

第二章 等离子体折射系数

§2.1 电磁波在等离子体中的传播

电磁波在等离子体中的传播已有很详尽的研究, 有专著: 金福堡院士《电磁波在等离子体中的传播》(中译本), 科学出版社, 1978年。本书仅给出其中的一些基本概念, 以做为以后章节讨论的基础。

一. 电磁波作为探针必须满足以下条件:

1. 对等离子体不造成干扰: $\frac{eE}{m_e \omega} \ll v_{te}$
2. 在等离子体中传播: 传播距离, 一般在几厘米

二. 冷等离子体波的色散关系 波的相速度远大于粒子的热运动速度

冷等离子体波近似, 是忽略了带电粒子的热运动对电磁波传播特性的影响, 只考虑电磁波与冷等离子体相互作用, 文章相类似地近似。

一般色散关系可由麦克斯韦方程组和粒子运动方程联立求解而得。

假设: ① 电磁波频率远大于粒子的回旋频率

② 等离子体是均匀介质

③ 冷等离子体

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\vec{j} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E} = en_e \vec{U}$$

电子漂移速度, 由运动方程求出

$$m_e \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -e \vec{E} - e \vec{U} \times \vec{B}_0$$

联立求解得波动方程 $E \propto \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$


$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \mu_0 \vec{\sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = 0$$

即
$$\vec{E} = \vec{I} + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \vec{\sigma}$$

等离子体介电张量

上述波动方程可化为:

$$\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\vec{k} \cdot \vec{k}}{k^2} \right] \cdot \vec{E} = 0$$


$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

它是 \$\vec{E}\$ 的三个分量的线性方程组, 它有非零解的条件是其系数的行列式的值等于零, 即:

$$\det(\vec{k}\vec{k} - k^2\vec{I} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{\epsilon}) = 0 \quad \text{①} \equiv \frac{kc}{\omega}$$

上式的解决定波的色散关系, \$k=f(\omega)\$, 称为矩阵方程的本征值. 而与本征值相对应的矩阵方程 \$\vec{E}\$ 的解为本征向量, 它决定波的偏振特性.

最简单情况是①当等离频率 \$\omega_p\$ 无亏损时, 这已方向同性的各向同性, 这时

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \Rightarrow \vec{v} = \frac{ie\vec{E}}{m\omega} \quad \sigma = i \frac{en_0}{m\omega} \\ \vec{D} = \sigma \vec{I}, \quad \vec{\epsilon} = \vec{I} \left(1 + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \sigma\right) = \epsilon \vec{I} \quad \epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

若 \$\vec{k} = k\hat{z}\$, 则其系数的行列式为: \$|\vec{k}\vec{k} - k^2\vec{I} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{\epsilon}|\$

$$\vec{k}\vec{k} - k^2\vec{I} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{\epsilon} = \begin{vmatrix} -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon \end{vmatrix} = 0$$

其解为:

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon = 0, \quad E_x, E_y \neq 0 \quad \text{为横波}$$

$$\text{且} \quad \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon = 0, \quad E_z \neq 0 \quad \text{纵波}$$

对于横波, 有 ~~\$\epsilon^2\$~~ \$\epsilon^2 = \frac{kc}{\omega} \mu\$, \$\mu \equiv \frac{k}{k_0} = \frac{kc}{\omega}\$

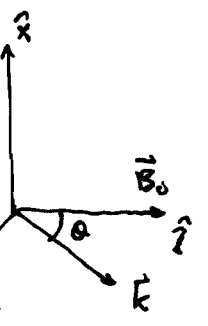
纵波, 有 \$\epsilon = 0\$

且非零解的 ~~\$\epsilon\$~~ 不考虑 \$\epsilon = 0\$ 的解.

当 \$k_0 \neq 0\$ 时, \$\vec{\sigma}\$ 及 \$\vec{\epsilon}\$ 不再同向同性的, 这时只要知道 \$\vec{\sigma}\$, 就可以从以上波动方程的解得到电磁波在等离子体中的色散关系及其偏振特性.

在冷等离子体条件下, 我们可以单独于运动方程求得粒子的运动速度 \$\vec{v}\$, 且利用欧姆定律求得 \$\vec{j}\$ (\$\vec{j} = -en_0\vec{v} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E}\$).

设入射电磁波为 $E_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$, 取 $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$,
 $\vec{k} = k \cdot (0, \sin\theta, \cos\theta)$, θ 为 \vec{k} 与 \vec{B}_0 的夹角,
 则波动方程



$$m_e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rightarrow \vec{v} = f(\vec{E})$$

求解:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{-ie}{\omega m_e} \\ \frac{1}{1 - \omega_{ce}^2/\omega^2} & -\frac{i\omega_{ce}/\omega}{1 - \omega_{ce}^2/\omega^2} & 0 \\ \frac{i\omega_{ce}/\omega}{1 - \omega_{ce}^2/\omega^2} & \frac{1}{1 - \omega_{ce}^2/\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$j = \vec{\sigma} \cdot \vec{E} = en_e \vec{v}$
 $\rightarrow \vec{\sigma} \rightarrow \vec{E} = \vec{I} + \frac{1}{\epsilon_0 \omega} \vec{\sigma}$

由此及由 $\vec{j} = -en_e \vec{v} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E}$ 可得:

$$\vec{\sigma} = \frac{in_e e^2}{m_e \omega} \frac{1}{1 - \omega_{ce}^2/\omega^2} \begin{pmatrix} 1 & -i\omega_{ce}/\omega & 0 \\ i\omega_{ce}/\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \omega_{ce}^2/\omega^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} & \frac{i\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{\omega(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} & 0 \\ -\frac{i\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{\omega(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} & 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \end{pmatrix}$$

令 $X \equiv \omega_{pe}^2/\omega^2$, $Y \equiv \omega_{ce}/\omega$, $\mu \equiv \frac{kc}{\omega}$

将 $\vec{\epsilon}$ 代入波动方程, 可得电子波的列式方程, $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$

$$\begin{vmatrix} -\mu^2 + 1 - \frac{X}{1 - Y^2} & \frac{iXY}{1 - Y^2} & 0 \\ -\frac{iXY}{1 - Y^2} & -\mu^2 \cos^2 \theta + 1 - \frac{X}{1 - Y^2} & \mu^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & \mu^2 \sin \theta \cos \theta & -\mu^2 \sin^2 \theta + 1 - X \end{vmatrix} = 0$$

因在冷等离子体近似条件下, $\vec{\epsilon}$ 与 \vec{k} 无关, 因此上述色散方程是 μ^2 的二次方程, 其解可写为:

$$\mu^2 = 1 - \frac{X(1-X)}{1-X - \frac{1}{2} Y^2 \sin^2 \theta \pm [(\frac{1}{2} Y^2 \sin^2 \theta)^2 + (1-X)^2 Y^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}}$$

之被称作折射系数的 Appleton-Hartree 公式。

阿普顿-哈特利公式

平行传播: $\theta=0$, 即 $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$, 则色散方程为

$$\mu^2 = 1 - \frac{\alpha}{1-\gamma^2} \pm \frac{\alpha\gamma}{1-\gamma^2} = 1 - \frac{\alpha}{1 \pm \gamma}$$

其波的特征偏振为:

$$\frac{E_x}{E_y} = \pm i, \quad E_z = 0 \quad \text{为左右旋波}$$

垂直传播: $\theta = \frac{\pi}{2}$, 即 $\vec{k} \perp \vec{B}_0$, 则色散方程为

$$\mu^2 = 1 - \alpha \quad \text{或} \quad \mu^2 = 1 - \frac{\alpha(1-\alpha)}{1-\alpha-\gamma^2}$$

其对应的波偏振为:

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z \neq 0, \quad \text{为线偏振波, 寻常波}$$

$$\text{或} \quad \frac{E_x}{E_y} = -i \frac{1-\alpha-\gamma^2}{\alpha\gamma}, \quad E_z = 0, \quad \text{为椭圆偏振波, 寻常波}$$

1. $B_0 = 0$: 电磁波的本征值为:

$$\epsilon = \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 = \mu^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right) \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{n_e}{n_c} \quad \frac{E_x}{E_y} = \pm i, \quad E_z = 0$$

$$n_c \equiv \frac{\epsilon_0 m_e}{e^2} \omega^2 = 1.24 \times 10^2 \text{ f}^2 [\text{Hz}] = 1.11 \times 10^{27} (\lambda [\mu\text{m}])^2 \quad [\text{m}^3]$$

为电磁波频率 $\omega = \omega_{pe}$ 时对应的截止频率, 称为截止频率

$$\text{相速度:} \quad v_p \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\mu} = \frac{c}{\sqrt{1-\omega_{pe}^2/\omega^2}} > c$$

$$\text{群速度:} \quad v_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = c\mu = c\sqrt{1-\omega_{pe}^2/\omega^2} < c$$

$$\text{传播区:} \quad \omega > \omega_{pe} \quad \omega_{pe}/\omega < 1$$

$$\text{截止:} \quad \omega = \omega_{pe} \quad \omega \leq \omega_{pe} \\ \mu = 0, \quad v_p \rightarrow \infty, \quad v_g \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow \infty$$

2. $B_0 \neq 0, \vec{k} \parallel \vec{B}_0$ $\vec{E} \perp \vec{B}_0$ $\frac{E_x}{E_y} = \pm i, E_z = 0$

(Left) L: $\mu_L^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2/\omega^2}{1 + \omega_{ce}/\omega} - \frac{\omega_{pi}^2/\omega^2}{1 - \omega_{ci}/\omega} \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)^{-1}$

(Right) R: $\mu_R^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2/\omega^2}{1 - \omega_{ce}/\omega} - \frac{\omega_{pi}^2/\omega^2}{1 + \omega_{ci}/\omega} \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)^{-1}$

截止区: $\mu_L^2, \mu_R^2 \leq 0$

(L) $\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \geq 1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega}$

(R) $\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \geq 1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega}$

共振区: $\mu_{L,R} \rightarrow \infty$ ($\lambda, v_p \rightarrow 0, v_g \rightarrow 0$ 或 ∞)

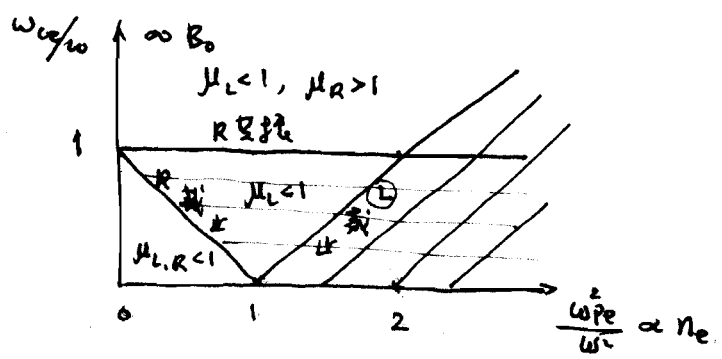
(L) $\omega = \omega_{ci}$

(R) $\omega = \omega_{ce}$

传播区:

L: $\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} < 1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega}$

R: $\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} < 1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega}$ 且 $\frac{\omega_{ce}}{\omega} > 1$



3. $B_0 \neq 0, \vec{k} \perp \vec{B}_0$

Ordinary O: $(\vec{E} \parallel \vec{B}_0) \mu_o^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{n_e}{n_c}$ ~~$\vec{E} \parallel \vec{B}_0$~~

Extraordinary X: $(\vec{E} \perp \vec{B}_0) \mu_x^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{1 - \omega_{pe}^2/\omega^2}{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}} = \frac{(\omega^2 - \omega_{pe}^2)(\omega^2 - \omega_L^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_H^2)} = \frac{(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2})^2 \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}}{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}}$

其中 $\omega_L \equiv -\frac{\omega_{ce}}{2} + \left(\frac{\omega_{ce}^2}{4} + \omega_{pe}^2\right)^{1/2}$ 左旋波

O: $E_x = E_y = 0, E_z \neq 0$ ($E_z \parallel B_0$)

X: $\frac{E_x}{E_y} = -i \frac{1 - X - Y^2}{XY}, E_z = 0$

$$\omega_R \equiv \frac{\omega_{ce}}{2} + \left(\frac{\omega_{ce}^2}{4} + \omega_{pe}^2 \right)^{1/2} \quad \text{右旋波}$$

$$\omega_H^2 \equiv \omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2 \quad \text{高混杂波频率}$$

传播区:

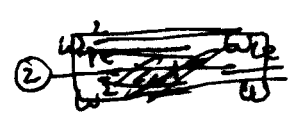
O波: $\omega < \omega_{pe}$

X波: $\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} < 1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega}$

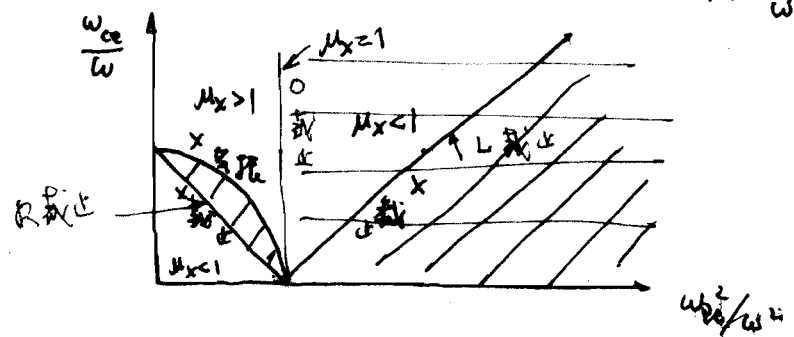
$$1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega} < \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} < 1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega}$$

截止:

① $\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \geq 1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega}$



② $1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \leq \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \leq 1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega}$



$\lambda \ll L_n, L_B$ 均满足, 色散关系由局部性质决定

三. 近似应用: $\frac{|\nabla k|}{k^2} \ll 1$, 即 $\frac{|\nabla \mu|}{\mu^2} \ll 1$ WKB近似, 几何光学近似

1. 干涉:

透射系数

$$\mu = \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \ll 1 \right)$$

等离子体折射率随位置的变化:

$$\Phi_p = \int (k_0 - k) dl = \int \frac{\omega}{c} \mu dx \approx r_e \lambda \int n_e dl$$

即 $r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m_e c^2} = 2.82 \times 10^{-15} \text{ m}$ 电子经典半径

λ 为真空波长

$$n_c = \frac{\epsilon_0 m_e \omega^2}{e^2} = 1.24 \times 10^{21} f^2 [\text{Hz}] = 1.11 \times 10^{15} \lambda^{-2} [\text{m}] \quad [\text{m}^{-3}]$$

2. 法拉第旋转: $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$

$$\mu_L \approx \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)^{-1} \right]^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)$$

$$\mu_R \approx \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)^{-1} \right]^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)$$

之表明左、右旋波在等离子体中传播的相速度不同, ~~产生法拉第旋转~~
~~法拉第旋转~~, 它引起入射波偏振波在等离子体传播时偏振方向产生旋转 (即法拉第旋转), 其转角为:

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \int \frac{\mu_L - \mu_R}{2} dl = \frac{r_{\text{rot}}}{2} \int \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{2\omega^2 c} dl \propto \int B_{\parallel} dl$$

3. 折射: $\vec{k} \perp \vec{B}_0$

o波: $\mu_o = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = 0$

x波: $\mu_x = \frac{(\omega_{pe}^2 - \omega_e^2)(\omega^2 - \omega_L^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_H^2)} = 0$ 通常选右旋波截止

$$\omega_R = \frac{\omega_{pe}}{2} + \left(\frac{\omega_{ce}^2}{4} + \omega_{pe}^2 \right)^{1/2} \text{ 与 } B \text{ 有关}$$

WKB近似, 几何近似 eikonal approximation. $n \gg 1$ 近似

$$\frac{|\nabla k|}{k^2} \ll 1 \quad \text{或} \quad \frac{1}{2\pi} \frac{|\nabla \mu|}{\mu^2} \ll 1$$

双折射效应

$$\mu_o \approx \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$$

$$\begin{aligned} \mu_x &= \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2} \right)^{-1} \right]^{1/2} \\ &\approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{|\nabla k|}{k^2} \ll 1, \quad \frac{|\nabla \mu|}{\mu^2} \ll 1$$

= ④ ⑧

§2.2 电子密度的测量

寻常波的色散关系为 $\omega = ck$ ，其折射率仅与电子密度有关。在光学中，介质的折射系数最常用干涉仪测量，它是测量一定厚度的介质插入干涉仪中所引入的附加光程差或附加的相位变化。等离子体也是一种介质，类似地，在等离子体诊断中，也可用干涉仪测量等离子体的折射系数。由于寻常波的折射系数简单地与等离子体电子密度有关，即：

$$\mu = \epsilon_r^{1/2} = \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \approx \left(1 - \frac{n_e}{n_c}\right)^{1/2} \xrightarrow[\omega_{pe}^2 \ll \omega^2]{n_e \ll n_c} \mu \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{n_e}{n_c}$$

其中 $n_c = \frac{\epsilon_0 m_e \omega^2}{e^2} = 1.24 \times 10^2 f^2 [\text{Hz}] = 1.11 \times 10^{15} \lambda^{-2} [\text{m}] \quad [\text{m}^{-3}]$ 是临界电子密度

由其折射系数的测量可以直接导出电子密度，因而常用寻常波干涉仪作为干涉仪的探测束。

一. 干涉仪

众所周知，干涉仪是用电场相干叠加的方法使两束或两束以上的光形成干涉，其输出光强因相长干涉或相消干涉（即同相位或反相位）而被调制。例如，在一个简单的双束干涉仪中，两束相位差为 ϕ 的单色光的电场，即 $E_1 \exp(i\omega t)$ 和 $E_2 \exp(i\omega t + i\phi)$ 相加，它们的总电场为：

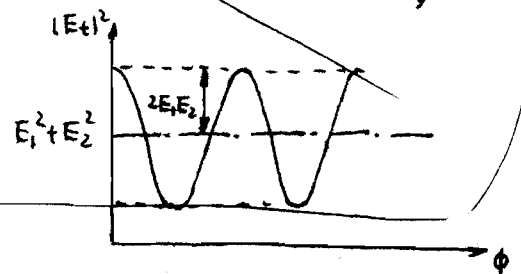
$$E_t = [E_1 + E_2 \exp(i\phi)] \exp(i\omega t)$$

平方律探测器所探测的功率是与 $|E_t|^2$ 成正比的，即

$$|E_t|^2 = [E_1^2 + E_2^2] \left[1 + \frac{2E_1 E_2}{E_1^2 + E_2^2} \cos \phi \right]$$

由此可见，输出光强除了有一个直流分量外，还有一个随余弦函数变化的调制分量，如下图所示。

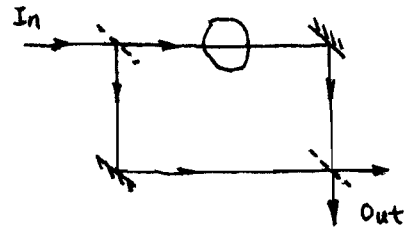
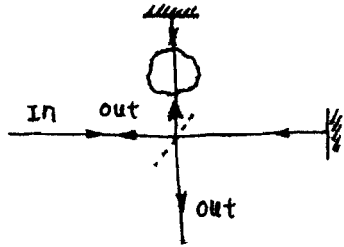
各种不同用途的干涉仪有许多种，但在等离子体诊断中最常用的有以下两种：



在等离子体诊断中常用的干涉仪有以下两种

1. 迈克尔逊干涉仪

它是双束干涉仪，它有两个臂和两个输出，但光在两臂中均沿两个方向传播，且其一输出沿入射光路回到光源。在折射率测量的情况下，干涉仪中任一臂上折射系数的变化，都会导致任一输出端中的两个分量间产生相位差。



