1 史瓦西几何中的球对称、稳态流体

史瓦西几何线元

$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -(1-2M/r)dt^2+(1-2M/r)^{-1}dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2.$

静止观者四速度

$$u_s^\alpha = [(-g_{tt})^{-1/2}, 0, 0, 0] = [(1-2M/r)^{-1/2}, 0, 0, 0].$$

设静止观者测量到经过他的流体（与史瓦西几何同样的球对称）元的径向速度为v，则由$\gamma \equiv (1-v^2)^{-1/2} = -\mathbf{u}\cdot\mathbf{u_s} = \sqrt{-g_{tt}}u^t$, 或$v = \frac{u^{\hat{r}}}{u^{\hat{t}}}$，并利用四速度归一化$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1$，可得流体元的四速度在史瓦西坐标$(t, r, \theta, \phi)$下分量为

$$u^\alpha = [y(1-2M/r)^{-1}, \pm vy, 0, 0], \tag{1}$$

其中$\pm$表示向外的流体（星风）取正号、向内的流体（吸积）取负号，能量参数$y \equiv \left(\frac{1-2M/r}{1-v^2}\right)^{1/2}$（$y$的物理意义：1.对于自由粒子，$y$是其（测地线）守恒量$e \equiv -g_{tt}u^t\sqrt{-g_{tt}}\gamma = y$，具有单位质量的能量量纲；2.如果此能量完全转化为光子、并红移到无穷远，则此时被测到的能量为y的取值。）。协变分量

$$u_\alpha = g_{\alpha\beta}u^\beta = [-y, \pm vy(1-2M/r)^{-1}, 0, 0]. \tag{2}$$

常用等式:

$$\begin{aligned} v^2y^2+(1-2M/r) &= y^2, \\ y\frac{dy}{dr}-vy\frac{d(vy)}{dr} &= \frac{M}{r^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

2 静质量守恒

$$0=(\rho u^\alpha)_{;\alpha}=\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\rho u^\alpha)_{,\alpha}=\frac{1}{r^2\sin\theta}(r^2\sin\theta\rho u^r)_{,r}\,, \tag{4}$$

其中史瓦西度规的行列式$g\equiv\det(g_{\alpha\beta})=-r^4\sin^2\theta$，第二个等式还要求流体为稳态$\frac{d}{dt}=0$（球对称要求$\frac{d}{d\theta}=0$和$\frac{d}{d\phi}=0$，两者综合，求导仅有$\frac{d}{dr}$，此点频繁用于此后的计算化简，请紧记！）。由此得

$$r^2\rho u^r=r^2\rho vy=\text{Const.} \tag{5}$$

不随r变化。

物理意义：流体元共动系中质量密度ρ，因为尺度收缩，静止观者测到它的体积收缩γ倍，因此测到的流体元质量密度为$\gamma\rho$、速度为v、经过的球壳面积$4\pi r^2$，所以质量变化率$dM/dt_s=\pm 4\pi r^2\cdot\gamma\rho\cdot v$，又静止观者时间$dt_s=(1-2M/r)^{1/2}dt$，综合得$\dot{M}\equiv dM/dt=\pm 4\pi r^2\rho vy=$ Const.，此最后等于常数是因为静态。

3　局域能量守恒

对于理想流体，由附录(20)式，代入(1)式，可得

$$u_\alpha T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \mp vy\left(\frac{d\varepsilon}{dr} + (\varepsilon + p)\frac{d\ln(r^2vy)}{dr}\right).$$

再利用(5)式（或直接用(4)式$0 = (\rho u^\alpha)_{;\alpha}$），可得

$$u_\alpha T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \pm vy\left(-\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{\varepsilon + p}{\rho}\frac{d\rho}{dr}\right).$$

在流体元（局域）共动Lorentz系中：$u_\alpha = (1, \overrightarrow{0})$，即$u_{\hat{t}} = 1$、其余分量为零；$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}$；所以$u_\alpha T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = T^{\hat{t}\beta}{}_{,\beta} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\hat{t}} + \nabla\cdot\overrightarrow{\pi}$。

