

郑哲敏先生逝世周年纪念专刊

密度梯度柱壳链的弹性波传播特性研究¹⁾彭克锋* 郑志军*,²⁾ 周风华[†] 虞吉林*

* (中国科学技术大学近代力学系, 中国科学院材料力学行为和设计重点实验室, 合肥 230027)

[†] (宁波大学机械工程与力学学院, 冲击与安全工程教育部重点实验室, 浙江宁波 315211)

摘要 均匀圆柱壳链可以调控弹性波传播, 引入密度梯度有望进一步提高波形调控能力. 通过建立密度梯度柱壳链的细观有限元模型和连续介质模型, 研究了密度梯度柱壳链的弹性波传播特性. 通过将密度梯度柱壳链等效为变密度连续介质弹性杆, 建立了其在应力脉冲作用下的控制方程. 运用拉普拉斯积分变换方法, 考虑杆中密度遵循线性分布, 获得了方程的解析解. 以三角形应力脉冲作用为例, 通过与细观有限元模拟结果比较, 发现解析解可以较好地预测梯度柱壳链中载荷的演化趋势. 正梯度链中载荷峰值随着波传播逐渐增大, 负梯度链中载荷峰值随着波传播逐渐减小. 正梯度链支撑端峰值载荷高于均匀链, 负梯度链支撑端峰值载荷低于均匀链, 这表明相较于均匀柱壳链, 密度梯度柱壳链可以在更大范围内对波形进行调控. 线性密度梯度参数对梯度柱壳链的波形调控能力影响较大, 梯度参数越小, 传递到支撑端的峰值载荷越小; 相反, 梯度参数越大, 支撑端的峰值载荷越大. 建立的理论模型及其解析解为研究梯度柱壳链中应力波传播规律及揭示载荷调控机理提供了理论基础.

关键词 波形调控, 梯度柱壳链, 应力脉冲激励, 连续介质模型, 解析解

中图分类号: O347.4 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-22-019

ELASTIC WAVE PROPAGATION CHARACTERISTICS OF DENSITY GRADIENT CYLINDRICAL SHELL CHAINS¹⁾Peng Kefeng* Zheng Zhijun*,²⁾ Zhou Fenghua[†] Yu Jilin*

* (CAS Key Laboratory of Mechanical Behavior and Design of Materials, Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China)

[†] (MOE Key Laboratory of Impact and Safety Engineering, Faculty of Mechanical Engineering and Mechanics, Ningbo University, Ningbo 315211, Zhejiang, China)

Abstract Uniform cylindrical shell chains can control elastic wave transmission, and introducing density gradient may further improve the ability of waveform control. The propagation behavior of elastic waves in the density gradient cylindrical shell chains was studied by developing a mesoscale finite element model and a continuum-based model. By equivalent the density gradient cylindrical shell chain to a variable density elastic rod, the governing equation of the density gradient chains under a stress pulse excitation was established. Based on the Laplace integral transformation and considering the linear density distribution in the rod, the analytical solution of the equation was obtained. Compared with the meso-finite element simulation results, it is found that the analytical solution can well predict the force evolution trend of the graded cylindrical shell chain under the excitation of a triangular stress pulse. The results show that the peak

2022-01-06 收稿, 2022-04-14 录用, 2022-04-15 网络版发表.

1) 国家自然科学基金 (11872360, 12102429) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (WK248000008) 资助项目.

2) 郑志军, 副教授, 主要研究方向: 冲击动力学. E-mail: zjzheng@ustc.edu.cn

引用格式: 彭克锋, 郑志军, 周风华, 虞吉林. 密度梯度柱壳链的弹性波传播特性研究. 力学学报, 2022, 54(8): 2131-2139

Peng Kefeng, Zheng Zhijun, Zhou Fenghua, Yu Jilin. Elastic wave propagation characteristics of density gradient cylindrical shell chains. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(8): 2131-2139

force in the positive gradient chain gradually increases with the wave propagation, while that of the negative gradient chain gradually decreases with the wave propagation. The peak force at the support end of the negative gradient chain is smaller than that of the uniform chain, while that of the positive gradient chain is greater than that of the uniform one. So the waveform control ability of the density gradient cylindrical shell chains is better than the uniform chain. The linear density gradient parameter has great influence on the waveform control ability of the density gradient cylindrical shell chains. The peak force transmitted to the support end increases with the increase of the density gradient parameter, and thus the density gradient cylindrical shell chain can control the stress pulse in a wider range. The theoretical model and its analytical solution provide a theoretical basis for studying the stress wave propagation law and revealing the force regulation mechanism of the graded cylindrical shell chains.

Key words waveform control, graded cylindrical shell chains, stress pulse excitation, continuum model, analytical solution

引言

多胞结构具备调控波形的潜力,在冲击缓冲、脉冲传输和信号屏蔽等领域存在广泛的应用^[1-10].多胞结构中的波传播行为受其胞元形状和基体材料属性的影响,可能呈现孤立波、稀疏波或冲击波的特征^[11].因此,通过对单个胞元的几何构形和材料性能进行设计,有望发展出新型波传输结构,以实现对接荷和波形的调控.

不同于密实材料,多胞结构中含有大量空穴,为微结构设计提供了充足的空间.通过控制多胞结构的相对密度 ρ 可以改变多胞结构的等效弹性模量 E ^[12],其中 ρ 定义为多胞结构质量与同体积的实心材料质量之比^[12-16].对于不同类型的多胞结构,其等效弹性模量与相对密度通常呈幂律关系^[14]

$$E(\rho) = E_0 \rho^n \quad (1)$$

式中, E_0 和 n 是材料参数.幂指数 n 依赖于多胞结构的微结构类型和基体材料性质.例如,对于热丝熔融沉积制造的闭孔聚乳酸(PLA)泡沫,幂指数为1.5^[13];对于开孔泡沫,幂指数为2^[14-15].这些研究揭示了基体材料和微结构类型对均匀多胞结构弹性力学行为的影响,为波形调控设计提供了基础性认识.一些研究通过改变多胞结构的相对密度进行波形调控,例如,对于均匀圆柱壳链结构,通过改变壁厚(相对密度)可以控制链结构中的稀疏波传播,径厚比越大,冲击缓冲效果越好^[11];对于复合球壳链结构,其材料密度和壁厚越小,链中球壳之间的动态接触力越小^[17].这些研究表明多胞结构具有一定的波形调控能力.