2. 马赫-珍德干涉仪

它也是双束干涉仪，但它与迈克尔逊干涉仪不同的是，光束在两臂中都只沿一个方向传播，而且两个输出都与输入分开。同样地，它也是通过改变一臂中的折射系数来改变相位的。

上述两种干涉仪中的部件，如干涉臂可以是自由空间传播的直线光程，也可以是微波波导；而分束器可以是某种光学部分反射镜，或是某种微波耦合器，但它们的功能却是相同的。

当用干涉仪测量等离子体电子密度时，是把等离子体放在干涉仪中的一臂，通过测量等离子体所引入的相位变化（即比较有和没有等离子体时两臂的相位差），

即：
$$\phi_p = \int (k_{\text{plasma}} - k_0) dl$$

$$\phi_p = \int (\cancel{k_0} - k_{\text{plasma}}) dl$$

$$= - \int (1 - \mu) \frac{\omega}{c} dl = - \frac{\omega}{c} \int [1 - (1 - \frac{n_e}{n_c})^2] dl$$

如果等离子体密度足够低（即入射波频率足够高），使得 $n_e \ll n_c$ ，则 μ 可近似表示为：

$$\mu \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{n_e}{n_c} - \frac{1}{8} \left(\frac{n_e}{n_c}\right)^2 - \frac{3}{48} \left(\frac{n_e}{n_c}\right)^3$$

$$\omega^2 \equiv \omega_{pe}^2 \equiv \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e}$$

$$n_c = 1.11 \times 10^{15} \lambda^{-2} \text{ [m]} \text{ [m}^{-2}]$$

$$= 1.11 \times 10^{27} \lambda^{-2} \text{ [\mu m]} \text{ [m}^{-2}]$$

则相位移就可以简化为

$$\phi_p \equiv -\frac{\omega}{c} \int \frac{n_e}{2n_c} dl = -r_e \lambda \int n_e dl$$

其中

$$r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2.82 \times 10^{-15} \text{ m} \text{ 为电子经典半径}$$

即干涉仪输出的相位移与路径积分成正比。

二. 相位移的测定: $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$

由上述可知, 干涉仪的输出光强是两束相干光的电场相干叠加所形成的, 由于干涉效应, 其输出光强将因相长干涉或相消干涉 (即同相位或反相位) 而被调制。测量光强随相位两束相干光相位是变化的规律就可测定相位移 ϕ 。例如, 干涉仪中两臂的电场分别为:

$$E_1(t) = E_{10} \exp(i\omega t)$$

$$E_2(t) \exp(i\phi) = E_{20} \exp(i\omega t + i\phi)$$

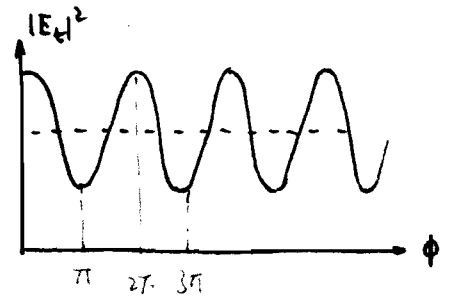
则它们的总电场为:

$$E_t(t) = E_1(t) + E_2(t) \exp(i\phi) = [E_{10} + E_{20} \exp(i\phi)] \exp(i\omega t)$$

平方律探测或光电探测的功率是与 $|E_t|^2$ 成正比的, 即

$$I \propto |E_t|^2 = [E_{10}^2 + E_{20}^2] \left[1 + \frac{2E_{10}E_{20}}{E_{10}^2 + E_{20}^2} \cos \phi \right]$$

由此可见, 输出光强除了有一直流分量外, 还有一个随余弦函数变化的调制分量, 如右图所示。测量调制分量随相位的变化, 就可测定相位移。我们定义干涉仪的反差 (或对比度) 为



$$p \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2E_{10}E_{20}}{E_{10}^2 + E_{20}^2}$$

$$I \propto |E_t|^2 = [E_{10}^2 + E_{20}^2] (1 + p \cos \phi)$$

在理想的情况下, 达到了相位测量的最大分辨率。

$$\Phi_p = r_e \lambda \int n_e dt$$

$$\Phi_p(t) = r_e \lambda \int n_e(t) dt$$

入射电场的干涉

$$I \propto |\vec{E}_t|^2 = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2$$

$$|\vec{E}_t|^2 = [E_{10}^2 + E_{20}^2] \left\{ 1 + \frac{2\vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20}}{E_{10}^2 + E_{20}^2} \cos[\omega_m t + \Phi_p(t)] \right\}$$

其中第一项为干涉项，干涉条纹的对比度为：

$$p \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2 \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20}}{E_{10}^2 + E_{20}^2}$$

由此可知：1. 当 $E_{10} = E_{20}$ 且 $\vec{E}_{10} \parallel \vec{E}_{20}$ 时，对比度 $p = 1$ 为极大值。

2. 当 $\omega_m = 0$ 时，为简并干涉仪（零拍干涉仪）

Φ_p 的相位依赖于条纹的幅度，

难以判断条纹变化的方向

3. 当 $\omega_m \neq 0$ 时，为非简并干涉仪

Φ_p 的相位不依赖于条纹的幅度

可以很方便地判断条纹变化的方向

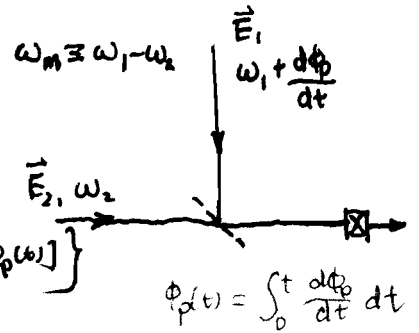
4. 当 \vec{E}_{10} 的偏振方向发生变化时，这对非简并干涉仪的

相位没有影响

5. 当条纹宽度随时间变化时，这等效于对入射电场的

相位（频率）调制，使入射波的频率产生

瞬时变化 $\omega_1 + \frac{d\Phi_p(t)}{dt}$



一、干涉仪

二、相位测量

三、相位调制技术（ ω_m 的获得）

(1) E_t^2

$$\begin{aligned}
 E_t^2 &= \left[E_{10} \cos \omega_1 t + E_{20} \cos (\omega_2 t + \phi_p) \right]^2 \\
 &= E_{10}^2 \cos^2 \omega_1 t + E_{20}^2 \cos^2 (\omega_2 t + \phi_p) + 2 E_{10} E_{20} \cos \omega_1 t \cos (\omega_2 t + \phi_p) \\
 &= \frac{1}{2} E_{10}^2 (1 + \cos 2\omega_1 t) + \frac{1}{2} E_{20}^2 [1 + \cos 2(\omega_2 t + \phi_p)] \\
 &\quad + E_{10} E_{20} \left\{ \cos [(\omega_2 - \omega_1)t + \phi_p] + \cos [(\omega_1 + \omega_2)t + \phi_p] \right\} \\
 &= \frac{1}{2} (E_{10}^2 + E_{20}^2) \left[1 + \frac{2 E_{10} E_{20}}{E_{10}^2 + E_{20}^2} \cos [(\omega_2 - \omega_1)t + \phi_p] \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_t^2 &= \left[E_{10} e^{i\omega_1 t} + E_{20} e^{i\omega_2 t + i\phi_p} \right] \left[E_{10} e^{-i\omega_1 t} + E_{20} e^{-i\omega_2 t - i\phi_p} \right] \\
 &= E_{10}^2 + E_{20}^2 + E_{10} E_{20} \left[e^{i(\omega_2 - \omega_1)t + i\phi_p} + e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t - i\phi_p} \right] \\
 &= (E_{10}^2 + E_{20}^2) \left[1 + 2 \frac{E_{10} E_{20}}{E_{10}^2 + E_{20}^2} \cos [(\omega_2 - \omega_1)t + \phi_p] \right] \\
 &\quad \begin{matrix} \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu &= \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{3}{8} \frac{\omega_{pe}^4}{\omega^4} - \dots \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{n_e}{n_c}
 \end{aligned}$$

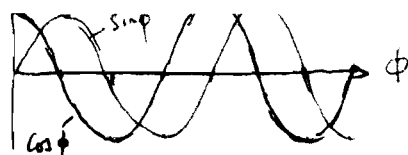
$$\begin{aligned}
 n_c &= \frac{\epsilon_0 m_e \omega^2}{e^2} = 1.24 \times 10^{-2} f^2 [\text{Hz}] = 1.11 \times 10^{15} \lambda^{-2} [\text{cm}] \\
 &= 1.11 \times 10^{27} \lambda^{-2} [\mu\text{m}] \quad [\text{m}^{-3}]
 \end{aligned}$$

同相

异相

Homodyne

Heterodyne



⑫

上是由两个简单干涉仪组成，两个干涉仪的路径相同，但它们的相位差为 $\frac{\pi}{2}$ ，使有等速率时，它们的输出的调制分量分别为 $\cos \phi$ 和 $\sin \phi$ 。其原理很简单，因余弦函数 $\cos \phi$ 相位灵敏度的零点是 $0, \pi, 2\pi, \dots$ 等，而正弦函数 的相位灵敏度的零点是 $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ 等，它们的零点相差 $\frac{\pi}{2}$ ，它们可以互补，即在余弦函数相位灵敏度零点处，可利用正弦函数 判断相位变化方向；反之，在正弦函数相位灵敏度零点处，可利用余弦函数判断相位变化方向。利用这种干涉仪的这种特点，我们可以正确地判断相位的变化方向。此外，我们也可以按如下的方式理解：假定两个干涉仪的输出信号的调制分量分别为：

$$V_1 = A \cos \phi, \quad V_2 = A \sin \phi$$

经简单运算后有：

$$V_1 \frac{dV_2}{dt} = A^2 \cos^2 \phi \frac{d\phi}{dt}$$

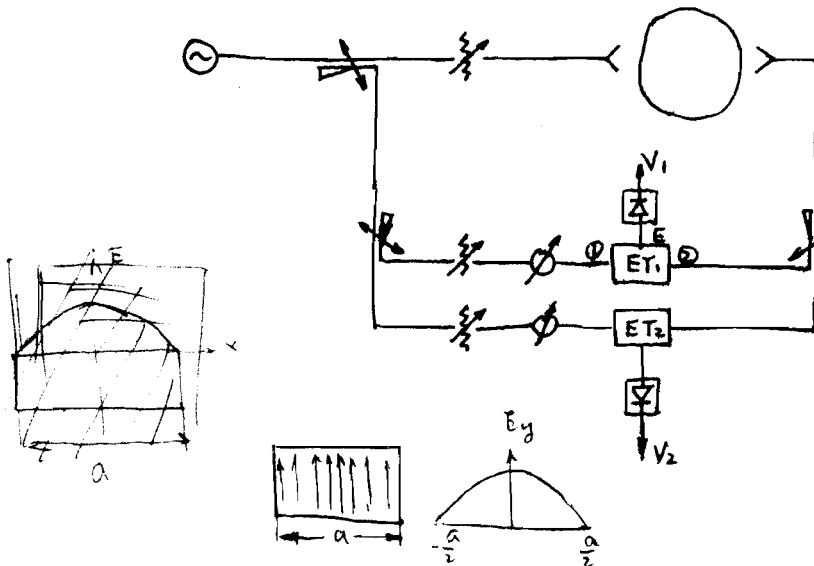
同理有：
 $V_1 = A \cos \phi$ 或 $V_2 = A \sin \phi$
 $V_2 \frac{dV_1}{dt} = A^2 \sin^2 \phi \frac{d\phi}{dt}$

由此可见：

- ① 从 V_1 或 V_2 的干涉信号可以求出等速率产生的相移 ϕ
- ② 从 $V_1 \frac{dV_2}{dt}$ 的符号可以判断 ϕ 的变化方向。这是因为 $A^2 \cos^2 \phi > 0$ ， $V_1 \frac{dV_2}{dt}$ 和 $\frac{d\phi}{dt}$ 是同号的。

在微波波段，这种正交相位干涉仪可按如下安排：

$$H_{10} = TM_{10}$$



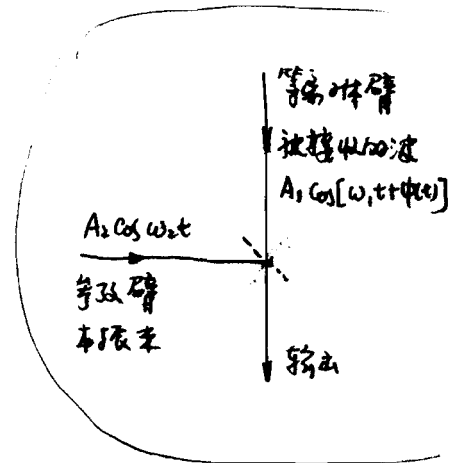
E-T接头的功射：当两个同相、等功率的 H_{10} 模从 1,2 端输入时，E 端的输出功率为零；若两个 H_{10} 模的输入相位差为 $\frac{\pi}{2}$ 时，而功率相同时，E 端的输出为两波功率之和。

这种干涉仪虽然克服了相位变化方向不确定性的问题,但是其相位测量精度仍受干涉仪中两臂光强变化的影响,而且光路复杂,现已很少采用了。

解决上述两个问题最彻底的方法是调制干涉仪的相位,这是一种使干涉仪交替地读出相位移的余弦和正弦函数的方法,如果其读出速度远快于中的变化的话,则相位移中就可以确切地确定。

因为波的频率就是它的相位的时间变化率。因此,相位的变化可以等效于频率的变化。这样,用频率来考虑相位测量问题及其解决方法——相位调制,就非常容易理解。下面的例子将会看到,它实质上就是调频波(FM)测量问题,这在无线电接收和其它类似领域中是普遍的问题。

现在考虑如前所述的干涉仪输出部分。两束分别来自等离体臂和参比臂的波在分束镜上互相叠加,并在输出端用平方律探测器探测其功率。来自等离体的波束,因折射率变化而被相位调制,即频率调制,它是被接收的波;而来自参比臂的波可用激光束,探测器可视为混频器,它的输出信号中包含了两束波的和频及差频信号:



$$\begin{aligned}
 V &\propto [A_1 \cos(\omega_1 t + \phi) + A_2 \cos \omega_2 t]^2 \\
 &= \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + 2A_1 A_2 \overline{\cos(\omega_1 t + \phi) \cos \omega_2 t} \\
 &= \frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2) + A_1 A_2 \overline{\cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \phi] + \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \phi]} \\
 &= \frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2) + A_1 A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \phi] \int [\Delta\omega_0 + \frac{d\phi}{dt}] dt
 \end{aligned}$$

对于简单干涉仪,因为 $\omega_1 = \omega_2$, 所以之前的初始(没有等离体时)频率为零,即 $\Delta\omega_0 = 0$; 当有等离体且密度变化时,它引起相位变化,因而 $\frac{d\phi}{dt} \neq 0$, 故其输出频率 $\Delta\omega \neq 0$ 。但由于在这种情况下,与无线电接收中的零拍(Homodyne)探测方法相类似,干涉仪的输出只能给出频率差的绝对值,我们仍不能从输出信号辨别 $\Delta\phi$ 是正还是负值,从而无法辨认相位的变化的方向。

Homodyne Heterodyne

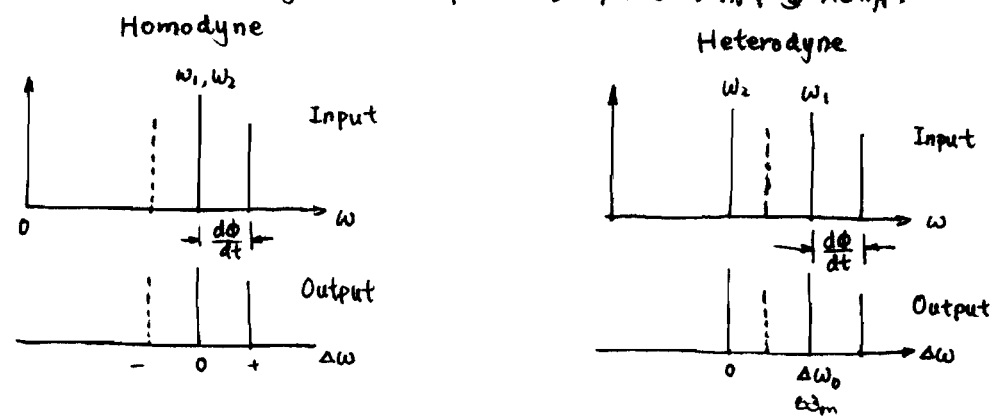
$$\Delta\omega_0 = |\omega_1 - \omega_2| = \omega_m \neq 0$$

现在,若在简单的干涉仪中(任一臂),引入了一个随时的(除了等离共振效应之外)相位调制,现在没有等离共振时,干涉仪输出的初始频率不等于零,即 $\Delta\omega_0 = \omega_1 - \omega_2 \neq 0$ 。为简单计,我们令 $\Delta\omega_0$ 为常数。当有等离共振时,相位变化将产生附加的频率调制,则输出信号频率变为:

$$\Delta\omega = \overset{\omega_m}{\Delta\omega_0} + \frac{d\phi}{dt}$$

由此可见,干涉仪输出频率信号频率,会随等离共振相位变化方向的不同而增大或减小,这样相位检测中的不确定性就不复存在了。与无线电接收机相类似,我们称这类干涉仪为外差干涉仪。

零拍和外差(Heterodyne)接收中的频率关系可用下图说明:



从上图可以看出,在外差干涉仪中,从输出频率相对于初始差频(即 $\Delta\omega_0$, 亦称中频 IF)的位置,可以辨别 $\frac{d\phi}{dt}$ 的正负值,即相位的变化方向。

总之,这类外差干涉仪有以下的优点: ① 可以辨别相位的变化方向; ② 不需要检测直流信号幅度,所有检测电路都可以是AC耦合的; ③ 相位测量不再受信号幅度变化的影响了。这样,它就从根本上解决了上述的相位检测的两个问题了,因而这类外差干涉仪在等离共振诊断中应用得十分广泛。下面我们讲述产生相位调制的各种方法及其检测方法。

外是干涉仪中相移的测量通常是用相位比较器自动完成的。因为对干涉仪提供两个输出信号，一个是参考信号

$$V_R = A_R \cos \omega_m t$$

另一个是探测信号

$$V_S = A_S \cos (\omega_m t + \phi_p)$$

它们都输入到相位比较器中，相位比较器在每个中频信号周期 $T_m = \frac{1}{f_m}$ 内测量它们的正向

通过重点的时间差，由这个时间差的测量就可以导出测量本身产生的相移。

设两信号的正向过零时间与分别为

$$\omega_m t_R = 2\pi m_R + \frac{3\pi}{2}$$

$$\omega_m t_S + \phi_p = 2\pi m_S + \frac{3\pi}{2}$$

即 m_R, m_S 均为正整数，则由此可求得：

$$\phi_p = \omega_m (t_R - t_S) + 2\pi (m_S - m_R)$$

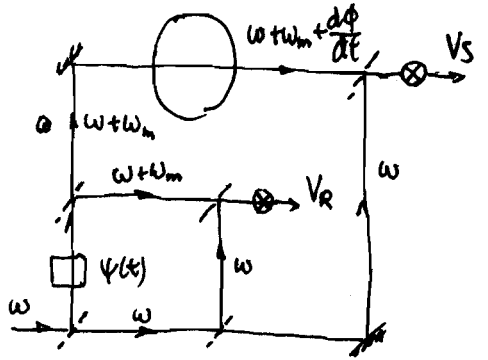
当相位差 $\phi_p < 2\pi$ 时， $m_S = m_R$ ，则有

$$\phi_p = \omega_m (t_R - t_S) = 2\pi \frac{t_R - t_S}{T_m}$$

由此可见， ϕ_p 的测量与信号的幅度无关，它可以从信号的时间测量中获得，而且时间测量有较高的精度。由于相移是在每个中频周期内测量一次，因而 T_m 决定了相移测量的时间与分辨率。此外，还可以从时间差的符号确定测量时刻相位的变化方向。

三. 相位调制方法

可以产生相位调制或相移的方法很多，它们与干涉仪所使用的辐射源的频率有关。最常用的方法有以下几种：

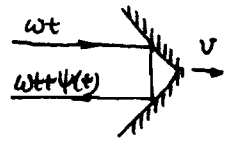


$$n_c = 1.111 \times 10^{15} \lambda^{-2} \text{ [cm]} \quad [\text{m}^{-3}]$$

= (16)

