量子信息导论
PHYS5251P

中国科学技术大学
物理学院/合肥微尺度物质科学国家研究中心

陈凯

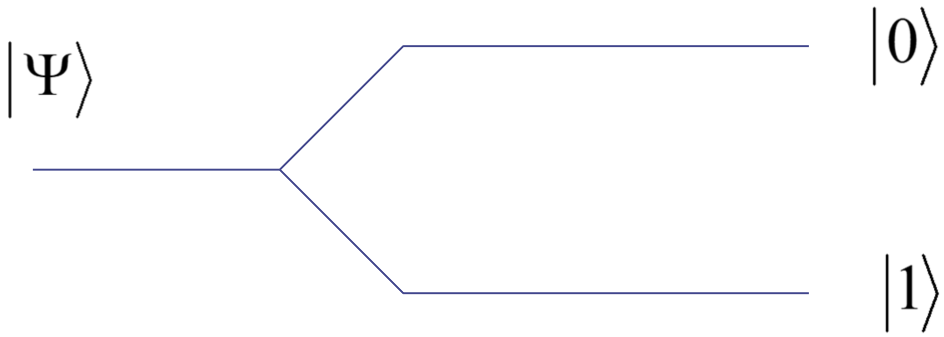
2025.9

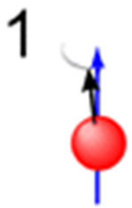
第一章 量子体系

1. **量子态表示**
2. 密度矩阵（纯态、混合态）
3. 量子不可克隆定理
4. Schmidt分解
5. 密度矩阵（表示、操作）
6. 量子测量

量子比特(qubit)

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$





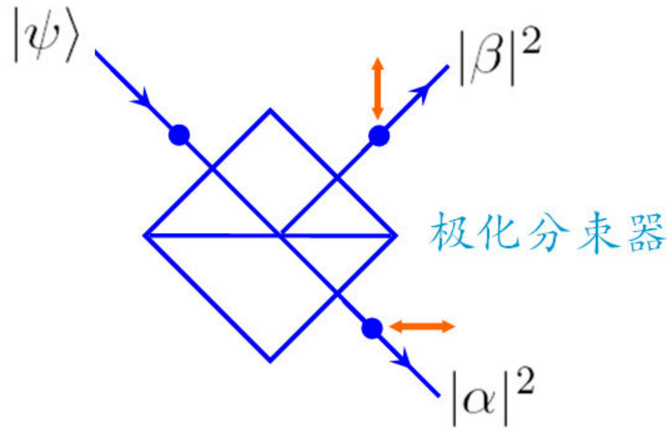
$$|spin\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$$

最简单的量子系统

量子比特　是一个两维量子系统、即由一个两维Hilbert空间表示的量子系统

该Hilbert空间的一组正交归一基可以表示为 $|0\rangle,\ |1\rangle$

- 两能级原子（上能级、下能级）
- 光子极化（水平极化、竖直极化）
- 光子数（真空态、单光子态）
- 电子自旋（自旋向上、自旋向下）
- 单个粒子穿过两路干涉仪时所走的路径（路径1、路径2）

