

第三章 电磁波辐射

§3.1 电磁波从自由电子的辐射

一、加速运动电荷的辐射 (电偶极辐射)

当运动电荷的辐射波长 λ 远大于运动电荷的尺度 l 时, 运动电荷的辐射功率 W , 即

$$h\nu \ll \hbar \omega \ll W$$

时, 加速运动电荷的辐射过程可用经典辐射理论处理。根据经典辐射理论, 加速运动电荷产生的辐射电、磁场为:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{R}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left\{ \frac{\hat{S} \times [(\hat{S} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{v}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{S})^3 R'} \right\}_{t'} \\ \vec{B}(\vec{R}, t) = \frac{1}{c} \hat{S} \times \vec{E}(\vec{R}, t) \end{cases}$$



其中 $\hat{S} \equiv \vec{R}'/R'$, 当 $R \gg r$ 时, $R \approx R'$, $\hat{S} \parallel \vec{R}$; t' 为推迟时间

$$t' = t - \frac{R'}{c}$$

这里观察点 P 处单位立体角内的辐射功率为:

$$\begin{aligned} \frac{dP(\vec{R}, t)}{d\Omega} &= R'^2 (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \hat{S} = R'^2 \epsilon_0 |\vec{E}(\vec{R}, t)|^2 \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left\{ \frac{\hat{S} \times [(\hat{S} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{v}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{S})^3} \right\}_{t'}^2 \end{aligned}$$

由此可见: (1) 只有做加速运动的带电粒子才会产生辐射。根据加速度的不同, 辐射可分为两类: 一种是外力作用下产生的辐射, 如回旋辐射及电磁波辐射; 另一类是不受外力作用的辐射, 如自发辐射等。

(2) 任意一个带电粒子都会产生电磁辐射。在等离子体中, 一般离子的辐射远小于电子的辐射, 这也可由上式看出。

二. 电子对电磁波的辐射

假设: (1) 入射波为平面电磁波, 即 $h\nu \ll m_{e0}c^2$

(2) 电子在入射波作用下振荡, 且入射波长 $\lambda \ll r$, 即 $\frac{eE_0}{m_{e0}\omega_0 c} \ll 1$, 入射电磁波对电子运动的影响可忽略, 即 $\frac{eE_0}{m_{e0}\omega_0} \ll v_{te}$

设入射电磁波为平面波, 沿 $\hat{n}$ 传播

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \hat{e} E_{i0} \exp[i(\omega_0 t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})] \quad \hat{e} \equiv \vec{E}_{i0}/E_{i0}$$

$$\vec{B}_i(\vec{r}, t) = \frac{\hat{n} \times \vec{E}_i(\vec{r}, t)}{c} \quad \hat{n} = \vec{k}_i/k_i$$

电子在电磁波辐射中的运动方程为:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_{e0} \vec{v}}{1 - \beta^2} \right) = -e [\vec{E}_i + \vec{v} \times \vec{B}_i]$$

$$\gamma m_{e0} \dot{\vec{v}} + \gamma^3 m_{e0} \vec{v} (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) = -e(\vec{E}_i + \vec{v} \times \vec{B}_i)$$

由此可得电子的加速度为:

$$m_{e0} \gamma^3 (\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}) = -e \vec{E}_i \cdot \vec{v}$$

$$\dot{\vec{v}} = -\frac{e}{m_{e0} \gamma} [\vec{E}_i + \vec{\beta} \times (\hat{n} \times \vec{E}_i) - \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{E}_i)] \exp[i(\omega_0 t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})]$$

其中 $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$

代入电磁波辐射公式, 得电子在入射电磁波作用下产生的辐射电场 (即辐射电场) 为:

$$\vec{E}_s(\vec{r}, t) = \frac{r_e}{R'} (1 - \beta^2)^{3/2} \frac{\hat{s} \times [(\hat{s} - \vec{\beta}) \times (\hat{e} + \vec{\beta} \times (\hat{n} \times \hat{e}) - \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \hat{e}))]}{(1 - \hat{s} \cdot \vec{\beta})^3} E_{i0} \exp[i(\omega_0 t' - \vec{k}_s \cdot \vec{r}(t))]$$

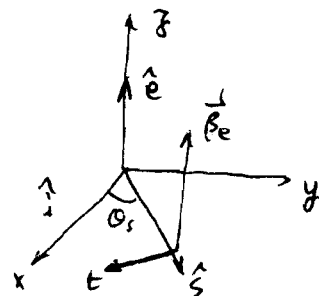
其中 $r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m_{e0} c^2}$ 为电子经典半径

$$\hat{s} = \vec{R}'/R' \approx \vec{R}/R \quad (\text{当 } |R| \gg r \text{ 时})$$

若取 $\hat{s} \perp \hat{e}$ (即 $\hat{s} \cdot \hat{e} = 0$) 和 $\hat{e} = \hat{s} \times \hat{n}$

上式就变为:

即取辐射方向垂直于入射电磁波方向



$$\vec{E}_s(\vec{r}, t) = -\frac{r_e}{R'} \frac{(1-\beta_s^2)^{3/2}}{(1-\beta_s)^3} \left\{ \hat{e} [(1-\beta_i)(1-\beta_s) - \beta_e^2(1-\cos\theta_s)] + \hat{s} [\beta_e\beta_s(1-\cos\theta_s)] \right. \\ \left. - \hat{t} [\beta_e\beta_e(1-\cos\theta_s) - \beta_e(1-\beta_s)\sin\theta_s] \right\} \frac{E_{i0}}{R'} \exp[i(\omega_i t' - \vec{k}_i \cdot \vec{r}(t'))]$$

即 $\beta_s = \vec{\beta} \cdot \hat{s}$, $\beta_e = \vec{\beta} \cdot \hat{e}$, $\beta_i = \vec{\beta} \cdot \hat{i}$, $\beta_t = \vec{\beta} \cdot \hat{t}$, $\hat{s} \cdot \hat{i} = \cos\theta_s$
由此可知散射电场在一般情况下不再平行于入射电场。在散射过程中，
通常是线偏振的散射光，即只选取散射电场平行于 $\hat{e}$ 的分量。
由此可得：

$$\hat{e} \cdot \vec{E}_s(\vec{r}, t) = -\frac{r_e}{R'} \frac{E_{i0}}{(1-\beta_s)^3} \frac{(1-\beta^2)^{3/2} [(1-\beta_i)(1-\beta_s) - \beta_e^2(1-\cos\theta_s)]}{(1-\beta_s)^3} \exp[i(\omega_i t' - \vec{k}_i \cdot \vec{r}(t'))]$$

因为没有限制说明， $E_s(\vec{r}, t)$ 是指在 $\hat{e}$ 方向上的分量。由此
可计算散射波在单位立体角内的平均功率为：

$$\frac{dP_s(\vec{r})}{d\Omega} = \epsilon_0 c R'^2 |E_{s0}|^2 = p_i r_e^2 \frac{(1-\beta^2)(1-\beta_i)^2}{(1-\beta_s)^4} \left[1 - \frac{\beta_e^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)} \right]^2$$

即 $p_i \equiv P_i/A_i$ 为入射电磁波的平均功率密度。
 $= c \epsilon_0 E_{i0}^2$

它是以双原散射波束的切角。推迟时间 t' 为：

$$t' = t - \frac{|\vec{R} - \vec{r}|}{c} \approx t - \frac{R}{c} + \frac{\hat{s} \cdot \vec{r}(t')}{c} \quad \text{若 } |\vec{R}| \gg |\vec{r}| \text{ 时}$$

此外，若双原入射电磁波束对电子运动的影响可忽略，则

$$\vec{r}(t') = \vec{r}(0) + \vec{v} t'$$

代入上式，得：

$$t' = \frac{t - \frac{R}{c} + \frac{\hat{s} \cdot \vec{r}(0)}{c}}{1 - \beta_s}$$

$$\frac{e E_{i0}}{m_e \omega_i} \ll \left(\frac{T_e}{m_e} \right)^{1/2}$$

$$\frac{e E_{i0}}{m_e \omega_i c} \ll 1$$

则散射电场的相角为：

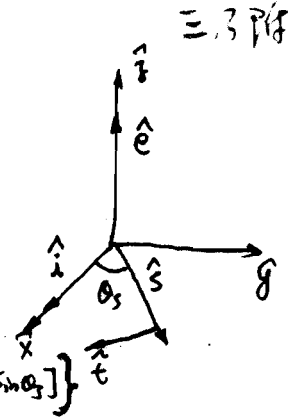
$$\phi(t) = \omega_i t' - \vec{k}_i \cdot \vec{r}(t') = \omega_i \frac{1-\beta_i}{1-\beta_s} \left(t - \frac{R}{c} + \frac{\hat{s} \cdot \vec{r}(0)}{c} \right) - \vec{k}_i \cdot \vec{r}(0) \\ = \omega_s \left(t - \frac{R}{c} \right) + \vec{k} \cdot \vec{r}(0)$$

$$\vec{E}_s(\vec{R}, t) = \frac{r_e}{R'} (1-\beta^2)^{3/2} \frac{\hat{s} \times \{(\hat{s} - \vec{\beta}) \times [\vec{e} + \beta \times (\hat{s} \times \vec{e}) - \beta (\hat{s} \cdot \vec{e})]\}}{(1-\beta_s)^3} E_{i0} \exp\{i[\omega_i t' - \vec{k}_i \cdot \vec{r}(t')]\}$$

▲ 单自由电子对电磁波的散射

$$R \gg r, \quad \boxed{\hat{s} \perp \hat{e}}, \quad \hat{t} \equiv \hat{s} \times \hat{e}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_s(\vec{R}, t) = & -\frac{r_e}{R'} \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{(1-\beta_s)^3} \left\{ \hat{e} [(1-\beta_i)(1-\beta_s) - \beta_e^2 (1-\cos\theta_s)] \right. \\ & + \hat{s} [\beta_e \beta_s (1-\cos\theta_s)] - \hat{t} [\beta_e \beta_t (1-\cos\theta_s) - \beta_e (1-\beta_s) \sin\theta_s] \left. \right\} \\ & \times E_{i0} \exp\{i[\omega_i t' - \vec{k}_i \cdot \vec{r}(t')]\} \end{aligned}$$



即

$$\beta_s \equiv \vec{\beta} \cdot \hat{s}, \quad \beta_i \equiv \vec{\beta} \cdot \hat{i}, \quad \beta_e \equiv \vec{\beta} \cdot \hat{e}, \quad \beta_t \equiv \vec{\beta} \cdot \hat{t}, \quad \cos\theta_s \equiv \hat{i} \cdot \hat{s}$$

取 $\vec{E}_s \parallel \hat{e}$ 分量

$$\hat{e} \cdot \vec{E}_s(\vec{R}, t) = -\frac{r_e}{R'} \frac{(1-\beta^2)^{3/2} (1-\beta_i)}{(1-\beta_s)^2} \left[1 - \frac{\beta_e^2 (1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)} \right] E_{i0} \exp\{i[\omega_i t' - \vec{k}_i \cdot \vec{r}(t')]\}$$

$$E_{s0} = \frac{r_e}{R'} \frac{(1-\beta^2)^{3/2} (1-\beta_i)}{(1-\beta_s)^2} \left[1 - \frac{\beta_e^2 (1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)} \right] E_{i0}$$

$$\frac{dP_s(\vec{R})}{d\Omega} = R'^2 c \epsilon_0 |E_{s0}|^2 = p_i r_e^2 \frac{(1-\beta^2)(1-\beta_i)^2}{(1-\beta_s)^4} \left[1 - \frac{\beta_e^2 (1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)} \right]^2$$

即

$$p_i \equiv \frac{P_i}{A_i} = c \epsilon_0 E_{i0}^2$$

$$\begin{cases} t' = t - \frac{|\vec{R} - \vec{r}|}{c} \simeq t - \frac{R}{c} + \frac{\hat{s} \cdot \vec{r}(t')}{c} \\ \vec{r}(t') = \vec{r}(0) + \vec{v} t' \end{cases}$$

$$t' = \frac{t - \frac{R}{c} + \frac{\hat{s} \cdot \vec{r}(0)}{c}}{1 - \beta_s}$$

当 $\beta \ll 1$ 时, 有

$$\text{即} \quad \begin{cases} \omega_s \approx \omega_i \frac{1-\beta_i}{1-\beta_s} \\ \vec{k} = \vec{k}_s - \vec{k}_i \\ k_s \approx k_i \frac{1-\beta_i}{1-\beta_s} \\ k = (k_s^2 + k_i^2 - 2k_s k_i \cos \theta)^{1/2} \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_s = \omega_i + \vec{k} \cdot \vec{v} \\ \vec{k} = \vec{k}_s - \vec{k}_i \\ k_s \approx k_i \\ k = 2k_i \sin \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad \text{布洛格条件}$$

由此可知:

- (1) 散射波是电子运动产生的电磁波, 当 $\beta \ll 1$ 时, 散射波可视为 $\omega = \vec{k} \cdot \vec{v} = k v_{\parallel}$, 这由电子运动速度在 $\vec{k}$ 方向上的投影分量决定
- (2) ~~当 $\vec{v}$ 和 $\vec{k}$ 同时~~, 散射波的相角由电子的初始运动位置决定

从能量守恒角度看, 散射可视为光子和电子的弹性散射, 由能量守恒和动量守恒 (散射前 $\omega_i, \vec{k}_i, \vec{v}$, 散射后 $\omega_s, \vec{k}_s, \vec{v}'$):

$$\begin{cases} \hbar \omega_i + m_e c^2 = \hbar \omega_s + m_e' c^2 \\ \hbar \vec{k}_i + m_e \vec{v} = \hbar \vec{k}_s + m_e' \vec{v}' \end{cases}$$

$$\text{即} \quad m_e \equiv m_{e0} (1-\beta^2)^{-1/2}, \quad m_e' \equiv m_{e0} (1-\beta'^2)^{-1/2}$$

$$\beta \equiv v/c, \quad \beta' \equiv v'/c$$

由此可得

$$\omega_s = \omega_i \frac{1-\beta_i}{1-\beta_s + \frac{\hbar \omega_i}{m_e c^2} (1-\cos \theta)}$$

此为康普顿散射频率

由此可知, 当 $m_e c^2 \gg \hbar \omega_i$ 时, 就有

$$\omega_s \approx \omega_i \frac{1-\beta_i}{1-\beta_s} \quad \text{即} \quad \beta_i = \frac{\vec{\beta} \cdot \hat{n}}{\beta}$$

$$\beta_s = \frac{\vec{\beta} \cdot \hat{s}}{\beta}$$

因此汤姆逊散射是康普顿散射在低能光子极限下的康普顿散射。

三. 非相对论近似: $\beta \ll 1$

此时有

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{r_0}{R} [\hat{s} \times (\hat{s} \times \hat{e})] E_{i0} \exp[i(\omega_s t + \vec{k} \cdot \vec{r}(0) - k_s R)]$$

$$\frac{dP(\vec{r})}{d\Omega} = \epsilon_0 c R'^2 |\vec{E}_{s0}|^2 = p_i r_e^2 |\hat{s} \times (\hat{s} \times \hat{e})|^2$$

微分辐射截面

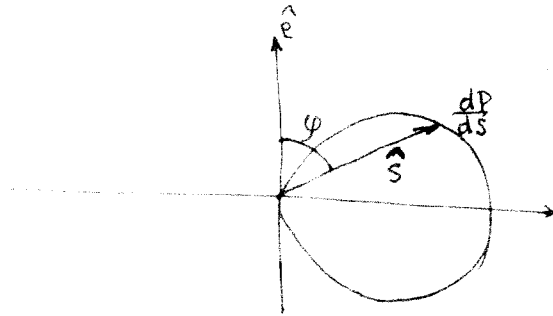
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP}{d\Omega} / p_i = r_e^2 |\hat{s} \times (\hat{s} \times \hat{e})|^2$$

若辐射方向与入射波矢量 $\hat{e}$ 的夹角为 φ 时, 则有 $|\hat{s} \times (\hat{s} \times \hat{e})| = \sin\varphi$

则
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \sin^2\varphi$$

由此可见, 只有当 $\hat{s} \perp \hat{e}$ 时, $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ 才达最大值。因此, 辐射场中, 垂直于辐射平面 (由 $\hat{i}$ 和 $\hat{s}$ 决定的平面) 垂直于 $\hat{e}$ 。辐射截面为:

$$\sigma_T = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 0.665 \times 10^{-28} \text{ m}^2 = 0.665 \text{ Fe}$$



§3.2 低温、无磁等离子体的散射

基本假设: (1). 电子运动速度远小于光速, 即 $\beta \ll 1$, 相对论效应可忽略

(2). $\hbar\omega_i \ll m_e c^2$, 量子效应可忽略

(3). 完全电离等离子体, 电子和离子散射可忽略

(4). 离子对散射的贡献可忽略, 但离子集体运动对电子运动有影响, 从而影响电子的散射谱

(5). $\omega_i \gg \omega_{pe}$, 即等离子体的反射、折射和吸收效应可忽略

(6). 入射电磁波对电子运动轨迹的扰动可忽略, 即 $\frac{eE_0}{m_e \omega_i} \ll \left(\frac{kT_e}{m_e}\right)^{1/2}$

(7). $B_0 = 0$

一. 等离子体对电磁波的散射

由上节知, 当 $\beta \ll 1$ 时, 等离子体中电子在平面电磁波的作用下, 会产生散射电磁波, 其电场为:

$$\vec{E}_s(\vec{r}, t) = \frac{r_e}{R'} \hat{s} \times (\hat{s} \times \hat{e}) E_{i0} \exp[i(\omega_i t' - \vec{k}_s \cdot \vec{r}(t'))]$$

其中
$$t' = t - \frac{R'}{c} + \frac{\hat{s} \cdot \vec{r}(t')}{c}$$

若散射体积 V_s 内有 N 个电子, 其平均密度为 $n_{e0} = N/V_s$, 而电子分布为:

$$n_e(\vec{r}, t) = \sum_j^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_j(t))$$

则由此产生的总电场为:

$$\vec{E}_s(\vec{r}, t) = \frac{r_e}{R'} \hat{s} \times (\hat{s} \times \hat{e}) E_{i0} \int_{V_s} d\vec{r} n_e(\vec{r}, t') \exp[i(\omega_i t' - \vec{k}_s \cdot \vec{r}(t'))]$$

$$= \frac{r_e}{R'} \hat{s} \times (\hat{s} \times \hat{e}) E_{i0} \sum_{j=1}^N \exp[i(\omega_i t' - \vec{k}_s \cdot \vec{r}_j(t'))]$$

$$= \sum_{j=1}^N \vec{E}_{sj}(\vec{r}, t')$$

其中

$$\vec{E}_{sj}(\vec{r}, t) = \frac{r_e}{R'} \hat{s} \times (\hat{s} \times \hat{e}) E_{i0} \exp[i(\omega_i t' - \vec{k}_s \cdot \vec{r}_j(t'))]$$

在 $\vec{r}$ 处单位立体角内的平均散射功率为

由 (3.2) 式, $\vec{E}_s$ 是 N 个电子的散射电场的矢量和, 若 $\vec{E}_{sj}$ 两两相同, 总散射电场强度

$$\begin{aligned}\frac{dP_s}{d\Omega} &= c\epsilon_0 R'^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt |\vec{E}_s(\vec{R}, t)|^2 \\ &= c\epsilon_0 R'^2 \overline{\sum_{j=1}^N \vec{E}_{sj}(\vec{R}, t') \cdot \sum_{l=1}^N \vec{E}_{sl}^*(\vec{R}, t')}\end{aligned}$$

= 辐射功率谱:

单位立体角内的辐射功率为:

$$\frac{dP_s}{d\Omega} = c\epsilon_0 R'^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt |\vec{E}_s(\vec{R}, t)|^2$$

对辐射电场做付里叶变换为:

$$\vec{E}_s(\vec{R}, \omega_s) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{E}_s(\vec{R}, t) e^{-i\omega_s t}$$

则根据付里叶变换的 Parseval 定理:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}_s(\vec{R}, t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}_s(\vec{R}, \omega_s)|^2 d\omega_s \quad (\text{能量守恒})$$

有

$$\frac{dP_s}{d\Omega} = c\epsilon_0 R'^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}_s(\vec{R}, \omega_s)|^2 d\omega_s$$