三. 1. 运动反射镜 — 多普勒效应

它是最简单的相位调制方法之一，它是让干涉仪中任一臂的支束射向运动方向与束方向平行的运动反射镜，垂从它反射回来（如右所示）。在这种情况下，如果反射镜以平行于束方向上的速度分量为 v ，则反射束与入射束之间的光程差为 $2vt$ ，则它所产生的相位移为：



$$\psi(t) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2vt = 2\pi \frac{v}{\lambda} t = \omega_m t$$

其中 $f_m \equiv \frac{v}{\lambda}$, $f_m \equiv \frac{1}{T_m} = \frac{2v}{\lambda}$

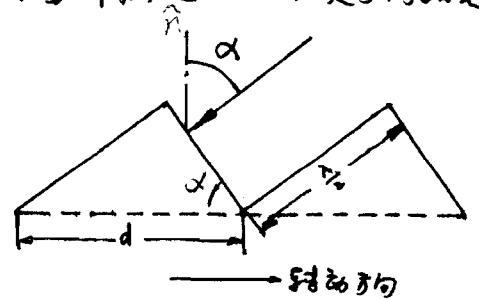
由此可见：为了达到相同的分辨率（这是由频移 f_m 决定的），对于波长较短的辐射流，反射镜的运动速度可较低。因此，这种相位调制方法多用于可见光或中、近红外激光干涉仪中。对于近红外激光干涉仪，由于其波长较长，为了达到相同的时间分辨率，要求反射镜的运动速度较高，这样当等效分辨率存在时间较长时（如 1 秒），就要求反射镜的运动距离较长。例如，对于 HCN 激光干涉仪， $\lambda = 337 \mu\text{m}$ ，若要求时间分辨率为 10^{-4} s ，则

$$v = \frac{\lambda}{2\tau} = 1.7 \text{ m/s}$$

若等效存在时间为 1 s，这就要求反射镜的运动距离为 1.7 m，这太难了，在实践中很难实现。为了克服这种困难，可以利用旋转反射镜，但所得结果较为复杂，一般较少应用。

2. 转动圆柱光栅 — 多普勒效应

这也是利用多普勒效应产生频移的。如下图所示，圆柱光栅是闪耀光栅，它的刻槽平行于转轴，其闪耀角为 α ，槽面间的垂直距离为 d （应保证在不同槽面上反射的支束都具有相同的相位），其光栅常数 $d = \lambda / (2 \sin \alpha)$ ， λ



射束经聚焦后射在光栅表面上。如果圆柱半径足够大，依得光栅曲率可忽略，则可以近似地认为射束是以入射角 α 射在光栅表面上（即垂直于刻槽表面入射）。则当光栅旋转时，衍射束将受到一多普勒位移：

$$f_m = \frac{2V}{\lambda} = 2 \frac{2\pi R n \sin \alpha}{\lambda} = \frac{2\pi R n}{d} = N n$$

其中 $V = 2\pi R n \sin \alpha$ 为光栅运动的线速度在入射光方向上的分量

$$N = \frac{2\pi R}{d} = \frac{4\pi R \sin \alpha}{\lambda}$$

为光栅总刻槽数

n 为光栅转速

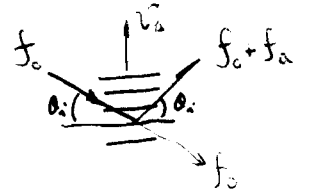
例如，对于 HCN 激光， $\lambda = 3.37 \times 10^{-4} \text{m}$ ， $R = 6 \times 10^{-2} \text{m}$ ， $\alpha = 54^\circ$ ， $N = 1800$ ，若分辨率 $\tau = f_m^{-1} = 10^{-4} \text{s}$ ，则 $n = 5.56 \text{ 转/s}$ ，这样的转速是很容易实现的。当然，光栅转速还可以很轻易地提高一数量级，则其分辨率就可以达 $10 \mu\text{s}$ 。这就是说，对于给定的光栅，只要改变光栅的转速，就可以很方便地改变频率 f_m 值。这种方法最常用于远红外和亚毫米波段。

3. 声光调制—多普勒效应

声波是一种纵向机械应力波，它在介质中传播时，会引起介质密度呈疏密交替的变化。介质密度的变化，在一级近似下，可引起与之成正比的折射率的变化，因而声波也可表为：

μ_0 折射率

$$\tilde{\mu}(x, t) = \tilde{\mu}_0 \cos(\omega_a t - k_a x), \quad v_a = \frac{\omega_a}{k_a}$$



若有一束光以角度 θ_i 射在声波波阵面上，对该光而言，声波可看成是一系列相互反射镜，其间距为声波波长 λ_a ，且其速度运动为 v_a 。这是因为声波压缩处的折射率较高，在稀疏处折射率较低。因折射率的变化会引起反射，因而可将其视为反射镜。由于声波的周期性，其作用类似于间距为 λ_a 的晶面的规则排列，则当光束的入射角满足如下布拉格条件时，

$$2\lambda_a \sin \theta_i = \frac{\lambda_0}{\mu} \quad (\text{一级衍射}) \quad k_d = k_0 + k_a$$

$$f_d = f_0 \pm f_a \quad \text{声学光栅}$$

则在反射的方向上将产生一级的射光。因声“晶格”以速度 v_a 运动，因而该一级的射光的频率相对于入射频率 f_0 有了频移 $\pm f_a = \pm v_a/\lambda_a$ 。这样，一束光通过声光介质后，由于声波的射令产生空间上分离的，具有一定频差的两束光，利用这两束光分别作探测光和参光，就可组成外差干涉仪。

此外，理论计算表明，在严格的布喇格角入射条件下，声光的射效率为：

$$\eta = \frac{I_d}{I_0} = \sin^2 \left[\frac{\pi}{\lambda_0} \sqrt{\frac{MLP_a}{2H}} \right]$$

其中 M 为介质的声光优值，它与介质的折射率、声速弹性系数、声速及介质中的声速有关

P_a 为超声功率

L, H 为超声接触面的长度和宽度

当 $\eta < 50\%$ 时，上式可近似地表示为

$$\eta \approx \frac{\pi^2 MLP_a}{2H \lambda_0^2}$$

由此可见，声光的射效率与光波的波长 λ_0 的平方成反比，因而之又适用于可见光和近、中红外激光。这种光栅产生频移的优点是：容易获得较高的频移（约几十 MHz 量级），外差干涉仪的时间分辨率高。

4. 双相干辐射法：

这就是简单地利用略有频差 Δf 的两个相干辐射波，这种干涉对波长的频率稳定性提出了十分严格的要求，这因为 f_m/f_0 通常是十分小的。然而，实际上这是可以解决的。

激光腔共振条件：
$$2L = q \frac{c}{2\mu L \omega_0}$$

当用激光腔做辐射及时利用激光谐振腔的纵模频率与腔长有关的特点，即在谐振腔的好盖带宽范围内，腔长的微小变化可引起谐振频率产生相应的变化：

$$f_m = f_0 \frac{\Delta L}{L}$$

其中 f_0 为腔长为 L 时的谐振频率。若有两个激光腔，除了它们的腔长有微小偏差 ΔL 外，其它参数完全相同，则它们的辐射频率之差为 $f_m = f_0 \frac{\Delta L}{L}$ 。对于这种激光腔，

为获得 $f_m = 1\text{MHz}$ 的频率所需的腔长偏调量 ΔL 是可以实现的。如最早应用双激光器的外差干涉仪是用 CO_2 激光泵浦的甲醇 (CH_3OH) 远红外激光器 (泵浦远红外激光器: 是极化分子气体通过吸收 CO_2 辐射光子, 从它的基态转动到级跃迁到上转动级的某一振动级, 然后通过邻近的振动级间的跃迁发生激光作用, 而发出相干的远红外辐射, 最后通过弛豫过程而回到基态), 它的波长为 $\lambda = 118.8\ \mu\text{m}$, $\nu_0 = 2.5 \times 10^{12}\ \text{Hz}$, 其腔长在 1m 量级, 则

$$|f_m / \Delta L| \approx 2.5\ \text{MHz} / \mu\text{m}$$

若用精密的虫旋测微计调激光腔长, 其可调的最小位移是 $0.025\ \mu\text{m}$, 因而能达到 1MHz 量级的频率是可以实现的。由于用这种方法获得的频率稳定性, 主要取决于激光频率的相对稳定性, 在现有稳频措施时, 频率的短期稳定性可达 2% , 长期稳定性可达 10% , 因此在频率稳定性要求较高的场合, 要采取差频稳定措施。用这种双激光器的主要优点是: 频率准确度可以达到 1MHz , 分辨率具有较高的时间分辨率, 能测量电子字度的快速变化。

在微波和毫米波段, 也可以利用具有一定频率的微波源做辐射源。因为微波源大多都可用机械和电调谐的方法, 频率可在较大的范围内调谐, 因而可以很准确地(或)两个微波源的频率调至所需值的频率。一般讲, 当频率高达几十 MHz 时, 无需采取差频稳定措施, 仍可保证具有一定的差频稳定性, 且相位噪声也可较小。当差频在 $1 \sim 10\ \text{MHz}$ 量级时, 为保证相位噪声较小, 一般需用自动频率控制 (AFC) 电路去稳定两源的频率。

5. 扫频干涉仪

这是利用微波源可方便地电调谐的特点。其具体做法是: 用一锯齿波信号调制微波源的频率, 使其输出频率产生周期性的线性变化, 然后利用长波导的色散特性, 把频率调制转变为相位调制, 从而产生一固定的频率 f_m 。

设微波源被一锯齿波信号调制, 使其输出近似为线性变化的调制信号

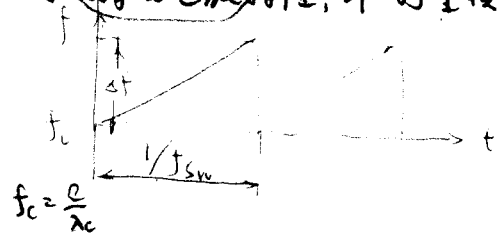
$$f(t) = f_0 + \Delta f f_{sw} t \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{f_{sw}}$$

$$f(t+\tau) = f_0 + \Delta f f_{sw} (t+\tau)$$

$$f(t+\tau) - f(t) = \tau \Delta f f_{sw} = n f_{sw} \quad n = \Delta f \tau$$

其中 Δf 为调制深度, f_{sw} 为扫描频率。由于波导的色散特性, 即对于基模波导, 在其中传播的电磁波波导为

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} = \frac{c}{\sqrt{f^2 - f_c^2}}$$

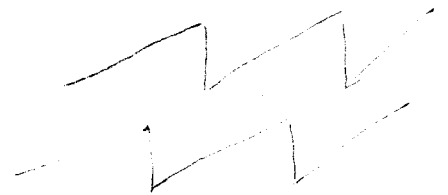


其中 $\lambda_c = 2a$ (a 为波导宽边边长) 为截止波长, f_c 为相应的截止频率; 因而波导波长是与频率有关的。这样, 上述的混频率调制, 在波导中就变为相应的相位调制, 即

$$\phi(t) = \frac{2\pi}{\lambda_g} L = \frac{2\pi L}{c} \sqrt{f^2(t) - f_c^2} \quad f(t) = f_0 + \Delta f f_{sw} t$$

L 为波导长度。由于 $\Delta f \ll f_0$ (一般 Δf 为几百 kHz ~ 几 MHz), 上式可近似地代入为

$$\begin{aligned} \phi(t) &\approx \frac{2\pi L}{c} [f_0^2 - f_c^2 + 2f_0 \Delta f f_{sw} t]^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \frac{2\pi L}{c} \sqrt{f_0^2 - f_c^2} \left(1 + \frac{f_0 \Delta f f_{sw} \Delta t}{f_0^2 - f_c^2} t \right) \\ &= \frac{2\pi L}{\lambda_{g0}} + \frac{L}{\lambda_0} \frac{\lambda_{g0}}{\lambda_0} \frac{\Delta f}{f_0} \Omega t \end{aligned}$$

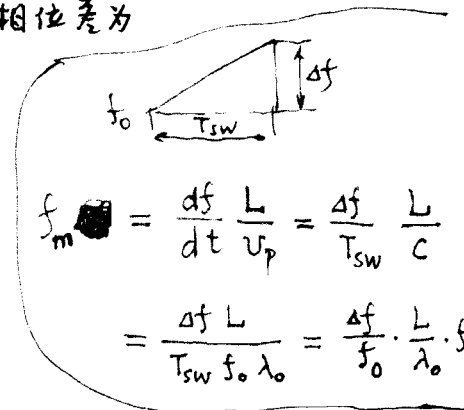


其中

$$\lambda_{g0} = \frac{c}{\sqrt{f_0^2 - f_c^2}}, \quad \lambda_0 = \frac{c}{f_0}, \quad \Omega = 2\pi f_{sw}$$

如果两臂波导的长度差为 ΔL , 则两臂固有的相位差为

$$\Delta\phi(t) = \frac{2\pi \Delta L}{\lambda_{g0}} + \frac{\Delta L}{\lambda_0} \frac{\lambda_{g0}}{\lambda_0} \frac{\Delta f}{f_0} \Omega t$$



如果选择波导长度差满足下述关系:

$$\frac{\Delta L}{\lambda_0} \frac{\lambda_{g0}}{\lambda_0} \frac{\Delta f}{f_0} \equiv m$$

则

$$\Delta\phi(t) = \frac{2\pi \Delta L}{\lambda_{g0}} + m \Omega t \quad f_m = m \Omega$$

这样, 在干涉仪的两臂就可以获得固定的频率 f_m 。这种产生频率的方法的优点是: 便于多道应用, 且不同干涉道中应用不同的波导长度, 就可以方便地使各道获得不同

的转移,可以避免不同道间的串扰;但其缺点是获得一定的转移,要使用较长的波子,代价比较昂贵。

① 两束出射光 ② 两束波阵面干涉

四. 相干,衍射,折射和频率的选择

1. 相干性 —— 时间相干性 —— 窄带
空间相干性 —— 相干度 频率上两束的波子互不大于 $\frac{\lambda}{2}$

干涉仪所用的辐射,一般却要求其频率宽度很窄。这是因为在干涉测量中,为了提高测量精度,要求干涉仪的相位对比度,即干涉仪输出功率的调制度 $\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}}$ 要高越好,也就是要求谱带宽的所有频率分量对输出功率的贡献,都经历相同的相移。否则的话,干涉仪的相位对比度会变差。谱的带宽宽度限制与干涉仪的精确度排有关,但用相干辐射(诸如激光,取斥音与微波及激光)几乎都能满足相干性的要求。因此等离体诊断中都采用相干辐射以保证其瞬态 (temporal) 相干条件——窄带。

2. 衍射极限——高斯光束的传播。

相干辐射光束在自由空间中的传播是由所谓的高斯光束方程决定的,这是因为束传播的定态本征模是拉盖尔 (Laguerre) 多项式与高斯函数的乘积,其最低阶的本征模——基模就是高斯光束:

$$E(x, y, z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} \exp \left\{ -i \left[kz + \frac{kr^2}{2R(z)} - \eta(z) \right] \right\}$$

其中

$$w^2(z) = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right] = w_0^2 \left[1 + \frac{z^2}{z_r^2} \right] \quad \text{束半径}$$

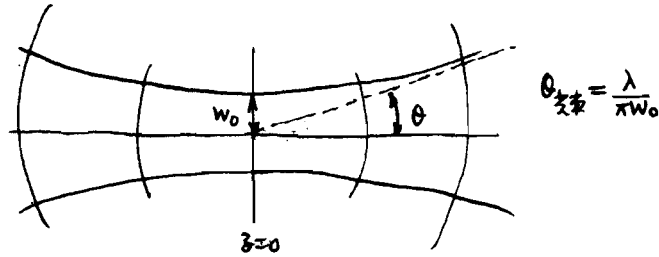
$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] = z \left(1 + \frac{z_r^2}{z^2} \right) \quad \text{束曲率半径}$$

$$\eta(z) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{z \lambda}{\pi w_0^2} \right) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{z}{z_r} \right) \quad \text{实际束与理想平面波的相移量}$$

$$z_r = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad \text{瑞利距离}$$

$$R = \frac{z \pi}{\lambda}$$

由上式可知，相干辐射束在自由空间中传播时，其场振幅在某一横截面上的分布是按高斯函数分布的，因而称之为高斯光束。其中各参数的物理意义如下：
 $W(z)$ 定义了场的幅度下降至轴上值的 $\frac{1}{e}$ 的径向位置，称之为束半径。 W_0 是束半径的最小值，称为束腰半径。而 $R(z)$ 是束腰至距束腰 z 处波阵面的曲率半径（近似于球面）。 z_r 是束半径为束腰半径的 $\sqrt{2}$ 倍时的轴向距离，称为瑞利距离。在 $z \leq z_r$ 时，这是高斯光束的近场传播区；当 $z \gg z_r$ 时，为高斯光束的远场传播区，在此在 $W(z)$ 可近似地表示为：



远场传播区，在此在 $W(z)$ 可近似地表示为：

$$W(z) = \frac{\lambda}{\pi W_0} z$$

由此可见，随着传播距离 z 的增大，束半径也随之线性地增大，光束也扩散了。

其极限发散角为：(半角)

$$\theta_{div} = \frac{dW(z)}{dz} = \frac{\lambda}{\pi W_0} = \frac{W_0}{z_r}$$

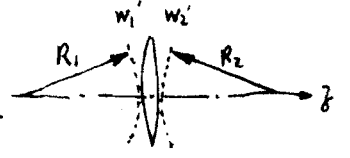
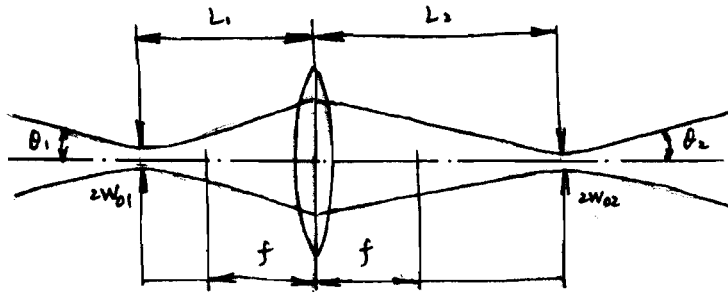
这个角度与束腰半径成反比，即束腰半径越小，发散角越大。这符合衍射原理。

这是波的衍射现象的严格表现。由此可见，高斯光束区别于非相干光束的重要特征是：它是衍射限制的束流，即束的发散角和束尺寸的关系是唯一地由衍射原理决定的。

此外，由上述可知，对于给定波长的光束，其最主要的特征参数是束腰半径 W_0 及其位置，它们确定之后，高斯光束的传播特性也就确定了。

由于高斯光束随着传播距离的增大，束半径也随之增大。而在实际应用中，常常要求束半径过小，因而通常借助于透镜组来传输高斯光束，以便其具有一定的束半径。

用于传输高斯光束的薄透镜公式如下：



$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}$$

$$w_1' = w_2'$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f}$$

$$q(z) = z + q_0 = z + i \frac{\lambda}{\pi w_0^2}$$

$$\begin{cases} q_1 = L_1 + i \frac{\lambda}{\pi w_0^2} \\ q_2 = L_2 + i \frac{\lambda}{\pi w_0^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{L_2 - f}{L_1 - f} = \frac{w_0^2}{w_01^2} \\ (L_1 - f)(L_2 - f) = f^2 - \left(\frac{\pi w_01 w_02}{\lambda}\right)^2 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} w_02^2 = \frac{f^2 w_01^2}{(L_1 - f)^2 + z_{r1}^2} = (\alpha w_01)^2 \\ L_2 = f + \frac{f^2(L_1 - f)}{(L_1 - f)^2 + z_{r1}^2} = f + \alpha^2(L_1 - f) \end{cases}$$