如无能量注入，由能量守恒$u_\alpha T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$有

$$\frac{d\varepsilon}{dr} = \frac{\varepsilon + p}{\rho}\frac{d\rho}{dr}; \tag{6}$$

如有能量注入，设流体元共动系中对单位流体质量的能量注入率为$\dot{q}$（注意：以该流体元时间$\hat{t}$为单位，与前面$\dot{M}$不同），则$u_\alpha T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \rho\dot{q}$，得

$$\frac{d\varepsilon}{dr} - \frac{\varepsilon + p}{\rho}\frac{d\rho}{dr} \pm \frac{\rho}{vy}\dot{q} = 0. \tag{7}$$

4 局域牛顿方程：Euler方程

记$h_{\alpha} \equiv h_{\alpha\beta} T^{\beta\gamma}_{;\gamma}$，由附录(19)式，代入(1)式，可得（计算过程见6.3）

$$
\begin{aligned}
h_{t} \equiv h_{t\beta} T^{\beta\gamma}{}_{;\gamma} &= \mp v y^2 (\varepsilon + p) \left(\frac{1}{y} \frac{dy}{dr} + \frac{1}{\varepsilon + p} \frac{dp}{dr} \right), && (8) \\
h_{r} \equiv h_{r\beta} T^{\beta\gamma}{}_{;\gamma} &= y^2 (1 - 2M/r)^{-1} (\varepsilon + p) \left(\frac{1}{y} \frac{dy}{dr} + \frac{1}{\varepsilon + p} \frac{dp}{dr} \right), && (9) \\
h_{\theta} \equiv h_{\theta\beta} T^{\beta\gamma}{}_{;\gamma} &= 0, \qquad h_{\phi} \equiv h_{\phi\beta} T^{\beta\gamma}{}_{;\gamma} = 0. && (10)
\end{aligned}
$$

在流体元（局域）共动Lorentz系中：$h_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，即$h_{\hat{i}\hat{i}} = 1$、其余分量为零；$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}$；所以$h_{\hat{t}} \equiv h_{\hat{t}\beta} T^{\beta\gamma}{}_{;\gamma} = 0$, $h_{\hat{i}} \equiv h_{\hat{i}\beta} T^{\beta\gamma}{}_{;\gamma} = T^{\hat{i}\gamma}{}_{,\gamma} = \frac{\partial \pi^{\hat{i}}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial T^{\hat{i}\hat{j}}}{\partial x^{\hat{j}}}$（为保持上下指标平衡，左边可写成$\delta^{\hat{i}\hat{j}} h_{\hat{j}\beta} T^{\beta\gamma}{}_{;\gamma}$）。

如无动量注入，则由$h_{\alpha\beta} T^{\beta\gamma}{}_{;\gamma} = 0$和(8)或(9)式，可得Euler方程

$$
\frac{1}{y} \frac{dy}{dr} + \frac{1}{\varepsilon + p} \frac{dp}{dr} = 0\,; \tag{11}
$$

如有动量注入，设流体元共动系中在$\hat{i}$方向上对单位流体质量的动量注入率为$\dot{p}^{\hat{i}}$（注意：同$\dot{q}$，以该流体元时间$\hat{t}$为单位），则$\delta^{\hat{i}\hat{j}} h_{\hat{j}\beta} T^{\beta\gamma}{}_{;\gamma} =$