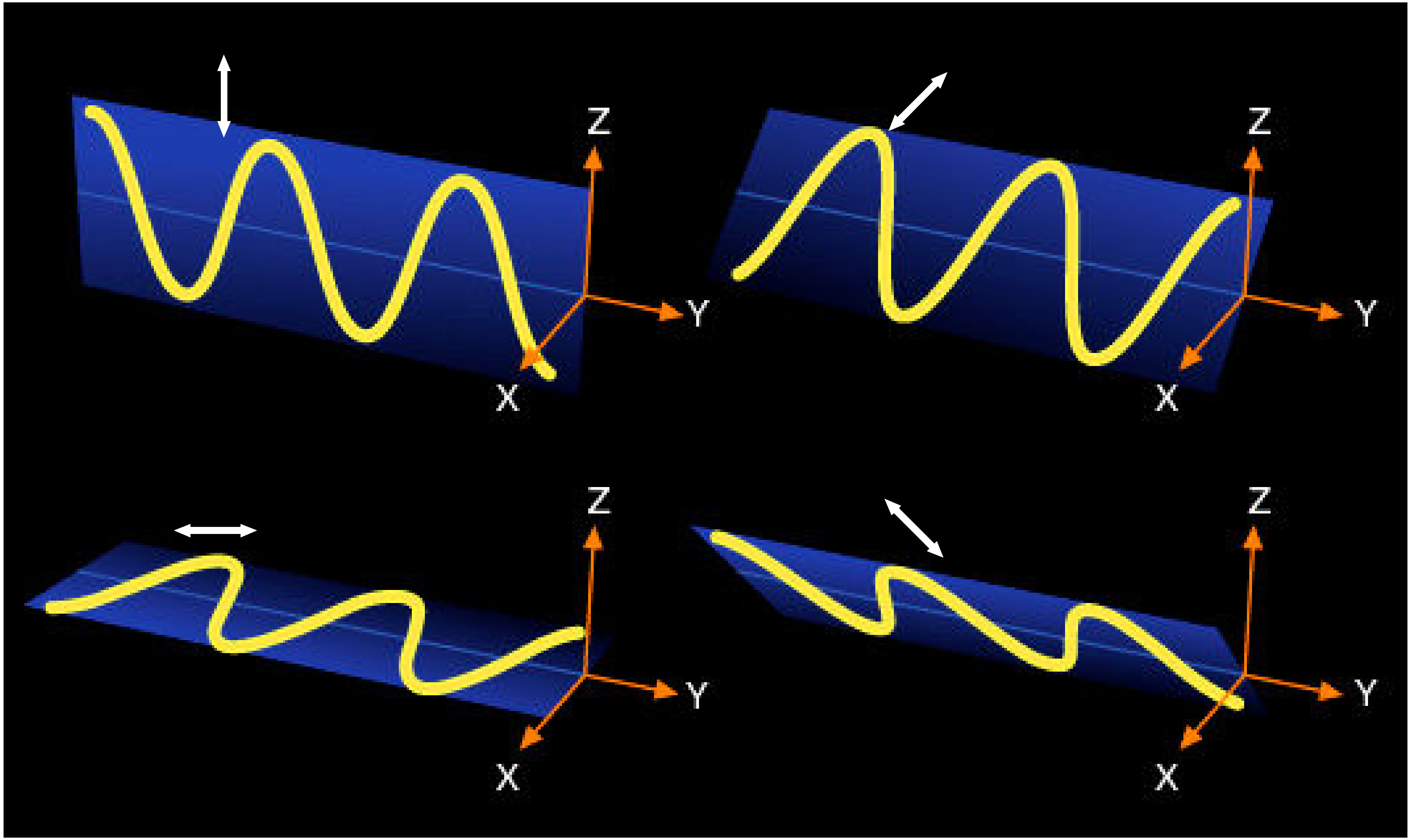


量子叠加　量子比特可以处在任意叠加态

