



量子信息导论

PHYS5251P

中国科学技术大学
物理学院/合肥微尺度物质科学国家研究中心

陈凯

2025.9

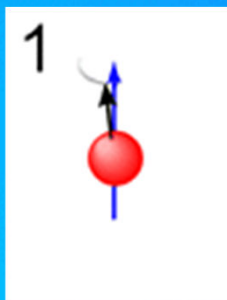
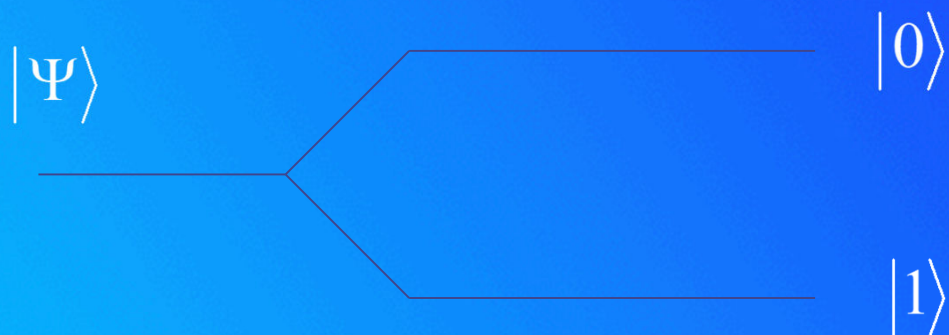
第一章 量子体系

1. 量子态表示
2. 密度矩阵（纯态、混合态）
3. 量子不可克隆定理
4. Schmidt分解
5. 密度矩阵（表示、操作）
6. 量子测量

量子比特(qubit)

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$



$$|spin\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$$

最简单的量子系统

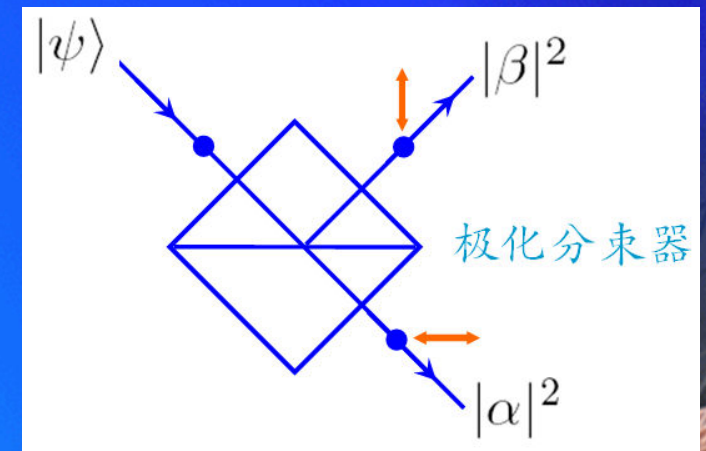
量子比特 是一个两维量子系统、即由一个两维Hilbert空间表示的量子系统

该Hilbert空间的一组正交归一基可以表示为 $|0\rangle, |1\rangle$

- ◆ 两能级原子（上能级、下能级）
- ◆ 光子极化（水平极化、竖直极化）
- ◆ 光子数（真空态、单光子态）
- ◆ 电子自旋（自旋向上、自旋向下）
- ◆ 单个粒子穿过两路干涉仪时所走的路径（路径1、路径2）