$\rho\dot{p}^{\hat{i}}$。

由$h_{\hat{\beta}}\mathbf{e}^{\hat{\beta}} = h_{\alpha}\mathbf{e}^{\alpha} \equiv h_{\alpha}e^{\alpha}_{\hat{\beta}}\mathbf{e}^{\hat{\beta}}$ 得$h_{\hat{\beta}} = h_{\alpha}e^{\alpha}_{\hat{\beta}}$。流体元共动Lorentz系的一组标准正交基，在史瓦西坐标(t,r,θ,ϕ)下分量为

$$\mathbf{e}_{\hat{t}} \equiv u^{\alpha} = [y(1-2M/r)^{-1}, \pm vy, 0, 0], \tag{12}$$

$$\mathbf{e}_{\hat{1}} = [\pm vy(1-2M/r)^{-1}, y, 0, 0], \tag{13}$$

$$\mathbf{e}_{\hat{2}} \equiv \mathbf{e}_{\hat{\theta}} = [0, 0, r^{-1}, 0], \tag{14}$$

$$\mathbf{e}_{\hat{3}} \equiv \mathbf{e}_{\hat{\phi}} = [0, 0, 0, r^{-1}\sin^{-1}\theta]. \tag{15}$$

由(8)-(10)与(12)-(15)容易验证:

1. $h_{\alpha}e^{\alpha}_{\hat{t}} = 0$，即$h_{\hat{t}} = 0$自然满足，且与三个空间标正基$\{\mathbf{e}_{\hat{i}}, i = 1,2,3\}$的选取无关。

2. $h_{\alpha}e^{\alpha}_{\hat{\theta}} = h_{\alpha}e^{\alpha}_{\hat{\phi}} = 0$，即$h_{\hat{\theta}} = h_{\hat{\phi}} = 0$，说明$\theta$和$\phi$空间方向无动量注入：$\dot{p}^{\hat{\theta}} = \dot{p}^{\hat{\phi}} = 0$，与球对称假设一致。

3. $h_{\hat{1}} = h_{\alpha}e^{\alpha}_{\hat{1}} = (\varepsilon+p)\frac{dy}{dr} + y\frac{dp}{dr}$，即动量注入只有径向。注意到$\mathbf{e}_{\hat{1}}\cdot\mathbf{e}_{r} = y(1-2M/r)^{-1} > 0$，即$\mathbf{e}_{\hat{1}}$矢量指向$r$空间方向正向。设在$r$正向上单位流体质量的动量注入率（以该流体元时间$\hat{t}$为单位）为$\dot{p}$，则

得Euler方程

$$(\varepsilon+p)\frac{dy}{dr}+y\frac{dp}{dr}=\rho\dot{p}\,. \tag{16}$$

（对星风情况，$\dot{p}>0$。）假设注入无质量或质量可忽略的粒子，例如光子和中微子（忽略质量），则能量注入率和动量注入率有关系：$\dot{q}=\dot{p}c^2$。因此，最终Euler方程为（$c=1$）

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dr}+\frac{1}{\varepsilon+p}\frac{dp}{dr}\mp\frac{\rho}{y(\varepsilon+p)}\dot{q}=0\,, \tag{17}$$

其中$\mp$中负号表示动量注入在r正向上、正号表示动量注入在r反向上。

5 理想流体动力学方程组

(5)式、(6.2)式和(17)式三式与流体的状态方程联立，可解得史瓦西几何中球对称、稳态的星风或吸积流体的动力学解。

如果还有质量注入，例如中微子辐射带走不可忽略的质量而引起质量损失：设单位流体质量的质量注入率为$\dot{m}$，则静质量连续性方程(4)式$0=(\rho u^{\alpha})_{;\alpha}$ 变为

$$(\rho u^{\alpha})_{;\alpha}=\rho\dot{m}\,. \tag{18}$$

设注入仅一种粒子，则质量注入率、能量注入率和动量注入率有关系：$\dot{q}^2=\dot{m}^2c^4+\dot{p}c^2$。(5)式、(6.2)式和(17)式三式分别变为...