通过引入密度梯度有望进一步提高多胞结构的载荷调控能力.例如,对于线性密度分布的梯度蜂窝

结构,动态冲击下正梯度结构可以降低冲击端载荷,负梯度结构可以降低支撑端载荷^[18];通过设计梯度泡沫的密度分布可以保护冲击物体,使其维持恒定冲击力^[19-20].这些研究中多胞结构主要基于材料大变形和塑性耗散吸收能量从而衰减载荷.实际上,弹性多胞结构也能呈现出较好的载荷调控性能,不同于传统的塑性耗散机制,弹性多胞结构的载荷调控机理为能量的再分布^[21].例如,3D打印椭圆柱壳链结构支持稀疏冲击波的传播,在质量块冲击下,链中应变峰值随着波传播有着明显的衰减且不依赖于材料塑性耗能^[22];最近, Kim等^[23]实验和数值研究了3D打印PLA梯度多胞柱壳结构的冲击缓冲性能,表明负梯度柱壳链结构具有优异的载荷衰减能力,并优于正梯度链结构.然而,梯度多胞结构中波传播行为十分复杂,尚缺乏表征其中弹性波传播的理论模型.近期,基于应力波理论^[24],彭克锋等^[25]建立了质量块冲击下均匀柱壳链中的弹性波传播等效模型,并采用拉普拉斯积分变换方法获得了该模型的解析解.在均匀柱壳链的基础上,本文进一步研究梯度柱壳链中的弹性波传播行为.但是由于梯度的影响,理论模型的求解可能具有相当难度.

本研究运用密度梯度柱壳链的细观有限元模型研究了三角形应力脉冲激励下链中的弹性波传播行为.通过将密度梯度柱壳链等效为密度梯度杆,建立了密度梯度柱壳链在应力脉冲作用下的控制方程,采用拉普拉斯积分变换方法获得了解析解.将理论计算位移、载荷历史曲线与细观有限元模拟结果比较,以验证理论模型及其解析解的有效性.进一步讨论了线性密度梯度参数对支撑端载荷的影响,分析了密度梯度柱壳链的载荷调控性能.

1 数值模拟

1.1 密度梯度柱壳链的有限元模型

由圆柱壳有序排列组成的柱壳链结构是一种典型的多胞结构, 其胞元中空且相对密度可以改变, 通过调控单个圆柱壳的相对密度可以方便地构建密度梯度柱壳链结构. 单个柱壳的相对密度 ρ 定义为 $\pi h(D-h)/D^2$, 其中 D 为圆柱壳外径, h 为壁厚. 本研究中考虑柱壳链的相对密度沿加载方向 (X 方向) 遵循线性分布

$$\rho(\bar{X}) = \rho_0 [1 + \gamma(\bar{X} - 1/2)], \quad \bar{X} = X/L \quad (2)$$

式中, ρ_0 为平均相对密度, γ 为密度梯度分布参数并满足 $-2 < \gamma < 2$, L 为柱壳链长度. 本研究中单个柱壳外径 $D = 20$ mm, 柱壳面外方向厚度 $W = 10$ mm, 柱

壳链长度 $L = 360$ mm, 每条链中含 18 个柱壳. 采用 ABAQUS/Explicit 进行有限元模拟, 通过网格收敛性分析, 柱壳的单元尺寸取为 0.3 mm, 单个柱壳含 1920 个六面体单元, 单元类型为 C3D8. 链中相邻柱壳接触部分的节点绑定在一起, 并且这些节点的位移被约束在 X 方向以形成连续稳定的一维堆积结构. 模拟中采用硬接触描述所有的面接触行为, 摩擦系数设置为 0.02^[19]. 柱壳基体材料密度 $\rho_s = 966$ kg/m³, 弹性模量 $E_s = 1600$ MPa, 泊松比 $\nu_s = 0.3$ ^[25].

三角形应力脉冲仅含有一个峰值, 通常被用来分析结构中的波形变化^[24, 26-27]. 考虑梯度柱壳链一端受到三角形应力脉冲作用, 另一端固定, 如图 1. 三角形应力脉冲斜率为 ξ , 上升时间为 t_0 , 下降时间也为 t_0 , 总脉宽为 $2t_0$, 峰值脉冲为 ξt_0 . 本研究中应力脉冲较小, 不考虑材料塑性.



图 1 密度梯度柱壳链结构的细观有限元模型

Fig. 1 Meso-scale finite element model of a density gradient cylindrical shell chain

1.2 密度梯度柱壳链中的波传播特征

考虑三种密度梯度分布 ($\gamma = -1, 0$ 和 1) 的柱壳链受到三角形应力脉冲作用, 脉冲斜率 $\xi = 0.1$ MPa/ms、上升或下降时间 $t_0 = 1$ ms, 每条链的平均相对密度 $\rho_0 = 0.2$. 以作用时间 $t = 2$ ms 时为例, 这些柱壳链中的应力分布如图 2, 结果表明, 弹性波在

柱壳链中传播具备两个主要特征: (1) 沿着柱壳向固定端传播; (2) 在相邻柱壳的接触区域呈现应力集中. 此时, 可以看到负梯度链中应力波传播最远, 正梯度链中应力波传播最近. 这是由于负梯度链前半部分的柱壳壁厚较厚, 柱壳的等效弹性模量较大, 所以波速较快.