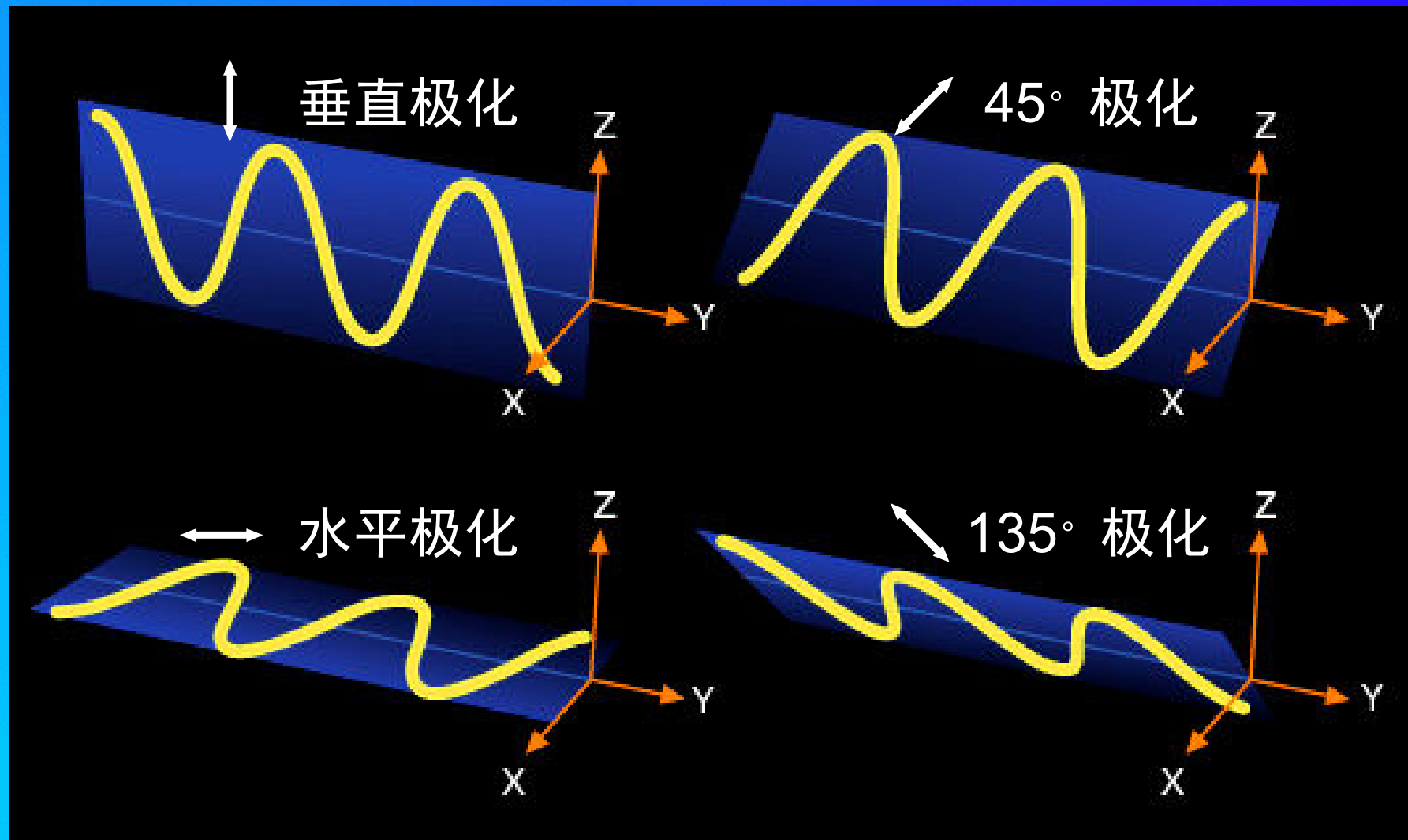
量子叠加 量子比特可以处在任意叠加态

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$



例：光子的极化

可以通过不同的极化方向区分光子的状态

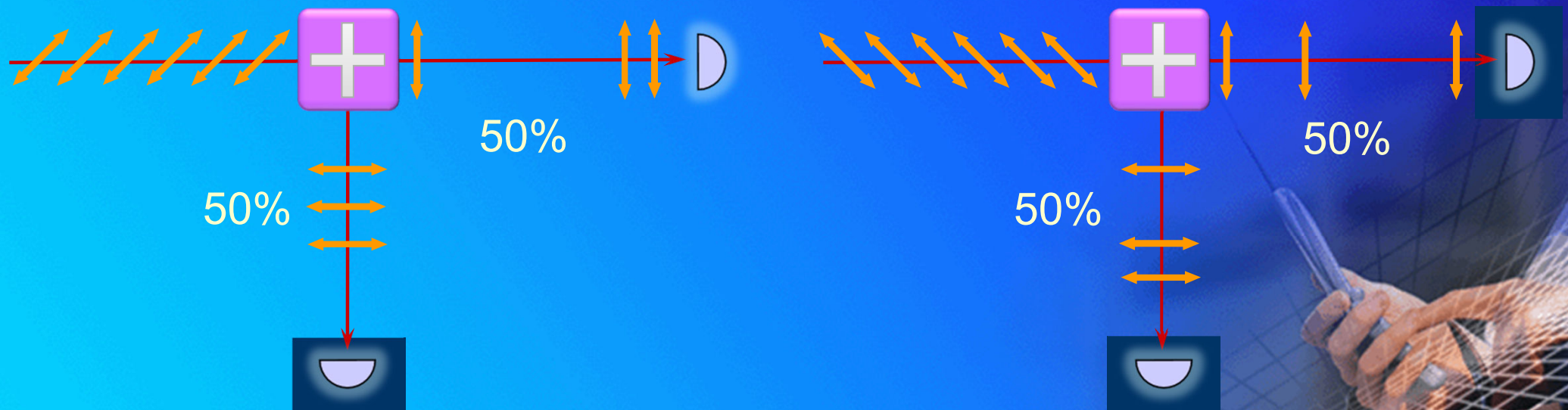


光子极化状态的测量

极化分束器

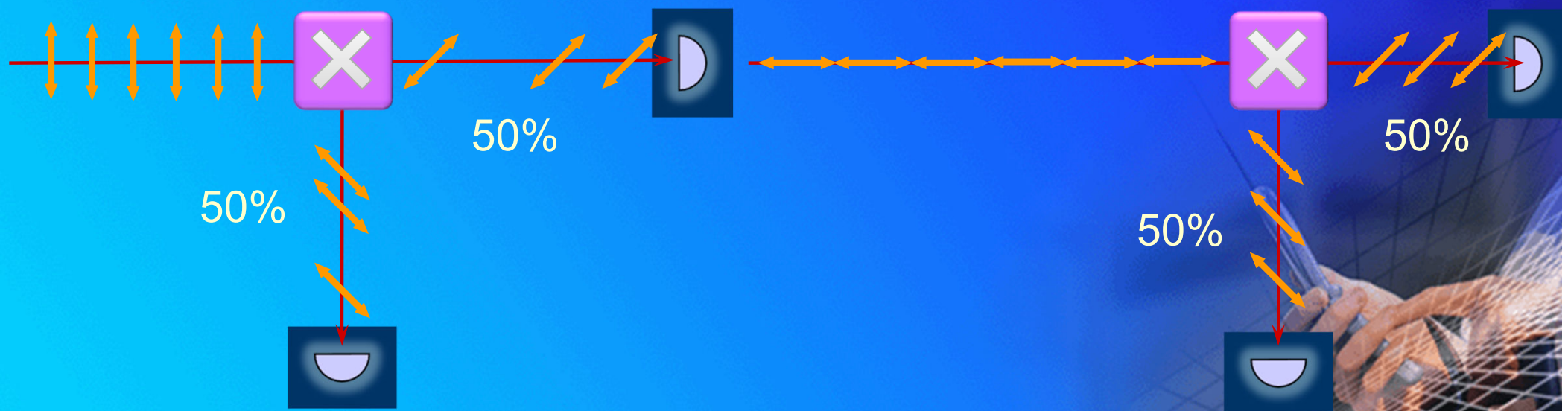


探测器



光子极化状态的测量

极化分束器



量子比特的表示和性质

- ◆ 一个量子比特有两个可能的状态: $|0\rangle$ & $|1\rangle$
- ◆ 不像经典比特, 量子比特可以处于任意相干叠加

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

- ◆ 一个量子比特可以表征为2维Hilbert空间的单位矢量
- ◆ $|0\rangle$ & $|1\rangle$ 称作 orthonormal computational basis
- ◆ 量子比特的可能的状态可以表示为

