强峰值越高, 衰减得也越快, 如图 15(b). 冲击过程中, 子弹的动能一部分转化为单梁的动能和内能, 另一部分则通过子弹自身的压溃行为被耗散, 转化为子弹的内能, 能量守恒关系可表达为

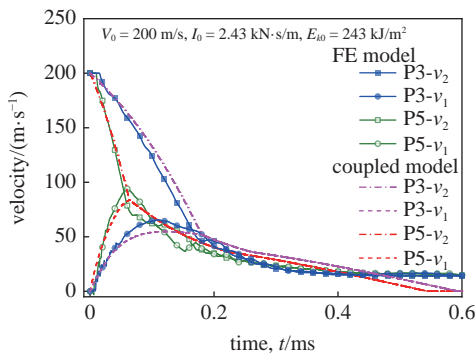
$$E_{k0} = E_{k-b} + E_{I-b} + E_{k-p} + E_{I-p} \quad (36)$$

式中, E_{k-p} 和 E_{k-b} 分别为子弹和单梁的动能, E_{I-p} 和 E_{I-b} 分别为子弹和单梁的内能. 在 v_1 与 v_2 相等时刻, 由于子弹中的冲击波消失, 此后子弹不再压溃, 其内能也不再增加, 在这一时刻子弹的内能即为冲击结束时子弹的内能. 从图 15(a) 中可以看出, 与子弹 P3 相比, 子弹 P5 冲击下的单梁在冲击波消失时刻的跨中速度和挠度更大, 因此该时刻子弹 P5 和单梁的动能 E_{k-p} , E_{k-b} 以及单梁的内能 E_{I-b} 均偏大, 子弹 P5 的内能 E_{I-p} 偏小. 当冲击结束时, 子弹的初始动能完全被单梁和子弹自身耗散, 转化为两者的内能, 此时有

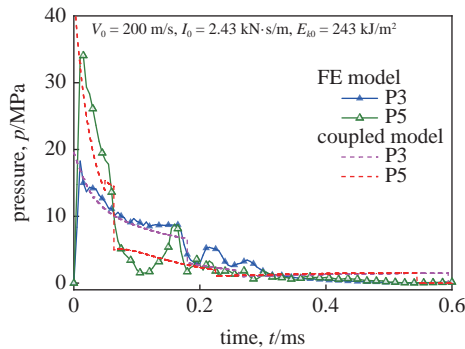
$$E_{k0} = E_{I-b} + E_{I-p} \quad (37)$$

由于子弹 P3 和 P5 的初始动能均相同而后者的内能 E_{I-p} 偏小, 因此子弹 P5 冲击下单梁耗散的内能 E_{I-b} 增多, 产生的永久挠度也偏大. 虽然这三种泡沫子弹的初始动能和动量均相同, 但相对密度和长度的不同影响了冲击过程, 导致子弹产生的冲击压强和单梁的响应行为均产生了差异.

对于泡沫子弹 P2, P4, P6, 其相对密度 ρ 和初始动量 I_0 保持一致, 初始冲击速度 V_0 、初始长度 l_0 和子弹总重 m_p 不同. 子弹 P6 的初始冲击速度 V_0 较高, 因此子弹的波后应力增强, 产生较强的冲击压强, 单梁的跨中速度 v_1 也增加较快. 由于波前应力不发生改变且子弹 P6 的总重偏小, 其未变形区的速度 v_2 也衰减得较快, 如图 16(a), 冲击压强整体呈峰值高, 衰减快的变化规律, 如图 16(b). 相较于子弹 P2 和 P4, 泡沫子弹 P6 的初始动能较大, 因此在其冲击下单梁的最终挠度也越大. 耦合分析模型预测的不同子弹冲击下单梁的永久挠度与有限元模拟结果虽具有一些差距, 但整体变化趋势吻合较好, 如图 17, 这也再次验证了耦合分析模型的有效性和可靠性.