且

$$\alpha = \frac{f}{\sqrt{(L_1 - f)^2 + z_{r1}^2}}$$

若用参数 α 表示, 经透镜传输后, 输出束的参数为:

$$\begin{cases} w_02 = \alpha w_01 & L_2 = f + \alpha^2(L_1 - f) \\ \theta_2 = \frac{\lambda}{\pi w_02} = \frac{\theta_1}{\alpha} \\ z_{r2} = \frac{w_02}{\theta_2} = \frac{\alpha w_01}{\theta_1/\alpha} = \alpha^2 z_{r1} \end{cases}$$

由于高斯光束的光强是按高斯函数分布的, 因而原则上讲, 光束能量集中在其光轴附近, 但在截面积上却有光强分布。当用于传输光束的光学元件直径有限时 (直径为 D), 由高斯分布函数可计算出: 射在直径为 D 的光学元件上的光通量:

$$P_D = P_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{2D^2}{d_0^2}\right) \right]$$

d_0 为束腰直径 (按高斯 e^{-1} 直径)

$$\omega = \omega_{pe} \equiv \frac{e^2 n_c}{\epsilon_0 m_e} \Rightarrow n_c = 1.11 \times 10^{15} (\lambda [m])^{-2} [m^{-3}] = \textcircled{2.4}$$

$$= 1.11 \times 10^{27} (\lambda [\mu m])^{-2} [m^{-3}]$$

由此可知, 当光学元件通光孔径有限时, 高频束通过它时将会有部分损失。当 $D \geq 1.5d$ 时, 束流的损耗损失可小于 1%。因此, 做为一般设计规律, 光学元件的选择原则是:

$$D \geq 1.5d, \text{ 以保证光功率的损失小于 1\%}$$

3. 折射 (图 4.2)

J. Appl. Phys. 32 (1961), 689

当沿波束的传播路径上, 等离子体有横向密度梯度时, 探测束将会产生折射 (由于弯曲), 偏离直线传播轨迹。这对干涉测量有重要影响, 特别是在多道干涉仪中, 严重的折射效应会导致不同的干涉道之间产生串扰。因此, 我们必须对折射效应所产生的探测束的最大偏转角, 做一定量估计。对于圆柱对称的等离子体, 若其电子密度分布是抛物线分布,

$$\text{即 } n_e(r) = \begin{cases} n_{e0} (1 - \frac{r^2}{a^2}) & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

则利用 Snell 折射定理可以计算, 弦心距为 x 的探测束其偏转角为

$$\psi(x) = \sin^{-1} \left\{ \frac{\frac{n_{e0}}{n_c} \left[\frac{x^2}{a^2} - \left(\frac{x}{a} \right)^4 \right] \frac{x}{2}}{\left[\frac{n_{e0}}{n_c} \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{n_{e0}}{n_c} \right)^2 \right] \frac{x}{2}} \right\} \sin^{-1} \left\{ \frac{\frac{n_{e0}}{n_c} \left[\frac{x^2}{a^2} - \left(\frac{x}{a} \right)^4 \right] \frac{x}{2}}{\left[\frac{n_{e0}}{n_c} \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{n_{e0}}{n_c} \right)^2 \right] \frac{x}{2}} \right\}$$

由此求得当

$$x_0 = a \left(\frac{1 - n_{e0}/n_c}{2} \right)^{1/2} \approx 0.7a \quad (\text{当 } \frac{n_{e0}}{n_c} \ll 1 \text{ 时})$$

时有最大偏转角

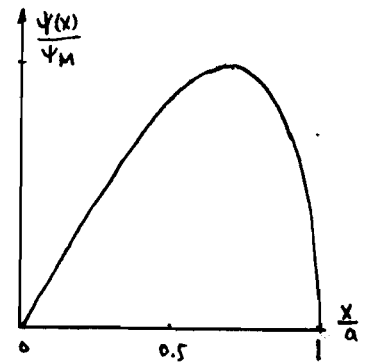
$$\psi_m \equiv \frac{n_{e0}}{n_c} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} < \psi_c$$

$$\psi_m = \sin^{-1} \left(\frac{n_{e0}}{n_c} \right) \approx \frac{n_{e0}}{n_c} = 8.97 \times 10^{-16} n_{e0} [m^{-3}] \lambda^2 [m]$$

下式是由上式计算的偏转角 $\frac{\psi(x)}{\psi_m}$ 随 $\frac{x}{a}$ 变化的计算曲线。

若探测束到等离子体截面中心的距离为 S , 则由此最大偏转角所造成的干涉束的最大位置偏移为:

$$\Delta_M = S \psi_m = 8.97 \times 10^{-16} S n_{e0} \lambda^2$$



实际上可接受的最大偏转角 ψ_m 是由相位问题决定的, 这一旦定下来了, 则对于给定的干涉仪有:

$$\omega \geq \omega_{pe} / \sqrt{\psi_c}$$

= (25)

$$\lambda_1 \gg \lambda_2 \quad \begin{aligned} \psi_1 &= r_0 \lambda_1 \int r_0 dx + \frac{2\pi}{\lambda_1} \delta l \\ \psi_2 &= r_0 \lambda_2 \int r_0 dx + \frac{2\pi}{\lambda_2} \delta l \end{aligned} \Rightarrow \int r_0 dx = \frac{\psi_1 \lambda_1 - \psi_2 \lambda_2}{r_0 (\lambda_1 - \lambda_2)}$$

4. 源频率的选择

由上述可知, 对用于等离子体密度测量的辐射源的要求是, 其频率必须高于设计的最高的电子等离子体频率, 以避免探针束在等离子体中折射偏转或截止。然而, 源频率也不能选得太高, 因为频率越高, 对于仪器的机械稳定性的要求也越高。特别是在噪声环境比较恶劣的等离子体实验中使用的干涉仪, 光路中光学部件的机械振动将产生假的路径(即相位变化)。若机械振动所产生的总的路径扰动为 δl , 则它所产生的假的相位变化为

$$\delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta l$$

$$\begin{aligned} \phi_{\Sigma} &= \phi_p + \delta\phi \\ &= r_e \lambda \int n_e dx = r_e \lambda \left(n_e d + \frac{2\pi}{\lambda} \delta l \right) \end{aligned}$$

由此可见, 对于给定的路径扰动, 探测波长越短, 所产生的相位测量误差越大。因等离子体所产生的相移是 $\phi_p \propto \lambda$, 因此振动产生的相位误差与等离子体相位变化之比是与 λ^{-2} 成反比。故对短波长来说, 机械振动变成量子力学平均的问题。

当机械振动不可避免时, 可以用两个不同波长的同时测量相移的办法, 来补偿振动所造成的相位测量误差。用比较短的波长(通常可见光)用来测量机械振动, 而比较长的波长的相移与等离子体折射率有较弱的依赖关系, 把长波长的相移(包括等离子体和机械振动的相移), 减去适当比例的短波长的相移, 就可以消除振动的影响。另一办法是用短波长探针束去反馈稳定干涉仪的路径。例如, 利用一压电换能器反馈控制一反射镜, 以保持短波下的相位差是常数。这样做就不需要再在短波下进行条纹计数, 但要求换能器有足够快的位移, 以能跟随机械振动的变化。

此外, 探针束的噪声电平、相移的测量精度等决定了干涉仪的可测的最小相移 ϕ_{min} 。当 ϕ_{min} 给定时, 相应的比例系数 $n_e d$ 也被限定了, 因为

$$(n_e d)_{min} = \frac{\phi_{min}}{r_e \lambda}$$

由此可见, 当 ϕ_{min} 给定时, 可测的最低密度与 λ 成反比, 它要求源频率也不能太高。

总之, 上述诸因素对波长(或频率)的选择是相互制约的, 需根据具体情况加以具体分析。做为一般原则, 可用下述关系粗略地选择探针波长:

$$(5 \sim 10) n_{e0} = n_c$$

总之, 由频率选择需综合考虑如下几个因素:

1. 截止 (3 个条件)

$$n_e < n_c = 1.11 \times 10^{15} \lambda^{-2} [\text{m}] \quad [\text{m}^{-3}]$$

2. 折射 (避免不同方向的干扰)

$$\frac{n_{e0}}{n_c} < \psi_M$$

若轴直径为 d 的截止管排列 M 个干涉道, 则其间距为 $\Delta x = d/M$, 其最大偏移角为 $\psi_M = \Delta x/d = 1/M$

故有 $\frac{n_{e0}}{n_c} < \frac{1}{M}$, 这比截止条件更严格

3. 衍射:

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi W_0}$$

4. 机械抖动

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta l$$

电子 λ 的相对误差为: $\frac{\delta\varphi}{\varphi_p} = 2\pi\delta l / (v_e \lambda^2 \int n_e dl)$

5. 可测的最小相位: 由可测的最小相位 φ_{\min} 决定

$$\phi_{\min} = v_e \lambda \int n_e dl$$

$$(\int n_e dl)_{\min} = \phi_{\min} / (v_e \lambda)$$

几何光学近似) $\frac{|\nabla k|}{k^2} \ll 1$ $\frac{\lambda}{2\pi} \frac{|\nabla \mu|}{\mu^2} \ll 1$ = (27)

五. 干涉现象

适用于小尺度现象的数学处理, 如干涉现象

这时有意识地量子力学中引入小的波函数表象, 从而在干涉现象上可看成量子干涉 (即空间调制), 这种引入的空间调制是量子力学干涉上可看成是适当的初始相位差, 由干涉现象量子干涉得到干涉现象的包, 量子力学干涉的相位的变化方向, 而且需用外场技术。

$$\mu = \left(1 - \frac{n_e}{n_c}\right)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{n_e}{n_c} - \frac{1}{8} \left(\frac{n_e}{n_c}\right)^2$$

$$\frac{1}{2} \frac{n_e}{n_c} = \frac{1}{5} \quad \text{则} \quad \frac{1}{8} \left(\frac{n_e}{n_c}\right)^2 = \frac{1}{200}$$

六. 非理想量子干涉对干涉现象的影响

(1) 量子干涉

$$\mu_x^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{1 - \omega_{ce}^2/\omega^2}{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}}$$

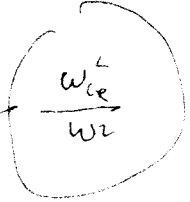
当 $\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2} \ll 1$ 时,

$$\mu_x^2 \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right) \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^4}{\omega^4} - \frac{\omega_{pe}^4}{\omega^4} - \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)$$

$$\approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}\right)$$

$$\mu_x \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}\right)$$



$$\phi_p = -r_e \lambda \int n_e \left(1 + \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}\right) dl$$

由此可见：当入射波频率为异常波时，若不用寻常波的色散关系由寻常波引入的相移相导致相位突变时，已相对误差为：

$$\frac{\Delta\phi_p}{\phi_p} \approx \frac{\int n_e \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2} dl}{\int n_e (1 + \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}) dl} \quad (\text{当 } \omega_{pe}^2 \ll \omega^2, \omega_{ce}^2 \ll \omega^2 \text{ 时})$$

2. 法拉第旋转：

设 $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ ，入射波 $\vec{E}_i = \vec{x} E_{i0} \cos \omega t$

线偏振波可表示为：

$$\vec{E}_i(\omega) = \vec{E}_L(\omega) + \vec{E}_R(\omega)$$

$$\text{即 } \vec{E}_L(\omega) = \vec{x} \frac{E_{i0}}{2} \cos \omega t - \vec{y} \frac{E_{i0}}{2} \sin \omega t$$

$$\vec{E}_R(\omega) = \vec{x} \frac{E_{i0}}{2} \cos \omega t + \vec{y} \frac{E_{i0}}{2} \sin \omega t$$

当通过寻常波的距离为 l 时，则出射波为：

$$\vec{E}_L(l) = \vec{x} \frac{E_{i0}}{2} \cos(\omega t - \phi_L) - \vec{y} \frac{E_{i0}}{2} \sin(\omega t - \phi_L)$$

$$\vec{E}_R(l) = \vec{x} \frac{E_{i0}}{2} \cos(\omega t - \phi_R) + \vec{y} \frac{E_{i0}}{2} \sin(\omega t - \phi_R)$$

其合成波为

$$\vec{E}(l) = \vec{E}_L(l) + \vec{E}_R(l)$$

$$= \vec{x} E_{i0} \cos\left(\frac{\phi_L - \phi_R}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\phi_L + \phi_R}{2}\right)$$

$$+ \vec{y} E_{i0} \sin\left(\frac{\phi_L - \phi_R}{2}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\phi_L + \phi_R}{2}\right)$$

由此可见，由于法拉第旋转使出射波的偏振方向转过一角度

$\alpha \equiv \frac{\phi_L - \phi_R}{2}$ ，从而使出射波的 x 分量不等于零，但又 y 分量

的相位变为： $\frac{\phi_L + \phi_R}{2} = \frac{\omega}{c} \int \frac{\mu_L + \mu_R}{2} dl \approx \frac{\omega}{c} \int \mu_0 dl$

$$(\text{当 } \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \ll 1, \frac{\omega_{ce}}{\omega} \ll 1 \text{ 时})$$

由此可见，法拉第旋转对于科曼干涉仪的测量误差没有影响。

(a) 法拉第旋转

设 $\vec{k} \parallel \vec{B}_0 \parallel \hat{z}$

垂直入射光 ($\delta=0$)

$\vec{E}(0) = \hat{x} \cos \omega t = \vec{E}_R + \vec{E}_L$ 线偏振光

其中

$\vec{E}_R(0) = \hat{x} \frac{E_0}{2} \cos \omega t + \hat{y} \frac{E_0}{2} \sin \omega t$ 右旋波

$\vec{E}_L(0) = \hat{x} \frac{E_0}{2} \cos \omega t - \hat{y} \frac{E_0}{2} \sin \omega t$ 左旋波

通过等离子体层, 在 $z=l$ 处, 左、右旋波分别为:

$\vec{E}_R(l) = \hat{x} \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - \phi_R) + \hat{y} \frac{E_0}{2} \sin(\omega t - \phi_R)$

$\vec{E}_L(l) = \hat{x} \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - \phi_L) - \hat{y} \frac{E_0}{2} \sin(\omega t - \phi_L)$

它们的合成波电场为:

$\vec{E}(l) = \vec{E}_R(l) + \vec{E}_L(l)$

$= \hat{x} E_0 \cos\left(\frac{\phi_L - \phi_R}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\phi_R + \phi_L}{2}\right)$

$- \hat{y} E_0 \sin\left(\frac{\phi_L - \phi_R}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\phi_R + \phi_L}{2}\right)$

由此可见, 由于在等离子体中左、右旋波的相速度不同, 使入射波电场的偏振面发生了旋转, 其旋转角为 $\alpha = \frac{\phi_L - \phi_R}{2}$, 从而使它出现了 \hat{y} 方向的偏振分量。但无论是 \hat{x} 还是 \hat{y} 分量, 它们通过等离子体层所产生的相位移均为:

$$\phi_p = \frac{\omega}{c} \int_0^l \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right] dz$$

由左、右旋波色散关系知, 当 $\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \ll 1$ 及 $\frac{\omega_{ce}}{\omega} \ll 1$ 时, 有近似式为:

$$\mu_L = \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)^{-1}\right]^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)$$

$$\mu_R = \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)^{-1}\right]^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)$$

$$\frac{\mu_R + \mu_L}{2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = \mu_0$$

$$\frac{\mu_L - \mu_R}{2} \approx \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\omega_{ce}}{\omega}$$

由此可见, 对于外差干涉仪, 法拉第旋转对等离子体产生的相位移的影响是已没有影响的 (因为它是与干涉条纹成无关)。

▲ 高频电磁波对电子的影响

这时, 漂移速度与 ω 相比较, 这时电磁波传播的影响不予忽略。当 $B_0 = 0$ 时, 电子运动方程为:

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \nu m_e \vec{v}$$

由此运动方程求解可得介电常数:

$$\mu^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu^2} \left(1 + i \frac{\nu}{\omega} \right)$$

由此可得:

$$\mu_r \approx \text{Re}(\mu) = \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu^2} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu^2} \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}$$

$$\mu_i \approx \text{Im}(\mu) = \left\{ -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu^2} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu^2} \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}$$

其实部 μ_r 引起相移

$$\phi_p = \frac{\omega}{c} \int_0^L (1 - \mu_r) dl$$

而其虚部 μ_i 引起通过等离子体的电磁波幅度衰减

$$E_1 = E_{10} e^{-\frac{\omega}{c} \int_0^L \mu_i dl} = E_{10} \alpha$$

其中 $\alpha \equiv e^{-\frac{\omega}{c} \int_0^L \mu_i dl}$ 为衰减因子

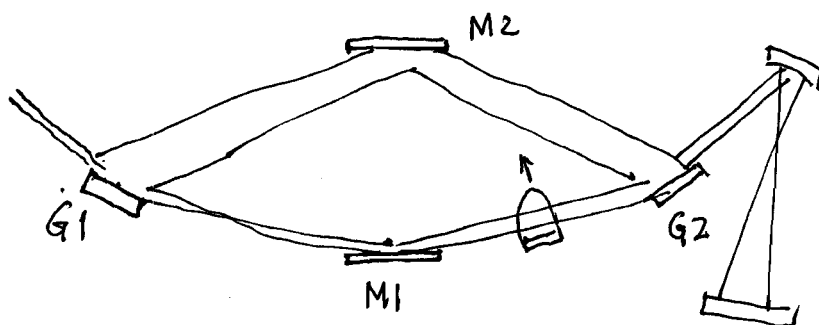
正交相位

$$V_{cos} = \alpha E_{10} E_{20} \alpha \cos \phi_p$$

$$V_{sin} = \alpha E_{10} E_{20} \alpha \sin \phi_p$$

产生李萨如图

▲ 软 X 射线激光干涉仪诊断高密度激光等离子体



改进型子镜-干涉仪

1. 第一个衍射光栅 G1 将入射束的射束分成两束 (垂直束和一级衍射束) — 成为干涉仪的两臂 (控入射)
2. 控入射反射镜把两束光重新射入第二个衍射光栅. 它们合成一束光形成干涉图案
3. 调节控入射反射镜的倾角, 可以调节条纹间距和条纹的方向
4. 在时间分辨率, 避免等离子体运动引起干涉条纹的模糊

Optics Letters 25 (2000), 350

Applied Optics 43 (2004), 3938

Physics of Plasmas 10 (2003), 2037

§2.3 磁场的测量

一. 原理 - 法拉第旋转

1. 非均匀磁场

当电磁波平行于磁场传播时, 有两个本征模, 假定:
 $\omega_p^2 \ll \omega^2$, $\omega_{ce} \ll \omega$, 它们的折射率分别近似为:

$$\mu_L = \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)^{-1} \right]^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)$$

$$\mu_R = \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)^{-1} \right]^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)$$

令 $\vec{B}_0 \parallel \hat{z} \parallel \vec{k}$, 初始入射波为线偏振波 $\vec{E}(0) = E \hat{x}$,
 它可以分解为同频率旋转的左、右旋波, 即

$$\vec{E}(0) = \frac{E}{2} \left[(1, \bar{i}) + (1, \bar{i}) \right]$$

当它穿过等离子体(传播) $z \neq 0$ 处时, 该波就变为:

$$\begin{aligned} \vec{E}(z) &= \frac{E}{2} \left[(1, \bar{i}) \exp\left[i\mu_L \frac{\omega}{c} z\right] + (1, \bar{i}) \exp\left[i\mu_R \frac{\omega}{c} z\right] \right] \\ &= E \left[\cos \alpha, \sin \alpha \right] \exp\left[i\phi_p\right] \end{aligned}$$

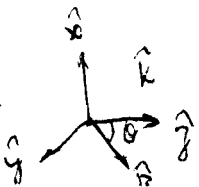
$$\text{即 } \alpha \equiv \frac{\mu_L - \mu_R}{2} \frac{\omega}{c} z = \frac{\omega_p^2 \omega_{ce}}{2 \omega^2 c} z = \frac{e^2}{2 \pi m e c} \lambda^2 n_e B_0 z$$