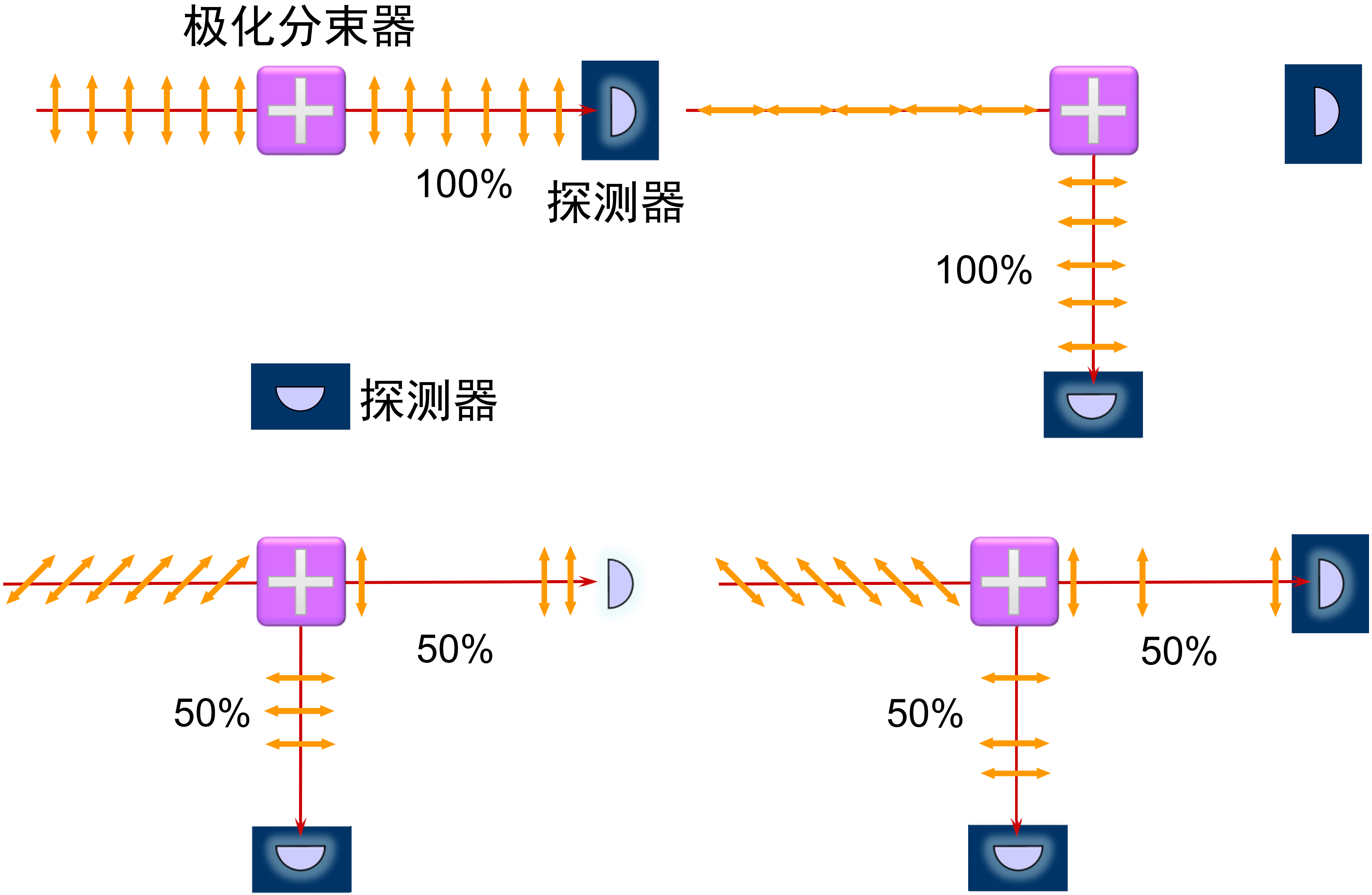
$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