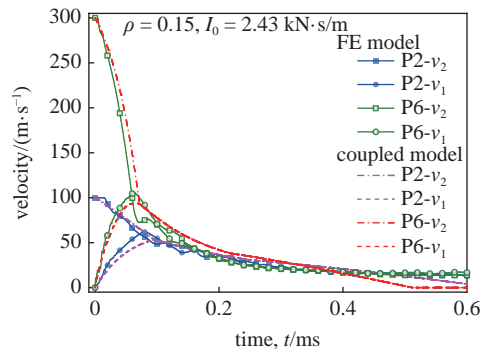


(a) 速度 v_1 和 v_2
(a) Velocities v_1 and v_2

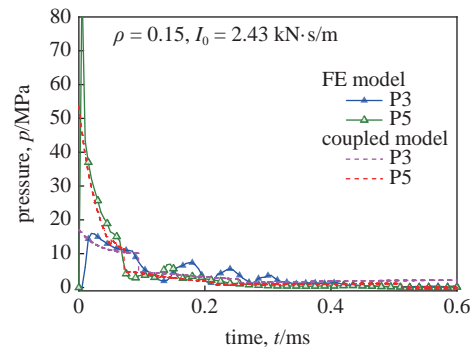


(b) 冲击压强 p
(b) Impact pressure p

图 15 泡沫子弹 P3 和 P5 的冲击响应
Fig. 15 Impact response of foam projectiles P3 and P5



(a) 速度 v_1 和 v_2
(a) Velocities v_1 and v_2



(b) 冲击压强 p
(b) Impact pressure p

图 16 泡沫子弹 P2 和 P6 加载下的冲击响应
Fig. 16 Impact response of foam projectiles P2 and P6

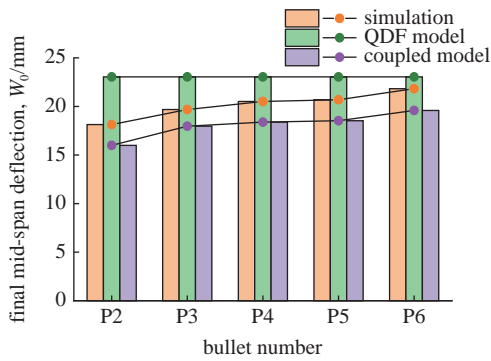


图 17 等初始动量子弹 P2 至 P6 冲击下单梁的永久跨中挠度 W_0
 Fig. 17 Final mid-span deflection W_0 of beam impacted by projectile with same initial momentum I_0

3.5 泡沫子弹的参数影响分析

泡沫子弹的相对密度 ρ , 初始长度 l_0 及初始冲击速度 V_0 的改变会对冲击过程产生不同的影响. 对于长度和初速度相同的泡沫子弹, 相对密度越高的子弹波后应力 σ_B 越大, 由式 (17) 和式 (18) 可知冲击压强峰值和单梁的跨中加速度均会随着波后应力的增大而增大, 这会使得高密度子弹的波前速度 v_2 和波后速度 v_1 更快达到一致, 因此第 I, II 阶段的冲击压强衰减得更快, 持续时间也更短, 如图 18. 当泡沫子弹的相对密度和初速度均相等, 而初始长度 l_0 不同时, 子弹在初始时刻形成的冲击压强峰值不会发生改变. 当子弹的长度越长, 子弹的质量越重, 导致未变形区的速度 v_2 衰减较慢, 子弹会较迟进入整体减速阶段, 因此长度越长的子弹打击单梁时, 第 I, II 阶段的冲击压强的衰减速度变慢, 持续时间变长, 如图 19. 当泡沫子弹的其他参数不变, 初始速度 V_0 越高时, 冲击压强峰值越高, 子弹的压实速度变快, 因此子弹的未变形区质量偏低, 子弹远端的速度 v_2 会衰减较快, 冲击压强的衰减速度也变快. 但由于子弹初速度较大, 子弹波阵面前后速度达到一致所

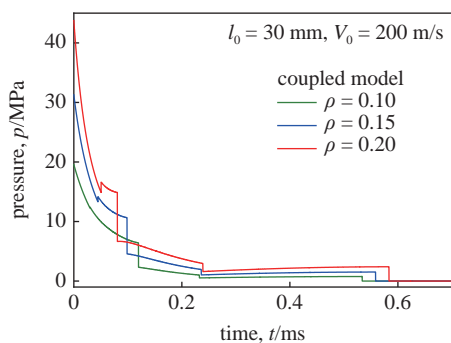


图 18 相对密度 ρ 对冲击压强的影响
 Fig. 18 Influence of relative density ρ on impact pressure

需的响应时间也更长, 因此第 I, II 阶段的冲击压强的持续时间也更长, 如图 20. 综合以上分析, 可以根据目标冲击载荷的特征对均匀泡沫子弹进行设计和筛选: 提高泡沫子弹的密度可以提高冲击载荷峰值, 加快载荷衰减速度, 并减少载荷的持续时间; 增加泡沫子弹的长度可以减缓冲击载荷衰减速度, 减少载荷的持续时间且不改变载荷峰值; 提高泡沫子弹的初始冲击速度可以提高冲击载荷的峰值, 提高载荷的衰减速度并延长载荷的持续时间.