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

量子比特的表示和性质

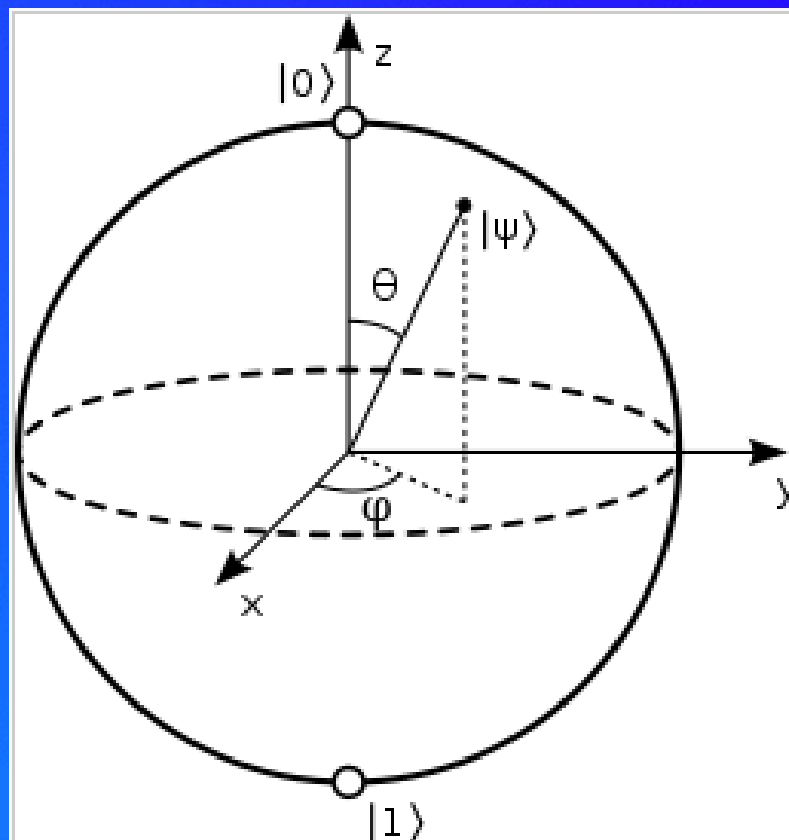
- ◆ 对于量子比特的测量得到0的概率为 $|\alpha|^2$ ，得到1的概率为 $|\beta|^2$
- ◆ 量子比特测量之后不再能被恢复
- ◆ 量子比特可以与其它量子比特之间有关联和纠缠关系
- ◆ 量子比特可以有指数级增长的量子信息

量子比特的表示和性质

◆ 量子比特总可以表示为

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right)$$

称作Bloch Sphere表示



Pauli矩阵

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

性质

$$\sigma_k^\dagger = \sigma_k^{-1}, \quad \text{Tr}(\sigma_k) = 0, \quad \sigma_k^\dagger = \sigma_k, \quad k = x, y, z$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \text{Id}$$

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \text{Id}$$

$$[\sigma_x, \sigma_y]_+ = [\sigma_y, \sigma_z]_+ = [\sigma_z, \sigma_x]_+ = 0$$

$$\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k$$

Pauli矩阵

$$\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}$$

从而对于任意2维线性算子有

$$A = \frac{1}{2} \text{Tr}(A) \text{Id} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \text{Tr}(A \sigma_k) \sigma_k$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -i(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|.$$

Pauli矩阵

作用在量子比特上

$$\sigma_x|0\rangle = |1\rangle$$

$$\sigma_x|1\rangle = |0\rangle$$

σ_x exchanges (*bit flip*)

$$\sigma_y|0\rangle = i|1\rangle$$

$$\sigma_y|1\rangle = -i|0\rangle$$

σ_y exchanges and introduces the phase $\pm i$

$$\sigma_z|0\rangle = +|0\rangle$$

$$\sigma_z|1\rangle = -|1\rangle.$$

σ_z introduces the phase ± 1 (*phase flip*).