6 附录

6.1 理想流体的相对论性Euler方程

对于理想流体$T^{\alpha\beta} = (\varepsilon+p)u^\alpha u^\beta + g^{\alpha\beta}p$，相对论性Euler方程$0 = h_{\alpha\beta}T^{\beta\gamma}{}_{;\gamma}$可作简化为

$$\begin{aligned} 0 &= h_{\alpha\beta}T^{\beta\gamma}{}_{;\gamma} = g_{\alpha\beta}(\varepsilon+p)u^\gamma u^\beta{}_{;\gamma} + h_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}p_{,\gamma} \\ &= (\varepsilon+p)u^\gamma u_{\alpha;\gamma} + (\delta^\gamma_\alpha + u_\alpha u^\gamma)p_{,\gamma} \equiv (\varepsilon+p)a_\alpha + p_{,\alpha} + u_\alpha u^\gamma p_{,\gamma} \end{aligned} \tag{19}$$

证明如下：因为$h_{\alpha\beta}u^\beta = (g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta)u^\beta = u_\alpha - u_\alpha = 0$，$g^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} = 0 => g^{\beta\gamma}{}_{;\gamma} = 0$，由求导的Leibniz法则，有

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta}T^{\beta\gamma}{}_{;\gamma} &= h_{\alpha\beta}\left[(\varepsilon+p)u^\beta u^\gamma + g^{\beta\gamma}\right]_{;\gamma} \\ &= h_{\alpha\beta}[(\varepsilon+p)u^\gamma]_{;\gamma}u^\beta + h_{\alpha\beta}(\varepsilon+p)u^\gamma u^\beta{}_{;\gamma} + h_{\alpha\beta}(g^{\beta\gamma}{}_{;\gamma}p + g^{\beta\gamma}p_{,\gamma}) \\ &= h_{\alpha\beta}(\varepsilon+p)u^\gamma u^\beta{}_{;\gamma} + h_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}p_{,\gamma} \\ &= g_{\alpha\beta}(\varepsilon+p)u^\gamma u^\beta{}_{;\gamma} + (g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta)g^{\beta\gamma}p_{,\gamma} \\ &= (\varepsilon+p)u^\gamma(g_{\alpha\beta}u^\beta)_{;\gamma} + (\delta^\gamma_\alpha + u_\alpha u^\gamma)p_{,\gamma}. \end{aligned}$$

倒数第二个=号用到$0 = u_\beta u^\beta{}_{;\gamma}$，证明如下：注意到$g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$，有$0 = [-1 = g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta]_{;\gamma} = g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta{}_{;\gamma} + g_{\alpha\beta}u^\alpha{}_{;\gamma}u^\beta = u_\beta u^\beta{}_{;\gamma} + u_\alpha u^\alpha{}_{;\gamma} = 2u_\beta u^\beta{}_{;\gamma}$.

6.2 理想流体的相对论性局域能量守恒方程

类似地，对于理想流体$T^{\alpha\beta} = (\varepsilon + p)u^\alpha u^\beta + g^{\alpha\beta} p$，相对论性局域能量守恒方程$0 = u_\alpha T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}$可简化为

$$\begin{aligned} 0 = u_\alpha T^{\alpha\beta} &= u_\alpha [(\varepsilon + p)u^\alpha u^\beta + g^{\alpha\beta} p]_{;\beta} \\ &= u_\alpha [(\varepsilon + p)_{,\beta} u^\alpha u^\beta + (\varepsilon + p)u^\alpha u^\beta{}_{;\beta} + g^{\alpha\beta} p_{,\beta}] \\ &= -(\varepsilon + p)_{,\beta} u^\beta - (\varepsilon + p)u^\beta{}_{;\beta} + u^\beta p_{,\beta}\,. \end{aligned} \tag{20}$$

（请试利用6.1结果讨论狭义相对论流体力学；用6.2上式讨论静力学平衡、在局域，结合数目守恒，得到单个粒子比熵不变；参见Weinberg§2.10）

6.3 (8)和(9)式的计算过程

得到(8)式的计算过程：$u_{t;\gamma} = u_{t,\gamma} - \Gamma^\alpha_{t\gamma} u_\alpha$，

$$\begin{aligned} u^\gamma u_{t;\gamma} &= u^t u_{t;t} + u^r u_{t;r} \\ &= -u^t \Gamma^\alpha_{tt} u_\alpha + u^r (u_{t,r} - \Gamma^\alpha_{tr} u_\alpha) \\ &= -u^t \Gamma^r_{tt} u_r + u^r (u_{t,r} - \Gamma^t_{tr} u_t) \\ &= u^r u_{t,r} = \mp v y \frac{dy}{dr}\,, \end{aligned}$$