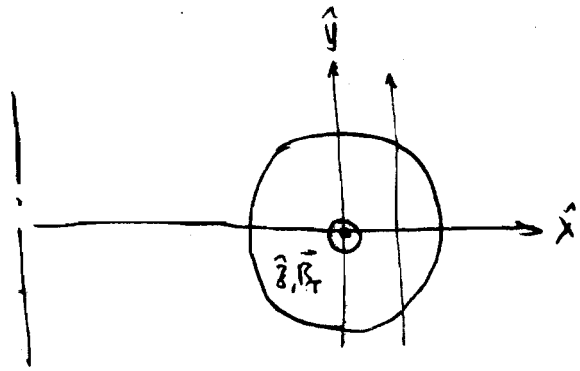
$$\phi_p \equiv \frac{\left(1 - \frac{\mu_L + \mu_R}{2} \right)}{\frac{\mu_L + \mu_R}{2}} \frac{\omega}{c} z = \frac{\omega_p^2}{2 \omega c} z = \lambda^2 n_e z$$

α 是电磁波通过等离子体后偏振子转过的角度, 称为法拉第旋转角。当知道了法拉第旋转角 α , 由上述 α 的表达式即可求出 $(n_e B_0)$ 的数值 (对非均匀等离子体)。

在一般情况下, 在非均匀磁场 \vec{B} 况下 ($\chi \equiv \frac{\omega_{ce}}{\omega} \ll 1$), 又有

$$\chi \sec \theta \ll 1 \text{ (不太接近于垂直传播)}, \alpha \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \chi \cos \theta}{(1-\chi)^{1/2}} \right] \frac{\omega}{c} z$$





$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0) \quad \vec{B}_0 = (B_{p\perp}, B_{p\parallel}, B_T)$$

$$\vec{B}_{p\parallel} \parallel \hat{z}, \quad \vec{B}_{p\perp} \parallel \hat{x}$$

求解得

$$\vec{v} = f(\vec{E})$$

$$\vec{j} = en_e \vec{v} = en_e f(\vec{E}) = \hat{\sigma} \cdot \vec{E}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega(1 - \omega_{c\parallel}^2/\omega^2)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\omega_{c\parallel}}{\omega} & -\frac{\omega_{c\perp}}{\omega} \\ -\frac{\omega_{c\parallel}}{\omega} & 1 & \frac{\omega_{c\perp}}{\omega} \\ \frac{\omega_{c\perp}}{\omega} & -\frac{\omega_{c\perp}}{\omega} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\because B_T \gg B_p$$

上式中已忽略如下项

$$\omega_c^2 = \omega_{cx}^2 + \omega_{cy}^2 + \omega_{cz}^2 \approx \omega_{cy}^2$$

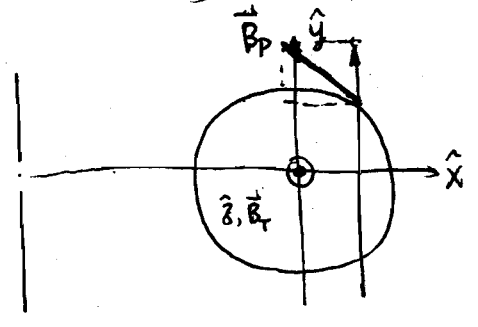
$$\omega^2 \gg \omega_c^2$$

2. 剪切场: J. Appl. Phys. 52 (1981), 6572

在剪切场中传播时, 即使初始是寻常波, 在等离子体中传播时, 其偏振态会发生复杂的变化, 剪切场会产生 X, L, R 波分量, 从而使其合成波通常是非圆偏振波, 且偏振波的主轴将在传播过程中将发生旋转, 即旋光效应。下节我们将以托卡马克位形为例, 详细计算初始线偏振波在传播过程中, 其偏振态是如何变化的。

为简单起见, 我们假设:

- (1) $\omega^2 \gg \omega_{pe}^2, \omega_{ce}^2$
- (2) 冷等离子体近似
- (3) 等离子体是轴对称的
- (4) WKB 近似成立
- (5) 双折射效应较小, 但不可忽略



取如右坐标系中的坐标, 等离子体中电磁波的波动方程为:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \mu_0 \vec{\sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

其中 $\vec{\sigma}$ 为等离子体电导率张量, 它可由电子运动方程解得:

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0) \quad \vec{B}_0 = (B_{p\perp}, B_{p\parallel}, B_T)$$

它可表示为:

$$\vec{\sigma} = \frac{\epsilon_0 \omega_{pe}^2}{\omega(1 - \omega_{ce}^2/\omega^2)} \begin{pmatrix} i & \omega_{ce}/\omega & -\omega_{ce}/\omega \\ -\omega_{ce}/\omega & i & \omega_{ce}/\omega \\ \omega_{ce}/\omega & -\omega_{ce}/\omega & i \end{pmatrix}$$

上式中已利用了如下近似:

$$\omega_c^2 = \omega_{ce}^2 + \omega_{cy}^2 + \omega_{cz}^2 \approx \omega_{ce}^2 \quad (\because B_T \gg B_p)$$

$$\text{且} \quad \omega^2 \gg \omega_c^2$$

假定上述波动方程中 E 的每个分量都有如下形式解

$$E_j(y) = A_j(y) \exp[i(\phi_j(y) - \omega t)] \quad j = x, y, z$$

其中 $A_j(y)$ 是空间振幅函数, $\phi_j(y)$ 是空间相位函数, 在特定的垂直弦线上 (已知弦长 x), 它只与 y 的坐标有关。将它代入波动方程中, 由此导出 $A_j(y)$ 和 $\phi_j(y)$ 所满足的常微分方程, 它们的解是:

$$A_x(y) = A_{x0} + A_{z0} \int_y dy \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right) \frac{\omega_{pe}^2 \omega y}{2c\omega^2}$$

$$A_z(y) = A_{z0} - A_{x0} \int_y dy \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right) \frac{\omega_{pe}^2 \omega y}{2c\omega^2}$$

$$\phi_x(y) = \frac{\omega}{c} \int_y dy \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \omega^2 y^2}{2\omega^4}\right] \quad \frac{\omega}{c} \int \mu_x dy$$

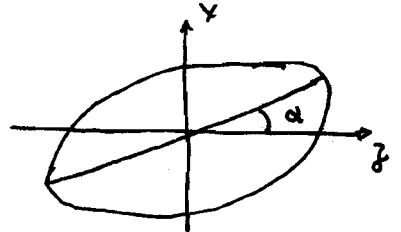
$$\phi_z(y) = \frac{\omega}{c} \int_y dy \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2}\right] \quad \frac{\omega}{c} \int \mu_0 dy$$

由此可见, 初始线偏振波 (O波或X波), 通过具有磁致各向异性介质的磁层, 其幅度和相位均发生变化, 它由合成波一般可椭圆偏振波, 且其主轴将相对于初始偏振方向发生旋转, 其旋转角可由熟知的椭圆偏振光的公式求得 (M. 波恩, E. 沃耳夫著, 光学原理, 上册 p. 43~46):

$$\tan(2\alpha) = \tan(2\psi) \cos \Delta\phi$$

其中
$$\psi \equiv \tan^{-1} \left[\frac{A_x(y)}{A_z(y)} \right]$$

$$\Delta\phi = \phi_z(y) - \phi_x(y)$$



= (34) p. 18

$$E_x = a_1 \cos(\tau + \delta_1)$$

$$\tau = \omega t$$

$$E_y = a_2 \cos(\tau + \delta_2)$$

由此可得:

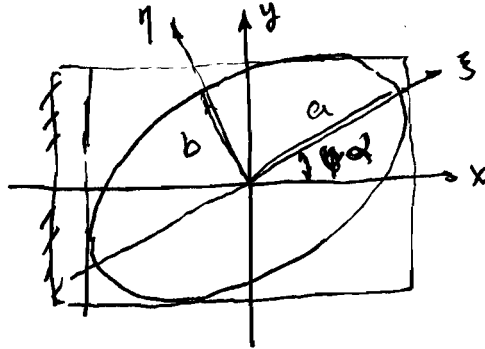
$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 - 2 \frac{E_x}{a_1} \frac{E_y}{a_2} \cos \delta = \sin^2 \delta$$

$$\delta \equiv \delta_2 - \delta_1$$

$\delta = 0, \pi$ 线偏振

$\delta = \frac{\pi}{2}, a_1 = a_2$

圆偏振



这是椭圆方程式，这是一个椭圆。

它也可以用 ξ - η 坐标来描述

$$\begin{cases} E_\xi = a \cos(\tau + \delta_0) \\ E_\eta = \pm b \sin(\tau + \delta_0) \\ \pm ab = a_1 a_2 \sin \delta_0 \end{cases} \quad (\pm \text{表示旋转方向})$$

由此可得:

$$\tan \psi \equiv \frac{a_2}{a_1} \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$\tan(2\alpha) = \tan 2\psi \cos \delta$$

$$\sin 2\alpha = \sin 2\psi \sin \delta$$

即

$$\tan \alpha \equiv \pm \frac{b}{a} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$$

↑
椭圆半轴

当 $\psi \ll 1$ 及 $\alpha \ll 1$ 时 (通过速率比选对 ω , 通常都满足), 上式近似为:

$$\alpha \approx \psi \omega \Delta\phi = \psi \left[1 - \frac{(\Delta\phi)^2}{2} \right]$$

若初始偏振为寻常波, 即 $A_{y0} \neq 0, A_{x0} = 0$, 则椭圆偏振波由转过角度为:

$$\alpha \approx \left[1 - \frac{(\Delta\phi)^2}{2} \right] \int_y dy \left(1 + \frac{\omega_{ct}^2}{\omega^2} \right) \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ch}^2}{2\omega^2 c}$$

$$\Delta\phi = \frac{\omega}{c} \int dy \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ch}^2}{2\omega^2} \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ch}^2}{2\omega^2}$$

将各物理参数代入上式, 可得:

$$\alpha = 2.63 \times 10^{-25} \lambda^2 [\mu\text{m}] \left(1 - \frac{(\Delta\phi)^2}{2} \right) \int_y (1 + 0.87 \times 10^8 \lambda^2 [\mu\text{m}] B_T^2) n_e B_T^2 dy$$

$$\Delta\phi = 2.46 \times 10^{-29} \lambda^3 [\mu\text{m}] \int_y n_e B_T^2 dy$$

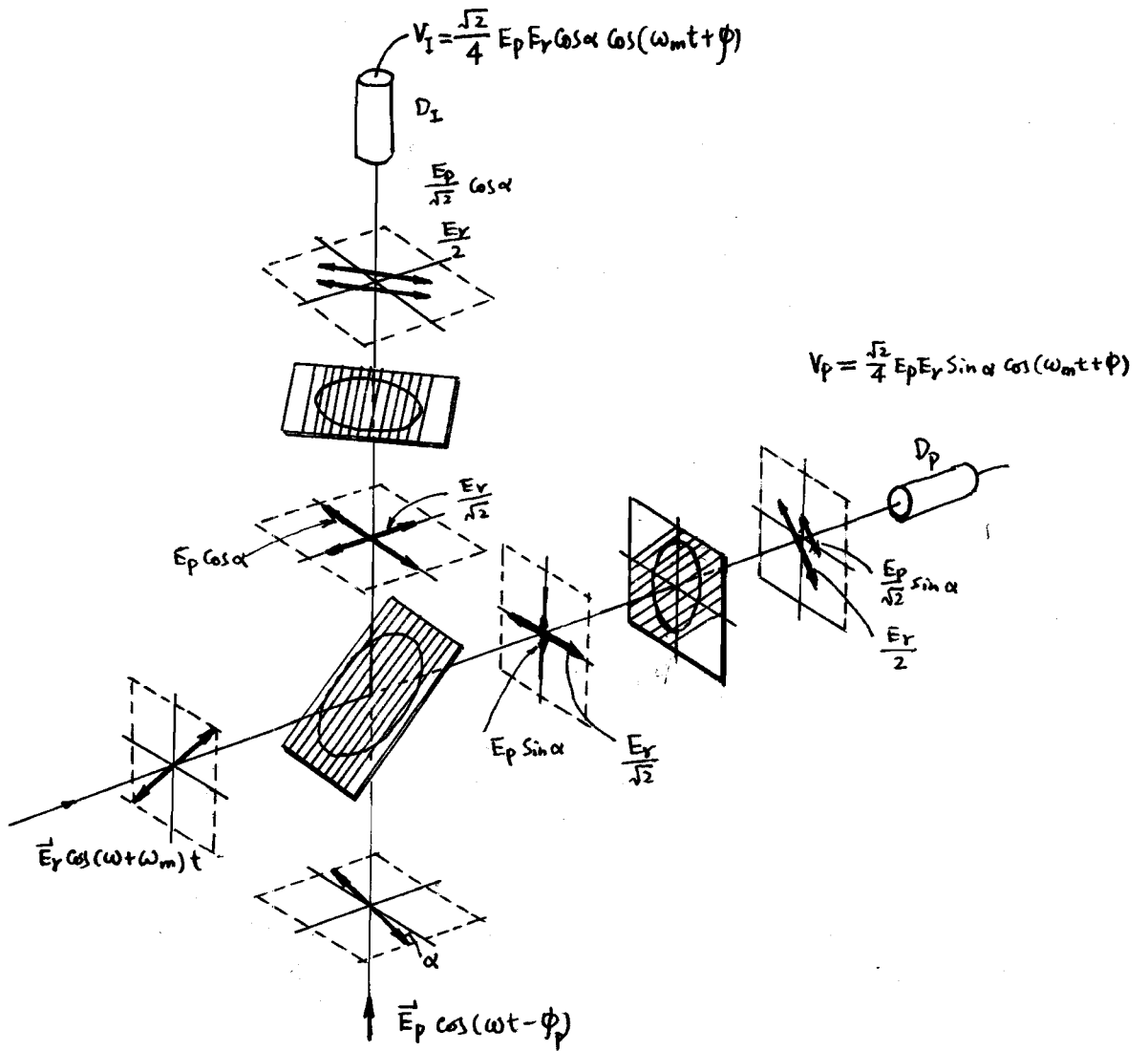
至此, $\Delta\phi$ 是双折射效应引起的相位差, 它与频率 ω 成正比 λ^3 成正比, 又有 λ 较短时, 才能保证 $\Delta\phi \ll 1$, 双折射效应对椭圆偏振角的影响才可忽略。

二. 法拉第旋转角的测量

因为 α 与 $B_{\parallel} n_e$ 成正比或平方, 因此通常都是利用同一装置同时测的 α 和偏振测量, 以便分别求得 B 和 n_e 的数据。

1. 折偏法

这里折偏法是测量偏振角, 之用折偏器则是偏振旋转角与偏振角, 因此测偏角与转角成正比或平方, 但这里测量折偏角是测量偏振角, 若把 α 的测量精度, 若用折偏法, 这与转角 $\sin \alpha$ 成正比, 这里是小转角情况下测量偏振角。



它与干涉仪的主要区别是：将一个对偏振方向灵敏的探测元件代替干涉仪中最后的半透片（它对偏振方向不灵敏），通过它使经法拉第旋转后的探测束分解成两个偏振分量，它们的偏振方向分别平行、垂直于初始的偏振方向，然后对这两个偏振分量分别进行探测。

在例子中，对偏振方向灵敏的分量是用线栅做成的。在微波和远红外波段，线栅可用做折偏片。这是利用线栅对入射电磁波响应的特点：即当线栅足够窄时，电矢量平行于线方向的电磁波入射到线栅上，它将被完全反射；而入射电磁波偏振方向与线方向垂直时，它将被完全透过栅线。这样，利用它就可以把偏振方向相互垂直的两个分量分离开。

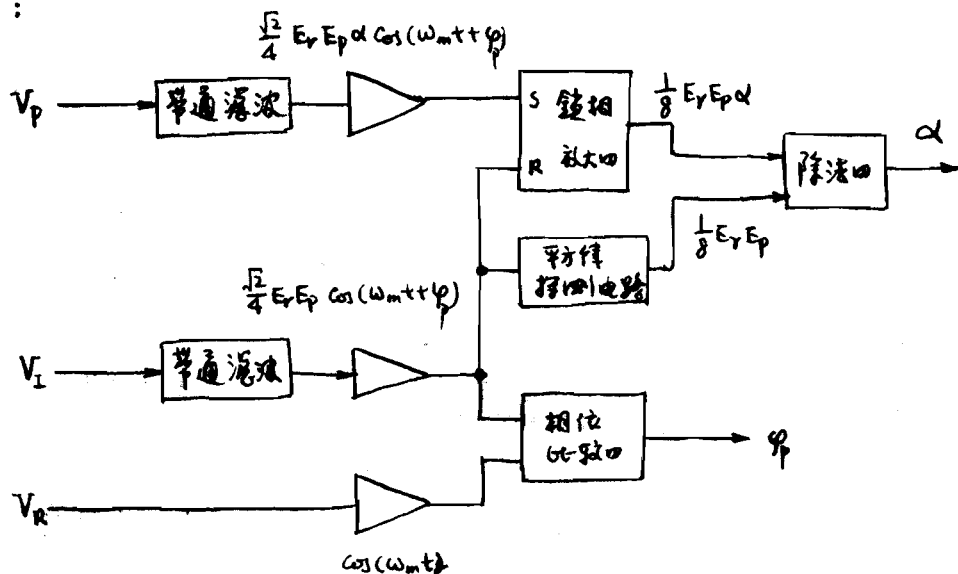
由上面的光路安排和相位偏移的特点, 就可以计算出两探测器输出的交流信号分别为:

$$V_I = \frac{\sqrt{2}}{4} E_p E_r \cos \alpha \cos(\omega_m t + \phi)$$

$$V_p = \frac{\sqrt{2}}{4} E_p E_r \sin \alpha \cos(\omega_m t + \phi)$$

这里 α 、 ϕ 分别为法拉第转角和等离共振相移。

由上式可见, 当 $\alpha \ll 1$ 时, V_p 是与 α 成正比的, 只要能够精确地测量信号的幅度, 就可以测量法拉第转角 α 。此外, 由于 V_p 和 V_I 有相同的相位因子, 因而可利用 V_I 做参考信号, 而用锁相放大器精确地测量 V_p 的幅度 $\frac{\sqrt{2}}{4} E_p E_r \alpha$, 这是因为锁相放大器的输出信号是与 $V_p \cdot V_{I0} = \frac{1}{8} (E_p E_r)^2 \alpha$ 成正比的。锁相放大器的输出幅度与 α 的关系, 可用位于探测器光路上的 $\frac{1}{2}$ 波片来标定。当没有等离共振时, 依 $\frac{1}{2}$ 波片转过已知的角度, 测量这时锁相放大器的输出电压, 它应与转角 α 相等。但这样测得的 α 角的精度要受波片厚度变化的影响。为消除波片的变化对 α 测量的影响, 可用 V_I 的输出信号幅度归一。其信号处理的框图如下:



由上框图可知, 等离共振相移可用常规的方法同时地被测量。

$\frac{\lambda}{4}$ 波片

入射光

$\frac{\lambda}{4}$ 光之轴方位

出射光

线偏振

$\vec{e}, \vec{o} \parallel \vec{E}$

线偏振

$\angle \vec{o}, \vec{E} = 45^\circ$

圆偏振

圆偏振

任意

线偏振

椭圆偏振

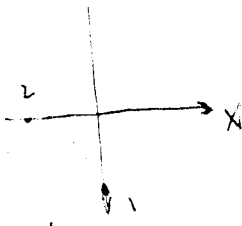
\vec{e}, \vec{o} 与椭圆之轴平行

线偏振

任意方位

椭圆偏振

$\frac{\lambda}{2}$ 波片



入射光

\vec{E} 与 \vec{o} 成角 θ

出射光

线偏振

θ

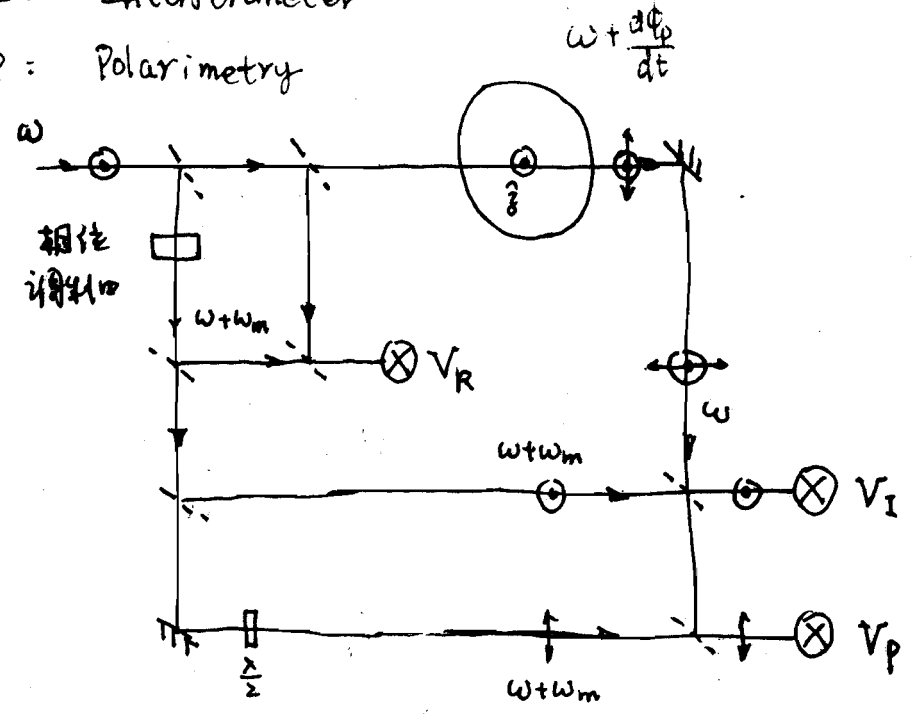
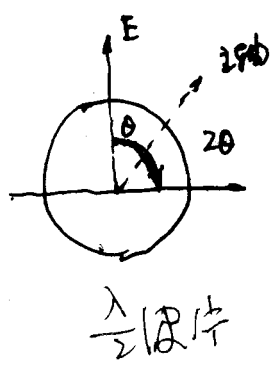
线偏振

偏振方向转过

2θ 角

I: Interferometer

P: Polarimetry



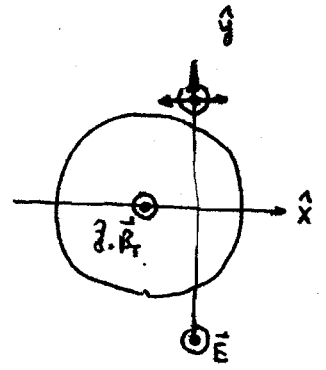
$$V_R = A_R \cos(\omega + \omega_m)t$$

$$V_I = A_I \cos \alpha \cos(\omega_m t + \phi_p)$$

$$V_P = A_P \sin \alpha \cos(\omega_m t + \phi_p)$$

设入射波是线偏振波，o波：

$$\begin{cases} E_y(t) = a \cos \omega t \\ E_x(t) = 0 \end{cases}$$



之可以分解为左、右旋波。即：

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_r(t) + \vec{E}_l(t)$$

$$\text{其中} \begin{cases} E_{rz}(t) = \frac{a}{2} \cos \omega t \\ E_{rx}(t) = \frac{a}{2} \sin \omega t \end{cases} \quad \begin{cases} E_{lz}(t) = \frac{a}{2} \cos \omega t \\ E_{lx}(t) = -\frac{a}{2} \sin \omega t \end{cases}$$

通过界面时，之的相移分别为 ϕ_r, ϕ_l ，即

$$\begin{aligned} E_{rz}(L) &= \frac{a}{2} \cos(\omega t - \phi_r) & E_{lz}(L) &= \frac{a}{2} \cos(\omega t - \phi_l) \\ E_{rx}(L) &= \frac{a}{2} \sin(\omega t - \phi_r') & E_{lx}(L) &= -\frac{a}{2} \sin(\omega t - \phi_l') \end{aligned}$$

其中 ϕ_l', ϕ_r' 分别为右、左旋波分量的相移，这与 ϕ_l, ϕ_r 略有差别。当 $\frac{\omega \epsilon_0}{\omega^2} \ll 1$ 时，之的差别可忽略（即 $\Delta \mu = \mu_0 - \mu_x \ll 1$ ）。之的合成波为：

$$\begin{cases} E_z(L) = a \cos\left(\frac{\phi_l - \phi_r}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\phi_l + \phi_r}{2}\right) \\ E_x(L) = +a \sin\left(\frac{\phi_l - \phi_r}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\phi_l + \phi_r}{2}\right) \end{cases}$$

因为 $\phi_l - \phi_r = 2\alpha = \int \frac{\omega \epsilon_0 \omega_0}{\omega^2 c} dl, \phi_l + \phi_r = 2\phi_p = 2 \operatorname{Re} \lambda \int n_e dl$

$$\therefore E_z(L) = a \cos \alpha \cos(\omega t - \phi_p)$$

$$E_x(L) = a \sin \alpha \cos(\omega t - \phi_p)$$

干涉仪： $E_{Rz} = b \cos(\omega + \omega_m)t, E_{Rx} = 0$

$$V_I \propto ab \cos \alpha \cos(\omega_m t + \phi_p)$$

偏振仪： $E_{Rz} = 0, E_{Rx} = b \cos(\omega + \omega_m)t$

$$V_p \propto ab \sin \alpha \cos(\omega_m t + \phi_p)$$

由于谐波信号 $V_I \propto ab \cos \alpha \cos(\omega_m t + \phi)$ 与 $V_R \propto ab \cos \omega_m t$ 的相位比较, 可得得等式并产生相位差:

$$\phi_p = \text{re} \lambda \int n_e dy$$

另一方面, 由于谐波和偏振信号幅度比

$$R = \frac{V_p}{V_I} = \tan \alpha \approx \alpha \quad (\text{当 } \alpha \ll 1 \text{ 时})$$

可得得法拉第角

$$\alpha = \int_0^L \frac{\omega_p^2 \omega_c}{2\omega^2 c} dy = 2.63 \times 10^{-5} \lambda^2 [\mu\text{m}] \int_0^L n_e B_{pH} dy$$

2. 偏振调制法 - (P. 122, 图 4.23)

半波片的作用: 当入射线偏振波的方向与主轴的夹角为 $\pm \pi/4$ 时, 其输出变为圆偏振光, 且旋转方向相反。

设入射线为左、右旋波, 且角频率分别为 ω 和 $\omega + \omega_m$, 即

$$Z_L = a \cos \omega t$$

$$X_L = -a \sin \omega t$$

$$Z_R = a \cos(\omega + \omega_m)t$$

$$X_R = a \sin(\omega + \omega_m)t$$

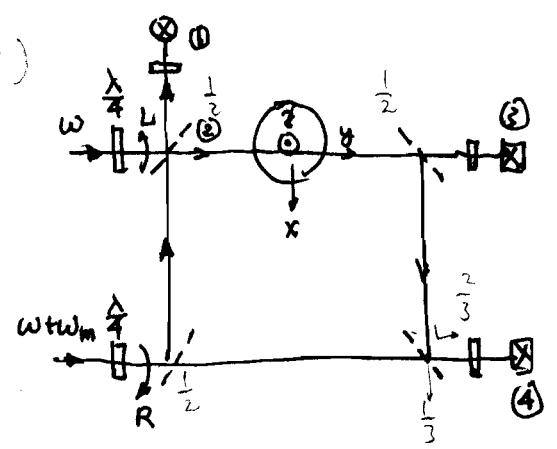
在 ①、② 处电场相同, 即:

$$Z_{1L} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos \omega t$$

$$X_{1L} = \frac{-\sqrt{2}}{2} a \cos \omega t$$

$$Z_{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos(\omega + \omega_m)t$$

$$X_{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos(\omega + \omega_m)t$$



它们的合成波为

$$Z_{1,2} = \sqrt{2} a \cos(\frac{1}{2}\omega_m t) \cos(\omega + \frac{1}{2}\omega_m)t$$

$$X_{1,2} = \sqrt{2} a \sin(\frac{1}{2}\omega_m t) \cos(\omega + \frac{1}{2}\omega_m)t$$

它们的包络是以 $\frac{1}{2}\omega_m$ 的角频率旋转的余弦振荡。在①处 Z 分量的干涉信号为：

$$V_{12} \propto \cos \omega_m t$$

通过等集对岸后，在③处的波电场为：

$$Z_{3L} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos(\omega t - \phi_L)$$

$$Z_{3R} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos[(\omega + \omega_m)t - \phi_R]$$

$$X_{3L} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a \sin(\omega t - \phi_L)$$

$$X_{3R} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \sin[(\omega + \omega_m)t - \phi_R]$$

它们的 Z 分量的干涉信号为

$$V_{32} \propto \cos(\omega_m t + 2\alpha) \quad \frac{1}{4} a^2 \cos(\omega_m t + 2\alpha)$$

在④处的波电场为：

$$\begin{cases} Z_{4L} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos(\omega t - \phi_L) \\ X_{4L} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a \sin(\omega t - \phi_L) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_{4R} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos[(\omega + \omega_m)t - \phi_R] + \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos(\omega + \omega_m)t \\ X_{4R} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \sin[(\omega + \omega_m)t - \phi_R] + \frac{\sqrt{2}}{2} a \sin(\omega + \omega_m)t \end{cases}$$

它们的 Z 分量的干涉信号为：

$$V_{42} \propto \cos(\omega_m t + 2\alpha) + \cos(\omega_m t + \phi_L)$$

$$\propto \cos \frac{\phi_L}{2} \cos(\omega_m t + \alpha + \frac{\phi_L}{2})$$

由此可得:

$$\left(\alpha + \frac{\phi_e}{2} \right) \begin{cases} V_{1z} = A_1 \cos \omega_m t \\ V_{3z} = A_3 \cos(\omega_m t + 2\alpha) \\ V_{4z} = A_4 \cos(\omega_m t + \alpha + \frac{\phi_e}{2}) \end{cases} \quad 2\alpha$$

V_{1z} 、 V_{3z} 相位差为:

$$2\alpha \equiv \phi_e - \phi_r = a \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{a}{2}$$

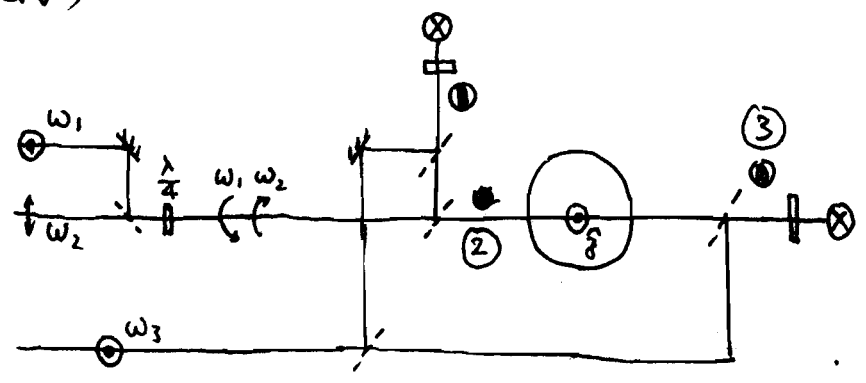
V_{1z} 、 V_{4z} 相位差为:

$$a + \frac{\phi_e}{2} = \phi_e - \frac{\phi_r}{2} = b$$

由此可得:

$$\phi_p \equiv \frac{\phi_e + \phi_r}{2} = 2b - \frac{3}{2}a$$

3. 缩频调法(2)



操作:

1. 角频率 ω_1 , 右旋波
2. " ω_2 , 左旋波
3. " ω_3 , 线缩频波 $\vec{E} \parallel \vec{z} \parallel \vec{B}_T$

② 此波电场为:

$$\begin{aligned} \vec{E}_r &= a \cos \omega_1 t & \vec{E}_e &= a \cos \omega_2 t \\ \vec{E}_r &= a \sin \omega_1 t & \vec{E}_e &= -a \sin \omega_2 t \end{aligned}$$

通过等量介质在②处的波电场为:

$$Z_{3r} = a \cos(\omega_1 t - \phi_r) \quad Z_{3l} = a \cos(\omega_2 t - \phi_l)$$

$$Z_{3r} = a \sin(\omega_1 t - \phi_r) \quad Z_{3l} = -a \sin(\omega_2 t - \phi_l)$$

本振波电场为:

$$Z_{l0} = b \cos \omega_3 t$$

将偏置电压 \$Z\$ 分量, 按例四给出干涉信号为:

$$V_s = a^2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + 2\alpha] \quad (V_{s1})$$

$$+ ab \cos[(\omega_1 - \omega_3)t - \phi_r] \quad (V_{s2})$$

$$+ ab \cos[(\omega_2 - \omega_3)t - \phi_l] \quad (V_{s3})$$

在①处, 干涉干涉信号的波电场为:

$$Z_{1r} = a \cos \omega_1 t \quad Z_{1l} = a \cos \omega_2 t \quad Z_{l0} = b \cos \omega_3 t$$

$$Z_{1r} = a \sin \omega_1 t \quad Z_{1l} = -a \sin \omega_2 t$$

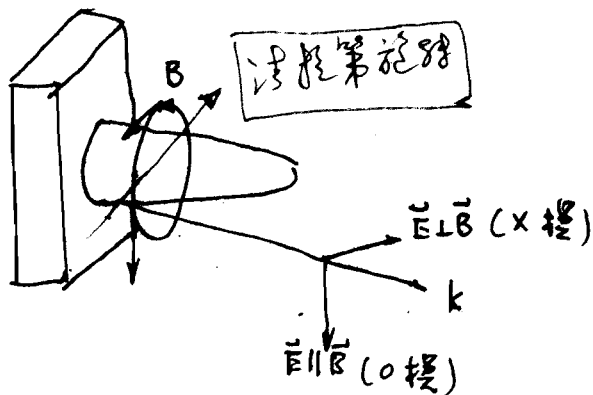
将偏置电压 \$Z\$ 分量, 按例四给出干涉信号为:

$$V_R = a^2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t \quad (V_{R1})$$

$$+ ab \cos(\omega_1 - \omega_3)t \quad (V_{R2})$$

$$+ ab \cos(\omega_2 - \omega_3)t \quad (V_{R3})$$

则 \$V_{s1} (\cos[(\omega_1 - \omega_2)t + 2\alpha])\$ 与 \$V_{R1} (\cos[(\omega_1 - \omega_2)t])\$ 间的相位比较, 可得 \$2\alpha\$。同理, \$V_{s2}\$ 与 \$V_{R2}\$ 间的相位比较可得 \$\phi_r\$, \$V_{s3}\$ 与 \$V_{R3}\$ 间的相位比较, 可得 \$\phi_l\$。由 \$\phi_r\$ 和 \$\phi_l\$ 的相位 \$\phi_p = (\phi_r + \phi_l)/2\$ 可求得 \$\phi_p\$。

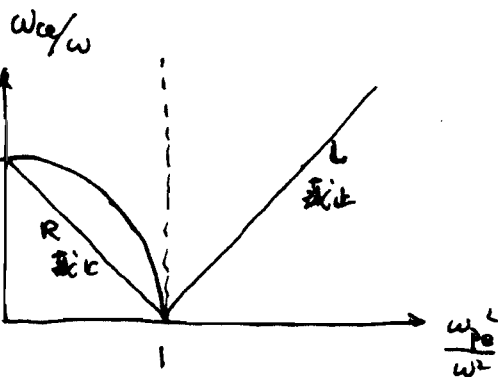


1. 双折射. 椭圆偏振

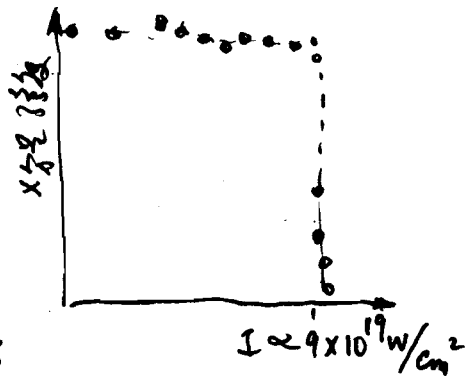
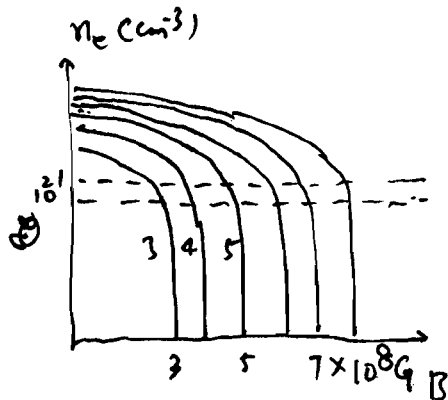
$$\frac{b}{a} = 2.49 \times 10^{-21} \lambda_{\mu m}^3 \left(n_e [\mu m] B [MG] d [\mu m] \right)$$

2. X极截止

$$\omega_c = \frac{\omega_{ce}}{2} + \sqrt{\frac{\omega_{ce}^2}{4} + \omega_{pe}^2}$$



3. 波沿z传播



▲ 激光等离子体中磁场的产生

Physics of Plasmas 9 (2002), 2244

Plasma Phys. Control. Fusion 44 (2002), B233

Physical Review E70 (2004), 026401

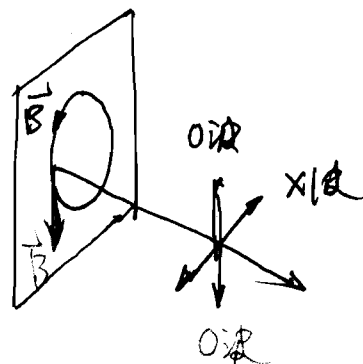
磁场的产生机制

1. 不均匀的密度和速度梯度 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{en_e} \nabla(kT_e) \times \nabla n_e$
2. 激光脉冲自身的衍射效应
3. 热电子电流

利用激光-等离子体相互作用中产生的高谐波束

1. 这些谐波在临界密度附近产生，方向同性传播
2. 传播方向与入射激光的传播方向相同。
3. 传播方向与磁场的方向相同
4. 方向是 $\vec{k} \perp \vec{B}$

1. 利用 X 波或正负离子磁体



= (44) p 2

we found a positive relationship between male display intensity and startle rate ($\beta_{\text{response}} = -0.92$, $P < 0.001$; $\beta_{\text{intensity}} = 0.51$, $P < 0.028$; $r^2 = 0.68$, $F_{2,10} = 10.71$, $P < 0.003$).

We predicted that the most successful males would be those who produce high-intensity displays without startling females. Indeed, we found a positive correlation between male display intensity in robot courtships and male success in natural courtships (Fig. 2c), and a negative relationship between startle rate and male courtship success (Fig. 2d), with both factors contributing to male courtship success when considered together ($\beta_{\text{intensity}} = 0.55$, $P < 0.004$; $\beta_{\text{startle}} = -0.57$, $P < 0.003$; $r^2 = 0.65$, $F_{2,14} = 13.23$, $P < 0.0006$).

Our results indicate that although female satin bowerbirds prefer intensely displaying males, successful males do not always display at maximum intensity — instead, they modulate the intensity of their display in response to female signals, to remain attractive without threatening the females. In satin bowerbirds — and perhaps in other species in which variation in sexually selected traits

has not yet been examined in detail — male courtship success may depend on both an attractive display and the intrinsic ability to modify these in response to female signals.