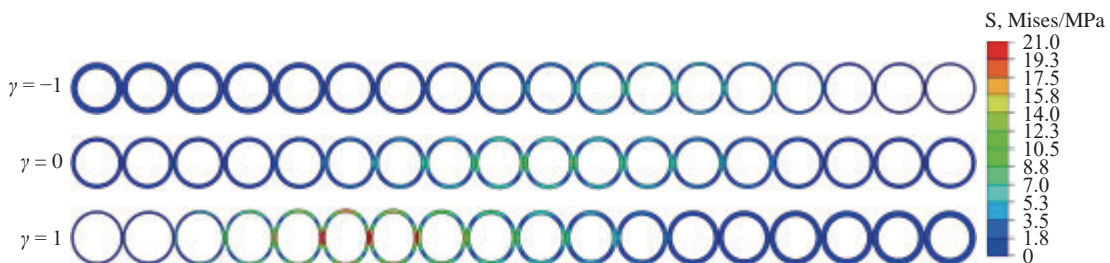


图 2 不同梯度柱壳链结构在 $t = 2.0$ ms 时刻的应力云图

Fig. 2 Von Mises stress distributions of cylindrical shell chains with different density distributions at $t = 2.0$ ms

2 理论分析

2.1 计及密度梯度的波传播模型

采用一维应力波理论分析均匀圆柱壳链中的波传播行为. 最近, 通过将均匀圆柱壳链等效为均质弹性杆, 彭克锋等^[25] 基于波动方程研究了链中的波传播规律及波形弥散机理. 本研究中, 采用类似的方法,

将密度梯度柱壳链等效为密度梯度连续杆, 如图 3. 等效杆的长度为 L , 沿 X 方向的相对密度分布为 $\rho(X)$, 面内厚度为 W , 宽度与柱壳的直径 D 相等, 杆的横截面积 $A_0 = DW$. 需要说明的是, 文献^[25] 考虑了柱壳链的横向惯性效应对波传播的影响, 结果表明, 横向惯性效应使波形振荡, 但对于长度较短的均匀圆柱壳链, 其对波形峰值的影响不大^[25]. 本研究中

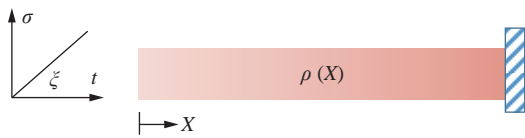


图3 密度梯度杆受到线性应力脉冲作用

Fig. 3 A density gradient rod subjected to a linear stress pulse

柱壳链长度较短, 因此, 不考虑横向惯性效应.

密度梯度杆的相对密度分布为 $\rho(X)$, 则杆中运动方程为

$$\rho(X)\rho_s \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma}{\partial X} \quad (3)$$

式中, σ , v , X , t 和 ρ_s 分别是应力、粒子速度、拉格朗日位置、时间和基体材料密度. 已有研究表明圆柱壳的表观弹性模量与厚径比的关系^[28-29]为 $E \sim (t/R)^3$, 由于相对密度 ρ 正比于 t/R , 所以有 $E = E_0\rho^3$. 然后结合应变 ε 与位移 u 的关系式 $\varepsilon = -\partial u/\partial X$ 以及速度与位移的关系式 $v = \partial u/\partial t$, 式 (3) 可改写为

$$\rho\rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left(E_0\rho^3 \frac{\partial u}{\partial X} \right) \quad (4)$$

式 (4) 为一个线性齐次偏微分方程, 满足叠加原理. 因此, 在理论分析中, 先考虑杆端受到线性应力脉冲作用, 再采用叠加原理, 即可适用于任意可线性分解的应力边界条件, 例如, 边界受到三角形应力脉冲作用.

考虑杆一端受到斜率为 ξ 线性应力脉冲激励, 另一端固定, 杆中的初始条件和边界条件为

$$\left. \begin{aligned} u(X, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(X, 0) = 0 \\ -E(\rho(0)) \frac{\partial u}{\partial X}(0, t) = \xi t, \quad u(L, t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

将杆长 L 、密度 ρ_s 和基体材料中的纵波波速 $C_0 = \sqrt{E_0/\rho_s}$ 作为特征参数, 引入以下无量纲参数

$$\bar{u} = \frac{u}{L}, \quad \bar{X} = \frac{X}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t}{L/C_0}, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi L}{E_0 C_0} \quad (6)$$

然后结合式 (4) 和式 (5) 给出应力脉冲作用下密度梯度杆中的无量纲控制方程

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} &= \frac{\partial}{\partial \bar{X}} \left(\rho^3 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{X}} \right), \quad 0 < \bar{X} < 1, \bar{t} > 0 \\ \bar{u}(\bar{X}, 0) &= 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}(\bar{X}, 0) = 0 \\ \rho^3(0) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{X}}(0, \bar{t}) &= -\bar{\xi} \bar{t}, \quad \bar{u}(1, \bar{t}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式 (7) 为含自变量 \bar{X} 和 \bar{t} 的偏微分方程组, 可采用拉普拉斯积分变换方法对其求解.

2.2 拉普拉斯积分变换求解

对 \bar{u} 进行拉普拉斯变换, 从时域 \bar{t} 变为像域 s , 有

$$U(\bar{X}, s) = \int_0^\infty \bar{u}(\bar{X}, \bar{t}) e^{-s\bar{t}} d\bar{t} \quad (8)$$

式中, s 是复变量. 将式 (8) 分部积分并应用初始条件, 然后代入式 (7) 可以得到

$$\left. \begin{aligned} s^2 \rho U &= \frac{d}{d\bar{X}} \left(\rho^3 \frac{dU}{d\bar{X}} \right), \quad 0 < \bar{X} < 1 \\ \rho^3(0) \frac{dU}{d\bar{X}}(0, s) &= -\frac{\bar{\xi}}{s^2}, \quad U(1, s) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

引入

$$\tau(\bar{X}) = \int_0^{\bar{X}} \rho^{-1}(\bar{X}) d\bar{X} \quad (10)$$

和

$$w(\tau, s) = \frac{U(\bar{X}, s)}{g(\bar{X})} \quad (11)$$

式 (9) 可以写成刘维尔标准型

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 w}{d\tau^2} - (s^2 + q(\tau))w &= 0 \\ \rho^3(0) \frac{d(w(\tau, s)g(\bar{X}))}{d\bar{X}} \Big|_{\bar{X}=0} &= -\frac{\bar{\xi}}{s^2}, \quad w(T, s) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中, $g(\bar{X}) = \rho^{-1}(\bar{X})$, $T = \tau(1)$, 以及

$$q(\tau) = \rho'(\bar{X})^2 + \rho(\bar{X})\rho''(\bar{X}) \quad (13)$$

其中撇号表示对 \bar{X} 求导. 本研究中杆的密度遵循线性分布, 式 (13) 可以简化为

$$q(\tau) = \rho_0^2 \gamma^2 \quad (14)$$

于是, 式 (12) 可以写作

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 w}{d\tau^2} - (s^2 + \rho_0^2 \gamma^2)w &= 0 \\ \rho^3(0) \frac{d(w(\tau, s)\rho^{-1}(\bar{X}))}{d\bar{X}} \Big|_{\bar{X}=0} &= -\frac{\bar{\xi}}{s^2}, \quad w(T, s) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式 (15) 的第一个方程为二阶常微分方程, 其解为

$$w(\tau(\bar{X}), s) = A(s)e^{-\beta\tau(\bar{X})} + B(s)e^{\beta\tau(\bar{X})} \quad (16)$$