将上式对 ω_s 求导数, 可得辐射功率谱为:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 P_s(\vec{R}, \omega_s)}{d\Omega d\omega_s} &= c\epsilon_0 R'^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} |\vec{E}_s(\vec{R}, \omega_s)|^2 \\ &= c\epsilon_0 R'^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} dt \vec{E}_s(\vec{R}, t) e^{-i\omega_s t} \right|^2\end{aligned}$$

∴

$$\vec{E}_s(\vec{R}, t) = \frac{r_0}{R'} \hat{s} \times (\hat{s} \times \hat{e}) E_{s0} \int d\vec{r} n_e(\vec{r}, t') e^{i[(\omega_s t' - \vec{k}_s \cdot \vec{r}(t'))]}$$

代入上式得: $t = t' + \frac{R}{c} - \frac{\hat{s} \cdot \vec{r}(t')}{c}$

代入上式得:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{E}_s(\vec{R}, t) e^{-i\omega_s t} = \frac{r_0 E_{s0}}{R'} \int dt e^{-i\omega_s t} \int d\vec{r} n_e(\vec{r}, t') e^{i(\omega_s t' - \vec{k}_s \cdot \vec{r}(t'))}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt E_s(\vec{r}, t) e^{-i\omega_s t}$$

$$\therefore t' = \frac{t - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c} + \frac{\vec{z} \cdot \vec{v}}{c}}{1 - \beta_s} \quad (8)$$

(8)

$$\vec{r}(t') = \vec{r}_0 + \vec{v}t'$$

$$\therefore dt = \frac{dt'}{1 - \beta_s} \quad dt = (1 - \beta_s) dt'$$

$$\begin{aligned} (\vec{r}_2 \hat{s} \perp \vec{e}) &= \frac{r_e E_{s0}}{R'} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d\vec{r} n_e(\vec{r}, t') \exp[-i(\omega t' - \vec{k} \cdot \vec{r} + \vec{k} \cdot \vec{R})] \\ &= \frac{r_e E_{s0}}{R'} n_e(\vec{k}, \omega) \end{aligned}$$

即

$$\omega = \omega_s - \omega_i$$

$$\vec{k} = \vec{k}_s - \vec{k}_i$$

$$n_e(\vec{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\vec{r} n_e(\vec{r}, t) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

则有

$$\begin{aligned} \frac{dP_s(\vec{R}, \omega_s)}{d\Omega d\omega_s} &= r_e^2 \epsilon_0 E_{s0}^2 V_s \lim_{V_s \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T V_s} |n_e(\vec{k}, \omega)|^2 \\ &= r_e^2 \epsilon_0 E_{s0}^2 V_s n_{e0} \lim_{T, V_s \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi V_s T} \frac{|n_e(\vec{k}, \omega)|^2}{n_{e0}} \\ &= p_i r_e^2 n_{e0} V_s \frac{S(\vec{k}, \omega)}{2\pi} \end{aligned}$$

即

$$S(\vec{k}, \omega) = \lim_{V, T \rightarrow \infty} \frac{1}{TV_s} \frac{|n_e(\vec{k}, \omega)|^2}{n_{e0}} \quad [1]$$

为辐射功率谱密度函数，单位为瓦/度/面积

$$p_i = P_i / A_i = \epsilon_0 E_{s0}^2$$

将上式代入(8)式，即可求得某处单位立体角内的总辐射功率为：

$$\frac{dP_s}{d\Omega} = p_i r_e^2 n_{e0} V_s S(\vec{k}) = p_i r_e^2 N S(\vec{k})$$

$$S(\vec{k}) \equiv \int \frac{d\omega}{2\pi} S(\vec{k}, \omega)$$

故在波函数辐射条件下：

$$\frac{dP_s}{d\Omega} = r_e^2 N S(\vec{k})$$

下子可以看见，有一种辐射情况（水相子辐射）

核内电子数

$$2.69 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

$$r_e = 2.82 \times 10^{-15} \text{ m}$$

$$S(k) = 1$$

2)

$$\frac{dS}{d\Omega} = r_e^2 N$$

因为电子自由电子的散射截面 r_e^2 是恒定的，因此即使 $n_{e0} = 20^{25} \text{ m}^{-3}$ 时，总散射平均自由程 $\lambda_s = (r_e^2 n_{e0})^{-1}$ 仍可长达 10 km。因此，在星际介质中，入射电磁波会发生多次散射而 n_e 是恒定的。

三. Thomson 散射公式

在 R 处单位立体角内的平均散射功率

$$\begin{aligned} \frac{dP_s(R)}{d\Omega} &= \epsilon_0 c R'^2 |\vec{E}_s(R, t)|^2 = \epsilon_0 c R'^2 \sum_{j=1}^N \vec{E}_{sj} \cdot \sum_{l=1}^N \vec{E}_{sl}^* \\ &= \epsilon_0 c R'^2 \sum_{j=1}^N |\vec{E}_{sj}|^2 + \epsilon_0 c R'^2 \sum_{j \neq l} \vec{E}_{sj} \cdot \vec{E}_{sl}^* \\ &= \epsilon_0 c R'^2 N |\vec{E}_{sj}|^2 + \epsilon_0 c R'^2 N(N-1) (\vec{E}_{sj} \cdot \vec{E}_{sl}^*)_{j \neq l} \end{aligned}$$

这里已假定总散射体积 V 内所有电子的平均散射电场是近似相干的 ($\because R \gg V^{1/3}$)。第一项为所有电子独立产生的散射功率之代数和；第二项为所有电子散射电场的交叉乘积之和，即干涉项或相干项，它由各散射电场的相位差而定。因对于相同的 ω_s ，散射电场的相位差由电子的初始位置决定，即

$$\phi(t) = \omega_s (t - \frac{R}{c}) + \vec{k} \cdot \vec{r}_j(0)$$

$$\vec{E}_{sj} \cdot \vec{E}_{sl}^* = \left(\frac{r_e}{R'} E_{i0} \right)^2 \exp[i(\vec{r}_l(\omega) - \vec{r}_j(\omega) \cdot \vec{k})]$$

由上式可知，上式第二项反映了不同位置电子间散射电场的相干性对散射功率的贡献。如果电子位置是随机分布的，则第二项的贡献为 0。因为分子中各原子的相干长度为 λ_0 ，如果 $k\lambda_0 \gg 1$ (即 $\lambda \ll \lambda_0$)，则散射电场的相位差很大，而且随电场的传播方向不同而随机很大，从而使得第二项的贡献近为零。在已种情况下，散射功率已由第一项贡献，即入射电场的散射功率的代数和，此时散射称为非相干散射。相反地，当 $k\lambda_0 \ll 1$ 时，这时相位差很小，且随位置是

值也很小, 则电子的散射电荷是部分相干的, 使得第=2项的贡献不予忽略, 这时的散射称为相干散射。因此, 将散射分为两类:

$$\text{散射系数 } \alpha \equiv \frac{1}{k\lambda_0}$$

(1) $k\lambda_0 \gg 1$, 或 $\alpha \ll 1$ 时为非相干散射

上式第=2项(即相干项)可忽略, 总散射功率为电子散射功率之和。这时散射的总电荷的随机相消。

之用参讨论 T_e , n_e 和 $f_e(\omega)$

(2) $k\lambda_0 \leq 1$ 或 $\alpha \geq 1$ 时为相干散射

上式第=2项的贡献不予忽略, 这时散射的总电荷为相干散射。

之又可分两类:

(a) 当第=2项的贡献相同时, 即

$$N |E_{sj}|^2 \sim N(N-1) |E_{sj} \cdot E_{sj}^*| \text{ 时, 为相干相干散射}$$

之用参讨论 T_e 和 n_e 成分

(b) 第=2项的贡献远小于第=1项的贡献, 即

$$N |E_{sj}|^2 \ll N(N-1) |E_{sj} \cdot E_{sj}^*| \text{ 时为超相干散射}$$

之用参讨论 n_e 成分, 不能忽略和忽略

§3.3 非相干散射理论

从上节我们知道了, 当

$$\alpha \equiv \frac{1}{k\lambda_D} = 1.07 \times 10^{-11} \frac{\lambda_i [\mu\text{m}]}{\sin \frac{\theta_i}{2}} \left(\frac{n_e [\text{m}^{-3}]}{T_e [\text{eV}]} \right)^{1/2} \ll 1$$

时, 等离子体对入射电磁波的散射功率就等于散射体积内各个电子的散射功率的代数和, 这类散射称为非相干散射。这类散射的一个重要特征是: 散射功率谱是分布在入射波频率附近的一个频带内, 其谱分布是电子运动的多普勒频移的结果。从单电子散射电场出发:

$$\phi(\mathbf{r}) = \omega_s (t - \frac{R}{c}) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(0) \stackrel{\beta \ll 1}{\approx} (\omega_i + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})(t - \frac{R}{c}) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(0)$$

可知, 散射电场相对于入射波的频移与电子速度 $\mathbf{v}$ 在散射差矢方向上的投影分量 v_k 成正比。作一级近似, 忽略 $\mathbf{r}(0)$ 为常数, 则散射波频率为 $\omega_s = \omega_i + \omega$ 的散射功率是与电子速度分量为 v_k 的电子数成正比, 因此散射频谱的计算比散射功率, 无需解微分方程。

一. $\beta \ll 1$, $B_0 = 0$ 时的非相干散射

单电子的散射电场:

$$\vec{E}_j(\mathbf{r}, t) = -\frac{r_e}{R_i} \hat{e} E_{i0} \exp\{i[\omega_s t - \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(0)]\}$$

$$\text{其中 } \omega_s \equiv \omega_i + \omega = \omega_i + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \quad \mathbf{k} \equiv \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i$$

它在 R 处张角立体角内, 散射频率为 ω_s 的单位频率间隔内的平均散射功率为:

$$\frac{d^2 P}{d\omega d\Omega} = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 \delta(\omega_s - \omega_i - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$$

若散射体积 V_s 内有 N 个电子, 其平均密度为 $n_{e0} = N/V_s$, 且速度分布函数为:

$F(\vec{v}) = n_{e0} f(\vec{v})$, $f(\vec{v})$ 为归一化的速度分布函数

则在 $\vec{R}$ 处单位立体角内的平均辐射功率为

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_R(R, \omega_s)}{dR d\omega_s} &= \frac{P_i}{A_i} r_e^2 \int_{V_s} d\vec{r} \int d\vec{v} F(\vec{v}) \delta(\omega_s - \omega_i - k v_k) \\ &= \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{e0} V_s \int dv_k f(v_k) \delta(\omega - k v_k) = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{e0} V_s \frac{1}{k} f\left(\frac{\omega}{k}\right) \end{aligned}$$

其中 $f(v_k) = \int f(\vec{v}) d\vec{v}_\perp$, $v_k \equiv \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{k}$ 为电子在 $\vec{k}$ 方向上的速度分量

上述表达式也可用另一种方法推导：因为辐射功率在 $\omega_s \rightarrow \omega_s + d\omega_s$ 范围内的辐射功率，是与辐射体体积内速度在 $v_k \rightarrow v_k + dv_k$ 范围内的电子数成正比，而该电子数为： $N(v_k) dv_k = n_{e0} V_s f(v_k) dv_k$

故其平均辐射功率为：

$$\frac{d^2 P_R(R, \omega_s)}{dR d\omega_s} = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 N(v_k) \frac{dv_k}{d\omega_s} = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{e0} V_s \frac{1}{k} f\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

由此可知，辐射功率谱的形状为：

$$\frac{S(\vec{k}, \omega)}{2\pi} = \frac{1}{k} f\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

因为 $\int f\left(\frac{\omega}{k}\right) \frac{d\omega}{k} = 1$ ，故其辐射总功率为：

$$\frac{dP_R(R)}{dR} = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{e0} V_s$$

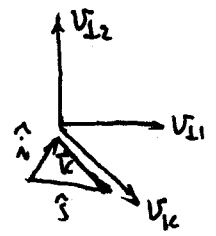
由上述的讨论可知，辐射功率谱反映了电子在 $\vec{k}$ 方向上的速度分布函数，若电子速度分布函数是各向同性的，由辐射功率谱可测得电子速度分布函数。若电子速度分布是各向异性的，则原则上讲，只要测出了三个正交的 $\vec{k}$ 方向上的辐射功率谱，就可测得三维的电子速度分布函数。但实际上辐射功率很小，很难详细地测量辐射功率谱。通常的做法是，假设速度分布函数是麦克斯韦分布，然后把测量结果与一维的麦克斯韦分布做最佳拟合，就可求出电子温度。

相对应的，只要实验上测得了辐射谱，将其画成 $\ln\left(\frac{d^2 P}{dR d\lambda}\right) \sim \lambda^2$ 曲线，其直线斜率

$$S = - \frac{c^2}{4\alpha^2 \lambda_i^2 \sin^2 \frac{\theta_s}{2}} = - \frac{6.2 \times 10^3}{\lambda_i^2 [A] \sin^2 \frac{\theta_s}{2}} \frac{1}{T_e [eV]}$$

当电子速度分布函数为麦克斯韦分布时,

$$f(\vec{v}) = \frac{1}{(\pi a^2)^{3/2}} \exp \left\{ - \left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{a^2} \right) \right\}$$



其中

$$a = \left(\frac{2T_e}{m_e} \right)^{1/2}$$

则其相应的散射功率谱为

$$\frac{d^2 P_s(\vec{r}, \omega)}{d\Omega d\omega} = \frac{P_i}{A_i} n_e^2 n_{00} V_s \frac{1}{\sqrt{\pi} k a} \exp \left\{ - \left(\frac{\omega}{k a} \right)^2 \right\}, \quad \omega \equiv \omega_s - \omega_i$$

此外, 散射功率谱也可用散射波波长移动 λ 表示:

$$\lambda \equiv \lambda_s - \lambda_i, \quad \omega \equiv - \frac{2\pi c}{\lambda_i^2} \lambda \quad (\text{不是电磁波频率, 波长})$$

有:

$$\frac{d^2 P_s(\vec{r}, \lambda)}{d\Omega d\lambda} = \frac{P_i}{A_i} n_e^2 n_{00} V_s \frac{c/a}{2\sqrt{\pi} \lambda_i \sin \frac{\theta_s}{2}} \exp \left\{ - \left(\frac{c\lambda}{2a\lambda_i \sin \frac{\theta_s}{2}} \right)^2 \right\}$$

或

$$\frac{d^2 P_s(\vec{r}, \varepsilon)}{d\Omega d\varepsilon} = \frac{P_i}{A_i} n_e^2 n_{00} V_s \left(\frac{\mu}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{2 \sin \frac{\theta_s}{2}} \exp \left\{ - \frac{\mu \varepsilon^2}{4 \sin^2 \frac{\theta_s}{2}} \right\}$$

其中

$$\varepsilon \equiv \frac{\lambda}{\lambda_i}, \quad \mu \equiv \left(\frac{c}{a} \right)^2$$

由此可见, 麦克斯韦速度分布函数和用波长移动 λ 表示的高斯型散射谱相对应的。只要实验上测得了散射谱, 将其画成 $\ln \left(\frac{d^2 P_s}{d\Omega d\lambda} \right) \sim \lambda^2$ 曲线, 其直线斜率

$$S = - \frac{c^2}{4a^2 \lambda_i^2 \sin^2 \frac{\theta_s}{2}} = - \frac{6.2 \times 10^5}{\lambda_i^2 [A] \sin^2 \frac{\theta_s}{2}} \frac{1}{T_e [eV]}$$

就可求得电子温度 T_e 。

这里应注意, 上述推导包含了两个假设:

1. 在测量时间 T 内, 分布函数没有显著变化, 即是平稳的。局部平衡的等离子体
2. 在测量时间 T 内, 始终有 N 个电子停留在散射体积内, 即意味着 $\beta \rightarrow 0$ 或 $V_s \rightarrow \infty$ 。

二. β 有限, $\beta_0 = 0$ ($\hat{s} \perp \hat{e}$)

单电子散射电场:

$$\vec{E}_s(\vec{r}, t) \cdot \hat{e} = -\frac{r_0}{R'} E_{s0} \frac{(1-\beta_s^2)(1-\beta_n^2)}{(1-\beta_s)^2} \left[1 - \frac{\beta_0^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_n)(1-\beta_s)} \right] \exp\{i\phi(t)\}$$

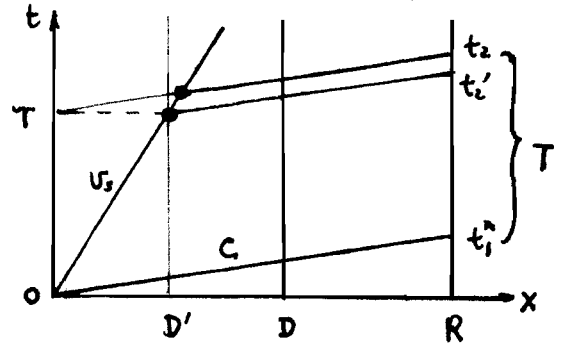
$$\phi(t) \equiv \omega_s \left(t - \frac{R}{c}\right) + \vec{k} \cdot \vec{r}(0), \quad \omega_s \equiv \omega_n \frac{1-\beta_n}{1-\beta_s}$$

在 R 处单位立体角内的散射功率为

$$\frac{d^2 P_s(\vec{r})}{d\Omega} = \frac{P_n}{A_n} r_0^2 \frac{(1-\beta_n^2)(1-\beta_n^2)^2}{(1-\beta_s)^4} \left[1 - \frac{\beta_0^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_n)(1-\beta_s)} \right]^2$$

这里已假定在测量时间 T 内, 电子始终保持在散射体积内。由于 β 有限, 电子在散射方向上飞越散射体积长度 D 的时间 $\tau \equiv D/v_s$, 有可能小于测量时间 T , 这时需考虑其渡越时间对散射功率的修正。

这里用右图说明如何求得有限散射体积对散射功率的修正。假定电子处于平衡态, 即当有一个电子在边界 (距 $x=0$ 处) 离开散射体积时, 即有一个电子同时从这边界进入散射体积, 以保持散射体积内电子数保持不变。



当电子渡越时间 $\tau \equiv D/v_s \gg T$ 时, 在测量时间内, 该电子始终在散射体积内, 因此在测量时间内散射辐射没有中断, 无需修正。而当 $\tau' \equiv D'/v_s < T$ 时, 由于散射辐射传播的时间差 (即 $x=0$ 处发出的辐射与 $x=D'$ 处辐射到达探测器处的时间差) 为:

$$\Delta t = t_2 - t_1'$$

这即为散射辐射 (测量时) 的中断时间, 则探测器测到散射辐射的有效时间份额为:

$$\frac{t_2' - t_1}{t_2 - t_1} = 1 - \frac{\Delta t}{T} = 1 - \frac{D'/c}{D/v_s} = 1 - \frac{v_s}{c} = 1 - \beta_s$$

2) 考虑有限散射体积内正序, 单电子的散射功率为:

$$\frac{d^2 P_s(\vec{R})}{d\Omega} = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 \frac{(1-\beta_s^2)(1-\beta_i^2)^2}{(1-\beta_s)^3} \left[1 - \frac{\beta_0^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)} \right]^2$$

同样地, 等离子体散射体积内有 $N = n_{e0} V_s$ 个电子, 其速度分布为

$$F(\vec{v}) = n_{e0} f(\vec{v})$$

则此单位立体角内的平均散射功率为

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_s(\vec{R}, \omega_s)}{d\Omega d\omega_s} &= \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{e0} V_s \int d\vec{v} f(\vec{v}) \frac{(1-\beta_s^2)(1-\beta_i^2)^2}{(1-\beta_s)^3} \left[1 - \frac{\beta_0^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)} \right]^2 \delta(\omega_s - \omega_i \frac{1-\beta_i}{1-\beta_s}) \\ &= \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{e0} V_s \int d\vec{v} f(\vec{v}) \frac{(1-\beta_s^2)(1-\beta_i^2)^2}{(1-\beta_s)^2} \left[1 - \frac{\beta_0^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)} \right]^2 \delta(\omega - k v_{\parallel}) \end{aligned}$$