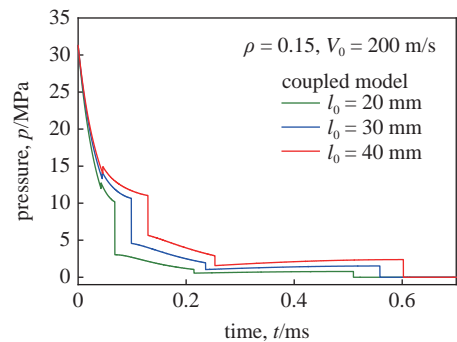


图 19 初始长度 l_0 对冲击压强的影响
 Fig. 19 Influence of initial length l_0 of on impact pressure

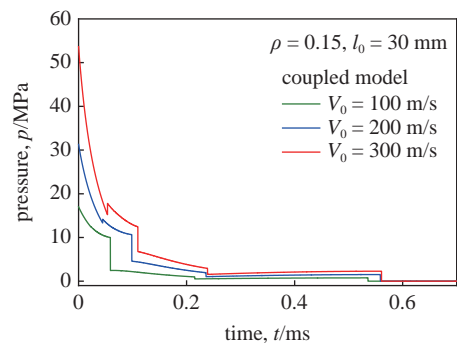


图 20 初速度 V_0 对冲击压强的影响
 Fig. 20 Influence of initial velocity V_0 on impact pressure

4 结论

本文构建了泡沫子弹冲击单梁的耦合分析模型, 通过有限元模拟对理论模型进行了验证, 并基于耦合分析模型对冲击过程进行了分析, 主要结论如下.

(1) 结合泡沫材料的冲击波模型与单梁的结构冲击动力学模型, 并考虑子弹与靶体之间力、速度、位移之间的耦合关系, 构建了描述泡沫子弹冲击固支单梁过程的力学分析模型. 给出了不同响应阶段下的控制方程组, 并采用 Runge-Kutta 方法获得了数值解.

(2) 基于 Voronoi 技术开展了泡沫子弹冲击单梁

的有限元模拟, 有限元结果与耦合分析模型的预测结果吻合较好. 相较于经典的脉冲加载模型 (QDF 模型), 耦合分析模型更为精确地预测了单梁速度场、挠度分布等的变化历程, 并获得了子弹速度和冲击压强的变化历程.

(3) 由于泡沫子弹中冲击波的传播和子弹与被测试物体间的耦合作用, 泡沫子弹的初始动量或初始动能相同时, 其冲击初速度、相对密度和初始长度的变化仍会对冲击过程产生影响. 通过对泡沫子弹的参数分析, 针对具有不同特征的目标冲击载荷给出了泡沫子弹的设计与筛选策略.

本文建立的耦合分析模型为研究泡沫子弹冲击可变形靶体的过程提供了理论基础, 也为均匀泡沫子弹的设计提出了指导性意见. 值得注意的是, 均匀泡沫子弹在可变形靶体上形成的冲击载荷与真实爆炸载荷仍具有一定的差异, 因此需对泡沫子弹进行更合理的设计才能达到更好的模拟和测试效果. 此外, 耦合分析模型的预测结果与有限元结果仍存在一些偏差, 在后续的研究中可以从速度场假设、单梁的屈服准则等方面对该模型进行进一步的改进.