Gail L. Patricelli*, J. Albert C. Uy*†, Gregory Walsh‡, Gerald Borgia*

Departments of *Biology and ‡Mechanical Engineering, University of Maryland, College Park, Maryland 20742, USA

e-mail: borgia@umail.umd.edu

†Present address: Department of Ecology, Evolution and Marine Biology, University of California, Santa Barbara, California 93106, USA

- Andersson, M. *Sexual Selection* (Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1994).
- Borgia, G. & Presgraves, D. C. *Anim. Behav.* **56**, 1121–1128 (1998).
- Borgia, G. *Am. Sci.* **83**, 542–548 (1995).
- Berglund, A., Bisazza, A. & Pilastro, A. *Biol. J. Linn. Soc.* **58**, 385–389 (1996).
- Borgia, G. in *Sexual Selection and Reproductive Competition in Insects* (eds Blum, M. S. & Blum, N. A.) 27–49 (Academic, New York, 1979).
- Mateos, C. & Carranza, M. *Behav. Ecol. Sociobiol.* **45**, 235–244 (1999).
- Borgia, G. *Emu* **95**, 1–12 (1995).
- Uy, J. A. C., Patricelli, G. L. & Borgia, G. *Proc. R. Soc. Lond. B* **267**, 251–256 (2000).
- Borgia, G. *Anim. Behav.* **33**, 266–271 (1985).

laser technology

Measuring huge magnetic fields

Huge magnetic fields are predicted^{1–4} to exist in the high-density region of plasmas produced during intense laser-matter interaction, near the critical-density surface where most laser absorption occurs, but until now these fields have never been measured. By using pulses focused to extreme intensities to investigate laser-plasma interactions⁵, we have been able to record the highest magnetic fields ever produced in a laboratory — over 340 megagauss — by polarimetry measurements of self-generated laser harmonics.

Because harmonics of the laser are generated at the critical-density surface and subsequently propagate isotropically out of the

dense region⁶, we have found that measuring the final polarization of these harmonics is a powerful way to find out the magnitude of the magnetic fields through which they travel. The use of self-generated laser harmonics is particularly convenient because these are produced at precisely the same time as the magnetic fields are generated and propagate so that their **k** vectors are perpendicular to azimuthal magnetic fields in the plasma — which greatly simplifies data interpretation. In our experiments, we use the propagation properties of lower-order harmonics (that is, the third, fourth and fifth harmonics).

These results were obtained with the Vulcan laser system (wavelength 1.054 μm , pulse energy up to 90 J, pulse duration about 1 picosecond). The beam was *p*-polarized and focused to a maximum intensity of $9 \times 10^{19} \text{ W cm}^{-2}$ onto a thin solid target (0.1–1.0 mm). The polarization com-

ponents of the emitted laser harmonics were measured by using high-dynamic-range, charge-coupled-device arrays as detectors.

When an electromagnetic wave propagates in a magnetized plasma with its **k** vector perpendicular to **B**, the extraordinary wave (*x*-wave; that is, with an electric field vector perpendicular to the magnetic field) can experience cut-offs and resonances (Fig. 1a). Cut-offs occur when the plasma index of refraction is equal to zero, and resonances when the index approaches infinity. The *x*-wave is reflected when it encounters a cut-off and is absorbed in a resonance. For example, the cut-offs for the fifth, fourth and third harmonics occur at 460, 340 and 220 megagauss, respectively, for a density of $n_e = 2.4 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$ (the relativistically corrected critical density). Resonances occur at higher magnetic fields than cut-offs. The ordinary (*o*) wave (with **E** parallel to **B**) is unaffected by the magnetic field — implying that if a field larger than the cut-off field exists in the plasma, then only the ordinary wave is able to propagate to the detector and therefore is the only one observable.

This is what we find for the highest-intensity shots. Figure 1b shows the ratio of *p*-component (*x*-wave) to total emission (*x*-wave plus *o*-wave) for both the third and fourth harmonics for various incident laser intensities. At high intensities, the *x*-wave cut-offs are definitely observed, implying the existence of a minimum magnetic field of 340 megagauss in the plasma; no cut-offs were seen for the fifth harmonic. This indicates that the peak magnetic field is below 460 and above 340 megagauss at intensities of about $9 \times 10^{19} \text{ W cm}^{-2}$. Such fields are more than an order of magnitude larger than any previously observed in the laboratory^{7–9}. These cut-offs were consistently reproducible in our experiments — but only at the highest laser intensities.

The magnitude of the magnetic fields generated in this way could soon approach those needed for testing astrophysical models of neutron stars and white dwarfs¹⁰. M. Tatarakis*, I. Watts*, F. N. Beg*, E. L. Clark*, A. E. Dangor*, A. Gopal*, M. G. Haines*, P. A. Norreys†, U. Wagner†, M.-S. Wei*, M. Zepf*, K. Krushelnick*

*The Blackett Laboratory, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London SW7 2BZ, UK

e-mail: m.tatarakis@ic.ac.uk

†Rutherford Appleton Laboratory, Chilton, Didcot, Oxfordshire OX11 0QX, UK

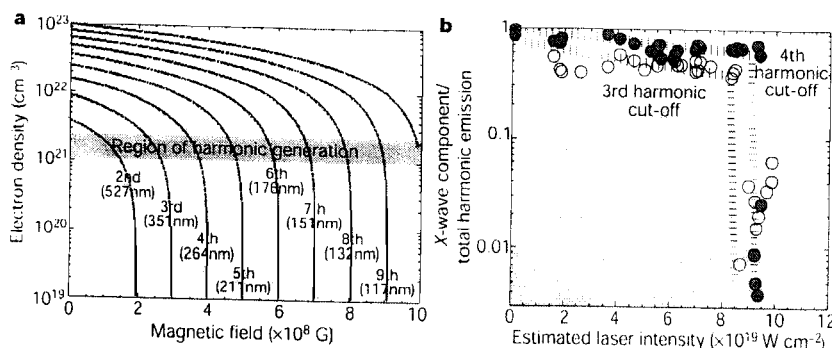


Figure 1 Laboratory measurement of magnetic fields greater than 340 megagauss. **a**, Plot of *x*-wave cut-offs for various harmonics (second, third, and so on) of 1.054- μm radiation in terms of plasma electron density and magnetic field. **b**, *X*-wave/total harmonic emission of third harmonic (hollow circles) and fourth harmonic (filled circles) for a series of laser shots.

- Wilks, S. C. *et al. Phys. Rev. Lett.* **69**, 1383–1386 (1992).
- Pukhov, A. & Meyer-ter-Vehn, J. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3973–3978 (1996).
- Mason, R. J. & Tabak, M. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 524–527 (1998).
- Sudan, R. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3075–3078 (1993).
- Perry, M. D. & Mourou, G. *Science* **264**, 917–924 (1994).
- Norreys, P. A. *et al. Phys. Rev. Lett.* **76**, 1832–1835 (1996).
- Borghesi, M. *et al. Phys. Rev. Lett.* **80**, 5137–5140 (1998).
- Tatarakis, M. *et al. Phys. Rev. Lett.* **81**, 999–1002 (1998).
- Clark, E. L. *et al. Phys. Rev. Lett.* **84**, 670–673 (2000).
- Lai, D. & Salpeter, E. E. *Astrophys. J.* **491**, 270–285 (1997).

6.2.4 (B 4.4节)

阿贝尔(Abel)变换

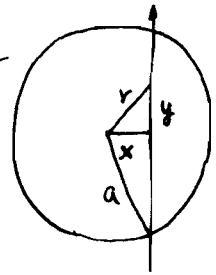
从上一节可以看到,干涉法和偏振法,以及下几章讲的许多其它的分析方法,都有一个共同的特点,它们测量的都是量子量沿通过等量态的本征函数的平均值。提出的问题是如何从可得到的弦测量导出所感兴趣的物理量的局域值。然而,许多等量子体都具有轴对称的特点,而其特征物理量在极坐标中 \$(r, \theta, \phi)\$ 与角度 \$\theta\$ 轴生擒无关。这就使得我们能够通过利用 Abel 变换的已知的数学特征,从弦测量导出径向分布的问题。

现在假设我们有一个轴对称量 \$f(r)\$, 我们得到的测量是弦积分

$$\phi(x) F(x) = \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(r) dy = 2 \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(r) dy$$

把积分变量变为 \$r\$, 则

$$F(x) = 2 \int_x^a f(r) \frac{r dr}{\sqrt{r^2-x^2}}$$



这就是熟知的阿贝尔积分方程, 它的解就是我们所需要的量 \$f(r)\$:

$$\text{§4.7} \quad f(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^a \frac{dF}{dx} \frac{dx}{(x^2-r^2)^{3/2}} \quad (\text{只要当 } r \geq a \text{ 时有 } f(r)=0)$$

这样, 我们就有了一个简单公式, 利用它可以从弦积分测量求得径向分布函数 \$f\$。这个过程称之为 Abel 变换。

在实际情况下, 我们只有有限个测量值 \$F\$, 因此我们定积分变换, 就要求用某种内插形式。此外, 很显然有限的弦测量的测量只能得到有限个 \$f(r)\$ 的信息。因此, 我们必须记住, 如果我们利用内插给出有数值的 \$f(r)\$ 函数, 则对 \$f(r)\$ 函数的许多细节都将与内插公式中固有的做法有关。

许多作者已对具体确定 Abel 变换的方法做了研究, 且有许多现成的计算机程序可用。这里就不作详细介绍了, 有兴趣的读者可参阅有关文献。

$$\Phi_p = \int \frac{\omega_p e^2}{2\omega c} dk = (e\lambda) \int n_e d\lambda$$

$$\alpha = \int \frac{\omega_p e^2 \omega_{ex}}{2\omega^2 c} d\lambda$$

2.4 反射法

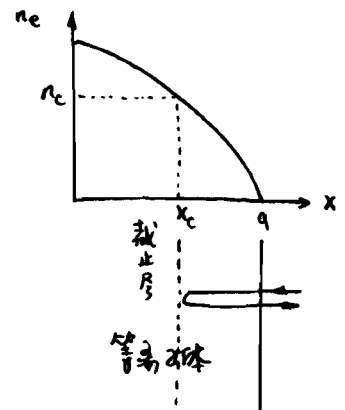
频率为 f 的电磁波在高度单调增(沿波传播方向)的等离子体中传播时,若遇到截止层(即 $n_e = n_c$),波将被截止层反射,返回入射方向传播回去。若测量了反射波,就有办法利用它来测量等离子体高度,这就是所谓反射法。

对于电离层等离子体,电子密度早就用反射雷达测量的,其原理就是反射法。雷达发射的一定频率的电磁波,在电离层中传播时,若遇到截止层,即 $f = f_{pe}$ 时,波就被反射。反射层的位置就由反射脉冲相对于发射脉冲的时间延迟决定(雷达原理)。这样,通过扫频,就测绘出电离层不同高度处的电子密度(当然电离层电子密度随高度分布是单调上升的):

$$\begin{cases} n_e(h) = 1.24 \times 10^{-2} f^2 \quad [m^{-3}] & 1GHz & n_c = 1.24 \times 10^{16} [m^{-3}] \\ h = c \cdot \Delta t / 2 & \end{cases}$$

(这里已假设波在电离层中传播距离为 $2h$ 即往返距离)

对于实验室等离子体,反射上升,也可以用这类反射法测定电子密度分布。所不同的是,由于实验室等离子体尺寸小,及与反射层的距离短,反射信号的时间延迟是限小的(典型的是几 ns),因而测量的不是反射波与入射波间的时间延迟,而是相位差。然而,相位测量通常也是利用相干干涉效应测量的,因而反射法实际上也是干涉法。



其实实验排布如右所示。电磁波由位于等离子体边界上的天线射入等离子体,它在截止层处被反射,并在发射点附近探测该反射波。由此可见,它实际上是迈克尔逊干涉仪的结构,我们测量的是反射波相对于入射波的相位。由于这个相位携带着反射层位置的信息,因而之有办法

测量电子密度分布。但它与反射雷达不同,这个相位差不仅与反射点和发射点间的距离有关,而且还与这段距离中的等离子体折射系数有关,这和干涉仪中的情况一样,它会影响相位延迟。因而在推算反射层位置时,中间必须考虑光路上的等离子体折射系数的变化,故从相位延迟求出反射层的位置不是直接了当的。

一. 相位延迟的计算:

因为反射波是在等离子体折射率截止及电磁波在截止层附近传播, 这时因为 $\mu \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty$, 几何光学近似不适用, 中运用波动方程的方法求解波动方程。

为简单计, 我们假设: (1) 入射波是寻常波; (2) 波传播是一维的。则在等离子体中传播时左满足下述的波动方程:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \mu^2(\omega, x) E = 0 \quad \epsilon = \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2$$

可以证明, 当

$$\frac{\lambda}{2\pi} \left| \frac{d\mu}{dx} \right| \ll 1 \quad \text{或} \quad \frac{|\nabla k|}{k^2} \ll 1, \quad L_n \gg \lambda$$

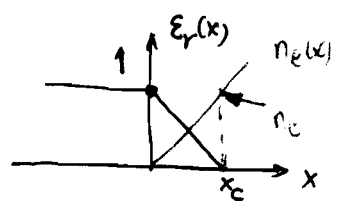
时, 该波动方程有如下的形式解:

$$E(x) = E_0(x) e^{i\phi(x)} \quad \phi(x) = \pm \frac{\omega}{c} \int \mu(x) dx$$

这就是干涉法和偏振法得以应用的基本依据。实际上, 应用时却选择电磁波频率远大于等离子体截止频率, 上述条件一般都满足。

当电磁波在截止层附近传播时, 中运用波动方程。一般情况下, 波动方程必须数值求解。只有几种简单情况下才有精确的解析解。这里我们讨论最简单的一种情况, 即假设: 在截止层附近等离子体介电常数是线性变化的, 即:

$$n_e(x) = n_c(\omega) \frac{x}{x_c}$$



其中 x_c 为截止层的坐标, $n_c(\omega)$ 为波频率为 ω 时的临界截止密度。而介电常数为:

$$\frac{dn_e}{dx} = -\frac{1}{n_c} \frac{dn_c}{dx} = -\frac{1}{x_c}$$

$$\epsilon_r(x) = \mu^2(x) = 1 - \frac{n_e(x)}{n_c} = 1 - \frac{x}{x_c}$$

$$x_c = \left(\frac{1}{n_c} \frac{dn_c}{dx} \right)^{-1}$$

在这种情况下波动方程可改写为:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{x}{x_c}\right) E = 0$$

= (46) (47)

作如下的变量替换: 归一化长度

$$\xi = \left(\frac{\omega^2}{c^2 x_c}\right)^{1/3} (x_c - x) = \left(\frac{\omega}{c} x_c\right)^{2/3} \xi_r(x) \begin{cases} > 0, & \text{当 } x < x_c \text{ 时} \\ = 0, & \text{当 } x = x_c \text{ 时} \\ < 0, & \text{当 } x > x_c \text{ 时} \end{cases}$$

则波动方程就变为:

$$\frac{d^2 E}{d\xi^2} + \xi E = 0 \quad \text{Airy 方程}$$

这是个标准的 Airy 方程, 它的一般解是 Airy 函数 $Ai(\xi)$ 和 $Bi(\xi)$ 的线性组合, 其待定系数由边界条件定: (1) $\xi < 0$ 时, $E(\xi) \rightarrow 0$; (2) $E(\xi)$ 在 $\xi = 0$ 处连续; (3) $\frac{dE}{d\xi}$ 在 $\xi = 0$ 处连续。此外, 也可以利用如下的变量替换:

$$\begin{cases} E(\xi) = \sqrt{\xi} G\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right) \\ \rho = \frac{2}{3}\xi^{3/2} \end{cases} \quad \begin{cases} E(\xi) \equiv \sqrt{\xi} G(\rho) \\ \rho \equiv \frac{2}{3}\xi^{3/2} \end{cases}$$

将 Airy 方程化成如下的 Bessel 方程:

$$\frac{d^2 G}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dG}{d\rho} + \left(1 - \frac{1}{9\rho^2}\right) G = 0 \quad \text{Bessel 方程}$$

利用边界条件后, Bessel 方程的解为:

$$E(\xi) = \begin{cases} A \xi^{1/2} \left[J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right) + J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right) \right] & \xi > 0 \text{ 时} \\ \frac{\sqrt{3}}{\pi} (-\xi)^{1/2} A K_{1/3}\left[\frac{2}{3}(-\xi)^{3/2}\right] & \xi < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz) \quad \text{或} \quad A (-\xi)^{1/2} \left\{ -I_{1/3}\left[\frac{2}{3}(-\xi)^{3/2}\right] + I_{-1/3}\left[\frac{2}{3}(-\xi)^{3/2}\right] \right\} \quad \xi < 0 \text{ 时}$$

由此可见, 由于截止层对入射电磁波的反射, 使得在 $\xi > 0$ (即 $x < x_c$) 处波动方程的解是个驻波解。当 $\xi \gg 1$ 时, 我们可以利用贝塞尔函数的渐近表达式求得近似的解为:

$$E(\xi) \approx \frac{3A}{\sqrt{\pi}} \xi^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{当 } \xi \gg 1 \text{ 时}$$

因而 $x_c = \left| \frac{dE_r}{dx} \right|_{x_c}^{-1} = \left| \frac{dE_r}{dx} \right|_{x_c}^{-1} n_c$

可得上述渐近解适用的条件为:

$$\xi = \left(\frac{\omega}{c} x_c\right)^{2/3} \epsilon_r(x) = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left|\frac{d\epsilon_r}{dx}\right|\right)^{2/3} \epsilon_r(x) \gg 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\epsilon_r^{3/2}}{\left|\frac{d\epsilon_r}{dx}\right|} \gg 1$$

这个不等式与几何光学近似成立的条件

$$\frac{\lambda}{2\pi} \frac{\left|\frac{d\mu}{dx}\right|}{\mu^2} \ll 1 \quad \text{或} \quad \frac{|\nabla k|}{k^2} \ll 1 \quad \lambda \ll L_n$$

是等价的, 因为 $\epsilon_r(x) = \mu^2(x)$ 。这样, 渐近解也具有几何光学解相同的形式, 这是因为相位函数为:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \xi^{3/2} - \frac{\pi}{4} &= \frac{2}{3} \frac{\omega}{c} x_c \epsilon_r^{3/2}(x) - \frac{\pi}{4} = \frac{\omega}{c} \int_x^{x_c} \sqrt{1 - \frac{x}{x_c}} dx - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\omega}{c} \int_x^{x_c} \mu(x) dx - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

由此可见, 与几何光学解的相位函数相比, 它只是多了常数项的相位移 $(-\frac{\pi}{4})$ 。这样, 如果 λ 射波是在 $x=0$ 处射入介质, 则在该处反射波与 λ 射波间的相位移为:

$$\phi = 2 \frac{\omega}{c} \int_0^{x_c} \mu(x) dx - \frac{\pi}{2}$$

这与几何光学解给出的相位移只是 $\frac{\pi}{2}$ 。因为在通常条件下, 有:

$$2 \frac{\omega}{c} \int_0^{x_c} \mu(x) dx \gg \frac{\pi}{2}$$

所以, 其相位移正是很小的。

当截止层附近的电子密度分布不是线性函数时 (即任意函数时), 我们可以在该截止层附近, 对分布函数做泰勒级数展开, 只要下述条件满足:

$$\frac{d^2 n_e(x)}{dx^2} \delta x \ll \frac{dn_e(x)}{dx}$$

则截止层附近的电子密度分布仍可用线性函数近似, 这样, 上述渐近解仍适用。因此, 渐近解适用的条件是:

(1) 几何光学近似成立, 即

$$\xi = \left(\frac{\omega}{c} \left| \frac{d\epsilon_r}{dx} \right|^{-1} \right)^{2/3} \epsilon_r(x) = \left(\frac{\omega}{c} \left| \frac{d\epsilon_r}{dx} \right|^{-1} \right)^{2/3} \left| \frac{d\epsilon_r}{dx} \right|_{x_c} (x_c - x) \gg 1$$

近似, 又取 $\xi = 5$, 渐近解的误差比 $\approx 1\%$ 。这样, 上述渐近解近似表示为:

$$\delta x \equiv |x_c - x| \approx 5 \left[\frac{\lambda_0}{2\pi} \left| \frac{d\epsilon_r}{dx} \right|_{x_c}^{-1/2} \right]^{2/3} = 5 \left[\frac{\lambda_0 L_n}{2\pi} \right]^{2/3}$$