这里已采用如下关系式:

$$\delta(\omega_s - \omega_i \frac{1-\beta_i}{1-\beta_s}) = \delta\left(\frac{\omega - k v_{\parallel}}{1-\beta_s}\right) = (1-\beta_s) \delta(\omega - k v_{\parallel})$$

$$\therefore \frac{\omega_s}{\omega_i} = \frac{1-\beta_i}{1-\beta_s} \quad \therefore \left(\frac{1-\beta_i}{1-\beta_s}\right)^2 = \left(\frac{\omega_s}{\omega_i}\right)^2, \text{ 这与 } \beta \text{ 无关, 可提出积分外。}$$

若电子速度分布函数是相对论性麦克斯韦分布函数:

$$f(\vec{\beta}) = \frac{\mu \exp[-2\mu(1-\beta^2)^{1/2}]}{2\pi k_2(2\mu)(1-\beta^2)^{5/2}}$$

$$\text{其中 } \mu \equiv \left(\frac{c}{a}\right)^2, \quad a \equiv \left(\frac{2T_0}{m_{e0}}\right)^{1/2}, \quad k_2 \text{ 为贝塞尔函数}$$

代入上式后, 得:

$$\frac{d^2 P_s(\vec{R}, \omega)}{d\Omega d\omega_s} = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{e0} V_s \left(\frac{\omega_s}{\omega_i}\right)^2 \int d\beta_{\perp} d\beta_{\parallel} f(\vec{\beta}) \delta(\omega - k \beta_{\parallel} c) (1-\beta_s) \left[1 - \frac{\beta_0^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)} \right]^2$$

上式积分号内的因子 $\left[1 - \frac{\beta_0^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)} \right]^2$ 是表示相对论效应引起的散射波的回偏振的程度, 它是大于 1 的。上式的积分一般是很复杂的, 要用数值计算才能得到完全相对论性的散射功率谱。

在最简单的情况下, 取 β 的一次近似, 可得如下的表达式:

7

$$\frac{d^2 P_s(\vec{k}, \omega_s)}{d\Omega d\omega_s} = p_i r_e^2 N \frac{1}{k} f\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

$$\frac{s(\vec{k}, \omega)}{2\pi} = \frac{1}{k} f\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

$$\blacktriangle \beta \ll 1, B_0 = 0$$

$$s(\vec{k}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} s(\vec{k}, \omega) = \int \frac{d\omega}{k} f\left(\frac{\omega}{k}\right) = 1$$

$$\frac{d^2 P_s(\vec{k}, \omega)}{d\Omega d\omega} = \frac{d^2 P_s(\vec{k}, \omega_s)}{d\Omega d\omega_s} = p_i r_e^2 N \frac{1}{\sqrt{\pi} k a} \exp\left\{-\left(\frac{\omega}{ka}\right)^2\right\} \quad \omega \equiv \omega_s - \omega_i$$

$$\frac{d^2 P_s(\vec{k}, \lambda_{si})}{d\Omega d\lambda_{si}} = p_i r_e^2 N \frac{c/a}{2\sqrt{\pi} \lambda_i \sin \frac{\theta_i}{2}} \exp\left\{-\left(\frac{c \lambda_{si}}{2a \lambda_i \sin \frac{\theta_i}{2}}\right)^2\right\} \quad \lambda_{si} \equiv \lambda_s - \lambda_i$$

$$\frac{d^2 P_s(\vec{k}, \varepsilon)}{d\Omega d\varepsilon} = p_i r_e^2 N \left(\frac{\mu}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2 \sin \frac{\theta_i}{2}} \exp\left\{-\frac{\mu \varepsilon^2}{4 \sin^2 \frac{\theta_i}{2}}\right\} \quad \varepsilon \equiv \frac{\lambda_{si}}{\lambda_i} \\ \mu \equiv (c/a)^2$$

$$\blacktriangle \beta \text{有限}, B_0 = 0$$

$$\omega \equiv -\frac{2\pi c}{\lambda_i^2} \lambda_{si}$$

$$\frac{d^2 P_s(\vec{k}, \omega)}{d\Omega d\omega} = p_i r_e^2 N \frac{1}{\sqrt{\pi} k a} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\omega}{\omega_i}\right) \exp\left\{-\left(\frac{\omega}{ka}\right)^2\right\}$$

$$\frac{d^2 P_s(\vec{k}, \lambda_{si})}{d\Omega d\lambda_{si}} = p_i r_e^2 N \frac{c/a}{2\sqrt{\pi} \lambda_i \sin \frac{\theta_i}{2}} \left[1 - \frac{7}{2} \frac{\lambda_{si}}{\lambda_i} + \frac{c^2 \lambda_{si}^3}{4a^2 \lambda_i^3 \sin^2 \frac{\theta_i}{2}}\right] \exp\left\{-\frac{c^2 \lambda_{si}^2}{4a^2 \lambda_i^2 \sin^2 \frac{\theta_i}{2}}\right\}$$

$$\frac{d^2 P_s(\vec{k}, \varepsilon)}{d\Omega d\varepsilon} = p_i r_e^2 N \left(\frac{\mu}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2 \sin \frac{\theta_i}{2}} \left[1 - \frac{7}{2} \varepsilon + \frac{\mu \varepsilon^3}{4 \sin^2 \frac{\theta_i}{2}}\right] \exp\left\{-\frac{\mu \varepsilon^2}{4 \sin^2 \frac{\theta_i}{2}}\right\}$$

傅里叶级数

$$e^{ia \sin \varphi} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_l(a) e^{il\varphi}$$

可得 (散射电场相角)

$$\exp\{i(\omega_s t - \vec{k}_s \cdot \vec{r}(t))\} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_l(k_l \rho_e) \exp\{i[\omega_s t - k_s R + \vec{k} \cdot \vec{r}(t) + l(\varphi_0 + \delta)]\}$$

其中 $\omega_s = \omega_i \frac{1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}_{||}}{1 - \vec{s} \cdot \vec{\beta}_{||}} + l\omega_{ce} = \omega_i + \vec{k} \cdot \vec{v}_{||} + l\omega_{ce}$

$$\vec{k}_s = \frac{\omega_s}{c} \hat{s}, \quad \vec{k} = \vec{k}_s - \vec{k}_i$$

$$\tan \delta = \frac{\vec{k} \cdot \vec{x}}{\vec{k} \cdot \vec{y}}, \quad k_{\perp} = [(\vec{k} \cdot \vec{\beta})^2 + (\vec{k} \cdot \vec{y})^2]^{\frac{1}{2}}$$

电场-散射电场和散射功率分别为:

$$\vec{E}_s(\vec{r}, t) = -\frac{r_0}{R^2} \vec{E}_{i0} \sum_{-\infty}^{\infty} J_l(k_l \rho_e) \exp\{i[\omega_s t - k_s R + \vec{k} \cdot \vec{r}(t) + l(\varphi_0 + \delta)]\}$$

$$\frac{dP_s(\vec{R})}{d\Omega} = \frac{P_i}{A_i} r_0^2 \sum_{-\infty}^{\infty} J_l^2(k_l \rho_e)$$

则在 $\vec{R}$ 处单位立体角内的散射功率为:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P(\vec{R}, \omega_s)}{d\Omega d\omega_s} &= \frac{P_i}{A_i} r_0^2 n_{e0} V_s \int_0^{\omega} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dv_{||} \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp} \frac{1}{(\pi a^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{v_{||}^2 + v_{\perp}^2}{a^2}\right\} \\ &\quad \times \sum_{-\infty}^{\infty} J_l^2(k_l \rho_e) \delta[\omega_s - \omega_i - l\omega_{ce} - \vec{k} \cdot \vec{v}_{||}] \end{aligned}$$

利用恒等式

$$\int_0^{\infty} J_l^2(bt) \exp(-p^2 t^2) t dt = \frac{1}{2p^2} \exp\left(-\frac{b^2}{2p^2}\right) I_l\left(\frac{b^2}{2p^2}\right)$$

$$J_{-l}(x) = (-1)^l J_l(x), \quad I_{-l}(x) = I_l(x)$$

代入上式积分, 得:

$$\frac{d^2 P_0(\vec{k}, \omega_s)}{d\vec{k} d\omega_s} = \frac{P_1}{A_1} r_e^2 n_e V_s \exp\left(-\frac{k_\perp^2 a^2}{2\omega_{ce}^2}\right) \sum_{-\infty}^{\infty} I_l\left(\frac{k_\perp^2 a^2}{2\omega_{ce}^2}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi} k_{\parallel} a} \exp\left\{-\left(\frac{\omega_s - \omega_i - l\omega_{ce}}{k_{\parallel} a}\right)^2\right\}$$

由此可见:

1. 辐射谱是由一系列谱线组成, 谱线谱, 每条谱线都是分立型, 其中心频率为:

$$\omega_s = \omega_i + l\omega_{ce} \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

其中心频率为:

$$\Delta\omega_{e-1} = 2k_{\parallel} a = 2ka \cos\theta_R$$

θ_R 为 $\vec{k}$ 与 $\vec{B}_0$ 的夹角

辐射谱

$$\exp\left(-\frac{k_\perp^2 a^2}{2\omega_{ce}^2}\right) I_l\left(\frac{k_\perp^2 a^2}{2\omega_{ce}^2}\right) \quad \text{或 } I_0$$

只有当

$$u \equiv \left(\frac{k_\perp a}{\omega_{ce}}\right)^2 \ll 1 \quad \text{时, 谱线才不重叠}$$

2. 当 $p \equiv \frac{k_\perp^2 a^2}{2\omega_{ce}^2} \ll 1$ 时 (相当于 $k_\perp \rightarrow 0$)

有 ~~近似~~

$$I_l(p) \approx \frac{(\frac{p}{2})^l}{l!}$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} e^{-p} I_l(p) = \begin{cases} 1 & \text{当 } l=0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } l \neq 0 \text{ 时} \end{cases}$$

则当 $k_\perp \rightarrow 0$ 时, 辐射谱退化为:

$$\frac{d^2 P_0(\vec{k}, \omega_s)}{d\vec{k} d\omega_s} = \frac{P_1}{A_1} r_e^2 n_e V_s \frac{1}{\sqrt{\pi} k_{\parallel} a} \exp\left\{-\left(\frac{\omega}{k_{\parallel} a}\right)^2\right\}$$

这就是 $B_0 = 0$ 的准共振辐射谱, 这是因为当 $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ 时, 辐射观测的是电子在平行于 $\vec{B}_0$ 方向上的随机热运动状态, 这时 B_0 和辐射的观测没有影响。

3. 当 $p \gg 1$ 时 (一般都是这种情况, 除非 $\theta_R \rightarrow 0$)

有:

$$e^{-p} I_l(p) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi p}} \exp\left(-\frac{l^2}{2p}\right)$$

则

$$\frac{d^2 P_0(\vec{k}, \omega_s)}{d\vec{k} d\omega_s} = \frac{P_1}{A_1} r_e^2 n_e V_s \frac{\omega_{ce}}{\pi k_\perp k_{\parallel} a^2} \sum_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left(\frac{\omega - l\omega_{ce}}{k_{\parallel} a}\right)^2\right\} \exp\left\{-\left(\frac{l\omega_{ce}}{k_\perp a}\right)^2\right\}$$

由此可知, 当 $\omega = 2\omega_{ce}$ 时 谱出现分立的峰值, 其峰值幅度包络线成与 $\exp\left\{-\left(\frac{\omega}{k_{11}a}\right)^2\right\}$ 成正比, 该包络线下的

谱线共有 $2\sqrt{2p}$ 条, 是兰斯型谱。

该调制谱的调制度由参数

$$u = \left(\frac{k_{11}a}{\omega_{ce}}\right)^2$$

决定, u 越小, 其调制峰越尖锐, 当 $u \rightarrow 1$ 时, 相邻调制峰重叠, 使调制谱变得平滑而不可分辨。一般要求 $u \leq 0.4$, 才能观察到调制谱。

$$\therefore \alpha = \frac{1}{k_{10}} = \frac{\sqrt{2} \omega_{pe}}{k_a} \quad \therefore k_a = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \omega_{pe}$$

$$2) \quad u = \left(\frac{k_a \cos \theta_B}{\omega_{ce}}\right)^2 = 2 \left(\frac{\omega_{pe} \cos \theta_B}{\alpha \omega_{ce}}\right)^2 \leq 0.4$$

由此得:

$$\cos \theta_B \leq 0.45 \alpha \frac{\omega_{ce}}{\omega_{pe}} = 140 \alpha \frac{B_0[G]}{\sqrt{n_e[\text{cm}^{-3}]}}$$

这个条件很容易满足, 举个例子:

把氩或氖等离子体加于射频: $n_e = 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, $T_e = 1 \text{ keV}$

$\lambda_i = 6943 \text{ \AA}$ (氦离子谱线), $B_0 = 10^4 \text{ G}$, $\theta_s = 90^\circ$

由此得 $\alpha = 0.001$, 则上述观测到的调制谱为:

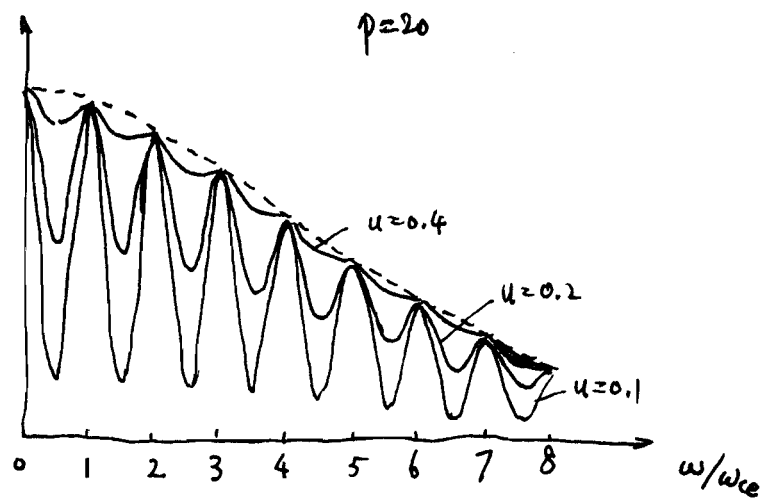
$$\cos \theta_B \leq 4.7 \times 10^{-4}, \text{ 即 } 89.97^\circ \leq \theta_B \leq 90^\circ$$

利用这一特性可以用于测量等离子体中磁场的:

1. 当观测到尖锐的调制谱时, 有 $E \perp B_0$, 确定 B_0 方向

2. 从调制峰的间距 ω_{ce} , 可测定 B_0 的场强。

此外, 在一般散射实验中, $E \perp B_0$ 的条件一般不易满足, 因此在一般情况下弱场时散射谱(非相干)没有影响, 可以忽略或忽略其影响。



§3.4 圆偏振散射 ($B_0 = 0, \beta \ll 1$)

24 §3.2 节, 故你知道定理等来, 对本章射必平译可查用文为:

$$\frac{d^2 R(\vec{k}, \omega_s)}{d\Omega d\omega_s} = \frac{P_i}{A_i} n_e^2 n_{e0} V_s [\hat{s} \times (\hat{s} \times \hat{e})]^2 \frac{S(\vec{k}, \omega)}{2\pi}$$

$$S(\vec{k}, \omega) = \lim_{T, V \rightarrow \infty} \frac{1}{TV} \left\langle \frac{n_e(\vec{k}, \omega) n_e^*(\vec{k}, \omega)}{n_{eq}} \right\rangle$$

$$K \equiv K_S - K_A \quad \omega \equiv \omega_S - \omega_A$$

$$n_e(\vec{k}, \omega) \equiv \iint_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} dt \, n_e(\vec{r}, t) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

上述表达式是普遍的表达式，当 $\beta \ll 1$, $B_0 = 0$ 时是普遍成立的，无论是热胀层，还是由等离子体波和不稳定性引起的热胀层，它都成立。这个公式把求散射功率谱的问题归结为求等离子体密度涨落的自功率谱密度的问题。这里， $\langle \rangle$ 是表示对子集取平均。一般我们却假定：被测的等离子体系统上测量时间间隔 T 内是平稳、各态历经的，则对系平均可以用时间平均近似之。

求 $\textcircled{20}$ $S(k, \omega)$ 的基本出发点是动力学方程, 在碰撞时刻的情况下, 则其基本方程是洛伦兹方程:

$$F_g(\vec{r}, \vec{v}, t) \frac{\partial F_g}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial F_g}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{m_g} \vec{E} \cdot \frac{\partial F_g}{\partial \vec{v}} = 0 \quad q = e, i$$

$$F_q(\vec{r}, \vec{v}, t) = \sum_{j=1}^{N_p} \delta[\vec{r} - \vec{r}_j(t)] \delta[\vec{v} - \vec{v}_j(t)]$$
~~28/5/1988 11/11/88 12/11/88 13/11/88 14/11/88 15/11/88 16/11/88 17/11/88 18/11/88 19/11/88 20/11/88 21/11/88 22/11/88 23/11/88 24/11/88 25/11/88 26/11/88 27/11/88 28/11/88 29/11/88 30/11/88 1/12/88 2/12/88 3/12/88 4/12/88 5/12/88 6/12/88 7/12/88 8/12/88 9/12/88 10/12/88 11/12/88 12/12/88 13/12/88 14/12/88 15/12/88 16/12/88 17/12/88 18/12/88 19/12/88 20/12/88 21/12/88 22/12/88 23/12/88 24/12/88 25/12/88 26/12/88 27/12/88 28/12/88 29/12/88 30/12/88 31/12/88 1/1/89 2/1/89 3/1/89 4/1/89 5/1/89 6/1/89 7/1/89 8/1/89 9/1/89 10/1/89 11/1/89 12/1/89 13/1/89 14/1/89 15/1/89 16/1/89 17/1/89 18/1/89 19/1/89 20/1/89 21/1/89 22/1/89 23/1/89 24/1/89 25/1/89 26/1/89 27/1/89 28/1/89 29/1/89 30/1/89 31/1/89 1/2/89 2/2/89 3/2/89 4/2/89 5/2/89 6/2/89 7/2/89 8/2/89 9/2/89 10/2/89 11/2/89 12/2/89 13/2/89 14/2/89 15/2/89 16/2/89 17/2/89 18/2/89 19/2/89 20/2/89 21/2/89 22/2/89 23/2/89 24/2/89 25/2/89 26/2/89 27/2/89 28/2/89 29/2/89 30/2/89 31/2/89 1/3/89 2/3/89 3/3/89 4/3/89 5/3/89 6/3/89 7/3/89 8/3/89 9/3/89 10/3/89 11/3/89 12/3/89 13/3/89 14/3/89 15/3/89 16/3/89 17/3/89 18/3/89 19/3/89 20/3/89 21/3/89 22/3/89 23/3/89 24/3/89 25/3/89 26/3/89 27/3/89 28/3/89 29/3/89 30/3/89 31/3/89 1/4/89 2/4/89 3/4/89 4/4/89 5/4/89 6/4/89 7/4/89 8/4/89 9/4/89 10/4/89 11/4/89 12/4/89 13/4/89 14/4/89 15/4/89 16/4/89 17/4/89 18/4/89 19/4/89 20/4/89 21/4/89 22/4/89 23/4/89 24/4/89 25/4/89 26/4/89 27/4/89 28/4/89 29/4/89 30/4/89 31/4/89 1/5/89 2/5/89 3/5/89 4/5/89 5/5/89 6/5/89 7/5/89 8/5/89 9/5/89 10/5/89 11/5/89 12/5/89 13/5/89 14/5/89 15/5/89 16/5/89 17/5/89 18/5/89 19/5/89 20/5/89 21/5/89 22/5/89 23/5/89 24/5/89 25/5/89 26/5/89 27/5/89 28/5/89 29/5/89 30/5/89 31/5/89 1/6/89 2/6/89 3/6/89 4/6/89 5/6/89 6/6/89 7/6/89 8/6/89 9/6/89 10/6/89 11/6/89 12/6/89 13/6/89 14/6/89 15/6/89 16/6/89 17/6/89 18/6/89 19/6/89 20/6/89 21/6/89 22/6/89 23/6/89 24/6/89 25/6/89 26/6/89 27/6/89 28/6/89 29/6/89 30/6/89 31/6/89 1/7/89 2/7/89 3/7/89 4/7/89 5/7/89 6/7/89 7/7/89 8/7/89 9/7/89 10/7/89 11/7/89 12/7/89 13/7/89 14/7/89 15/7/89 16/7/89 17/7/89 18/7/89 19/7/89 20/7/89 21/7/89 22/7/89 23/7/89 24/7/89 25/7/89 26/7/89 27/7/89 28/7/89 29/7/89 30/7/89 31/7/89 1/8/89 2/8/89 3/8/89 4/8/89 5/8/89 6/8/89 7/8/89 8/8/89 9/8/89 10/8/89 11/8/89 12/8/89 13/8/89 14/8/89 15/8/89 16/8/89 17/8/89 18/8/89 19/8/89 20/8/89 21/8/89 22/8/89 23/8/89 24/8/89 25/8/89 26/8/89 27/8/89 28/8/89 29/8/89 30/8/89 31/8/89 1/9/89 2/9/89 3/9/89 4/9/89 5/9/89 6/9/89 7/9/89 8/9/89 9/9/89 10/9/89 11/9/89 12/9/89 13/9/89 14/9/89 15/9/89 16/9/89 17/9/89 18/9/89 19/9/89 20/9/89 21/9/89 22/9/89 23/9/89 24/9/89 25/9/89 26/9/89 27/9/89 28/9/89 29/9/89 30/9/89 31/9/89 1/10/89 2/10/89 3/10/89 4/10/89 5/10/89 6/10/89 7/10/89 8/10/89 9/10/89 10/10/89 11/10/89 12/10/89 13/10/89 14/10/89 15/10/89 16/10/89 17/10/89 18/10/89 19/10/89 20/10/89 21/10/89 22/10/89 23/10/89 24/10/89 25/10/89 26/10/89 27/10/89 28/10/89 29/10/89 30/10/89 31/10/89 1/11/89 2/11/89 3/11/89 4/11/89 5/11/89 6/11/89 7/11/89 8/11/89 9/11/89 10/11/89 11/11/89 12/11/89 13/11/89 14/11/89 15/11/89 16/11/89 17/11/89 18/11/89 19/11/89 20/11/89 21/11/89 22/11/89 23/11/89 24/11/89 25/11/89 26/11/89 27/11/89 28/11/89 29/11/89 30/11/89 31/11/89 1/12/89 2/12/89 3/12/89 4/12/89 5/12/89 6/12/89 7/12/89 8/12/89 9/12/89 10/12/89 11/12/89 12/12/89 13/12/89 14/12/89 15/12/89 16/12/89 17/12/89 18/12/89 19/12/89 20/12/89 21/12/89 22/12/89 23/12/89 24/12/89 25/12/89 26/12/89 27/12/89 28/12/89 29/12/89 30/12/89 31/12/89 1/1/90 2/1/90 3/1/90 4/1/90 5/1/90 6/1/90 7/1/90 8/1/90 9/1/90 10/1/90 11/1/90 12/1/90 13/1/90 14/1/90 15/1/90 16/1/90 17/1/90 18/1/90 19/1/90 20/1/90 21/1/90 22/1/90 23/1/90 24/1/90 25/1/90 26/1/90 27/1/90 28/1/90 29/1/90 30/1/90 31/1/90 1/2/90 2/2/90 3/2/90 4/2/90 5/2/90 6/2/90 7/2/90 8/2/90 9/2/90 10/2/90 11/2/90 12/2/90 13/2/90 14/2/90 15/2/90 16/2/90 17/2/90 18/2/90 19/2/90 20/2/90 21/2/90 22/2/90 23/2/90 24/2/90 25/2/90 26/2/90 27/2/90 28/2/90 29/2/90 30/2/90 31/2/90 1/3/90 2/3/90 3/3/90 4/3/90 5/3/90 6/3/90 7/3/90 8/3/90 9/3/90 10/3/90 11/3/90 12/3/90 13/3/90 14/3/90 15/3/90 16/3/90 17/3/90 18/3/90 19/3/90 20/3/90 21/3/90 22/3/90 23/3/90 24/3/90 25/3/90 26/~~