例：光子的极化

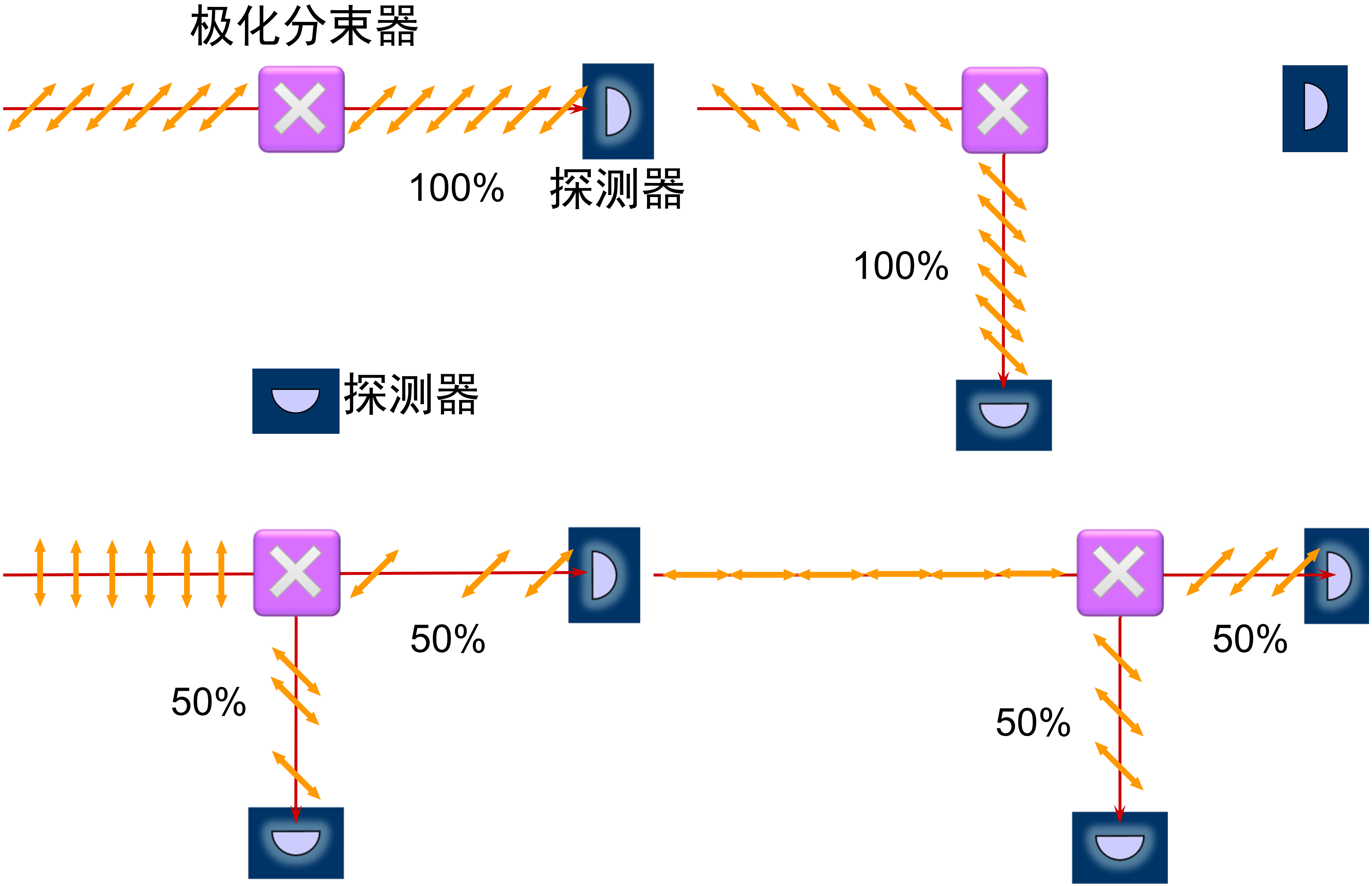
可以通过不同的极化方向区分光子的状态



光子极化状态的测量



光子极化状态的测量



量子比特的表示和性质

- 一个量子比特有两个可能的状态: $|0\rangle$ & $|1\rangle$
- 不像经典比特，量子比特可以处于任意相干叠加

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

- 一个量子比特可以表征为2维Hilbert空间的单位矢量
- $|0\rangle$ & $|1\rangle$ 称作 orthonormal computational basis

- 量子比特的可能的状态可以表示为

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

量子比特的表示和性质

- 对于量子比特的测量得到0的概率为 $|\alpha|^2$ ， 得到1的概率为 $|\beta|^2$

- 量子比特测量之后不再能被恢复

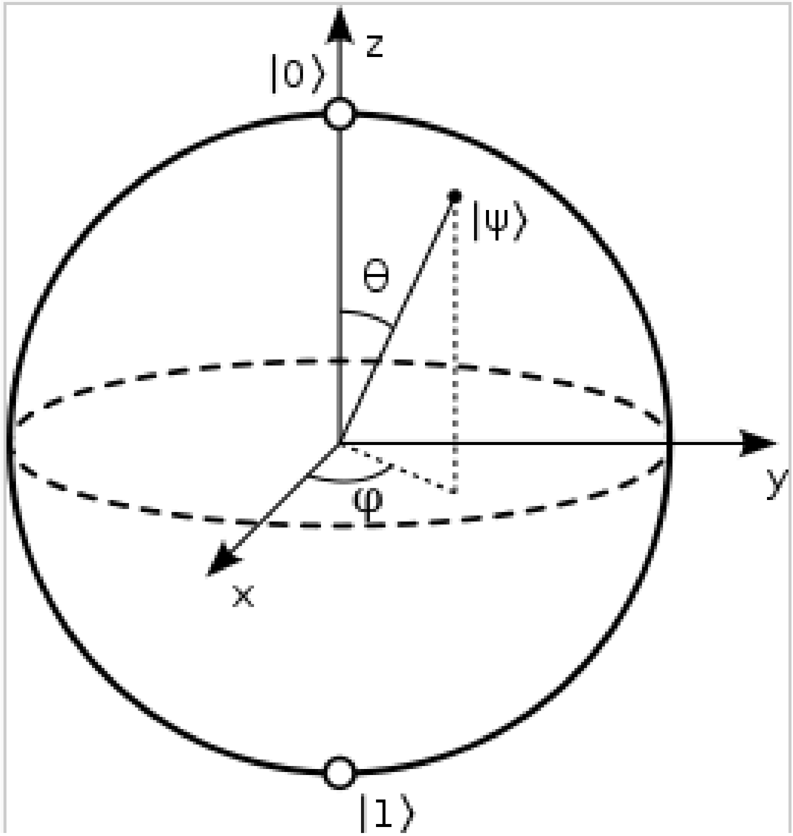
- 量子比特可以与其它量子比特之间有关联和纠缠关系

- 量子比特可以有指数级增长的量子信息

量子比特的表示和性质

- 量子比特总可以表示为

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma}(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle)$$