式中, $A(s)$ 和 $B(s)$ 是待定系数, $\beta = \sqrt{s^2 + \rho_0^2 \gamma^2}$. 基于式 (15) 的定解条件, 有

$$\left. \begin{aligned} \rho(0)[\beta(B-A) - (A+B)\rho_0\gamma] + \frac{\bar{\xi}}{s^2} &= 0 \\ Ae^{-\beta T} + Be^{\beta T} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式 (17) 给出

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\bar{\xi}}{s^2 \rho(0) [\beta + \gamma \rho_0 + (\beta - \gamma \rho_0) e^{-2\beta T}]} \\ B &= \frac{-\bar{\xi} e^{-2\beta T}}{s^2 \rho(0) [\beta + \gamma \rho_0 + (\beta - \gamma \rho_0) e^{-2\beta T}]} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

将式 (18) 代入式 (16), 得

$$w(\tau(\bar{X}), s) = \frac{\bar{\xi} \sinh[\beta(T - \tau(\bar{X}))]}{s^2 \rho(0) [\beta \cosh(\beta T) + \gamma \rho_0 \sinh(\beta T)]} \quad (19)$$

将式 (19) 代入式 (11), 可以得到

$$U(\bar{X}, s) = \frac{\bar{\xi} \sinh[\beta(T - \tau(\bar{X}))]}{s^2 \rho(0) \rho(\bar{X}) [\beta \cosh(\beta T) + \gamma \rho_0 \sinh(\beta T)]} \quad (20)$$

进一步考虑 U 的拉普拉斯逆变换

$$\bar{u}(\bar{X}, \bar{t}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} U(\bar{X}, s) e^{s\bar{t}} ds \quad (21)$$

式中, ω 是实变数. 将式 (20) 代入式 (21), 得到

$$\bar{u}(\bar{X}, \bar{t}) = \frac{\bar{\xi}}{\rho(0) \rho(\bar{X})} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \frac{e^{s\bar{t}} \sinh[\beta(T - \tau(\bar{X}))]}{s^2 [\beta \cosh(\beta T) + \gamma \rho_0 \sinh(\beta T)]} ds \quad (22)$$

式 (22) 可以通过留数定理求解. 令式 (22) 中被积分式的分母为 0, 即

$$s^2 [\beta \cosh(\beta T) + \gamma \rho_0 \sinh(\beta T)] = 0 \quad (23)$$

可见积分式 (22) 有二重奇点 0 和简单奇点 $s_k = i\eta_k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$), 实数 η_k 通过下式计算

$$\left. \begin{aligned} \gamma \rho_0 \tanh\left(T \sqrt{\rho_0^2 \gamma^2 - \eta_k^2}\right) &= -\sqrt{\rho_0^2 \gamma^2 - \eta_k^2}, \quad \eta_k^2 < \rho_0^2 \gamma^2 \\ \gamma \rho_0 \tan\left(T \sqrt{\eta_k^2 - \rho_0^2 \gamma^2}\right) &= -\sqrt{\eta_k^2 - \rho_0^2 \gamma^2}, \quad \eta_k^2 \geq \rho_0^2 \gamma^2 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式 (24) 有无穷多个实根, 并且正根和负根存在一一对应关系. 留数定理给出

$$\bar{u}(\bar{X}, \bar{t}) = \text{Res}\left[U(\bar{X}, s) e^{s\bar{t}}, 0\right] + \sum_{\substack{k=-\infty \\ (k \neq 0)}}^{\infty} \text{Res}\left[U(\bar{X}, s) e^{s\bar{t}}, s_k\right] \quad (25)$$

在 0 点处的留数为

$$\begin{aligned} \text{Res}\left[U(\bar{X}, s) e^{s\bar{t}}, 0\right] &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[U(\bar{X}, s) e^{s\bar{t}} s^2\right] = \\ &= \frac{\bar{\xi} e^{-T \rho_0 \gamma} \sinh\left[\rho_0 \gamma (T - \tau(\bar{X}))\right] \bar{t}}{(1 - \gamma/2) \left[1 + \gamma(\bar{X} - 1/2)\right] \rho_0^3 \gamma} \end{aligned} \quad (26)$$

在 s_k 处的留数为

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ (k \neq 0)}}^{\infty} \text{Res}\left[U(\bar{X}, s) e^{s\bar{t}}, s_k\right] = \sum_{\substack{k=-\infty \\ (k \neq 0)}}^{\infty} \lim_{s \rightarrow s_k} U(\bar{X}, s) e^{s\bar{t}} (s - s_k) \quad (27)$$

考虑正负根的一一对应关系, 式 (27) 可以简化为

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ (k \neq 0)}}^{\infty} \text{Res}\left[U(\bar{X}, s) e^{s\bar{t}}, s_k\right] = \frac{-2\bar{\xi}}{\rho_0^2 (1 - \gamma/2) \left[1 + \gamma(\bar{X} - 1/2)\right]} \sum_{\substack{k=1 \\ (\eta_k > 0)}}^{\infty} \frac{\sin(\eta_k \bar{t}) S(\tau(\bar{X}))}{D_k \eta_k^3 S(0)} \quad (28)$$

式中

$$S(\tau) = \begin{cases} \sinh\left[\sqrt{\rho_0^2 \gamma^2 - \eta_k^2} (T - \tau)\right], & \eta_k^2 < \rho_0^2 \gamma^2 \\ \sin\left[\sqrt{\rho_0^2 \gamma^2 - \eta_k^2} (T - \tau)\right], & \eta_k^2 \geq \rho_0^2 \gamma^2 \end{cases} \quad (29)$$

$$D_k = (T \eta_k^2 + \gamma \rho_0) / (\eta_k^2 - \rho_0^2 \gamma^2) \quad (30)$$