第一章 量子体系

1. 量子态表示
2. 密度矩阵（纯态、混合态）
3. 量子不可克隆定理
4. Schmidt分解
5. 密度矩阵（表示、操作）
6. 量子测量

密度矩阵 (Density Matrices)

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

注意到 $\alpha = \langle 0|\phi\rangle$ 以及 $\beta = \langle 1|\phi\rangle$.

因此对于量子态 $|\phi\rangle$ 测得0的概率为

$$\begin{aligned} p(0) &= |\alpha|^2 = |\langle 0|\phi\rangle|^2 \\ &= \langle 0|\phi\rangle(\langle 0|\phi\rangle)^* = \langle 0|\phi\rangle\langle\phi|0\rangle \\ &= \langle 0|\phi\rangle\langle\phi|0\rangle = \text{Tr}(\langle 0|\phi\rangle\langle\phi|0\rangle) \\ &= \text{Tr}(|0\rangle\langle 0|\phi\rangle\langle\phi|) = \text{Tr}(|0\rangle\langle 0|\rho) \end{aligned}$$

这里定义 $\rho = |\phi\rangle\langle\phi|$ 为量子纯态 $|\phi\rangle$ 的

密度矩阵(density matrix)



密度矩阵 (Density Matrices)

- (i) ρ is positive: $\langle \varphi | \rho | \varphi \rangle \geq 0$, $\forall |\varphi\rangle \in \mathcal{H}_d$ (and thus Hermitian, $\rho^\dagger = \rho$)
- (ii) $\text{tr}[\rho] = 1$
- (iii) $\rho^2 = \rho$.

$$\text{(iii}^*) \text{ tr}[\rho^2] = 1$$



混合量子态

由态矢量 $|\phi\rangle$ 所描述的量子态称为纯态

考虑情形若一个量子系统处于 $|\phi_1\rangle$ 的几率为 p_1 ,
处于 $|\phi_2\rangle$ 的几率为 p_2 ?

更一般地, 考虑统计混合的情形

$$\phi = \{ (|\phi_1\rangle, p_1), (|\phi_2\rangle, p_2), \dots \}$$

混合态系综情形

假使我们做一个投影算子的 P_0 的测量，从而输出为0的几率为

$$\begin{aligned} p(0) &= \sum p_i \cdot (\text{给定量子态 } |\phi_i\rangle \text{ 测得 } 0 \text{ 的几率}) \\ &= \sum_i p_i \cdot \text{Tr}(|0\rangle\langle 0| \phi_i\rangle\langle \phi_i|) \\ &= \text{Tr} \sum_i p_i |0\rangle\langle 0| \phi_i\rangle\langle \phi_i| \\ &= \text{Tr}(|0\rangle\langle 0| \rho) = \text{Tr}(P_0 \rho) \end{aligned}$$