参 考 文 献

- 1 丁圆圆, 王士龙, 郑志军等. 多胞牺牲层的抗爆炸分析, 力学学报, 2014, 46(6): 825-833 (Ding Yuanyuan, Wang Shilong, Zheng Zhijun, et al. Anti-blast analysis of cellular sacrificial cladding. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2014, 46(6): 825-833(in Chinese))
- 2 Zhang YR, Wang GF, Zhang YL, et al. Crashworthiness design of car threshold based on aluminium foam sandwich structure. *International Journal of Crashworthiness*, 2022, 27(4): 1167-1178
- 3 Reid SR, Peng C. Dynamic uniaxial crushing of wood. *International Journal of Impact Engineering*, 1997, 19(5-6): 531-570
- 4 Tan PJ, Reid SR, Harrigan JJ, et al. Dynamic compressive strength properties of aluminium foams. Part I—experimental data and observations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, 53(10): 2174-2205
- 5 Tan PJ, Reid SR, Harrigan JJ, et al. Dynamic compressive strength properties of aluminium foams. Part II—‘shock’ theory and comparison with experimental data and numerical models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, 53(10): 2206-2230
- 6 Radford DD, Deshpande VS, Fleck NA. The use of metal foam projectiles to simulate shock loading on a structure. *International Journal of Impact Engineering*, 2005, 31: 1152-1171
- 7 Radford DD, Fleck NA, Deshpande VS. The response of clamped sandwich beams subjected to shock loading. *International Journal of Impact Engineering*, 2006, 32(6): 968-987
- 8 Radford DD, McShane GJ, Deshpande VS, et al. The response of clamped sandwich plates with metallic foam cores to simulated blast loading. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(7-8): 2243-2259
- 9 Rathbun HJ, Radford DD, Xue Z, et al. Performance of metallic honeycomb-core sandwich beams under shock loading. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(6): 1746-1763
- 10 宋延泽, 王志华, 赵隆茂等. 撞击载荷下泡沫铝夹层板的动力响应. 爆炸与冲击, 2010, 30(3): 301-307 (Song Yanze, Wang Zhihua, Zhao Longmao, et al. Dynamic response of foam sandwich plates subjected to impact loading. *Explosion and Shock Waves*, 2010, 30(3): 301-307 (in Chinese))
- 11 Xie QH, Jing L, Wang ZH, et al. Deformation and failure of clamped shallow sandwich arches with foam core subjected to projectile impact. *Composites Part B: Engineering*, 2013, 44(1): 330-338
- 12 Jing L, Wang ZH, Zhao LM. Response of metallic cylindrical sandwich shells subjected to projectile impact—Experimental investigations. *Composite Structures*, 2014, 107: 36-47
- 13 叶楠, 张伟, 黄威等. PVC 夹芯板在冲击载荷下的动态响应与失效模式. 爆炸与冲击, 2017, 37(1): 37-45 (Ye Nan, Zhang Wei, Huang Wei, et al. Dynamic response and failure mode of PVC sandwich plates subjected to impact loading. *Explosion and Shock Waves*, 2017, 37(1): 37-45 (in Chinese))
- 14 张博一, 赵威, 王理等. 泡沫铝子弹高速撞击下铝基复合泡沫夹层板的动态响应. 爆炸与冲击, 2017, 37(4): 600-610 (Zhang Boyi, Zhao Wei, Wang Li, et al. Dynamic response of aluminum matrix syntactic foams sandwich panel subjected to foamed aluminum projectile impact loading. *Explosion and Shock Waves*, 2017, 37(4): 600-610 (in Chinese))
- 15 Xiao D, Chen X, Li Y, et al. The structure response of sandwich beams with metallic auxetic honeycomb cores under localized impulsive loading—experiments and finite element analysis. *Materials & Design*, 2019, 176: 107840
- 16 Wang X, Yu RP, Zhang QC, et al. Dynamic response of clamped sandwich beams with fluid-filled corrugated cores. *International Journal of Impact Engineering*, 2020, 139: 103533
- 17 Tilbrook MT, Deshpande VS, Fleck NA. The impulsive response of sandwich beams: analytical and numerical investigation of regimes of behaviour. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2006, 54(11): 2242-2280
- 18 Qiu X, Deshpande VS, Fleck NA. Impulsive loading of clamped monolithic and sandwich beams over a central patch. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, 53(5): 1015-1046
- 19 Qin QH, Wang TJ. A theoretical analysis of the dynamic response of metallic sandwich beam under impulsive loading. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2009, 28(5): 1014-1025
- 20 Qin QH, Wang TJ, Zhao SZ. Large deflections of metallic sandwich and monolithic beams under locally impulsive loading. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2009, 51(11-12): 752-773
- 21 Yu TX, Stronge WJ. Large deflections of a rigid-plastic beam-on-foundation from impact. *International Journal of Impact Engineering*, 1990, 9(1): 115-126
- 22 Deshpande VS, Fleck NA. One-dimensional response of sandwich plates to underwater shock loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, 53(11): 2347-2383
- 23 Main JA, Gazonas GA. Uniaxial crushing of sandwich plates under air blast: Influence of mass distribution. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, 45(7-8): 2297-2321
- 24 Li L, Han B, Zhang QC, et al. Dynamic response of clamped sandwich beams: analytical modeling. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 2019, 9(6): 391-396
- 25 Zheng ZJ, Yu JL, Wang CF, et al. Dynamic crushing of cellular materials: A unified framework of plastic shock wave models. *International Journal of Impact Engineering*, 2013, 53: 29-43
- 26 Zheng ZJ, Wang CF, Yu JL, et al. Dynamic stress-strain states for metal foams using a 3 D cellular model. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2014, 72: 93-114
- 27 王礼立. 应力波基础, 第 2 版. 北京: 国防工业出版社, 2005 (Wang Lili. *Foundation of Stress Waves*, 2nd Edition. Beijing: National Defense Industry Press, 2005 (in Chinese))
- 28 Jones N. *Structural Impact*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011
- 29 Conroy MF. The plastic deformation of built-in beams due to distributed dynamic loading. *Journal of Applied Mechanics*, 1964, 31(3): 507-514
- 30 Yang J, Wang SL, Ding YY, et al. Crashworthiness of graded cellular materials: A design strategy based on a nonlinear plastic shock model. *Materials Science and Engineering A*, 2017, 680: 411-420