所以线性应力脉冲作用下密度梯度杆中的位移解为

$$\bar{u}(\bar{X}, \bar{t}) = \frac{\bar{\xi}}{\rho_0^2 (1 - \gamma/2) \left[1 + \gamma(\bar{X} - 1/2)\right]} \cdot \left\{ \frac{\sinh\left[\rho_0 \gamma (T - \tau(\bar{X}))\right] \bar{t}}{e^{T \rho_0 \gamma} \rho_0 \gamma} - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ (\eta_k > 0)}}^{\infty} \frac{\sin(\eta_k \bar{t}) S(\tau(\bar{X}))}{D_k \eta_k^3 S(0)} \right\} \quad (31)$$

对于均匀杆, 即 $\gamma = 0$ 的情形, 此时, $T = 1/\rho_0$, $\eta_k = (k - 1/2)\pi/T$, $k = 1, 2, 3, \dots$ 位移解退化为

$$\bar{u}(\bar{X}, \bar{t}) = \frac{\bar{\xi}}{\rho_0^3} \left\{ (1 - \bar{X}) \bar{t} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left[\rho_0 \left(k - \frac{1}{2}\right) \pi \bar{t}\right] \sin\left[\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi (1 - \bar{X})\right]}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^3 \pi^3 \rho_0 (-1)^{k+1}} \right\} \quad (32)$$

进一步采用叠加原理求解三角形应力脉冲作用下密度梯度杆中的位移解. 文献 [30] 中基于叠加原理, 获得了梯形应力脉冲在考虑横向惯性的均匀弹性杆中产生的位移、应力和应变的解析解. 类似地, 对于三角形应力脉冲, 其上升时间为 \bar{t}_0 , 下降时间为 \bar{t}_0 , 总脉宽为 $2\bar{t}_0$, 脉冲峰值为 $\bar{\xi}\bar{t}_0$, 其位移解为

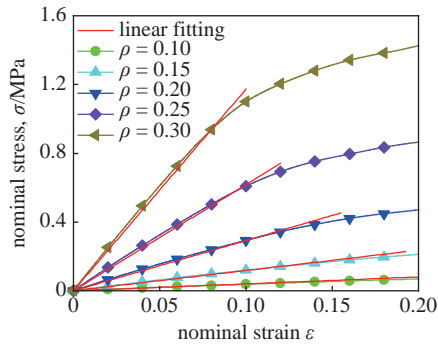
$$\bar{u}(\bar{X}, \bar{t}) = \bar{u}(\bar{X}, \bar{t}) H(\bar{t}) - 2\bar{u}(\bar{X}, \bar{t} - \bar{t}_0) H(\bar{t} - \bar{t}_0) + \bar{u}(\bar{X}, \bar{t} - 2\bar{t}_0) H(\bar{t} - 2\bar{t}_0) \quad (33)$$

式中, $H(\bar{t})$ 为单位阶跃函数.

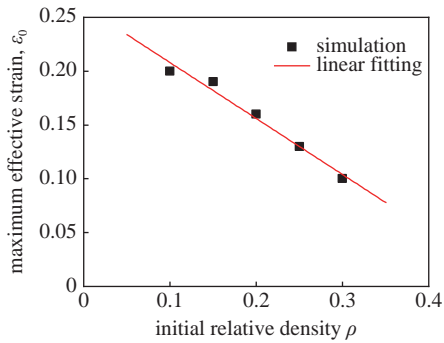
3 结果与讨论

3.1 柱壳等效材料参数的确定

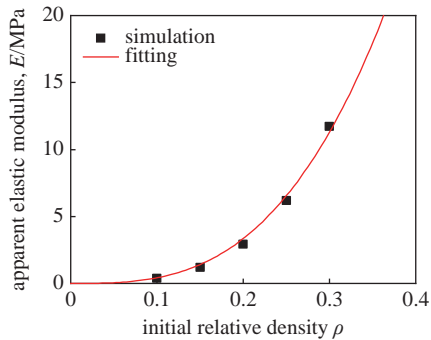
通过对不同相对密度的单个柱壳进行单轴准静态压缩的数值模拟, 可以获得柱壳的等效材料参数. 在准静态压缩试验中, 圆柱壳位于两块刚性板之间, 其中一块刚性板以 $V = 5 \text{ mm/s}$ 的恒定速度压缩圆柱壳, 另一块刚性板固定. 不同相对密度 (0.05 ~ 0.30) 圆柱壳的名义应力-应变曲线如图 4. 当其名义



(a) 不同初始相对密度柱壳的名义应力-应变关系
(a) Nominal stress-strain relation of cylindrical shells with different initial relative densities



(b) 线弹性段最大有效应变随初始相对密度的变化
(b) Variation of the maximum effective strain in the linear elastic stage with the initial relative density



(c) 表观弹性模量随初始相对密度的变化
(c) Variation of the apparent elastic modulus with the initial relative density

图 4 不同初始相对密度柱壳的材料参数

Fig. 4 The apparent material parameters of cylindrical shells with different initial relative densities

应变较大时, 图中出现了较明显的应变软化现象. 但在某一应变之前, 其名义应力-应变曲线近似满足线弹性关系. 在控制线性相关系数不小于 0.995 的情况下, 通过线性拟合获得线弹性段的表观弹性模量 E 和最大有效应变 ϵ_0 . 不同相对密度圆柱壳的线弹性段的最大有效应变与相对密度的关系如图 4(b), 它们近似遵循线性关系 $\epsilon_0 = -0.52\rho + 0.26$. 圆柱壳的表观弹性模量与相对密度的关系如图 4(c) 所示. 利用 $E = E_0\rho^3$ 式子^[29] 拟合图 4(c) 中的数据, 拟合结果给出 E_0 为 418.6 MPa.