称作Bloch Sphere表示

Pauli矩阵

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

性质

$$\sigma_k^\dagger = \sigma_k^{-1}, \quad \mathrm{Tr}(\sigma_k) = 0, \qquad \sigma_k^\dagger = \sigma_k, \quad k = x, y, z$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathrm{Id} \qquad \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}\,\mathrm{Id}$$

$$[\sigma_x, \sigma_y]_+ = [\sigma_y, \sigma_z]_+ = [\sigma_z, \sigma_x]_+ = 0$$

$$\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

Pauli矩阵

$$\mathrm{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}$$

从而对于任意2维线性算子有

$$A = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Id} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\mathrm{Tr}(A\sigma_k)\sigma_k$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -i\left(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|\right)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\,.$$

Pauli矩阵

作用在量子比特上

$$\sigma_x|0\rangle = |1\rangle \qquad \sigma_x \text{ exchanges } (\textit{bit flip})$$
$$\sigma_x|1\rangle = |0\rangle$$

$$\sigma_y|0\rangle = i|1\rangle \qquad \sigma_y \text{ exchanges and introduces the phase } \pm i$$
$$\sigma_y|1\rangle = -i|0\rangle$$

$$\sigma_z|0\rangle = +|0\rangle \qquad \sigma_z \text{ introduces the phase } \pm 1 \ (\textit{phase flip}).$$
$$\sigma_z|1\rangle = -|1\rangle.$$

第一章 量子体系

1. 量子态表示
2. **密度矩阵（纯态、混合态）**
3. 量子不可克隆定理
4. Schmidt分解
5. 密度矩阵（表示、操作）
6. 量子测量

密度矩阵 (Density Matrices)

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

注意到 $\alpha = \langle 0|\phi\rangle$ 以及 $\beta = \langle 1|\phi\rangle$.

因此对于量子态|φ⟩测得0的概率为

$$p(0) = |\alpha|^2 = |\langle 0|\phi\rangle|^2$$

$$= \langle 0|\phi\rangle\left(\langle 0|\phi\rangle\right)^* = \langle 0|\phi\rangle\langle\phi|0\rangle$$

$$= \langle 0\|\phi\rangle\langle\phi\|0\rangle = Tr\left(\langle 0\|\phi\rangle\langle\phi\|0\rangle\right)$$

$$= Tr\left(|0\rangle\langle 0\|\phi\rangle\langle\phi|\right) = Tr\left(|0\rangle\langle 0|\rho\right)$$

这里定义ρ =|φ⟩⟨φ| 为量子纯态|φ⟩ 的

密度矩阵(density matrix)

密度矩阵 (Density Matrices)

(i) ρ is positive: $\langle\varphi|\rho|\varphi\rangle \geq 0$, $\forall\ |\varphi\rangle \in \mathcal{H}_d$ (and thus Hermitian, $\rho^\dagger = \rho$)

(ii) $tr[\rho] = 1$

(iii) $\rho^2 = \rho$.

(iii*) $\mathrm{tr}[\rho^2] = 1$

混合量子态

由态矢量 $|\phi\rangle$ 所描述的量子态称为纯态

考虑情形若一个量子系统处于$|\phi_1\rangle$的几率为p_1，处于$|\phi_2\rangle$的几率为p_2?

更一般地，考虑统计混合的情形

$$\phi = \left\{ \left(|\phi_1\rangle, p_1 \right), \left(|\phi_2\rangle, p_2 \right), \cdots \right\}$$

混合态系综情形

假使我们做一个投影算子的P_0的测量，从而输出为0的几率为

$$p(0)=\sum_i p_i\cdot\left(\text{给定量子态}\left|\phi_i\right\rangle\text{测得0的几率}\right)$$

$$=\sum_i p_i\cdot Tr\left(\left|0\right\rangle\left\langle 0\right\|\phi_i\left\rangle\right\langle\phi_i\right|\right)$$

$$=Tr\sum_i p_i\left|0\right\rangle\left\langle 0\right\|\phi_i\left\rangle\right\langle\phi_i\right|$$

$$=Tr\left(\left|0\right\rangle\left\langle 0\right|\rho\right)=Tr\left(P_0\rho\right)$$