假定粒子的特征时间比微观弛豫时间慢得多, 则分布函数服从以下方程:

$$F_g = F_{g0} + F_{g1}$$

其中 F_{g0} 是表示粒子平均的分布函数, 即粒子的平均态
 F_{g1} 是表示粒子在平均态附近的局部微观弛豫态

对于电子: $g = -e, m_g = m_e, N_g = N, F_{e0} = n_{e0} f_{e0}(\vec{v})$

离子: $g = Ze, m_g = m_i, N_g = N/2, F_{i0} = n_{i0} f_{i0}(\vec{v}), n_{i0} = n_{e0}/2$

$$n_g(\vec{r}, t) = \int d\vec{v} F_g(\vec{r}, \vec{v}, t) = \sum_{j=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_j(t))$$

$$n_g(\vec{r}, t) = n_{g0} + n_{g1}(\vec{r}, t)$$

对于稳定的均匀等离子体, 线性化的方程组为:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_{g1}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial F_{g1}}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{m_g} \vec{E}_1 \cdot \frac{\partial F_{g0}}{\partial \vec{v}} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E}_1 = \sum_g \frac{q}{\epsilon_0} \int d\vec{v} F_{g1}(\vec{r}, \vec{v}, t) \end{cases}$$

这里已假定等离子体宏观电场 $\vec{E}_0 = 0$, 且电场波的电场对带电粒子的运动不造成影响。与等离子体波的动力学方程类似, 对 $F_{g1}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ 取空间的傅里叶变换, 时间的拉普拉斯变换, 代入线性化的方程组中, 求解 $F_{g1}(\vec{k}, \vec{v}, \omega - i\gamma)$, 由下式

$$n_{ig}(\vec{k}, \omega - i\gamma) = \int d\vec{v} F_{ig}(\vec{k}, \vec{v}, \omega - i\gamma)$$

求得 $n_{ig}(\vec{k}, \omega - i\gamma)$, 代入动力学方程组中的表达式并求平均:

$$S(\vec{k}, \omega) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{2\gamma}{V_s} \left\langle \frac{|n_{e1}(\vec{k}, \omega - i\gamma)|^2}{n_{e0}} \right\rangle$$

由此得到 (9.2) 动力学方程组中的表达式。

p. 264 公式 (7.3.22) $f_{ek}(v_k)$ 是麦克斯韦分布

即 $\int f_{ek}(v_k) d^3v_k = n_e$

$$\frac{G_e}{G}$$

②④
22

$$S(\vec{k}, \omega) = \frac{2\pi}{k} \left| \frac{1 + G_i(\vec{k}, \omega)}{G} \right|^2 f_{e0}\left(\frac{\omega}{k}\right) + \frac{2\pi Z}{k} \left| \frac{G_i(\vec{k}, \omega)}{G(\vec{k}, \omega)} \right|^2 f_{i0}\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

$\uparrow \text{即 } f_{e0} \text{ 即 } \omega - \omega_m$

即

$$G(\vec{k}, \omega) = 1 + G_e(\vec{k}, \omega) + G_i(\vec{k}, \omega) \quad \text{从麦克斯韦分布求}$$

$$G_g(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega_{pg}^2}{k^2} \int d\vec{v} \frac{\vec{k} \cdot \partial f_{g0} / \partial \vec{v}}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v} - i\gamma} \quad g = e, i$$

若 $f_{e0}(\vec{v})$ 和 $f_{i0}(\vec{v})$ 是麦克斯韦分布时, 即

$$f_{e0}(v_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}a} e^{-v_k^2/a^2} \quad a \equiv \left(\frac{2T_e}{m_e} \right)^{1/2}$$

$$f_{i0}(v_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}b} e^{-v_k^2/b^2} \quad b \equiv \left(\frac{2T_i}{m_i} \right)^{1/2}$$

2) 若力矩 $\vec{\tau}$ 和 $\vec{E}$ 同向时:

$$f_{j0}(v_k) = \int f_j(\vec{v}) d\vec{v}_\perp \quad \vec{v}_\perp \perp \vec{v}_k$$

$$\alpha = 1.07 \times 10^{-11} \frac{\lambda_i [\mu m]}{\delta n \frac{\omega_i}{\omega_e}} \left(\frac{n_e [cm^{-3}]}{T_e [eV]} \right)^{1/2}$$

$$\lambda_c = 1.11 \times 10^{27} \lambda^{-2} [\mu m] \quad [m^{-3}]$$

① $\lambda_i \approx 0.263 \mu m, \quad n_e = 5 \times 10^{26}, \quad T_e \approx 10 eV$

$$\alpha \approx 2.8$$

$$S(\vec{k}, \omega) = \frac{2\sqrt{\pi}}{ka} \left\{ \frac{A_e}{|\vec{q}|^2} + \frac{A_i}{|\vec{q}|^2} \right\} = S_e(\vec{k}, \omega) + S_i(\vec{k}, \omega)$$

$$A_e = X^{-x_e^2} \left\{ \left[1 + \alpha^2 \frac{ZT_e}{T_i} RW(x_i) \right]^2 + \left[\alpha^2 \frac{ZT_e}{T_i} IW(x_i) \right]^2 \right\}$$

$$A_i = Z \left(\frac{m_i T_e}{m_e T_i} \right)^{1/2} e^{-x_i^2} \left\{ \left[\alpha^2 RW(x_e) \right]^2 + \left[\alpha^2 IW(x_e) \right]^2 \right\}$$

$$|\vec{q}|^2 = \left[1 + \alpha^2 RW(x_e) + \alpha^2 \frac{ZT_e}{T_i} RW(x_i) \right]^2 + \left[\alpha^2 IW(x_e) + \alpha^2 \frac{ZT_e}{T_i} IW(x_i) \right]^2$$

$$x_e \equiv \frac{\omega}{ka}$$

$$a \equiv \left(\frac{2kT_e}{m_e} \right)^{1/2}$$

$$\alpha \equiv \frac{1}{k\lambda_D} = \frac{\sqrt{2}\omega_{pe}}{ka}$$

$$x_i \equiv \frac{\omega}{kb}$$

$$b \equiv \left(\frac{2kT_i}{m_i} \right)^{1/2}$$

$$\frac{x_i}{x_e} = \frac{a}{b} = \left(\frac{T_e m_i}{T_i m_e} \right)^{1/2} \gg 1$$

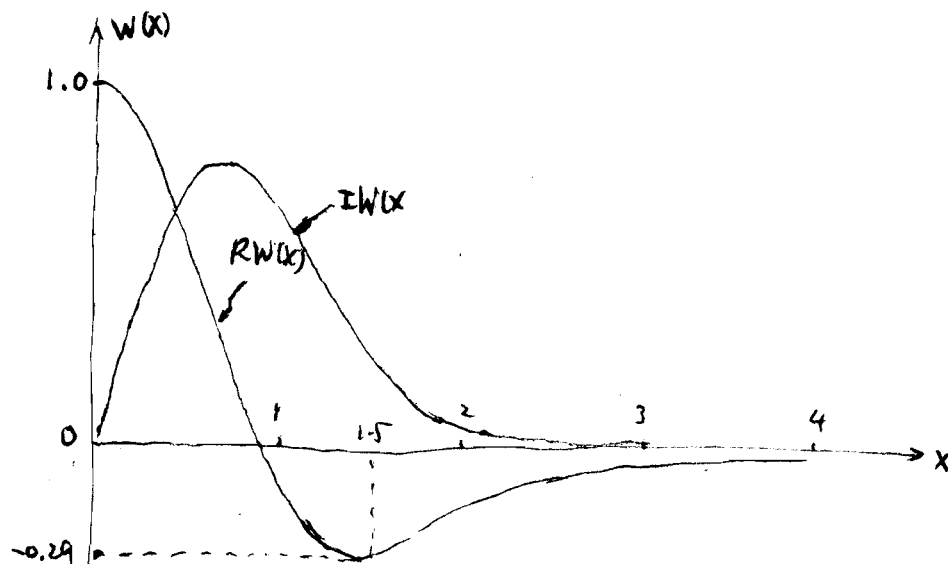
$$RW(x) = 1 - 2x e^{-x^2} \int_0^x dp e^{-p^2}$$

$$IW(x) = \sqrt{\pi} x e^{-x^2}$$

$$W(x) = RW(x) - i IW(x)$$

$$RW(x) \simeq -\frac{1}{2x^2} \left[1 + \frac{3}{2x^2} + \frac{15}{4x^4} + \dots \right] \quad \text{for } x \gg 1$$

$$RW(x) \simeq 1 - 2x^2 \left[1 - \frac{2x^2}{3} + \frac{4x^4}{15} - \dots \right] \quad \text{for } x < 1$$



1. 当 $\alpha \ll 1$ 时有

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} A_e = e^{-x_e^2}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} A_i = 0$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} |G|^2 = 1$$

$$\therefore S(\vec{k}, \omega) = \frac{2\sqrt{\pi}}{ka} e^{-(\frac{\omega}{ka})^2}$$

$$\frac{S(\vec{k}, \omega)}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}ka} \exp\left[-\left(\frac{\omega}{ka}\right)^2\right]$$

$$\frac{d^2 P(\vec{k}, \omega)}{d\omega d\omega} = p_i v_e^2 N \frac{S(\vec{k}, \omega)}{2\pi} = p_i v_e^2 N \frac{1}{\sqrt{\pi}ka} \exp\left[-\left(\frac{\omega}{ka}\right)^2\right]$$

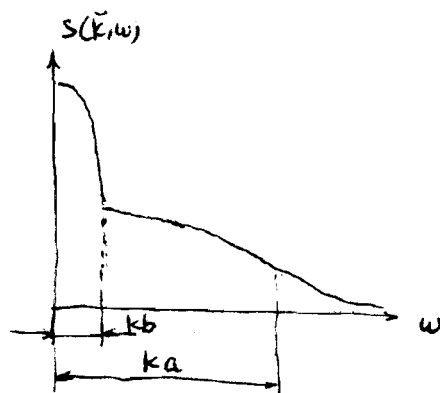
这就是 $\beta \ll 1$, $B_0 = 0$ 时的非相干散射谱。所以, 非相干散射谱是相干散射谱在 $\alpha \ll 1$ 时的极限。

2. 一般的散射谱形状

中间又而窄的部分是 $S_i(\vec{k}, \omega)$ 的贡献, 其特征谱宽为 kb , 它是屏蔽离子的电子运动对散射的贡献, 这反映了电子在离子做集体运动时的特征。

而旁边低而宽的部分是 $S_e(\vec{k}, \omega)$ 的贡献, 它是电子对集体屏蔽对散射的贡献。

电子的集体屏蔽效应上是通过排斥电子和吸引离子而实现的, 因此包含了因子 $\frac{ZT_e}{T_i} \alpha^2 RW(\alpha_i)$ 和 $\frac{ZT_e}{T_i} \alpha^2 IW(\alpha_i)$ 。当 $\alpha \ll 1$ 时 $x_e \approx 1$, $x_i \gg 1$, 这时 $RW(\alpha_i)$ 和 $IW(\alpha_i) \rightarrow 0$, 这是因为离子对电子的屏蔽效应可忽略, 这时电子的集体屏蔽效应是通过排斥电子而实现的。



3. 共振共振情况: $x_e \approx 1$, $x_i \gg 1$

这时

$$\lim_{x_i \rightarrow \infty} A_e = \exp[-x_e^2]$$

$$\lim_{x_i \rightarrow \infty} A_i = 0$$

$$\lim_{x_i \rightarrow \infty} |G|^2 = |1 + \alpha^2 W(\alpha_e)|^2$$

故

$$S(\vec{k}, \omega) = \frac{2\sqrt{\pi}}{ka} \left| \frac{1}{1 + \alpha^2 W(\alpha_e)} \right|^2 \exp(-x_e^2)$$

$S(\omega)$ 达共振 (即极大) 的条件是: $|1 + \alpha^2 W(x_e)|^2$ 达极小
 因 $IW(x_e) > 0$, $RW(x_e)$ 由正变为负, 故共振条件变为:

$$1 + \alpha^2 RW(x_e) = 0$$

即 $RW(x_e) = -\alpha^{-2}$ 共振条件与 α 值有关

因 $RW(x)$ 在 $x=1.5$ 处有一极小值 $RW(x)|_{\min} = -0.29$, 因有:

(1) 当 $\alpha < \frac{1}{\sqrt{RW(x)|_{\min}}} = 1.86$ 时, $RW(x)$ 无根, 不发生共振

(2) 当 $\alpha = 1.86$ 时, $RW(x)$ 有一重根, $x=1.5$, 这时 $IW(x_e)$ 极大, 共振最弱

(3) 当 $\alpha > 1.86$ 时, $RW(x)$ 有两实根, 大根 $x > 1.5$, 随 α 增大而增大。若 x_{e0} 大根 $x_{e0} \gg 1$ (相当于 $\alpha \gg 1$), 则 $IW(x_{e0}) \rightarrow 0$, 这相当于波的相速度远大于电子的平均热运动速度, 电子中部逆阻效应之很小, 因而有强的共振。

当 $x_e \gg 1$ 时, $RW(x_e)$ 有渐近表达式

$$RW(x_e) = -\frac{1}{2x_e^2} \left[1 + \frac{3}{2x_e^2} + \frac{15}{4x_e^4} + \dots \right]$$

由 $RW(x_e) = -\alpha^{-2}$

$$\alpha^2 = \frac{1}{k^2 \lambda_D^2} = \frac{2k_{Te}^2}{k^2 \alpha^2}, \quad \frac{\alpha^2}{x_e^2} = \frac{2\omega_{pe}^2}{\omega^2} \approx 2$$

可求得大共振根的位置为

$$x_{e0}^2 \approx \frac{1}{2}(\alpha^2 + 3) \implies \omega_0^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{3kT_e}{m_e} k^2$$

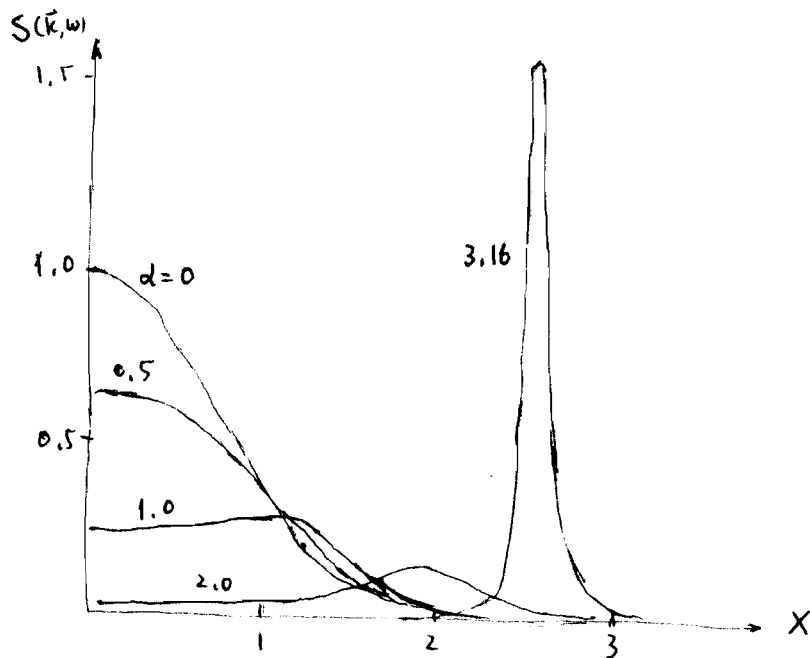
这就是 λ 比 λ_D 大很多的共振条件下, 纵向电子等离子体波的 Bohm-Gross 色散关系。即当 $\alpha \gg 1$ 时, 在 $\omega \equiv \omega_r - \omega_i \approx \omega_0$ 处有尖锐的共振峰, 这正如微波从电子等离子体波散射的共振。

$$\therefore \lambda_D = \frac{a}{\sqrt{2}\omega_{pe}}$$

$$\alpha^{-1} \equiv k\lambda_D = \frac{ka}{\sqrt{2}\omega_{pe}} \ll 1$$

即 $\frac{a}{\sqrt{2}} \ll \frac{\omega_{pe}}{k}$

电子热运动速度远大于电子等离子体波的相速度



4. 低能区情况 $X_i \approx 1$, $X_e \ll 1$

$$\lim_{X_e \rightarrow 0} A_e = \left[1 + \alpha^2 \frac{ZT_e}{T_i} RW(X_i) \right]^2 + \left[\alpha^2 IW(X_i) \frac{ZT_e}{T_i} \right]^2$$

$$\lim_{X_e \rightarrow 0} A_i = Z \left(\frac{m_i T_e}{m_e T_i} \right)^{1/2} e^{-X_i^2} \alpha^2$$

$$\lim_{X_e \rightarrow 0} |G|^2 = \left[1 + \alpha^2 \frac{ZT_e}{T_i} RW(X_i) \right]^2 + \left[\alpha^2 \frac{ZT_e}{T_i} IW(X_i) \right]^2$$