从而我们表示混合态的密度矩阵为

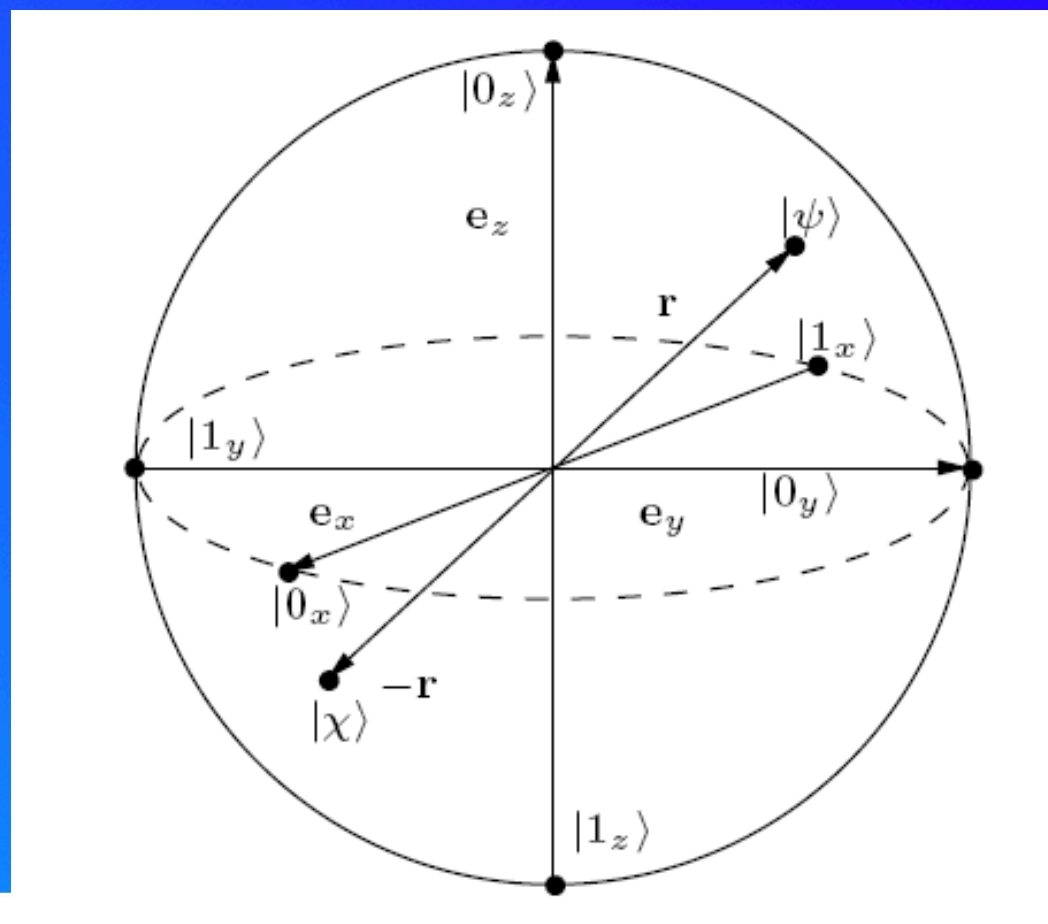
$$\rho = \sum_i p_i |\phi_i\rangle\langle \phi_i|$$

该密度矩阵包含了关于此量子态的所有有用和测量统计信息

混合态密度矩阵Bloch球表示

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma})$$

$$\mathbf{r} := \text{tr}[\rho\boldsymbol{\sigma}]$$



$$\text{tr}[\rho^2] = \frac{1}{4}\text{tr}[\mathbb{1} + 2\mathbf{r}\boldsymbol{\sigma} + \sum_{i,j} r_i r_j \sigma_i \sigma_j]$$