3.2 理论与数值结果比较

首先比较理论与细观有限元模拟的不同密度梯度柱壳链在三角形应力脉冲作用下的加载端位移. 式 (33) 结合圆柱壳的材料参数 ($n = 3, E_0 = 418.6 \text{ MPa}$), 可以预测不同密度分布柱壳链加载端的位移历史曲线. 图 5 展示了理论与模拟计算的三种密度梯度柱壳链 ($\gamma = -1, 0, 1$) 在三角形应力脉冲作用下的加载端位移. 结果表明, 理论预测与细观有限元模拟的加载端位移有着相同的演化趋势, 但也存在一些差异, 这说明离散的柱壳链结构难以完全等效成连续介质. 尽管如此, 连续介质模型仍可以表征其位移演化的主要特征. 三角形应力脉冲作用下, 不同密度梯度链加载端位移均随着时间的增加而增加, 当位移达到最大值时, 链开始回弹, 其中正梯度链最早回弹, 负梯度链回弹时间最晚, 均匀链加载端在其位移达到最大值后并未立刻回弹, 而在一定时间内维持静止. 此外, 正梯度链加载端的最大位移比负梯度链和均匀链都大, 这是由于正梯度链前半部分的平均等效弹性模量较小, 因此抵抗变形的能力

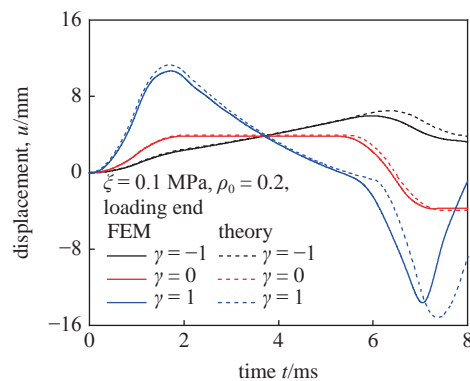


图 5 理论和有限元模拟的不同密度梯度链中加载端位移历史曲线

Fig. 5 Theoretical and FE simulated displacement histories of the loading end in the chains with different density distributions

较弱. 相反地, 负梯度链前半部分的平均等效弹性模量较大, 这使得负梯度链加载端位移在初始阶段比正梯度和均匀链都小.

进一步将理论计算和细观有限元模拟的柱壳链支撑端的载荷历史曲线进行比较. 理论分析中载荷由式 $F = -EA\partial\bar{u}/\partial\bar{x}|_{\bar{x}=1}$ 计算, 模拟中载荷可从有限元结果直接提取. 结果表明, 对于三种梯度分布的柱壳链 ($\gamma = -1, 0, 1$), 理论模型可以很好地表征其支撑端载荷演化的主要特征, 如图 6. 当应力波传到支撑端时, 支撑端载荷先增大至最大值, 然后逐渐减小. 通过比较有限元模拟计算得到的支撑端的峰值载荷, 可以发现这三种梯度柱壳链支撑端载荷的最大峰值存在明显区别, 其中均匀链中支撑端峰值载荷为 37.29 N, 负梯度链的支撑端峰值载荷最小 (13.84 N), 为均匀链的 0.37 倍, 正梯度链的支撑端峰值载荷最大 (80.90 N), 是均匀链的 2.17 倍. 理论分析得到了与有限元模拟相似的结果, 这表明负梯度柱壳链表现出载荷衰减特征, 而正梯度柱壳链表现出载荷增强特征. 值得注意的是, 数值模拟获得的峰值载荷略低于理论预测的结果, 数值结果中载荷峰值附近曲线光滑不尖锐, 这是因为理论分析中忽略了泊松比的影响^[25]. 尽管如此, 理论模型仍能捕捉加载过程中载荷演化的主要趋势.

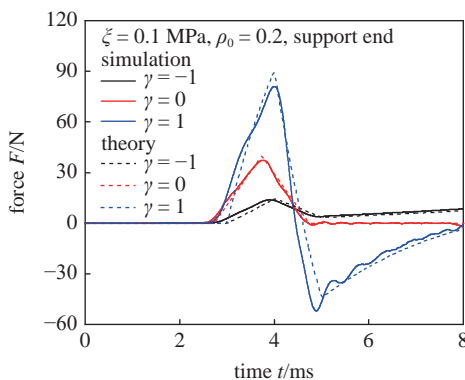


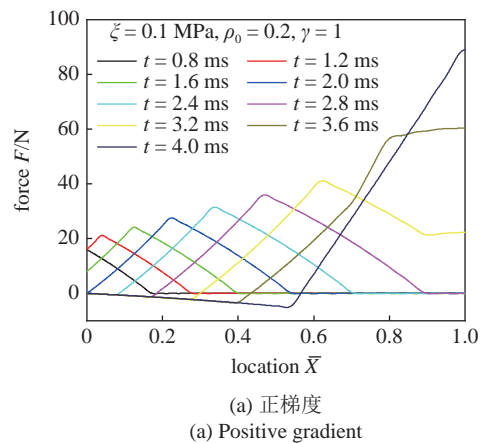
图 6 理论和有限元模拟的不同密度梯度链中支撑端的载荷历史曲线
Fig. 6 Theoretical and FE simulated forces at the support end in the chains with different density distributions

3.3 密度梯度柱壳链中载荷演化过程

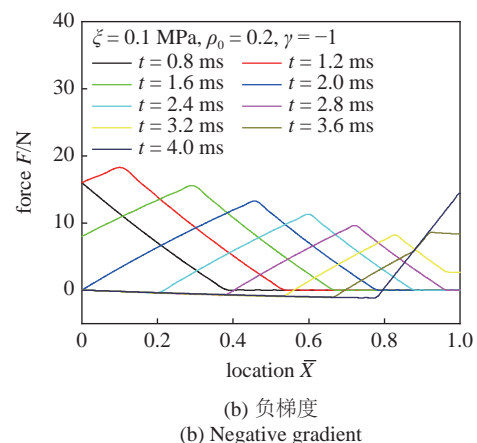
基于理论模型可以分析三角形应力脉冲作用下密度梯度柱壳链中的载荷演化过程. 图 7 给出了正梯度和负梯度链中不同时刻的载荷变化曲线. 观察发现, 正梯度链中载荷峰值随着波传播逐渐增大, 负梯度链中载荷峰值随着波传播逐渐减小. 对于初始

对称的三角形应力脉冲, 其在梯度柱壳链中呈现不对称传输的特征. 在正梯度链中, 三角波形下降沿宽度大于上升沿宽度, 这是由于正梯度链沿着加载方向等效弹性模量逐渐增大、波速越来越快造成的. 与正梯度链相反, 负梯度链中的三角波形下降沿宽度小于上升沿宽度. 此外, 边界对波形有着明显的影响, 当波传到支撑端时, 由于固支边界的反射, 载荷被放大, 波形不再维持三角形. 还可以发现, 梯度柱壳链受到三角形应力脉冲压缩时, 链中不仅有压力也有拉力, 且随着波传播, 拉力逐渐增大, 正梯度链中的拉力大于负梯度链.