类似地, $S(k, \omega)$ 的低能区情况为

$$1 + \alpha^2 + \alpha^2 \frac{ZT_e}{T_i} RW(X_i) = 0$$

或

$$1 + \beta^2 RW(X_i) = 0$$

$$\beta^2 \equiv \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \frac{ZT_e}{T_i}$$

$$(\alpha \gg 1, \frac{ZT_e}{T_i} \gg 1)$$

当 $\beta^2 \gg 1$ 时, 有近似解 (此时 $X_{i0} \gg 1$), 其近似值为

$$X_{i0}^2 = \frac{1}{2} (\beta^2 + 3)$$

- 一般情况下, $\gamma = 1 + 2/N$
N 为自由电子数

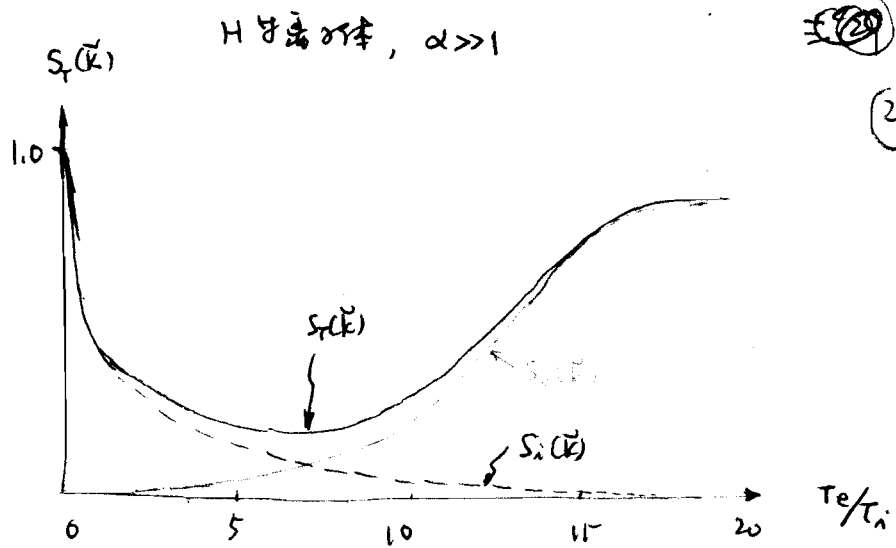
$$\bar{\omega}^2 = k^2 \left[\frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \frac{ZT_e}{m_i} + \frac{3T_i}{m_i} \right] \approx k^2 \left[\frac{ZkT_e + 3T_i}{m_i} \right]$$

这对应于 $\lambda \gg \lambda_0$ 时离子声波的色散关系。

电子和离子的相对贡献由 $A_e > A_i$ 或 $A_e < A_i$ 决定。

当 $\frac{ZT_e}{T_i} \approx 1$ 时, 主要贡献是离子项。

当 $\frac{ZT_e}{T_i} \gg 1$ 时, 主要贡献是电子项。



(27)

5. 屏蔽子: $ZT_e \neq T_i$ 时, 屏蔽子是如何变化的

多 $ZT_e \approx T_i$ 时, 屏蔽子近似地有

$$S_T(k) = \frac{1}{1+\alpha^2} + \frac{Z\alpha^4}{(1+\alpha^2)[1+\alpha^2 + \alpha^2 \frac{ZT_e}{T_i}]}$$

(1) $\alpha \rightarrow 0$ 时
 $S_T(k) \rightarrow 1$

(2) $\alpha \rightarrow \infty$ 时
 $S_T(k) \approx \frac{Z}{1+2T_e/T_i}$

其中第一项为电子项, 第二项为离子项。

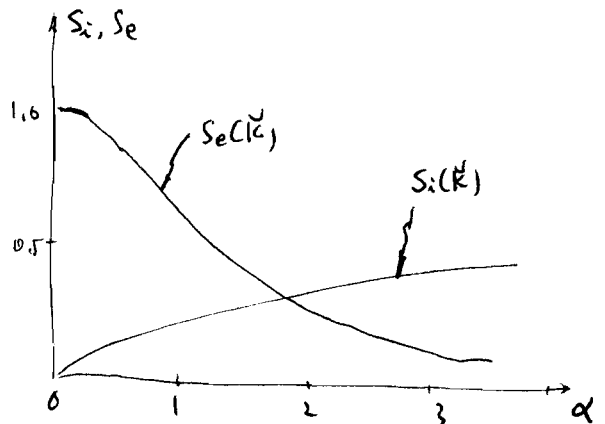
由此可知:

1) $S_T(k) \approx S_e(k) = 1$

当 $\alpha \ll 1$ 时

2) $S_T(k) \approx S_i(k) = \frac{Z}{1+2T_e/T_i}$

当 $\alpha \gg 1$ 时



6. 当离子和电子相对于主量子数 n 有漂移运动时

$$X_i \equiv \frac{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_{di}}{k b}$$

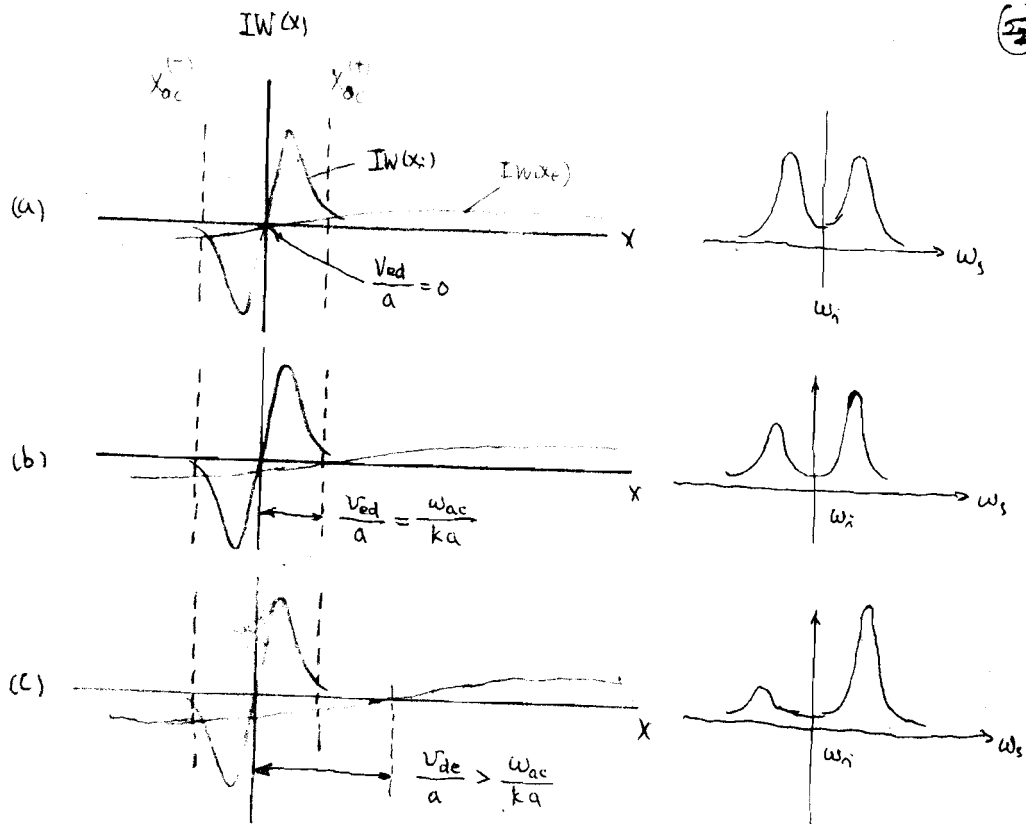
$$X_e \equiv \frac{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_{de}}{k a}$$

阻抗场: $\alpha^2 IW(x_e) + d^2 \frac{2Te}{T_i} IW(x_i)$

$X_e = \frac{\omega}{ka}$

$X_i = \frac{\omega}{kb}$

(28)



(a) $\frac{V_{ed}}{a} = 0$, 两个传播方向的高频波的电阻抗相等, 而阻抗相等

(b) $\frac{V_{ed}}{a} = \frac{\omega_{ac}}{ka}$, 与电子运动方向 ^{方向传播} 同向的高频波的电阻抗相等, 与电子运动方向反方向传播的高频波电 ^{方向} 阻抗相等。由阻抗相等可知, 同向传播的 IAW 阻抗相等, 反方向传播的 IAW 阻抗相等。

7. 高阻. 又高阻的情况: 量子效应 (对于高阻且低能)

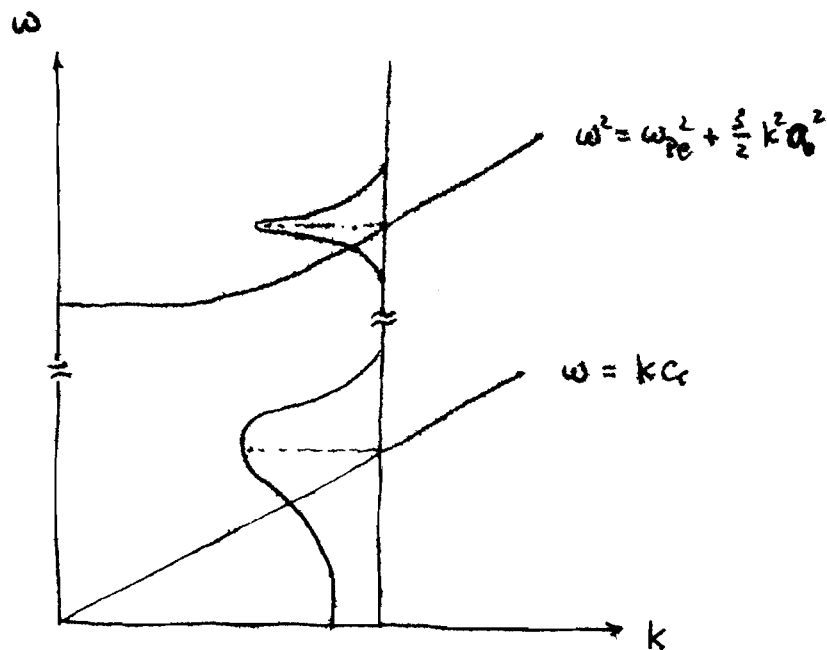
$$S(k, \omega) = \frac{2\pi}{k} \left| \frac{1+G_e}{G} \right|^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\omega}{\omega_p} \right) f_{eo} \left(\frac{\omega}{k} \right) \\ + \frac{2\pi Z}{k} \left| \frac{G_e}{G} \right|^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\omega}{\omega_p} \right) f_{io} \left(\frac{\omega}{k} \right)$$

8. 量子效应

$$S(k, \omega) = \frac{2\pi}{k} \left| \frac{1+\sum G_i}{G} \right|^2 f_{eo} \left(\frac{\omega}{k} \right) \\ + \frac{2\pi}{k} \left| \frac{G_e}{G} \right|^2 \sum \frac{Z^2 n_{io}}{n_{eo}} f_{io} \left(\frac{\omega}{k} \right), \quad Z_{eff} \equiv \frac{\sum Z^2 n_{io}}{n_{eo}}$$

$$G = 1 + G_e + \sum G_i$$

这时, 量子效应可以显著地改变反射谱的形状, 因此它对于用于测量量子效应或 Z_{eff} 。



$$\alpha = 1.07 \times 10^{-11} \frac{\lambda_i [\mu\text{m}]}{\sin \theta_{s/2}} \left(\frac{n_e [\text{cm}^{-3}]}{T_e [\text{eV}]} \right)^{1/2}$$

给定参数 $n_e = 2 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$

$$T_e = 2 \text{ keV}$$

$$Z = 45$$

$$\lambda_i = 0.5266 \mu\text{m}$$

$$\theta_s = 90^\circ$$

$$k = 2k_i \sin \frac{\theta_s}{2} = 1.7 \times 10^5 \text{ cm}^{-1} \Rightarrow \text{决定散射电波的波长}$$

$$\alpha = 2.5$$

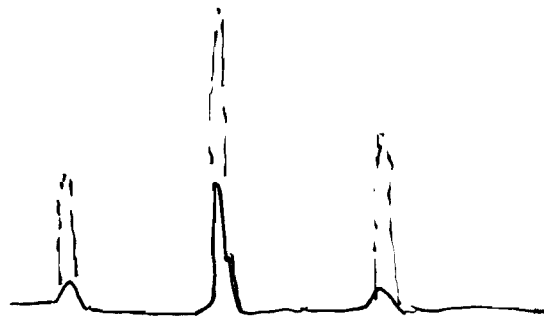
$$C_s \approx \sqrt{\frac{Z T_e}{m_i}} = 2.1 \times 10^7 \text{ cm/s}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{IAW} = k C_s = 3.6 \times 10^{12} \text{ s}^{-1} \\ \lambda_{si, IAW} \approx 5.3 \times 10^{-4} \mu\text{m} \approx 5.3 \text{ \AA} \end{array} \right.$$

$$\omega_{EPW} \approx \omega_{pe} = 8.0 \times 10^{14}$$

$$\lambda_{si, EPW}$$

$$\lambda_{si, EPW} \approx 1.2 \times 10^{-1} \mu\text{m} \approx 1200 \text{ \AA}$$



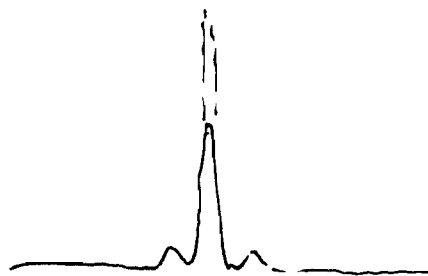
$$n_c$$



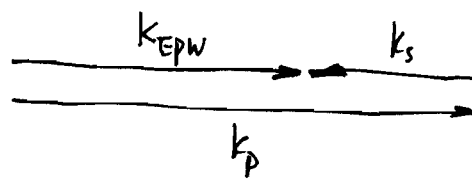
$$\frac{1}{4}n_c$$



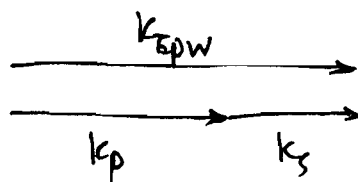
$$n_e < \frac{1}{4}n_c$$



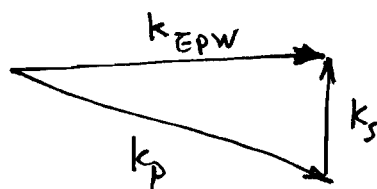
$$n_e < \frac{1}{4}n_c$$



$\frac{1}{4} \rightarrow$ SRS (Stimulated Raman Scattering)



$\frac{1}{2} \rightarrow$ SRS



$1 \rightarrow$ SRS

§3.5 相干散射理论 + 散射实验

$$\alpha \equiv 1.07 \times 10^{-11} \frac{\lambda_i [\mu\text{m}]}{\sin \frac{\theta_s}{2}} \left(\frac{n_e [\text{m}^{-3}]}{kT_e [\text{eV}]} \right)^{1/2}$$

~~3.5~~ (30)

3.5 超热相干散射理论 相干散射与散射的相干探测

由前述知, 所谓超热涨落, 是由于等离子体集体运动 (即等离子体静电波和静电不稳定性) 所引起的密度涨落, 其涨落幅度可远超过相涨落水平 ($\sqrt{N_k}$)。而通过相干散射测量, 可以测得散射波密度涨落 $S(k, \omega) = \lim_{V, T \rightarrow \infty} \frac{1}{VT} \langle |n_e(k, \omega)|^2 \rangle$, 由此可以得到由密度涨落谱 $n_e(k, \omega)$ 。由于被测的波数是由散射几何决定的, 即 $k = [k_s^2 + k_i^2 - 2k_s k_i \cos \theta_s]^{1/2}$, 当 $k_i \approx k_s$ 时, $k = 2k_s \sin \frac{\theta_s}{2}$, 由散射角的扫描, 可获得不同波数下的涨落谱 $n_e(k, \omega)$ 。这样, 通过相干散射测量, 可以获得有关波和不稳定性的大部分或全部信息。因而超热相干散射是研究等离子体静电波和静电不稳定性的有力工具。

由于超热相干散射所研究的对象是等离子体波和不稳定性, 而非相干散射所研究的是小尺度范围内的内禀密度涨落, 这就使得超热相干散射理论和实验处理上与非相干散射有一些差别。因而我们在此将进一步发展超热相干散射理论和实验所需处理的若干问题。

例证 $\Delta\lambda = 38.8 \sqrt{T_e [\text{eV}]} \quad [\lambda_i = 6943 \text{ \AA}, \theta_s = 90^\circ]$

1. 散射体积有限, 需要发展入射波电场在横截面上的分布

我们注意到, 由于非相干散射所研究的涨落波长很短, $\lambda \ll \lambda_0$, 它与散射体积的尺度相比是十分小的。例如, 红宝石激光 90° 散射, 其测得的涨落波长为 $\lambda = \frac{\lambda_i}{2 \sin \frac{\theta_s}{2}} = 0.49 \mu\text{m}$, 很显然, 它与入射波的光斑半径 (1mm 量级) 相比是很小的, 是可以认为散射体积的尺度是无限大的。因而, 在非相干散射理论中, 可以把散射体积认为是无限大的, 且可以无沿发展入射波电场在横截面上的分布。然而, 在超热相干散射中, 波的研究对象是等离子体中波的集体运动现象, 即 $\lambda \geq \lambda_0$, 这时其波长可与入射波电场在横截面上相比较。因而, 在超热相干散射理论中, 必须发展有限散射体积

(续下页)

$\omega_f = 10^9 \text{ Hz}$
 $\Delta\lambda = 1.6 \times 10^{-4} \text{ \AA}$

$k = 2k_s \sin \frac{\theta_s}{2} = 1.28 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$
 $\Delta k = \frac{\Delta n}{0.1} = 31.4 \text{ cm}^{-1}$
 $\frac{\Delta k}{k} = 2.5 \times 10^{-4}$

$\lambda = 0.6943 \mu\text{m}$
 $f = 4.32 \times 10^{14} \text{ Hz}$

$\frac{\omega_f}{f} = 2.3 \times 10^{-6}$
 $T = 1 \text{ ns}$

现在, 和入射波电场在互模或子上的非均匀分布情况。这时, 我们只把入射波电场表示为

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \hat{e} E_0 U_i(\vec{r}) \exp[i(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})]$$

其中 $U_i(\vec{r})$ 为入射波电场的空间分布函数。一般我们假设为高斯分布函数, 即

$$U_i(\vec{r}) = \frac{W_{i0}}{W_i(r_{i0})} \exp\left\{-\frac{r_{i\perp}^2}{W_i^2(r_{i0})}\right\}$$

其中 W_{i0} 为入射波束腰半径 (我们假设束腰位于散射体中心),

$$r_{i\perp} = |\vec{r} \times \vec{k}_i| / k_i \quad r_{i\parallel} = \vec{r} \cdot \vec{k}_i / k_i$$

此外, 为计算简便起见, 我们近似地认为散射体是足够小的, 即

$$\frac{\lambda_i L_i}{\pi W_{i0}^2} \ll 1 \quad W_i = W_{i0} \left[1 + \left(\frac{z}{W_{i0}^2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

其中 L_i 是散射体沿入射波方向上的特征长度。因此, 我们近似地认为在散射体体积内, 入射波的波阵面近似为平面, 且 $W_i(r_{i0}) \approx W_{i0}$, 故其空间分布函数可近似地表示为:

$$U_i(\vec{r}) \approx \exp\left\{-\frac{r_{i\perp}^2}{W_{i0}^2}\right\}$$

之所以用高斯分布函数表示 $U_i(\vec{r})$, 这是因为对于大多数散射体来讲, 都是用激光束或微波束做探测束。对于激光束来讲, 若激光束是处于单纵模、单横模 (最低阶横模, 即 TEM₀₀ 模), 它的横截面是高斯分布的。此外, 对于微波发射和接收的微波束来讲, 通过适当的变换, 也可使微波束的横截面分布是高斯分布。此外, 由于高斯分布的傅里叶变换也是高斯分布, 而且高斯分布的分布函数中, ^{高斯分布的} 带宽和它的傅里叶变换函数的带宽的乘积 ^是 最小的 ~~常数~~。因此, 用高斯光束做入射波束, 且假设散射体是散射体在空间分布和波数空间的分辨率的乘积 $\Delta F \cdot \Delta k$ 是最佳的。