其中用到史瓦西几何的非零克氏符Γ^{α}_{tt}仅有$\Gamma^{r}_{tt}=(M/r^2)(1-2M/r)$、$\Gamma^{\alpha}_{tr}$仅有$\Gamma^{t}_{tr}=(M/r^2)(1-2M/r)^{-1}$，并代入(1)和(2)式，由(19)，

$$
\begin{aligned}
h_t \equiv h_{t\beta}T^{\beta\gamma}_{;\gamma} &= (\varepsilon+p)u^{\gamma}u_{t;\gamma}+p_{,t}+u_t u^{\gamma}p_{,\gamma} \\
&= (\varepsilon+p)u^{\gamma}u_{t;\gamma}+u_t u^{r}p_{,r} \\
&= \mp vy\left[(\varepsilon+p)\frac{dy}{dr}+y\frac{dp}{dr}\right].
\end{aligned}
$$

得到(9)式的计算过程：$u^{r}_{;\gamma}=u^{r}_{,\gamma}+\Gamma^{r}_{\gamma\alpha}u^{\alpha}$，

$$
\begin{aligned}
u^{\gamma}u^{r}_{;\gamma} &= u^{t}u^{r}_{;t}+u^{r}u^{r}_{;r} \\
&= u^{t}\Gamma^{r}_{t\alpha}u^{\alpha}+u^{r}(u^{r}_{,r}+\Gamma^{r}_{r\alpha}u^{\alpha}) \\
&= u^{t}\Gamma^{r}_{tt}u^{t}+u^{r}(u^{r}_{,r}+\Gamma^{r}_{rr}u^{r}) \\
&= \frac{M}{r^2}+vy\frac{d(vy)}{dr}=y\frac{dy}{dr},
\end{aligned}
$$

其中用到史瓦西几何的非零克氏符$\Gamma^{r}_{t\alpha}$仅有$\Gamma^{r}_{tt}=(M/r^2)(1-2M/r)$、$\Gamma^{r}_{r\alpha}$仅有$\Gamma^{r}_{rr}=-(M/r^2)(1-2M/r)^{-1}$，并代入(1)和(2)式，由(19)，

$$
\begin{aligned}
h_t \equiv h_{t\beta}T^{\beta\gamma}_{;\gamma} &= g_{rr}(\varepsilon+p)u^{\gamma}u^{r}_{;\gamma}+p_{,r}+u_r u^{\gamma}p_{,\gamma} \\
&= (\varepsilon+p)(1-2M/r)^{-1}y\frac{dy}{dr}+(1+u_r u^{r})p_{,r} \\
&= y(1-2M/r)^{-1}\left[(\varepsilon+p)\frac{dy}{dr}+y\frac{dp}{dr}\right].
\end{aligned}
$$

上两式最后注意利用等式(3)。(10)式$h_{\theta\beta}T^{\beta\gamma}_{;\gamma} = h_{\phi\beta}T^{\beta\gamma}_{;\gamma} = 0$ 易证不详述。

6.4 r方向标正基(13)式的确定

设$\mathbf{e}_{\hat{1}} = (a, b, 0, 0)$，由正交性

$$0 = \mathbf{e}_{\hat{0}} \cdot \mathbf{e}_{\hat{1}} = ay(1-2M/r)^{-1}g_{tt} \pm bvyg_{rr} => a = \pm bv(1-2M/r)^{-1},$$

代入归一化

$$1 = \mathbf{e}_{\hat{1}} \cdot \mathbf{e}_{\hat{1}} = a^2 g_{tt} + b^2 g_{rr} => b = y,$$

从而

$$\mathbf{e}_{\hat{1}} = [\pm vy(1-2M/r)^{-1}, y, 0, 0].$$