利用有限元模拟结果计算了正负梯度柱壳链在冲击过程中的应变分布, 其中应变定义为 $\varepsilon = \Delta x/D$, Δx 为胞元沿加载方向的变形量, D 为胞元直径. 基于理论模型也可以获得柱壳链结构中的应变分布, 即 $\varepsilon = -\partial u/\partial x$. 通过比较发现, 数值模拟结果与理论结果吻合较好, 如图 8. 此外, 在冲击过程中正/负梯度柱壳链中圆柱壳的最大应变均小于其线弹性段最大有效应变.



(a) 正梯度
(a) Positive gradient



(b) 负梯度
(b) Negative gradient

图 7 密度梯度柱壳链中的载荷演化

Fig. 7 Force evolutions in the density gradient cylindrical shell chains

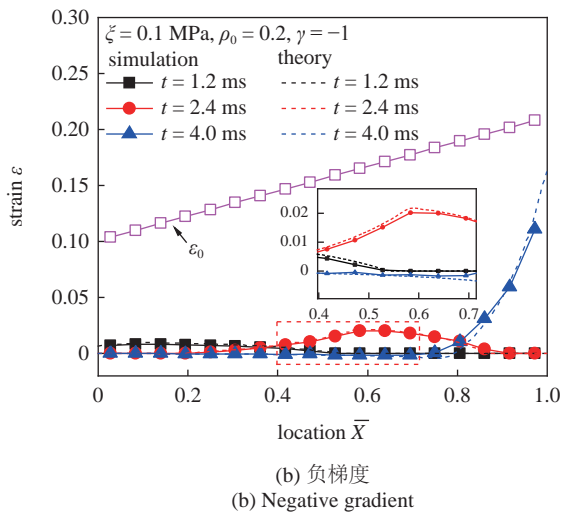
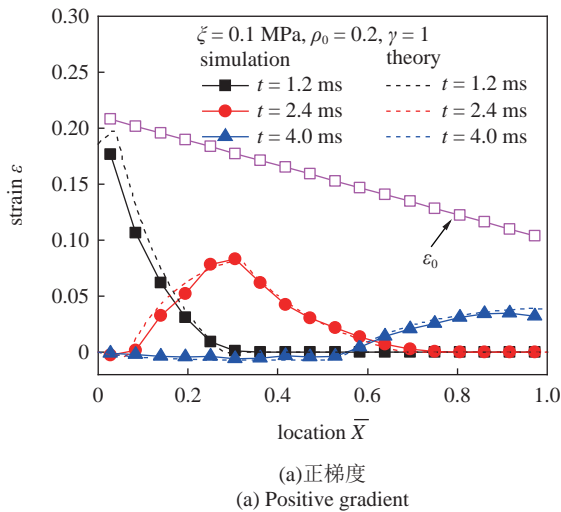


图 8 密度梯度柱壳链中的应变分布
Fig. 8 Strain distributions in the density gradient cylindrical shell chains

3.4 密度梯度柱壳链的波形调控性能

传递到支撑端的峰值载荷通常被用来评估结构的载荷调控能力. 基于理论模型, 计算出了三角形应力脉冲作用下不同梯度分布柱壳链支撑端的峰值载荷. 为了方便比较, 将支撑端峰值载荷进行归一化处理. 归一化的峰值载荷 \bar{F} 由式 $\bar{F} = F/F_0$ 计算, 其中 F_0 为模拟得到的均匀链中传递到支撑端的峰值载荷. 结果表明, 当梯度分布参数小于 0 时, $\bar{F} < 1$, 并随着梯度分布参数的减小而减小; 当梯度分布参数大于 0 时, $\bar{F} > 1$, 且随着梯度分布参数的增大而增大, 如图 9 所示. 因此, 针对三角形应力脉冲波形, 线性密度分布的柱壳链可以在大范围内对其进行调控.

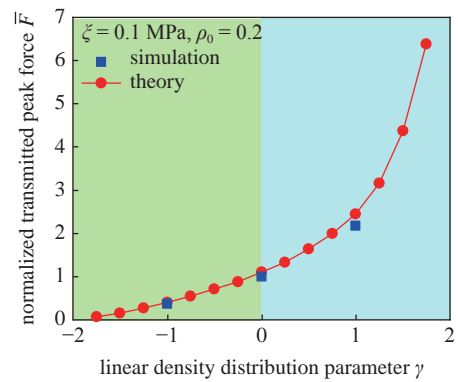


图 9 密度梯度参数 γ 对支撑端载荷的影响
Fig. 9 Effects of density gradient parameter γ on the peak force at the support end

4 结论

本文通过理论分析和数值模拟研究了应力脉冲激励下梯度柱壳链中的弹性波传播行为, 建立了密度梯度杆在应力脉冲作用下的弹性波传播模型, 并基于细观有限元模型对理论模型进行了验证, 主要结论如下.

(1) 通过简化, 将密度梯度柱壳链等效为变密度连续杆, 给出了应力脉冲作用下密度梯度柱壳链中弹性波传播的简化分析模型. 采用拉普拉斯积分变换方法, 获得了应力脉冲作用下线性密度梯度杆中波传播模型的级数形式的解.

(2) 梯度柱壳链结构中应力波由加载端向支撑端沿着柱壳向前传播. 与均匀链相比, 负梯度链的支撑端峰值载荷较小, 正梯度链支撑端峰值载荷较大. 以三角形应力脉冲作用为例, 理论模型的解析解可以较好地预测梯度柱壳链支撑端载荷的演化趋势.

(3) 线性密度梯度参数对梯度柱壳链的载荷调控性能有较大的影响. 对于正梯度链, 密度梯度参数越大, 传递到支撑端的峰值载荷越大; 对于负梯度链, 密度梯度参数越小, 传递到支撑端的峰值载荷越小.

本文建立的理论模型及其解析解为研究梯度柱壳链中波传播规律及揭示波形调控机理提供了理论基础, 对新型载荷控制器的优化设计具有指导意义. 值得注意的是, 圆柱壳在应变较大时会出现明显的非线性行为, 而本研究中的理论分析以线弹性假设为基础, 因此所考虑的情况要求外载引起的圆柱壳应变应小于其线弹性段最大有效应变. 此外, 本文建立的密度梯度杆中弹性波传播简化分析模型忽略了横向惯性的影响, 尽管可以较好表征梯度柱壳链的

载荷演化, 但预测的峰值载荷略低于模拟结果, 进一步的工作可以考虑横向惯性效应以对模型进行改进.