(2) 需要测量散射体的波数分辨率

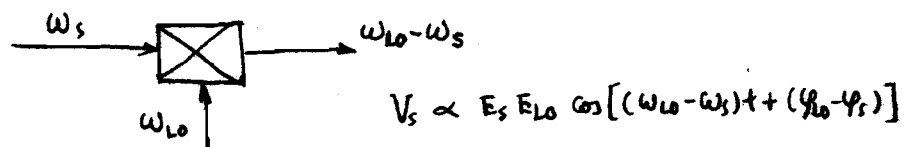
$$\lambda_1 = 6443 \text{ \AA} \quad \omega_1 = 2\pi \nu_1 \quad \nu_1 = 12798 \text{ cm}^{-1} \\ = 1.28 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$$

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} \quad \text{--- (32)}$$

因此超短光子散射所研究的是晶体波和不稳定性，为较精确地测得 $n(\mathbf{k}, \omega)$ 或单色波的色散关系 $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\omega)$ ，要求散射测量具有较好的波数分辨率。因为在超短光子散射实验中，不稳定性散射体积为无限大，即 V_s 是无限的，根据池田左理论，其波数分辨率也是有限的 ($\because \Delta \mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{k} \approx \text{const}$)。因此在超短光子散射实验中必须改善波数分辨率，这应与散射体积 V_s 成正比，和散射波数谱的宽度成反比。

(3) 采用光混频的探测方法

因为等离体波和不稳定性的频率范围比超短光子的频率范围窄得多，因此散射谱相对于入射频率的转移是很小的，用常规的谱分析方法来分辨这么小的转移，如等离体波的最高频率大约在 1 GHz 量级。若用光子散射谱来测量时，其散射谱相对于入射波的转移为 $\omega_s = 1 \times 10^9 \text{ Hz}$ ，若入射波长为 $\lambda_1 = 1 \mu\text{m}$ ，则相应的波长转移为 $\Delta \lambda = \lambda = \left| \lambda_1^2 \frac{\omega_s}{c} \right| \approx 3 \times 10^{-6} \mu\text{m}$ ，一般光谱仪都难以分辨这么微小的波长转移。因而，大多数的超短光子散射实验都用光混频的方法来探测散射谱。因为光混频探测方法只把光频范围内的散射谱，转移到射频频带内，这样就可以用电子学上的处理方法来测量如此小的频率分辨率。此时，光混频探测方法比直接探测方法有更大的优越性：即对散射谱的测量没有太大影响，因为允许用大角散射实验；而且混频灵敏度比直接探测灵敏度低，因为定有混频增益。



现在我们来重新考虑散射理论，以便把超短光子散射实验中某些现象与上述的超短光子散射理论中。

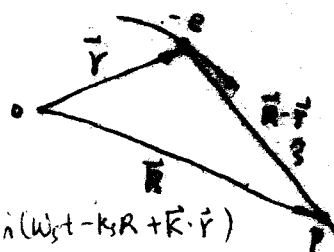
一. 从单自由电子的散射

入射电场为: $\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \hat{s} \hat{e} E_{i0} U_i(\vec{r}) e^{i\omega_i t - i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \hat{e} \vec{E}_i(\vec{r}) e^{i\omega_i t} = \hat{e} \vec{E}_i(\vec{r}) e^{i\omega_i t}$$

其中 $\vec{E}_i(\vec{r}) = E_{i0} U_i(\vec{r}) e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$ $\frac{r_e}{R} E_{i0} U_i(\vec{r}) e^{i(\omega_i t - k_i R + \vec{k} \cdot \vec{r})}$

$(\vec{k}_i + \vec{k} - \vec{r})$



则在 t 时刻在 r 处的电子至 R 处产生的散射波电场为

$$\vec{E}_s(\vec{r}, t) = -\hat{e} r_e E_{i0} U_i(\vec{r}) \frac{\exp[i(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})]}{|\vec{R} - \vec{r}|} = -\hat{e} r_e E_{i0} \frac{U_i(\vec{r}) e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}}{|\vec{R} - \vec{r}|} e^{i\omega_i t}$$

这里, 我们已假定 $|\hat{s} \times (\hat{s} \times \hat{e})| = 1$, 且 $U_i(\vec{r})$ 是入射波在散射面上的分布。 $\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r} = \omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r} - \vec{k} \cdot \vec{r}$

当用光探测的方法检测散射谱时, 散射波电场与本振电场 $\vec{E}_0(\vec{r}, t)$ 在探测器面上相叠加, 其输出电流为

$$i(t) = \frac{e}{k\omega_s} \iint_A d\vec{r} C E_0 |\vec{E}_s(\vec{r}, t) + \vec{E}_0(\vec{r}, t)|^2 \eta(\vec{r}) d\vec{r}$$

这是探测器面截面的积分, 其中 $\eta(\vec{r})$ 为探测器面上探测效率的分布。为简单计, 我们令 $\eta(\vec{r})$ 正比于探测器面上的分布效率, 则

$$i(t) = \frac{e\eta E_0 C}{k\omega_s} \iint_A |\vec{E}_s(\vec{r}, t) + \vec{E}_0(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r}$$

由此可见, 它是由本振强度 $I_0 = E_0 C |\vec{E}_0|^2$, 散射波强度 $I_s \ll I_0$ 和它们的干涉项组成。因而而项只贡献直流项, 故我们只考虑其干涉项:

$$i_g(t) = \frac{e\eta E_0 C}{k\omega_s} \iint_A \vec{E}_s(\vec{r}, t) \vec{E}_0^*(\vec{r}, t) d\vec{r} + \vec{E}_s^* \vec{E}_0$$

这里, 我们已假定 $\vec{E}_0 \parallel \vec{E}_s \parallel \vec{E}_i$, 它可进一步表示为:

$$i_g(t) = \frac{e\eta E_0 C}{k\omega_s} r_e E_{i0} U_i(\vec{r}) e^{i[\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}]} \iint_A \vec{E}_0^*(\vec{r}, t) \frac{e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}}{|\vec{R} - \vec{r}|} d\vec{r}$$

上式中的积分与 $\vec{E}_0$ 成正比, 且与 $\vec{E}_0$ 成正比。利用波函数法, 我们可定义一广度的电场分布:

三 (24)

$$E_{20}(\vec{r}, t) = -\frac{j}{\lambda_s} \iint_A E_{20}(\vec{r}', t) \frac{e^{ik_s|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\vec{r}' = \frac{1}{\lambda_s} \iint_A E_{20}(\vec{r}', t) \frac{e^{ik_s|\vec{r}-\vec{r}'| - i\frac{\pi}{2}}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\vec{r}'$$

$$\text{即 } i\lambda_s E_{20}(\vec{r}, t) \equiv \iint_A E_{20}(\vec{r}', t) \frac{e^{ik_s|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\vec{r}'$$

我们射线的定义：一束的本振束，它是按照四极子的场分布沿着散射表面及光路向散射体传播的电磁辐射。它是光混频接收机的天线束等效的场分布。这样，散射四极子的中频电流 $i_{if}(t)$ 就可以用散射体内部的场分布来表示，即

$$i_{if}(t) = \frac{e\eta E_0 C r_e \lambda_s}{\hbar \omega_s} [E'_s(\vec{r}, t) E_{20}^*(\vec{r}, t) + E'_s(\vec{r}, t) E_2(\vec{r}, t)]$$

$$\text{其中 } E'_s(\vec{r}, t) = E_{s0} U_s(\vec{r}) e^{i(\omega_s t - \vec{k}_s \cdot \vec{r})}$$

可以证明：若本振束的场分布是平面波分布，则上述射线场分布定义的天线束在散射体内部的场分布也是平面波分布。故可令：

$$E_{20}(\vec{r}, t) = E_{20} U_{20}(\vec{r}) e^{i(\omega_{20} t - \vec{k}_{20} \cdot \vec{r} + \varphi_{20})}$$

这样，散射四极子的中频电流为

$$i_{if}(t) = \frac{e\eta E_0 C r_e \lambda_s}{\hbar \omega_s} E_{s0} E_{20} U(\vec{r}) e^{i(\omega_{\Delta} t - \vec{k}_{\Delta} \cdot \vec{r} + \Delta\varphi)}$$

$$\omega_{\Delta} = \omega_s - \omega_{20} \quad \vec{k}_{\Delta} = \vec{k}_s - \vec{k}_{20} \approx \vec{k}_s - \vec{k}_1$$

$$\text{其中 } \omega_{\Delta} = \omega_{20} - \omega_s, \quad \vec{k}_{\Delta} = \vec{k}_{20} - \vec{k}_s \approx \vec{k}_s - \vec{k}_1, \quad \Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_1$$

这里我们已将场分布中的虚数因子归并到相位因子 $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ 中，同样也不失一般性，相位因子 $e^{i\Delta\varphi}$ 也可略去，故有：

$$i_{if}(t) = \frac{e\eta E_0 C r_e \lambda_s}{\hbar \omega_s} E_{s0} E_{20} U(\vec{r}) [e^{i(\omega_{\Delta} t + \vec{k}_{\Delta} \cdot \vec{r})} + e^{-i(\omega_{\Delta} t + \vec{k}_{\Delta} \cdot \vec{r})}]$$

$$\text{即 } U(\vec{r}) \equiv U_s(\vec{r}) U_{20}(\vec{r})$$

这样，散射四极子的中频电流是由散射电场为：

~~这样，散射四极子的中频电流是由散射电场为：~~

光子探测中电流

$$\begin{aligned} i_{if}(t) &= \frac{e\eta c \epsilon_0}{\hbar \omega_s} \iint_{A_r} \mathbf{E}_s(\vec{R}, t) \mathbf{E}_{e0}^*(\vec{R}, t) d\vec{R}_\perp + c.c. \\ &= \frac{e\eta c \epsilon_0}{\hbar \omega_s} r_e E_{i0} U_i(\vec{r}) e^{i[\omega_s t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}]} \iint_{A_r} \mathbf{E}_{e0}^*(\vec{R}, t) \frac{e^{-i\vec{k}_s \cdot (\vec{R} - \vec{r})}}{|\vec{R} - \vec{r}|} d\vec{R}_\perp \end{aligned}$$

定义 天线束 (辐射场)

$$\mathbf{E}_{e0}(\vec{r}, t) = -\frac{i}{\lambda_s} \iint_A \mathbf{E}_{e0}(\vec{R}, t) \frac{e^{i\vec{k}_s \cdot (\vec{R} - \vec{r})}}{|\vec{R} - \vec{r}|} d\vec{R}_\perp$$

得:

$$i_{if}(t) = \frac{e\eta c \epsilon_0 r_e \lambda_s}{\hbar \omega_s} \left[\mathbf{E}'_i(\vec{r}, t) \mathbf{E}_{e0}^*(\vec{r}, t) + \mathbf{E}_i^*(\vec{r}, t) \mathbf{E}_{e0}(\vec{r}, t) \right]$$

其中

$$\mathbf{E}'_i(\vec{r}, t) = E_{i0} U_i(\vec{r}) \exp\{i[\omega_s t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}]\}$$

令辐射场为

$$\mathbf{E}_{e0}(\vec{r}, t) = E_{e0} U_{e0}(\vec{r}) \exp\{i[\omega_{e0} t - \vec{k}_{e0} \cdot \vec{r} + \varphi_{e0}]\}$$

则

$$i_{if}(t) = \frac{e\eta c \epsilon_0 r_e \lambda_s}{\hbar \omega_s} E_{i0} E_{e0} U(\vec{r}) \left\{ \exp[i(\omega_\Delta t + \vec{k}_\Delta \cdot \vec{r} + \Delta\varphi)] + c.c. \right\}$$

其中

$$\omega_\Delta \equiv \omega_s - \omega_{e0} \quad \vec{k}_\Delta = \vec{k}_{e0} - \vec{k}_i \approx \vec{k}_s - \vec{k}_i \quad (\text{因 } \vec{k}_{e0} \parallel \vec{k}_s, k_{e0} \approx k_s)$$

$$U(\vec{r}) \approx U_i(\vec{r}) U_{e0}(\vec{r})$$

因此, 可把它视为散射电场

$$\mathbf{E}_s(\vec{R}, t) = \frac{r_e}{R} E_{i0} U(\vec{r}) \exp\{i[\omega_s t + \vec{k}_\Delta \cdot \vec{r} - k_{e0} R]\}$$

与本振电场

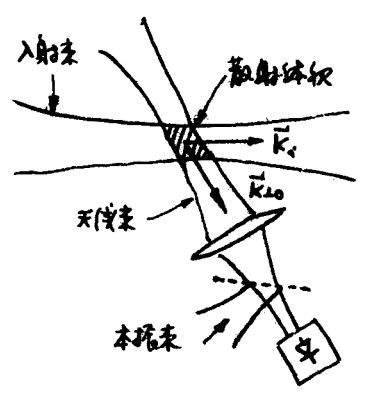
$$\mathbf{E}_{e0}(\vec{R}, t) = E_{e0} \exp\{i[\omega_{e0} t - k_{e0} R]\}$$

在混频器上产生中频电流。

$$E_s(\vec{r}, t) = \frac{r_e}{R} E_{s0} U(\vec{r}) e^{i[\omega_s t + \vec{k}_s \cdot \vec{r} - k_{s0} R]}$$

和本振电场为

$$E_{L0}(\vec{r}, t) = E_{L0} e^{i[\omega_{L0} t - k_{L0} R]}$$



在混频器上即产生中频跨流电流。由于天线束是沿散射束方向上传播的，且我们考虑的是小频移的情况，即 $\omega_a = \omega_s - \omega_l \ll \omega_s$ ，则

$$k_{L0} \approx k_s \approx k_s, \quad \vec{k}_{L0} \approx \vec{k}_s$$

故有

$$E_s(\vec{r}, t) = \frac{r_e}{R} E_{s0} U(\vec{r}) \exp\{i[\omega_s t + (\vec{k}_s - \vec{k}_l) \cdot \vec{r} - k_s R]\}$$

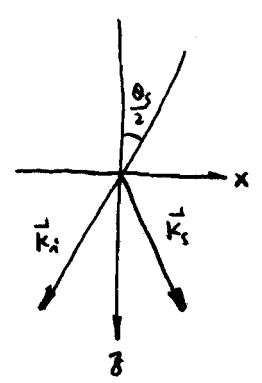
这样，除了散射电场中多了空间分布函数 $U(\vec{r}) \equiv U_s(\vec{r}) U_{L0}(\vec{r})$ 之外，其它均与非相干散射的情况相同。因此，这样做的结果，既与超热相干散射理论中考虑了有限散射体积截面积和入射波电场的截面积分布，又作理论的处理上的简化。

二. 从单色等离子体波的散射

下面我们研究最简单的情况，即电磁波以相干的单色等离子体波的散射。设有一单色的等离子体静电波沿 x 轴方向传播，其电场的空间分布为：

$$\tilde{n}_e(\vec{r}, t) = \tilde{n}_{e0} \exp[i(\omega_p t - k_x x)]$$

取如右图所示的坐标系，入射束波矢与 z 轴的夹角为 $\theta_i/2$ ，则



$$U_i(\vec{r}) = \exp\left\{-\frac{y^2 + (x \cos \frac{\theta_i}{2} + z \sin \frac{\theta_i}{2})^2}{w_{i0}^2}\right\}$$

其散射束波矢与 z 轴的夹角也为 $\theta_s/2$ ，它也是 $\theta_i/2$ 光束，故其空间分布函数为：

$$\vec{E}_s(\vec{r}, t) = \int d\vec{r}' \vec{n}_e(\vec{r}', t') \vec{E}_s(\vec{r}, t')$$

≡ (3b)

$$n_e = n_{eo} + \tilde{n}_e$$

$$U_s(\vec{r}) = \exp \left\{ - \frac{y^2 + (x \cos \frac{\theta_s}{2} - z \sin \frac{\theta_s}{2})^2}{w_{s0}^2} \right\}$$

为简单起见, 我们假定 $w_{s0} = w_{s0}$, 故在 $\vec{r}$ 处的散射电场为

$$\begin{aligned} \vec{E}_s(\vec{r}, t) &= - \frac{E_{s0} \vec{e}}{R'} \int d\vec{r}' \tilde{n}_e(\vec{r}', t') U(\vec{r}') \exp \left\{ i(\omega_s t' - \vec{k}_s \cdot \vec{r}') \right\} \\ &\quad t' = t - \frac{R}{c} + \frac{\vec{z} \cdot \vec{r}'(t)}{c} \\ &= - \frac{E_{s0} \tilde{n}_{e0}}{R'} \hat{e} \int d\vec{r}' U(\vec{r}') \exp [i(\omega_s t' - \vec{k}_s \cdot \vec{r}')] \exp [i(\omega_s t' - \vec{k}_s \cdot \vec{r}')] \end{aligned}$$

其中

$$U(\vec{r}') \equiv U_s(\vec{r}') U_e(\vec{r}') = \exp \left\{ - \frac{2x'^2 \cos^2 \frac{\theta_s}{2} + 2y'^2 + 2z'^2 \sin^2 \frac{\theta_s}{2}}{w_{s0}^2} \right\}$$

且这里已假定 $\hat{s} \times (\hat{s} \times \hat{e}) = -\hat{e}$. 将推迟时间的关系式代入上式, 得:

$$\vec{E}_s(\vec{r}, t) = - \frac{E_{s0} \tilde{n}_{e0}}{R'} \hat{e} \int d\vec{r}' \exp \left\{ - \frac{2x'^2 \cos^2 \frac{\theta_s}{2} + 2y'^2 + 2z'^2 \sin^2 \frac{\theta_s}{2}}{w_{s0}^2} \right\} \exp [i(\omega_s(t - \frac{R}{c}) - \vec{k}_s \cdot \vec{r} + \vec{k}_s \cdot \vec{r}')]]$$

其中

$$\omega_s = \omega_i + \omega_w, \quad \vec{k} = \vec{k}_s - \vec{k}_i$$

利用定积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2 x^2} \exp(ipx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{q} \exp(-\frac{p^2}{4q^2})$$

上式的积分可简化为:

$$\vec{E}_s(\vec{r}, t) = - \frac{E_{s0} \tilde{n}_{e0} V_s}{R'} \hat{e} \exp \left\{ - \frac{w_{s0}^2 (k_x - k_w)^2}{8 \cos^2 \frac{\theta_s}{2}} - \frac{w_{s0}^2 k_y^2}{8} - \frac{w_{s0}^2 k_z^2}{8 \sin^2 \frac{\theta_s}{2}} \right\} \exp [i\omega_s(t - \frac{R}{c})]$$

其中

$$V_s \equiv \int d\vec{r}' U(\vec{r}') = \frac{(\sqrt{\pi} w_{s0})^3}{\sqrt{2} \sin \theta_s}$$

则在 $\vec{r}$ 处探测器所接收到的平均散射功率为

$$P_s(\vec{r}, t) = c \epsilon_0 \langle |\vec{E}_s(\vec{r}, t)|^2 \rangle_r A_r$$

令 $V_s \equiv A_i l_s$, l_s 为散射体积长度

$$= \frac{P_i}{A_i} r_e^2 \tilde{n}_{e0}^2 V_s^2 \frac{A_r}{R'^2} F(\vec{k}, k_w) = P_i r_e^2 l_s^2 \tilde{n}_{e0}^2 A_i \frac{A_r}{R'^2} F(\vec{k}, k_w)$$

其中

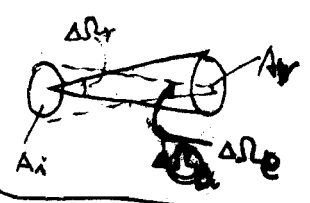
A_r 为探测器的有效探测面积

$r = \text{散射}$
 $e = \text{发射}$
 $A_e \cdot \Delta\Omega_r \equiv A_r \cdot \Delta\Omega_e$