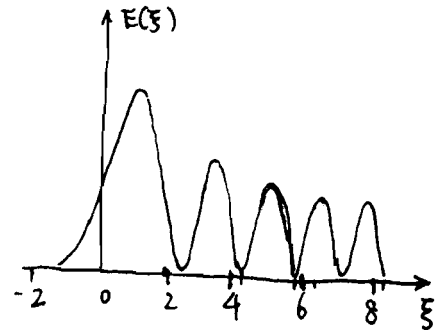
(2) $\epsilon_r(x)$ 的二次近似成立, 即:

$$\left| \frac{d^2 \epsilon_r}{dx^2} \right|_{x_c} \delta x \ll \left| \frac{d\epsilon_r}{dx} \right|_{x_c}$$

将 δx 的表达式代入上式, 得:

$$\left| \frac{d^2 \epsilon_r}{dx^2} \right|_{x_c} \ll \left| \frac{d\epsilon_r}{dx} \right|_{x_c}^{4/3} k_0^{2/3} / 5 \approx \left| \frac{d\epsilon_r}{dx} \right|_{x_c}^{4/3} \lambda_0^{-2/3}$$

波动方程在 ϵ_r 二次近似条件下的精确解 $E(\xi)$ 表示, 在 $\xi > 0$ 处是子波解。而在 $\xi < 0$ 处 (即 $x > x_c$), $E(\xi)$ 近似为指数衰减, 因此波是在有限厚度范围内反射的。由贝塞尔函数的渐近表达式:



$$K_{2/3}(|z|) \propto e^{-|z|}, \quad \text{当 } |z| > 1 \text{ 时}$$

可以求得 $E(\xi)$ 在衰减贝塞尔函数的 e^{-1} 时的特征长度为反射层的有限厚度, 这是反射层的空间取样厚度:

$$|z| = 1, \quad \frac{2}{3} |\xi|^{3/2} = 1$$

$$\Delta x \equiv \left(\frac{c^2}{\omega^2} x_c \right)^{1/3} = \left(\frac{\lambda_0^2 L_n}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

$$x_c = \left| \frac{d\epsilon_r}{d\omega} \right|_{x_c}^{-1} = \left| \frac{1}{n_c} \frac{dn_c}{dx} \right|_{x_c}^{-1}$$

总之,由上述分析可知,当电磁波在介质分界面传播时遇到截止层时,在介质分界面处,反射波与入射波间的相位差可用渐近解表示:

$$\phi(f) = \frac{4\pi f}{c} \int_0^{x_c(f)} \left[1 - \frac{f_{pe}^2(x)}{f^2} \right]^{1/2} dx - \frac{\pi}{2}$$

由此可知,单一频率反射波的相位问题,不能直接得到平均速度,因为截止层的位置是未知的,而这正是反射计的不足之处(与干涉法相比)。但是,如果入射波的能量是扫描的,则从不同频率下的相位延迟的测量,就可以推导出反射层路上的电子速度分布。

从相位延迟表达式,我们可以计算群延迟时间

$$\tau(f) \equiv \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(f)}{df} = \frac{2}{c} \int_0^{x_c(f)} \frac{f}{\sqrt{f^2 - f_{pe}^2(x)}} dx$$

将波数做变量替换:
 $f = \frac{c}{\lambda}, f_{pe} = \frac{c}{\lambda_p}$

可得 $\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{df} = \frac{2}{c} \int_{\lambda}^{\infty} \left(\frac{d\lambda}{c d\lambda_p} \right) \frac{\lambda_p d\lambda_p}{\sqrt{\lambda_p^2 - \lambda^2}}$, 这就是阿贝积分方程

作变量替换: $u(x) \equiv f_{pe}^2(x), v \equiv f^2$ $F(u) = 2 \int_x^{\infty} f(r) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

得: $v^{-1/2} \tau(\sqrt{v}) = \frac{2}{c} \int_0^{x_c(\sqrt{v})} \frac{dx}{\sqrt{v - u(x)}}$

上式两边同乘以 $\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{W-v}}$, 并对 $v < 0$ 积分到 W , 得:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^W \frac{v^{-1/2} \tau(\sqrt{v})}{\sqrt{W-v}} dv = \frac{2}{\pi c} \int_0^W dv \int_0^{x_c(\sqrt{v})} \frac{dx}{\sqrt{W-v} \sqrt{v-u(x)}}$$

对上式右边的积分换序,得:

$$\frac{2}{\pi c} \int_0^W dv \int_0^{x_c(\sqrt{v})} \frac{dx}{\sqrt{W-v} \sqrt{v-u(x)}} = \frac{2}{\pi c} \int_0^{x_c(\sqrt{W})} dx \int_u^W \frac{dv}{\sqrt{W-v} \sqrt{v-u(x)}}$$

作变量替换

$$v = W \cos^2 \theta + u \sin^2 \theta$$

上式的积分得:

$$\frac{2}{\pi c} \int_0^{x_c(\sqrt{W})} dx \int_u^W \frac{dv}{\sqrt{W-v} \sqrt{v-u(x)}} = \frac{2}{c} X_c(\sqrt{W})$$

则有,

$$X_c(\sqrt{W}) = \frac{c}{2\pi} \int_0^W \frac{v^{-\frac{1}{2}} \tau(\sqrt{v})}{\sqrt{W-v}} dv = \frac{c}{\pi} \int_0^{f_{pe}} \frac{\tau(f)}{\sqrt{f_{pe}^2 - f^2}} df$$

$$X_c(f) \\ X_c(f_{pe}) = \frac{c}{2\pi^2} \int_0^{f_{pe}} \frac{d\phi(f)}{df} \frac{df}{\sqrt{f_{pe}^2 - f^2}} = \frac{c}{2\pi^2} \int_0^{\phi} \frac{d\phi'}{df'} \frac{df'}{\sqrt{f_{pe}^2 - f'^2}}$$

这就是相位延迟表达的阿贝尔变换。由观测知, 可求出与截止频率 f_{pe} 相对应的截止点的位置, 令给定入射波频率从 $0 \rightarrow f_{pe}$ 扫描, 可测量每个频率下的 $d\phi/df$ 值。实际上, 入射波频率不可从 $f=0$ 开始扫描, 而是从某一最低频率 f_1 开始扫描。因此, $f < f_1$ 的相位信息丢失了。这可以从微变的密度分布或用积分方法测量的密度分布计算这些分布边界密度分布对积分的贡献。但实际上述分布的边界是可以忽略的, 这是因为对足够低的频率, 入射波是反射是边界附近反射的, $d\phi/df$ 很小, 这对阿贝尔积分的贡献很小, 可忽略。

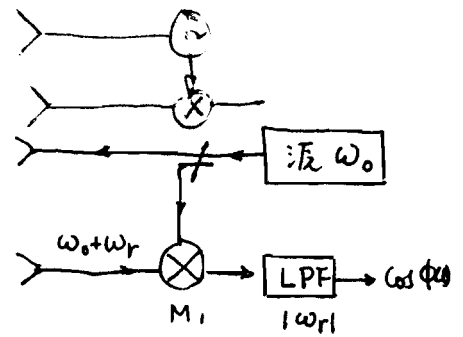
二. 反射计:

1. 简单反射计

这是零拍探测的反射计。接收天线接收的信号为:

$$S(t) = a(t) \cos[\omega_0 t + \phi(t)]$$

即 $a(t)$ (幅度) 和 $\phi(t)$ (相角) 是随时间慢变化的函数 (在 f_0 的时间尺度内)。频率 $\omega_r = d\phi/dt$ 可以认为是反射波瞬时多普勒频率。在没有密度涨落的情况下, $a(t) \approx$ 常数, 则相位延迟携带反射层的信息。在有密度涨落情况下, $a(t)$ 和 $\phi(t)$ 携带涨落的统计性质信息。在如图中所示的零拍探测的条件下, 做带通滤波器 (LPF) 的截止频率, 应保证 $\omega_c > |\omega_r|$ 。这种探测方法的缺点是丢失了相位变化的符号。且此, 它的动态范围 (中心是它的带宽) 受混频 AM 噪声和混频器中的 f^{-1} 噪声的限制。



2. 外差探测反射计

为避免这些缺点, 可采用外差探测的方法。如电路采用另一个微波源做本振, 且频率为 $\omega_1 (\approx \omega_0)$, 且中频频率为 $|\omega_0 - \omega_1| \approx 500 \text{ MHz}$ 。通过两个信号的相位比较, 可以获得 ω_r (即 $\phi(t)$) 的信息。在这种方案中

对补偿微波源的频率跳变和漂移, 可以进一步采取稳频措施, 如普通示, 可在上管气柱上加一稳定的中频波。O2 是晶体控制的稳定的振荡器, 且频率为 ω_2 , 之后是

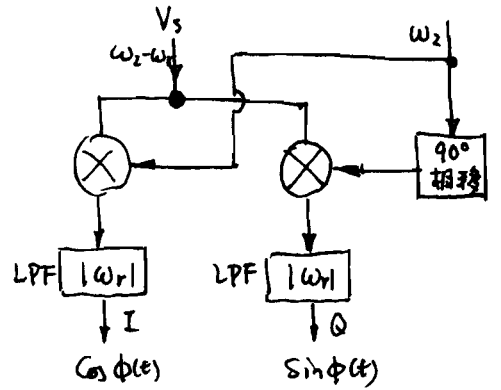
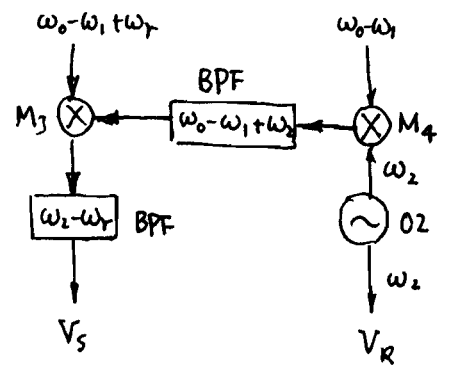
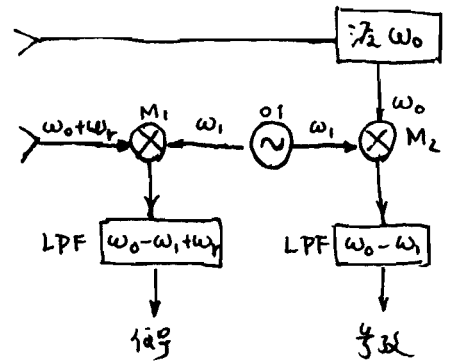
$$|\omega_r| \ll \omega_2 < |\omega_0 - \omega_1|$$

从 M_4 输出的窄带信号 $\omega_0 - \omega_1 + \omega_2$

通过带通滤波器后, 在 M_3 与上管

的信号混频后, 获得频率为 $\omega_2 - \omega_r$ 的信号。

此外, 上述还可进一步改进相位探测方案设计



一般情況下:

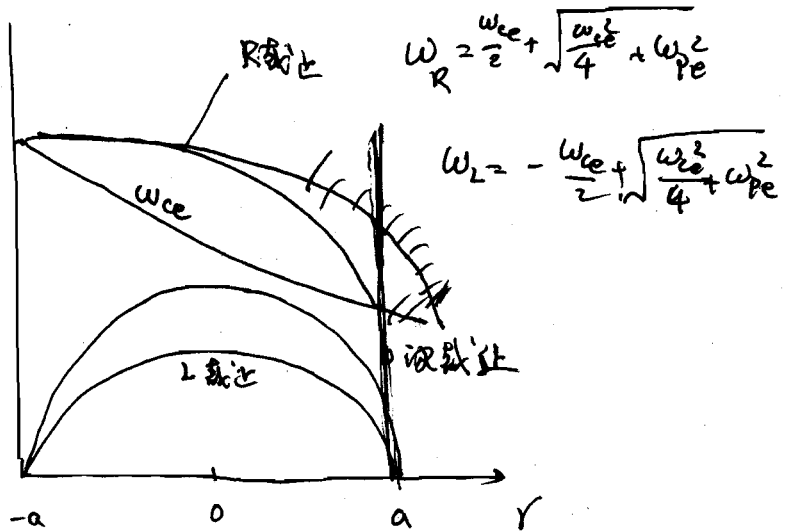
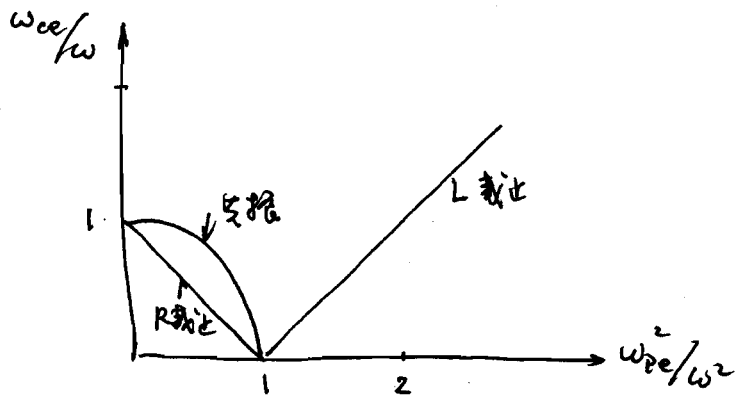
$$\frac{d\phi}{d\omega} = 2 \int_0^{x_c(\omega)} \frac{dx}{u} \quad u \text{ 為群速度}$$

對於 O 波

$$u_o \equiv c\mu_o$$

對於 X 波

$$u_x \equiv c\mu_x \frac{(1-x-y^2)^2}{(1-x-y^2)^2 + xy^2}$$



也的不用，因此式只是粗略的估计。

$$= (47) (55)$$

(3) 反射计的分辨率

$$\text{使得 } \frac{dn_e}{dx} \delta x \ll \frac{dn_e}{dx}$$

中心区：在等离子体中¹⁵， $\frac{dn_e}{dr}$ 趋于零。对于O波传播，可设 ϵ_r 正比地变化。同时 L_n 很大，使波的衰减长度很长，从而使波在中心区没有完全衰减之前又达到传播区，使反射信号的分辨率比较困难。对于X波反射，因为 ϵ_r 与 ω_{ce} 有关，该限制可避免。

极化波：在边区等离子体密度梯度区¹⁶较大，且对O波反射计，极化波的波长也比较长，使得几何光学近似不适用。而且，如果极化是弱的，则从密度梯度的反射也可行的。

电子回旋吸收区：当波频率接近于 ω_{ce} 时（或近谐波频率时），辐射吸收是可发生的。如果波在边区反射后经过吸收区，则反射则是不可行的。

(4) 波长的选择

O波 — 之反射测计最大精度为 97% L_n

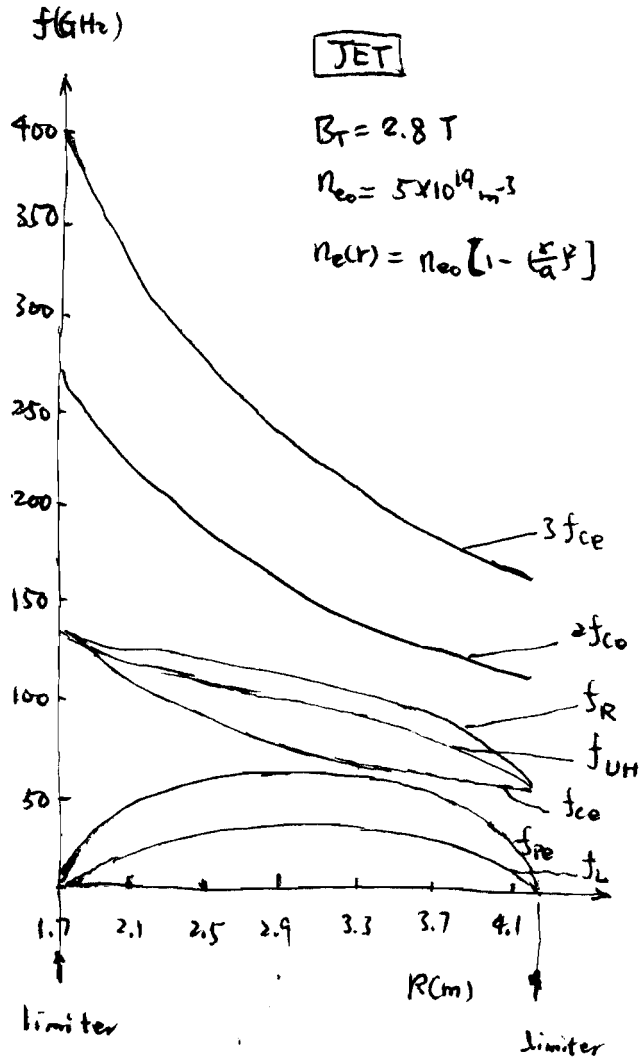
X波 — 之分辨率是极化波的分布

4. 与干涉仪的比较

- (1) 反射计是局部的，因相位测是已知方位 $\mu \rightarrow 0$ 处。干涉仪测是 μ 的微小变化，这个例是不局部性的。
- (2) 反射计是测量临界密度层相对于固定点的位置，因此之分辨率是依赖于整个干涉仪（即从密度分布到中心和幅度不变）。干涉仪则是测量密度分布的变化，对等离子体整体干涉仪不灵敏。
- (3) 反射计为获得局部的密度分布，不需要极精确的相位，而干涉仪需要极精确的相位。

参考文献: PRL 30 (1963), 901-910

RSC 69 (1978), 2201-2211



X선: 3리 2 fce, n_e(r) 분포

O선: 2리 1리 2 fce, n_e(r) 분포

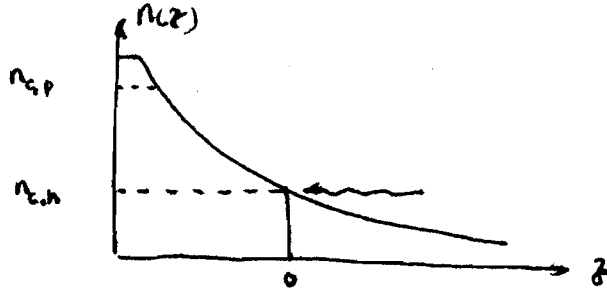
$6 \times 10^{12} \sim 1.5 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$, $22 \text{ GHz} \sim 110 \text{ GHz}$

$$f_R = \frac{f_{ce}}{2} + \sqrt{\frac{f_{ce}^2}{4} + f_{pe}^2}$$

$$f_L = -\frac{f_{ce}}{2} + \sqrt{\frac{f_{ce}^2}{4} + f_{pe}^2}$$

▲ 用于激光等离子体密度测量的干涉仪

等离子体特点: 密度低, 厚度大



$$n_e(z) = n_{e,h} \exp\left(-\frac{8r^2}{L^2}\right) \exp\left(-\frac{z}{l}\right)$$

L: 为横向激光束的半径, $L \sim 100 \mu\text{m}$ 量级

l: 为纵向激光束的特征长度, $l \sim 10 \mu\text{m}$

1. 折射偏转角

$$\psi = \tan^{-1} \left[0.313 \frac{L}{l} \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_h} \right)^2 \right]$$

当 $\lambda_p = \frac{1}{2} \lambda_h$ 时, $\psi \approx 40^\circ$; 当 $\lambda_p = \frac{1}{4} \lambda_h$ 时, $\psi \approx 10^\circ$

折射效应是必须考虑的, 现在用 λ_p 做探针束

2. 临界密度尺附近干涉问题 - 分辨率

$$(\Delta z)_{\text{干涉问题}} \approx \frac{2.5 \lambda \lambda_h^2}{L \lambda_p}$$

若 $\lambda_h = 1.06 \mu\text{m}$, $\lambda_p = 0.265 \mu\text{m}$, $l \approx 10 \mu\text{m}$, $L \approx 100 \mu\text{m}$

$$(\Delta z)_{\text{干涉问题}} \approx 2 \mu\text{m}$$

3. 探针束速度

$$\Delta \tau \leq \frac{(\Delta z)_{\text{干涉问题}}}{4 v_c}$$

v_c 临界速度, 等离子体临界速度

若 $v_c = 2.5 \times 10^4 \text{ m/s}$ 时

$$\Delta \tau \sim 20 \text{ ps}$$