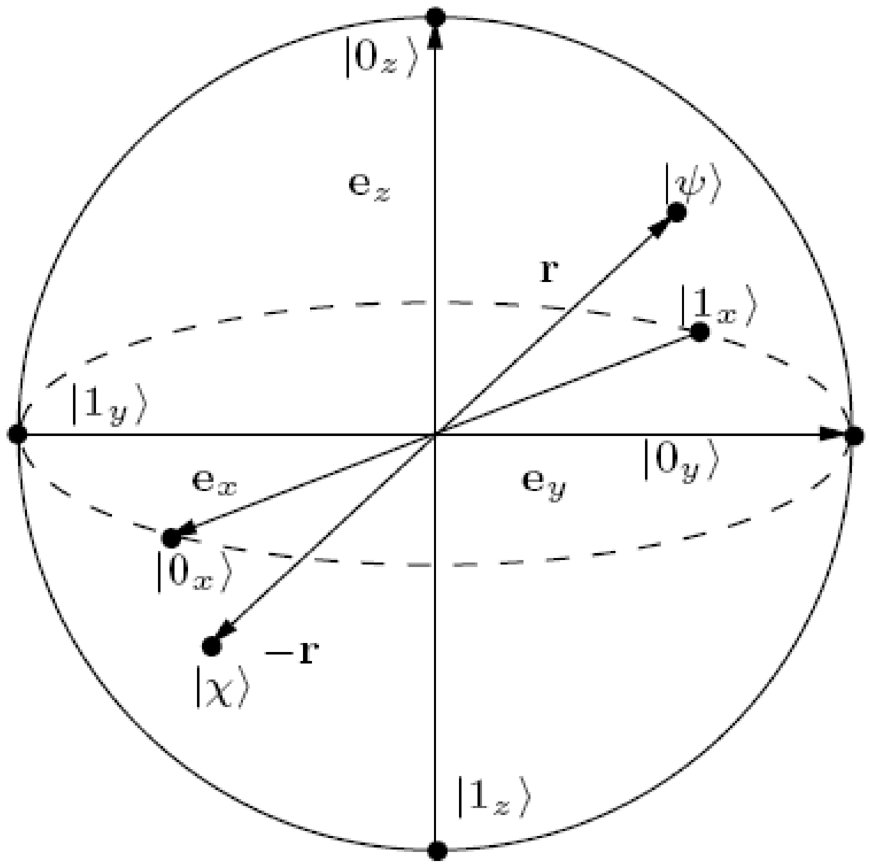
从而我们表示混合态的密度矩阵为

$$\rho=\sum_i p_i\left|\phi_i\right\rangle\left\langle\phi_i\right|$$

该密度矩阵包含了关于此量子态的所有有用和测量统计信息

混合态密度矩阵Bloch球表示

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma})$$



$$\mathbf{r} := \mathrm{tr}[\rho\boldsymbol{\sigma}]$$

$$\mathrm{tr}[\rho^2] = \frac{1}{4}\mathrm{tr}[\mathbb{1} + 2\mathbf{r}\boldsymbol{\sigma} + \sum_{i,j} r_i r_j \sigma_i \sigma_j]$$

$$= \frac{1}{2}(1 + |\mathbf{r}|^2)\ .$$

第一章 量子体系

1. 量子态表示
2. 密度矩阵（纯态、混合态）
3. **量子不可克隆定理**
4. Schmidt分解
5. 密度矩阵（表示、操作）
6. 量子测量

（经典）复制过程

原件状态未知

对原件进行测量

获得关于原件状态的准确信息以进行复制

“量子复制”？

当知道原件为 之一，但不知道为哪个时

原件状态未知

对原件进行测量

获得关于原件状态的准确信息以进行复制

不可克隆定理和不可超光速通信

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle)$$

Quantum cloning $\longrightarrow$ Superluminal communication!

No-Cloning

$$|0\rangle|\ \rangle \Rightarrow |0\rangle|0\rangle$$

$$|1\rangle|\ \rangle \Rightarrow |1\rangle|1\rangle$$

$\longrightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|\ \rangle \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle)$$

$$\neq \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right]$$

It is impossible to create identical copies of an arbitrary unknown quantum state!

Wootters and Zurek, Nature 299, 802 (1982)
Dieks, Phys. lett. A 92, 271 (1982)

谢谢