$\equiv (37)$

$$F(\vec{k}, \vec{k}_w) = \exp \left\{ -\frac{W_0^2 (k_x - k_w)^2}{4 \cos^2 \frac{\theta_s}{2}} - \frac{W_0^2 k_y^2}{4} - \frac{W_0^2 k_z^2}{4 \sin^2 \frac{\theta_s}{2}} \right\}$$

$A_r \cdot \Delta\Omega_r = A_i \cdot \Delta\Omega_i = \alpha \lambda_s^2$
 $\alpha = \frac{1}{4}, \alpha \leq \frac{\pi^2}{16}$



将圆面的有效散射面积按下式计算

$$A_r = \int_0^\infty 2\pi r e^{-\frac{2r^2}{W_s^2}} dr = \frac{1}{2} \pi W_s^2$$

又根据高斯光束公式

$$W_s^2 = W_{s0}^2 \left[1 + \frac{\lambda_s^2 R^2}{\pi^2 W_{s0}^4} \right] \approx \frac{\lambda_s^2 R^2}{\pi^2 W_{s0}^2} = \frac{\lambda_s^2 R^2}{\pi^2 W_{i0}^2} \quad (\text{远场近似})$$

因而散射面的接收立体角为

$$\Delta\Omega_r \equiv \frac{A_r}{R^2} = \frac{\pi W_s^2}{R^2} = \frac{\lambda_s^2}{2\pi W_{i0}^2}$$

$$A_i \cdot \Delta\Omega_r = \frac{A_r A_i}{R^2} = A_r \Delta\Omega_e$$

同理，入射束的有效面积为 $A_i = \frac{1}{2} \pi W_{i0}^2$ 此定义

$$V_s \cdot \Delta\Omega_r = l_s \cdot \frac{1}{2} \pi W_{i0}^2 \cdot \frac{\lambda_s^2}{2\pi W_{i0}^2} = \frac{1}{4} l_s \lambda_s^2$$

l_s 是散射体沿入射方向上的特征长度

$$A_i \cdot \Delta\Omega_r = \frac{\lambda_s^2}{4}$$

$$V_s \equiv A_i l_s$$

故散射功率最后就可简化为：

$$V_s = \frac{(\sqrt{\pi} W_{i0})^3}{\sqrt{2} \sin \frac{\theta_s}{2}} = A_i l_s$$

$$P_s(\vec{k}) = \frac{1}{4} P_i r_e^2 \tilde{r}_e^2 l_s^2 \lambda_s^2 F(\vec{k}, \vec{k}_w)$$

$$A_i = \frac{1}{2} W_{i0}^2 \pi$$

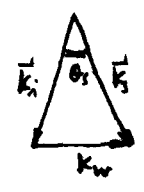
其中

$$F(\vec{k}, \vec{k}_w) = \exp \left\{ -\frac{W_0^2 (k_x - k_w)^2}{4 \cos^2 \frac{\theta_s}{2}} - \frac{W_0^2 k_y^2}{4} - \frac{W_0^2 k_z^2}{4 \sin^2 \frac{\theta_s}{2}} \right\}$$

由上式我们得到以下的几个结论：

$$k_{xm} = k_w, \quad k_{ym} = 0, \quad k_{zm} = 0$$

- (1) 当 $k_{xm} = k_w, k_{ym} = 0, k_{zm} = 0$ 时， $F(\vec{k}, \vec{k}_w) = 1$
 散射功率达到最大值，这就是散射的匹配条件，
 之相当于晶体衍射的布喇格条件。



- (2) 当 $k_{ym} = k_{zm} = 0$ ，及 $W_0^2 (k_x - k_w)^2 / 4 \cos^2 \frac{\theta_s}{2} = 1$ 时
 散射功率下降到零值功率的 e^{-1} ，我们定义这时的波数与匹配时的波数之差，即 $\Delta k_x = |k_x - k_w|$ ，为系统在 x 轴方向上的波数分辨率，即

$$= |k_x - k_w| = |k_x - k_w|$$

$$\Delta k_x = \pm \frac{2 \cos \frac{\theta_s}{2}}{w_{i0}} \xrightarrow{\text{小角散射}} \pm \frac{2}{w_{i0}}$$

类似地, 当 $k_{x0} = k_w$, $k_{y0} = 0$ 及 $k_y^2 w_{i0}^2 / 4 = 1$ 时, 散射功率下降到峰值功率的 e^{-1} , 这时

$$\Delta k_y = \pm \frac{2}{w_{i0}} \quad (\Delta k_y \equiv k_y - k_{y0})$$

是散射子流在 y 轴方向上的波数分辨率。同理, 散射子流在 x 轴方向上的波数分辨率为

$$\Delta k_z = \pm \frac{2 \sin \frac{\theta_s}{2}}{w_{i0}} \xrightarrow{\text{小角散射}} \pm \frac{\theta_s}{w_{i0}}$$

实际上, 我们可以证明, 散射子流在 x, y 方向上的波数分辨率, 就是由高斯光束的自然发散角决定的。由于斯波束的特性, 其自然发散角为:

$$\theta_d = \frac{\lambda_i}{\pi w_{i0}}$$

而 $k = \frac{4\pi}{\lambda_i} \sin \frac{\theta_s}{2}$

所以, $|\Delta k| = \frac{2\pi}{\lambda_i} \cos \frac{\theta_s}{2} \Delta \theta_s = \frac{2\pi}{\lambda_i} \cos \frac{\theta_s}{2} \cdot \theta_d = \frac{2 \cos \frac{\theta_s}{2}}{w_{i0}} \rightarrow \frac{2}{w_{i0}}$

这与入射光束的束腰半径有关。而 x 方向的波数分辨率是由散射体在入射束方向上的特征长度决定的, 这证明如下:

$$\because V_s = \frac{(\sqrt{\pi} w_{i0})^2}{\sqrt{2} \sin \theta_s} = A_i l_s, \quad A_i = \frac{1}{2} \pi w_{i0}^2$$

$$\therefore l_s = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{w_{i0}}{\sin \theta_s} \approx \frac{2 w_{i0}}{\theta_s} \quad (\text{小角散射时})$$

即 $\Delta k_z = \pm \frac{2 \sin \frac{\theta_s}{2}}{w_{i0}} \approx \pm \frac{\theta_s}{w_{i0}} = \pm \frac{2}{l_s}$

由此可见, 散射子流的波数分辨率是由入射光束的束腰半径以及散射体自

积的特征长度 l_s 决定的, 且与这些特征长度成反比。

(3) $P_s \propto \lambda_s^2$ (这是因为相干立体角与波长的平方成正比)

由于在许多情况下, 得到的相干辐射反的功率 P_s 和探测器的灵敏度都是有限的。由上述的比例关系可知, 当入射功率和探测器的灵敏度相同时, 只要许可, 可以适当地选择长的入射来波长 λ_i , 可使散射功率提高, 从而可改善信噪比。

此外, 由于系统的波数分辨率是由入射束的横向尺寸决定的, 即

$$\Delta k_x = \Delta k_y \approx \frac{2}{W_{i0}}$$

它与入射波长无关; 而系统的纵向空间分辨能力与散射角有关, 即

$$l_s \approx \frac{2W_{i0}}{\sin \theta_s}$$



对于给定的波数 k , 入射波长越长, 散射角越大 ($\because k = \frac{2\pi}{\lambda_i} \sin \frac{\theta_s}{2}$)。

因而, 入射波长越长, 系统的纵向空间分辨能力越好。故适当地选择波长较长的入射波, 可以改善系统的纵向空间分辨能力。

(4) $P_s \propto \tilde{n}_{e0}^2$

即等离子体中密度涨落幅度越大, 散射功率也越大 (当其立体角相同时)。由此可见, 超热相干散射的一大特点是: 对于给定的探测束功率, 它的散射功率可比热涨落的散射功率大很多, 从而可用功率较小的连续波激光或微波来做超热相干散射实验。

例如: 用于测离子温度的热涨落相干散射实验, 用 FIR 激光束做辐射反, 如充泵的重水红外激光束, $\lambda_i = 385 \mu m$, 当等离子体密度为 $10^{13} cm^{-3}$ 量级时, 反功率至少为 $1 MW$ 量级。若用相同的反和相干探测方法进行超热相干散射实验 (设 $\tilde{n}_{e0} = 10^{-3} n_{e0}$), 在信噪比与热涨落相干散射实验相同的情况下, 反功率多大?

热涨落 $P_{i1} = 1 MW$, $P_s \propto P_{i1} \tilde{n}_{e1}^2 = 10^{13} P_{i1}$

超热涨落 $P_{i2} = ?$, $P_s \propto P_{i2} \tilde{n}_{02}^2 = 10^{20} P_{i2}$

$$\therefore P_{i2} = 10^{-7} P_{i1} = 100 \text{ mW}$$

由此可见, 用于超热涨落光子散射实验的相干源, 用低功率的连续波激光或微波管就可以了, 这就是超热光子散射实验能够较早地用于研究托卡马克等离子体波和微流的直接原因之一。

5) 可测的等离子体波波长范围

当研究等离子体波和不稳定性时, 我们希望散射系统引出的波长范围尽可能的大。但在实际实验中, 引出的波长范围受到各种条件的限制: 首先, 散射系统引出的最长波长是由最大散射角 θ_{sm} 决定的; 而 θ_{sm} 又受到系统的分辨率的限制, 它不小于入射波的发散角 θ_d 。即

$$\theta_{sm} \geq 2\theta_d = \frac{2\lambda_i}{\pi W_{i0}}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_M} \approx \frac{4\pi}{\lambda_i} \sin \frac{\theta_s}{2} \approx \frac{2\pi}{\lambda_i} \theta_{sm}$$

故

$$\lambda_M \approx \frac{\lambda_i}{\theta_{sm}} = \pi W_{i0} / 2$$

$$\lambda_M \leq \frac{\lambda_i}{\theta_{sm}}$$

其次, 系统的最小散射角是由几何条件或装置的最小散射通道决定, 即

$$\lambda_m = \frac{\lambda_i}{2 \sin \frac{\theta_{sm}}{2}}$$

故散射系统引出的波长范围为

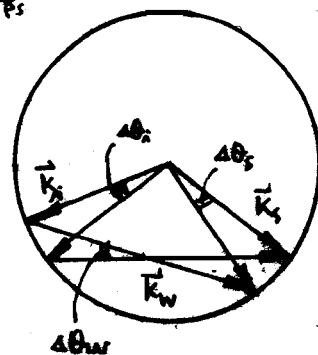
$$\frac{\lambda_i}{2 \sin \frac{\theta_{sm}}{2}} \leq \lambda \leq \pi W_{i0} / 2$$

6) 散射矢量

$$\therefore \omega_s = \omega_i \pm \omega_w, \quad \vec{k}_s = \vec{k}_i \pm \vec{k}_w, \quad k_s = k_i \frac{1-\beta_i}{1-\beta_s}$$

在等离子体波频率远小于入射波频率情况下, 有 $k_s \approx k_i$, 故入射、散射波矢是位于以 $|\vec{k}_i|$ 为半径的圆周上, 如右图所示。由此可见, 散射角宽度 $\Delta\theta_s$ 是由入射角波角宽度和等离子体波角宽度 $\Delta\theta_w$ 决定的。即

$$\Delta\theta_s = \min(\Delta\theta_i, \Delta\theta_w)$$



三. 从等量子波流的辐射:

设等量子波流为:

$$\tilde{n}_e(\vec{r}, t) = \iint \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} n_e(\vec{k}, \omega) \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$$

若入射波为:

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \hat{e} E_{i0} U_i(\vec{r}) \exp[i(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})]$$

则等量子波辐射电场的: $\omega t' - \vec{k} \cdot \vec{r} \approx \omega(t - \frac{R}{c}) - \vec{k} \cdot \vec{r}$, $\omega_i t' - \vec{k}_i \cdot \vec{r} \approx \omega_i(t - \frac{R}{c}) + \vec{k}_s \cdot \vec{r} - \vec{k}_i \cdot \vec{r}$

$$\begin{aligned} \vec{E}_s(\vec{r}, t) &= -\hat{e} \frac{r_0}{R} E_{i0} \int d\vec{r}' U_i(\vec{r}') \tilde{n}_e(\vec{r}', t') \exp[i(\omega_i t' - \vec{k}_i \cdot \vec{r}')] \\ &= -\hat{e} \frac{r_0}{R} E_{i0} \iiint \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} d\vec{r}' U_i(\vec{r}') n_e(\vec{k}, \omega) \exp[i(\omega_s(t - \frac{R}{c}) - (\vec{k} - \vec{k}_i + \vec{k}_s) \cdot \vec{r}')] \\ &= -\hat{e} \frac{r_0}{R} E_{i0} \iiint \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} n_e(\vec{k}, \omega) \exp[i\omega_s(t - \frac{R}{c})] \int d\vec{r}' U_i(\vec{r}') \exp[-i(\vec{k} - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}'] \end{aligned}$$

其中 $\omega_s \equiv \omega_i + \omega$, $\vec{k}_s = \vec{k}_i - \vec{k}$, $k_s = \omega_s/c$

令 $I(\vec{k} - \vec{k}_i) \equiv \int d\vec{r}' U_i(\vec{r}') \exp[-i(\vec{k} - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}']$

$$\hat{n}_e(\vec{k}_s, \omega) \equiv \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} n_e(\vec{k}, \omega) I(\vec{k} - \vec{k}_i)$$

则 $\vec{E}_s(\vec{r}, t) = -\hat{e} \frac{r_0}{R} E_{i0} \int \frac{d\omega}{2\pi} \hat{n}_e(\vec{k}_s, \omega) \exp[i\omega_s(t - \frac{R}{c})]$

辐射到 $\vec{R}$ 处, 子波为 A_r 上的平均辐射为:

$$\begin{aligned} P_s(\vec{R}) &= A_r c \epsilon_0 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\vec{E}_s(\vec{R}, t)|^2 dt \\ &= \frac{P_i}{A_i} r_0^2 n_{e0} V_s \hat{S}(\vec{k}_s) \Delta\Omega_r \end{aligned}$$

其中 $\Delta\Omega_r \equiv \frac{A_r}{R^2}$ 为接收立体角

$$\hat{S}(\vec{k}) \equiv \int \frac{d\omega}{2\pi} \hat{S}(\vec{k}, \omega)$$

$$\hat{S}(\vec{k}, \omega) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{|\hat{n}(\vec{k}, \omega)|^2}{n_{e0} V_s} = \frac{\langle |\hat{n}_e(\vec{k}, \omega)|^2 \rangle_T}{n_{e0} V_s}$$

▲ $I(\vec{k}-\vec{k}_4)$ 的物理意义 $I(\vec{k}-\vec{k}_4) \equiv \int d\vec{r} U(\vec{r}) \exp[-i(\vec{k}-\vec{k}_4) \cdot \vec{r}]$

1. 若 $V_s \rightarrow \infty$ 且 $U(\vec{r}) = 1$ (均匀分布)

$$I(\vec{k}-\vec{k}_4) = \int d\vec{r} \exp[-i(\vec{k}-\vec{k}_4) \cdot \vec{r}] = (2\pi)^3 \delta(\vec{k}-\vec{k}_4) = \begin{cases} \infty & \text{当 } \vec{k} = \vec{k}_4 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } \vec{k} \neq \vec{k}_4 \text{ 时} \end{cases}$$

故 $I(\vec{k}-\vec{k}_4)$ 可视为 $\vec{k}$ 空间滤波函数 (中心波矢 $\vec{k}_4$, 带宽 $\Delta \vec{k} \rightarrow 0$)

2. 若 V_s 有限 (长方体), 且 $U(\vec{r}) = 1$

$$I(\vec{k}-\vec{k}_4) = \int d\vec{r} \exp[-i(\vec{k}-\vec{k}_4) \cdot \vec{r}] = V_s \prod_{j=1}^3 \frac{\sin[\frac{1}{2}(\vec{k}-\vec{k}_4)_j L_j]}{\frac{1}{2}(\vec{k}-\vec{k}_4)_j L_j} \quad j=x, y, z$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\sin \omega}{\omega} = \pi$$

$$g(\omega) = \frac{\sin \omega}{\omega} \approx g^*(\omega) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \omega > \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \omega < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\therefore I(\vec{k}-\vec{k}_4) = \begin{cases} V_s & \text{当 } -\frac{\pi}{L_i} \leq (\vec{k}-\vec{k}_4)_i \leq \frac{\pi}{L_i} \quad i=x, y, z \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

3. 对于单一波矢 $\vec{k}$

$$\lim_{\vec{k} \rightarrow \vec{k}_4} I(\vec{k}-\vec{k}_4) = \int d\vec{r} U(\vec{r}) = V_s$$

由此可见:

$I(\vec{k}-\vec{k}_4)$ 是 $\vec{k}$ 空间滤波函数, 其中心波矢为 $\vec{k}_4 \equiv \vec{k}_s - \vec{k}_i$, 其带宽为 $\Delta \vec{k}$, 之由散射体积决定, 即:

$$\frac{|\Delta \vec{k}|}{(2\pi)^3} V_s = 1$$

这是因为: $\int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} I(\vec{k}-\vec{k}_f) = 1$ 归一化且取

$$\begin{aligned} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} I(\vec{k}-\vec{k}_f) &= \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \int d\vec{r} U(\vec{r}) \exp[-i(\vec{k}-\vec{k}_f) \cdot \vec{r}] \\ &= \int d\vec{r} U(\vec{r}) \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \exp[-i(\vec{k}-\vec{k}_f) \cdot \vec{r}] = \int d\vec{r} U(\vec{r}) \delta(\vec{r}) = U(0) \end{aligned}$$

当 $U(0) = 1$ 时, 则有 $\int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} I(\vec{k}-\vec{k}_f) = 1$

综上所述 $I(\vec{k}-\vec{k}_f)$ 可称为 $\vec{k}$ 空间滤波器的单位带宽传递函数。

这样, $\hat{n}_e(\vec{k}_f, \omega) \equiv \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} n_e(\vec{k}, \omega) I(\vec{k}-\vec{k}_f)$

又为电子密度涨落 $n_e(\vec{k}, \omega)$ 经过滤波器 $I(\vec{k}-\vec{k}_f)$ 选择出的波矢为 $\vec{k}_f$ 且有限带宽 $\Delta \vec{k}_f$ 内的平均值。

这样, 我们可写 $\hat{s}(\vec{k}_f)$ 进一步化简:

$$\begin{aligned} \hat{s}(\vec{k}_f) &= \frac{\langle |\hat{n}_e(\vec{k}_f, \omega)|^2 \rangle_T}{n_{e0} V_s} = \frac{V_s}{n_{e0}} \left\langle \left| \frac{\hat{n}_e(\vec{k}_f)}{V_s} \right|^2 \right\rangle_T \\ &= \frac{V_s}{n_{e0}} \left\langle \left| \hat{n}_e(\vec{k}_f) \cdot \frac{\Delta \vec{k}_f}{(2\pi)^3} \right|^2 \right\rangle_T \end{aligned}$$

即 $|\hat{n}_e(\vec{k}_f)|^2 \equiv \int \frac{d\omega}{2\pi} |\hat{n}_e(\vec{k}_f, \omega)|^2$

而 $|\hat{n}_e(\vec{k}_f, \omega)|^2$ 在 $\vec{k}_f \rightarrow \vec{k}_f \pm \frac{1}{2} \Delta \vec{k}_f$ 带宽内选择出的平均值

即有:

$$\langle |\hat{n}_e(\vec{k}_f)|^2 \rangle_T \equiv \left\langle \left| \hat{n}_e(\vec{k}_f) \cdot \frac{\Delta \vec{k}_f}{(2\pi)^3} \right|^2 \right\rangle_T$$

而 $\hat{n}_e$ 在 $\vec{k}_f \rightarrow \vec{k}_f \pm \frac{1}{2} \Delta \vec{k}_f$ 带宽内的平均值

即有

$$\hat{s}(\vec{k}_f) = \frac{V_s}{n_{e0}} \langle |\hat{n}_e(\vec{k}_f)|^2 \rangle_T$$