$$= \frac{1}{2}(1 + |\mathbf{r}|^2) .$$



第一章 量子体系

1. 量子态表示
2. 密度矩阵（纯态、混合态）
3. 量子不可克隆定理
4. Schmidt分解
5. 密度矩阵（表示、操作）
6. 量子测量

(经典) 复制过程



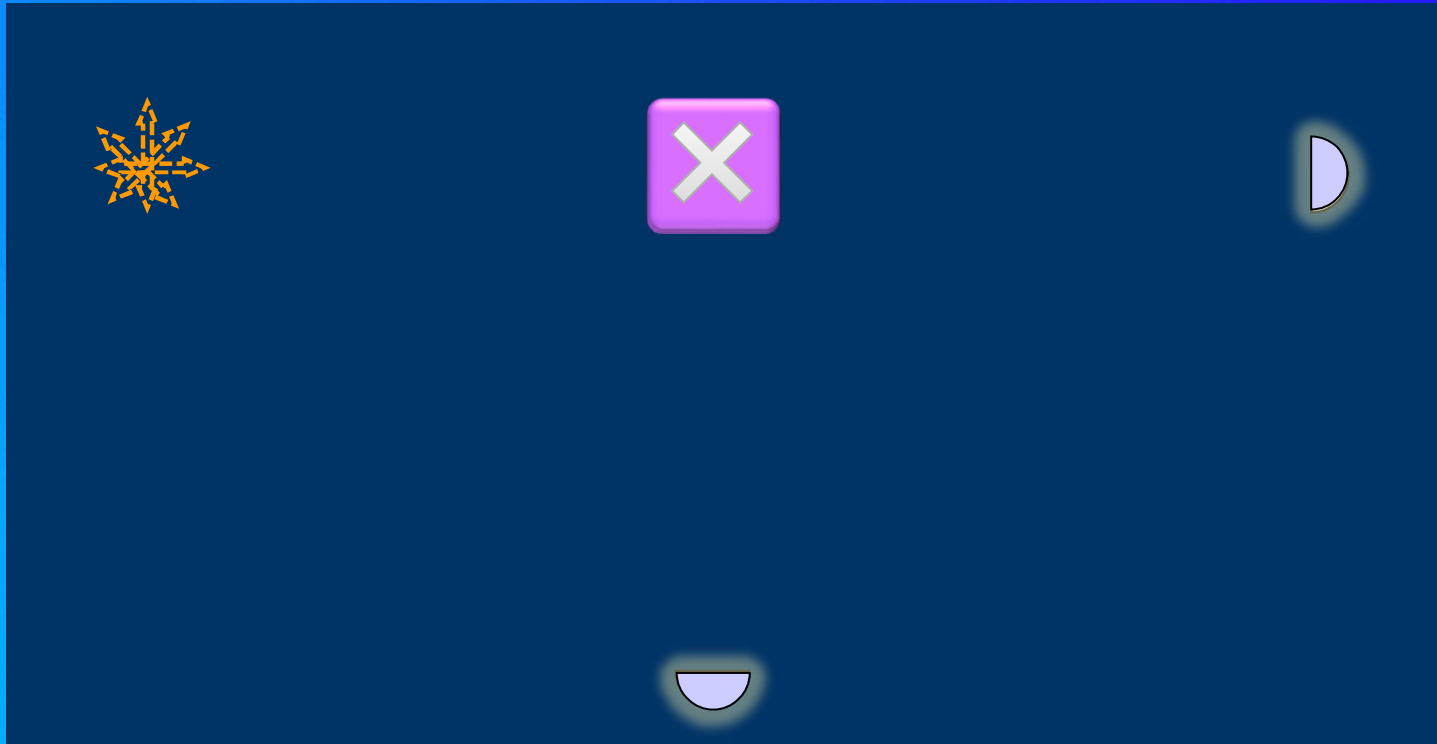
原件状态未知

对原件进行测量

获得关于原件状态的
准确信息以进行复制

“量子复制”？

当知道原件为  之一, 但不知其是哪个时



原件状态未知



对原件进行测量



~~获得关于原件状态的
准确信息以进行复制~~

不可克隆定理和不可超光速通信



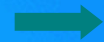
$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle)$$

Quantum cloning $\rightarrow$ Superluminal communication!

No-Cloning

$$|0\rangle| \rangle \Rightarrow |0\rangle|0\rangle$$

$$|1\rangle| \rangle \Rightarrow |1\rangle|1\rangle$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)| \rangle &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) \\ &\neq \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right] \end{aligned}$$

It is impossible to create identical copies of an arbitrary unknown quantum state!

Wootters and Zurek, Nature 299, 802 (1982)
Dieks, Phys. Lett. A 92, 271 (1982)

谢谢