参 考 文 献

- Duan Y, Ding Y, Liu ZY, et al. Effects of cell size vs cell-wall thickness gradients on compressive behavior of additively manufactured foams. *Composites Science and Technology*, 2020, 199: 108339
- Meng ZQ, Liu MC, Zhang YF, et al. Multi-step deformation mechanical metamaterials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2020, 144: 104095
- Peng KF, Zheng ZJ, Chang BX, et al. Wide-range control of impulse transmission by cylindrical shell chains with varying aspect ratios. *International Journal of Impact Engineering*, 2021, 158: 104017
- Karagiozova D, Alves M. Stress waves in layered cellular materials—Dynamic compaction under axial impact. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2015, 101: 196-213
- Tang F, Sun Y, Guo Z, et al. Dynamic responses and energy absorption of hollow sphere structure subjected to blast loading. *Materials & Design*, 2019, 181: 107920
- Wang SL, Ding YY, Yu F, et al. Crushing behavior and deformation mechanism of additively manufactured Voronoi-based random open-cell polymer foams. *Materials Today Communications*, 2020, 25: 101406
- Shim VPW, Guo YB, Lan R. Elastic stress transmission in cellular systems—Analysis of wave propagation. *International Journal of Impact Engineering*, 2008, 35(8): 845-869
- Zheng ZJ, Wang CF, Yu JL, et al. Dynamic stress-strain states for metal foams using a 3D cellular model. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2014, 72: 93-114
- Zhou H, Wang X, Zhao Z. High velocity impact mitigation with gradient cellular solids. *Composites Part B: Engineering*, 2016, 85: 93-101
- Valencia C, Restrepo D, Mankame ND, et al. Computational characterization of the wave propagation behavior of multi-stable periodic cellular materials. *Extreme Mechanics Letters*, 2019, 33: 100565
- Zhang W, Xu J. Tunable traveling wave properties in one-dimensional chains composed from hollow cylinders: From compression to rarefaction waves. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, 191: 106073
- Gibson LJ, Ashby MF. *Cellular Solids: Structure and Properties*, Cambridge University Press, 1999
- Wang SL, Zheng ZJ, Zhu CF, et al. Crushing and densification of rapid prototyping polylactide foam: Meso-structural effect and a statistical constitutive model. *Mechanics of Materials*, 2018, 127: 65-76
- Roberts AP, Garboczi EJ. Elastic moduli of model random three-dimensional closed-cell cellular solids. *Acta Materialia*, 2001, 49(2): 189-197
- Gibson IJ, Ashby MF. The mechanics of three-dimensional cellular materials. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical Physical Sciences*, 1982, 382(1782): 43-59
- Cuan-Urquiza E, Shalchy F, Bhaskar A. Compressive stiffness of staggered woodpile lattices: Mechanics, measurement, and scaling laws. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, 187: 105932
- Yin S, Chen DH, Xu J. Novel propagation behavior of impact stress wave in one-dimensional hollow spherical structures. *International Journal of Impact Engineering*, 2019, 134: 103368
- Wang XK, Zheng ZJ, Yu JL. Crashworthiness design of density-graded cellular metals. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 2013, 3(3): 031001
- Chang BX, Zheng ZJ, Zhang YL, et al. Crashworthiness design of graded cellular materials: An asymptotic solution considering loading rate sensitivity. *International Journal of Impact Engineering*, 2020, 143: 103611
- Yang J, Wang SL, Ding YY, et al. Crashworthiness of graded cellular materials: A design strategy based on a nonlinear plastic shock model. *Materials Science and Engineering A*, 2017, 680: 411-420
- Chausali R, Toles M, Yang J, et al. Extreme control of impulse transmission by cylinder-based nonlinear phononic crystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2017, 107: 21-32
- Kim H, Kim E, Chong C, et al. Demonstration of dispersive rarefaction shocks in hollow elliptical cylinder chains. *Physical Review Letters*, 2018, 120(19): 194101
- Kim H, Kim E, Yang J. Nonlinear wave propagation in 3D-printed graded lattices of hollow elliptical cylinders. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2019, 125: 774-784
- 王礼立. 应力波基础, 第 2 版. 北京: 国防工业出版社, 2005 (Wang Lili. *Foundation of Stress Waves*, 2nd edition. Beijing: National Defense Industry Press, 2005 (in Chinese))
- 彭克锋, 崔世堂, 潘昊等. 冲击载荷作用下柱壳链中的弹性波传播简化模型及其解析解. *爆炸与冲击*, 2021, 41(1): 011403 (Peng Ke-feng, Cui Shitang, Pan Hao, et al. Simplified model of elastic wave propagation in cylindrical shell chain under impact load and its analytical solution. *Explosion and Shock Waves*, 2021, 41(1): 011403 (in Chinese))
- 王礼立, 王永刚. 应力波在用 SHPB 研究材料动态本构特性中的重要作用. *爆炸与冲击*, 2005, 25(1): 17-25 (Wang Lili, Wang Yonggang. The important role of stress waves in the study on dynamic constitutive behavior of materials by SHPB. *Explosion and Shock Waves*, 2005, 25(1): 17-25 (in Chinese))
- Yang HS, Li YL, Zhou FH. Propagation of stress pulses in a Rayleigh-Love elastic rod. *International Journal of Impact Engineering*, 2021, 153: 103854
- Bao RH, Yu TX. Impact and rebound of an elastic-plastic ring on a rigid target. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2015, 91: 55-63
- Timoshenko SPG, James M. *Theory of Elastic Stability*, 2nd edition. Dover Publications, 2009
- 杨洪升, 李玉龙, 周风华. 梯形应力脉冲在弹性杆中的传播过程和几何弥散. *力学学报*, 2019, 51(6): 1820-1829 (Yang Hongsheng, Li Yulong, Zhou Fenghua. The propagation process and the geometric dispersion of trapezoidal stress pulses in elastic rods. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(6): 1820-1829 (in Chinese))