权重平均的
权重平均的
单位带宽功率谱

$$P_s(\vec{r}) = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 V_s^2 \langle |\hat{n}_{k_r}|^2 \rangle_T \Delta\Omega_r \quad (V_s = A_i l_s)$$

$$= P_i r_e^2 l_s^2 \langle |\hat{n}_{k_r}|^2 \rangle_T A_i \Delta\Omega_r$$

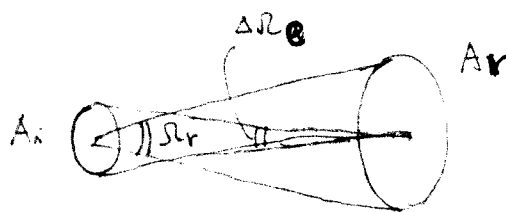
对于散射截面，无性定理：

$$A_i \Delta\Omega_r = A_r \Delta\Omega_e = \alpha \lambda_s^2$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{2 电介介质} \\ \frac{\pi^2}{16} & \text{电磁波无性率} \end{cases}$$

$$P_s(\vec{r}) = \frac{1}{4} P_i r_e^2 l_s^2 \lambda_s^2 \langle |\hat{n}_{k_r}|^2 \rangle_T$$

▲ 分支率



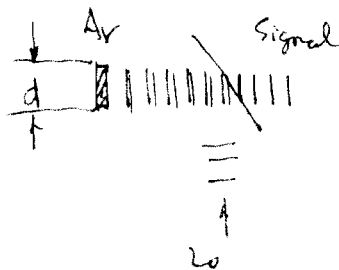
接收立体角 发射立体角

$A_i \Delta\Omega_r = A_r \Delta\Omega_e$

$\parallel$

A_e 发射面积

▲ 无性定理



对于散射截面与接收截面在垂直于波束的波阵面上

两波束的波阵面的距离差不大于 $\frac{\lambda}{2}$

故两波束的波束角相等

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{2d}$$

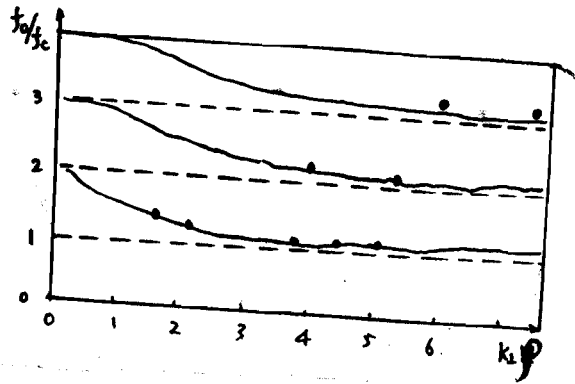


散射截面与接收截面 (发射立体角)

$$\Delta\Omega_e = (\Delta\theta)^2 = \frac{\lambda^2}{4d^2} = \frac{\lambda^2}{4A_r}$$

$$\therefore A_r \Delta\Omega_e = \frac{\lambda^2}{4}$$

CO₂ 激光相干散射谱仪静电回旋谐波谱

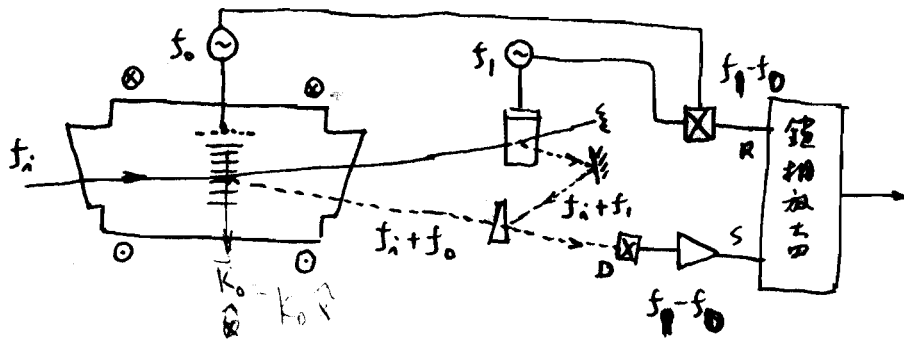


f_0 是电子回旋波频率, 也是激光频率

f_c 是电子回旋频率, $\frac{eB}{m_e}$

$k_{\perp}$ 是垂直于外磁场的波数

$\bullet$ 是电子回旋半径, $(\frac{kT_e}{m_e})^{1/2} / (2\pi f_c)$



样品的 (Ge:Cu) 晶体中电子位置为:

$$V_s = \alpha E_0 E_s \cos[2\pi(f_1 - f_0)t + k_0 x + \varphi_0]$$

即 $E_s = E_0 \exp[-\frac{W_{\perp}^2}{8}(k - k_0)^2] \exp[-\frac{W_{\perp}^2}{8}(k - k_0)^2]$, $k = 2k_{\perp} \sin \frac{\theta_1}{2}$

鉴相放大器输出信号为

$$S \propto \alpha E_0 E_s \cos(k_0 x + \varphi_0)$$

这里测色散有两种做法:

(1) 对于给定的 f_0 和 B , 则 f_0/f_c 是确定的, 对于均匀样品, 且 $k_{\perp}$ 也是确定的, 这时, 只随改变散射角, 即改变 θ_1 变化的曲线, 与 V_s 最大相对应的 θ_1 即为测定的

$$\theta_1, \text{ 即 } k_{\perp} = 2k_{\perp} \sin \frac{\theta_1}{2}$$

(2) 对于给定的 f_0 , 使磁场随时间线性变化, 这时 f_0/f_c 也随时间线性变化, 对于均匀样品, 这时 $k_{\perp}$ 将按色散曲线随时间变化, 这时鉴相放大器的输出信号随时间变化如下所示:

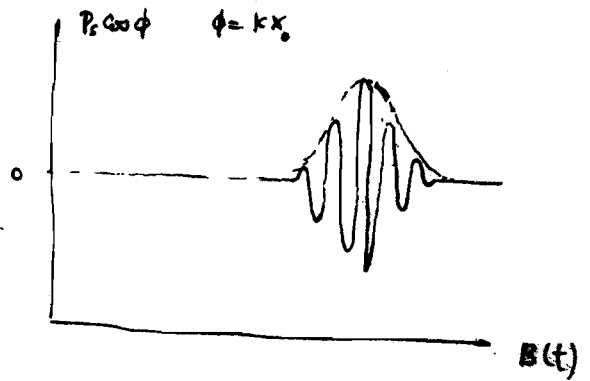
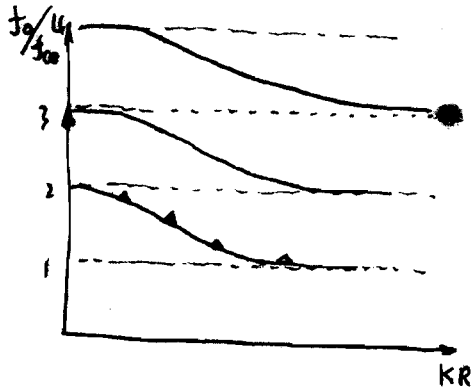
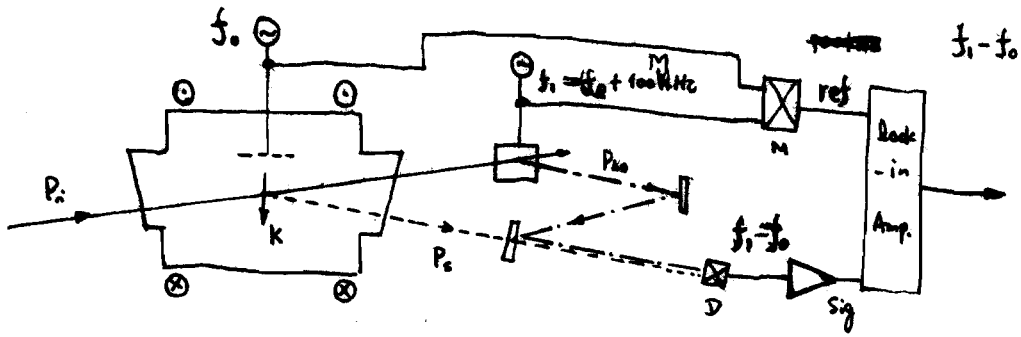
对于给定的散射角 θ_1

(88)

$$F(k, k^+) = \exp \left\{ - \frac{(k - k_+^2)^2 w_{10}^2}{4 \cos^2 \frac{\theta_1}{2}} - \frac{k_{+y}^2 w_{10}^2}{4} - \frac{k_{+z}^2 w_{10}^2}{4 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}} \right\}$$

~~1/10 电子显微镜的成像~~

≡ (40)



$$E_s(\theta_s, k) \propto \tilde{n} \exp[i k x_0] \exp \left\{ - \frac{[k - 2k_0 \sin \frac{\theta_1}{2}]^2 w_{10}^2}{8} \right\}$$

B 扫描. $\Rightarrow \omega_{ce} = \frac{eB(t)}{m_e}$ 扫描

由散射信号的奇值, 求该波矢匹配时的 B 值, 从而求 $f_{ce} \rightarrow f_0/f_{ce}$

而 $k = 2k_0 \sin \frac{\theta_1}{2}$, 且由散光给出色散关系的分支

$$\frac{d^2 P_s}{d\Omega d\lambda} = P_i r_e^2 n_{eo} V_s \frac{c/a}{2\sqrt{\pi} \lambda_i \sin \frac{\theta_s}{2}} \exp\left[-\frac{c^2 \lambda^2}{4a^2 \lambda_i^2 \sin^2 \frac{\theta_s}{2}}\right] \quad \equiv (48)$$

$$= P_i r_e^2 n_{eo} V_s \frac{c/a}{2\sqrt{\pi} \lambda_i \sin \frac{\theta_s}{2}} \left(1 - \frac{7}{2} \frac{\lambda}{\lambda_i} + \frac{c^2 \lambda^2}{4a^2 \lambda_i^2 \sin^2 \frac{\theta_s}{2}}\right) \exp\left[-\frac{c^2 \lambda^2}{4a^2 \lambda_i^2 \sin^2 \frac{\theta_s}{2}}\right]$$

§3.6 非相干散射实验中的若干问题

非相干散射条件要求

$$\alpha = \frac{1}{k\lambda_0} = 1.07 \times 10^{-4} \frac{\lambda_i [\mu m]}{\sin \frac{\theta_s}{2}} \left(\frac{n_e [m^{-3}]}{T_e [eV]} \right)^{1/2} \ll 1$$

一般等离子体参数范围 (n_e, T_e) 知道了, 而散射角 θ_s 尽可能选用接近 90° , 以便空间分辨率最佳, 这样由上式就可决定所用的探针激光波长 λ_i 。

其次, 我们可估计一下散射功率。由上述知识不难求出散射功率为:

$$\frac{dP_s}{d\Omega} = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{eo} V_s = P_i r_e^2 n_{eo} l_s \quad (l_s \text{ 为散射体积长度})$$

或

$$P_s = P_i r_e^2 n_{eo} \Delta\Omega_r l_s$$

$$\frac{S(\vec{k}, \omega)}{2\pi} = \frac{1}{k} f\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

$$\int \frac{S(\vec{k}, \omega)}{2\pi} d\omega = \int \frac{d\omega}{k} f\left(\frac{\omega}{k}\right) = 1$$

若典型的低密度等离子体参数为 $n_{eo} = 10^{20} m^{-3}$, $l_s = 1 \text{ cm}$, $\Delta\Omega_r = 10^{-2} \text{ Sr}$ (立体弧度), 由上可得:

$$\frac{P_s}{P_i} = 7.95 \times 10^{-14}$$

由此可见, 只有入射功率的 10^{-13} 被散射收集起来接收, 这是非常小的份额, 这是非相干散射实验的最大困难: 即我们得到了散射光子, 要求探测器的功率要足够强, 这就是一般都用脉冲激光去做非相干散射实验的探测器功率范围。对于脉冲激光去做探测器, 直接是 J_i , 脉宽为 Δt_2 , 则平均脉冲功率为 $P_i = J_i / \Delta t_2$ 。收集光路探测的散射光子数与 J_i 成正比, 而与散射光又同时被收集光路探测的背景(噪声)辐射是 Δt_2 成正比的。因此, 一般要求探测器能量大 (J_i 大), 也要求功率很大 ($P_i \equiv J_i / \Delta t_2$, Δt_2 很小)。

用散射光子数表示的散射功率为:

$$N_s = \frac{J_i}{h\nu_i} r_e^2 n_{eo} l_s \Delta\Omega_r$$

若 $n_{e0} = 1 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$, $l_s = 1 \text{ cm}$, $\Delta\Omega_r = 1 \times 10^{-2} \text{ sr}$, $\lambda_i = 0.6943 \mu\text{m}$, $J_i = 10 \text{ W/m}^2$,
 则 散射光子数为 $N_s = 2.78 \times 10^6$ 。而 散射光子 e^- 全截面为:

$$\Delta\lambda_s = 4 \frac{h}{c} \lambda_i \sin \frac{\theta_s}{2} = 7.9 \times 10^{-3} \lambda_i [\text{\AA}] \sin \frac{\theta_s}{2} (T_e [\text{eV}])^{1/2} [\text{\AA}]$$

对于红宝石激光器 $\lambda_i = 6943 \text{\AA}$, $\theta_s = 90^\circ$, 则

$$\Delta\lambda_s = 38.8 \sqrt{T_e [\text{eV}]} [\text{\AA}] \quad (e^- \text{ 全截面}) \quad \Delta\lambda_s = \frac{2 \alpha \lambda_i \sin \frac{\theta_s}{2}}{c}$$

$$\Delta f_s = - \frac{c \Delta\lambda_s}{\lambda_i^2 (1 + \frac{\Delta\lambda_s}{\lambda_i})} = \frac{2.41 \times 10^{12} \sqrt{T_e [\text{eV}]} }{1 + 5.59 \times 10^{-3} \sqrt{T_e [\text{eV}]}} [\text{Hz}]$$

若 $T_e = 1 \text{ keV}$, 则 $\Delta\lambda_s = 1227 \text{\AA}$, 每单位波长的间隔内的平均散射光子数为 2.3×10^3 , 该值与上述相符。

一. 噪声:

散射系统中噪声和干扰因素:

1. 量子统计噪声:

这是光子随机到达探测器时产生的噪声, $\propto \sqrt{N_s}$

2. 探测器本身底噪声,

探测器本身底散射光子数 N_p

3. 探测器及电路的输入噪声

(1) ~~探测器底噪声或探测器本身底噪声~~

这是散射与探测器相互作用时, 光电子的产生和发射的随机性造成的,

$$\overline{i_N^2} = 2e I_0 B$$

即 I_0 是入射辐射时光阴极或探测器的平均光电流
 B 是探测器带宽

(2) 热噪声:

这是热激发的载流子所产生的噪声

$$\overline{I_N^2} = \frac{4kTB}{R}$$

~~噪声功率谱密度~~

这是来自电阻 R 的噪声。至于阴极表面(或光电倍增管)的热噪声, 可归结于散粒噪声中, 即是在电路中加上一暗电流 I_d , 即

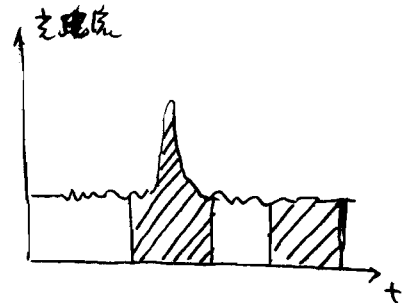
$$\overline{I_N^2} = 2e(I_0 + I_d)B$$

(3) 电子学噪声

4. 周围环境的辐射噪声

由于室温下环境辐射的功率集中在 $\lambda > 1\mu m$ 的波段, 对于 $\lambda < 1\mu m$ 的辐射室, 这是噪声可忽略

在辐射室中, 通常都采用了低噪声的探测器及电子学系统, 则探测器及电子学系统的辐射噪声及电子学噪声都可忽略。这样, 辐射室中的噪声主要是: 量子统计噪声(包括探测器及散粒噪声)和背景物体本底辐射。然而, 在室温的辐射室中, 背景物体本底辐射支是可以通光脉冲的两次测量而加以扣除的。如右图所示, ~~在辐射室中~~ 设 n_s 、 n_p 分别为辐射辐射和背景物体本底辐射在探测器中产生的光电子数, 则当有激光脉冲时, 探测器输出的光电子数为 $n_s + n_p$, 而当无激光脉冲时, 探测器输出的光电子数为 n_p , 两次测量光电子数相减, 就可得到辐射光电子数 n_s 的测量值。然而, 这上面问题的量子统计噪声是



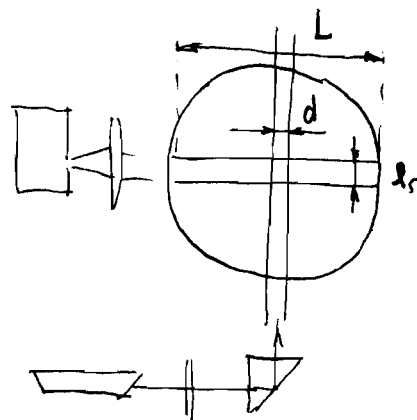
不能扣除的，其正的是噪声是 $\sqrt{n_s + 2n_p}$ ，其中 n_p 为如图 2 所示双光子互扣除等离原本本底辐射的两次测量中包含了本底辐射涨落之因而引入的。故辐射测量信噪比为：

$$\frac{S}{N} = \frac{n_s}{\sqrt{n_s + 2n_p}}$$

若在辐射测量中是用偏振测量，由于散射辐射是自然光，这时信噪比变为：

$$\frac{S}{N} = \frac{n_s}{\sqrt{n_s + n_p}} = \begin{cases} \sqrt{n_s} & \text{当 } n_s \gg n_p \text{ 时} \\ n_s / \sqrt{n_p} & \text{当 } n_s \ll n_p \text{ 时} \end{cases}$$

现在，我们进一步分析哪些因素有关。典型的非相干辐射的辐射源如图 3 所示。辐射光经透镜系统聚焦在成象光电谱仪的入射狭缝上，狭缝的宽、高分别为 w, h 。然后经过光栅分光后，在出射狭缝上分成 M 个通道，最后通道的信号按四比例和记录。设整个收集光路和分光系统的传输效率为 $T(\lambda)$ ，探测器的量子效率为 $\eta(\lambda)$ ，收集光路的接收立体角为 $\Delta\Omega_r$ ，各通道测量的辐射光波波长为 $\lambda_{sj} \pm \frac{1}{2}\Delta\lambda_{sj}$ ($j = 1, 2, \dots, M$)，则各通道收集的辐射光子数为：



$$N_{sj} = \frac{J_{\lambda_j}}{hf_{\lambda_j}} r_e^2 n_{e0} l_s \frac{c}{\sqrt{\pi} \times 2a \lambda_{\lambda_j} \sin \frac{\theta}{2}} \exp \left\{ - \frac{c^2 \lambda_j^2}{4a^2 \lambda_{\lambda_j}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right\} \Delta\Omega_r \Delta\lambda_{sj} T_j$$

$$= C_{sj} J_{\lambda_j} n_{e0} l_s \Delta\Omega_r T_j \Delta\lambda_{sj}$$

其中

$$C_{sj} = \frac{r_e^2}{hf_{\lambda_j}} \frac{c \Delta\Omega_r}{2\sqrt{\pi} a \lambda_{\lambda_j} \sin \frac{\theta}{2}} \exp \left\{ - \frac{c^2 \lambda_j^2}{4a^2 \lambda_{\lambda_j}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right\}$$

并取 $\beta \approx -12.8 \text{ m}$

$$N_{sj} = \frac{J_{\lambda_j}}{hf_{\lambda_j}} r_e^2 n_{e0} l_s \frac{c}{\sqrt{\pi} \times 2a \lambda_{\lambda_j} \sin \frac{\theta}{2}} \exp \left\{ - \frac{c^2 \lambda_j^2}{4a^2 \lambda_{\lambda_j}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right\} \Delta\Omega_r \Delta\lambda_{sj} T_j$$

则右样测透射出的光子数为:

$$N_{sj} = C_{sj} T_i n_{e0} l_s \Delta\Omega_r T_j \eta_{ij} = N_{sj} \eta_j$$

等离子体辐射: 包括轫致辐射、复合辐射和线辐射, 为简单计, 这里只考虑轫致辐射, 忽略复合辐射和线辐射, 即这里只考虑轫致辐射的下限. 由此得到该信号比是最低信号比的上限。

轫致辐射的体辐射率

$$j(\omega) = 8.0 \times 10^{-55} \frac{n_e^2 Z_{eff}^2}{\sqrt{T_e [eV]}} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T_e}\right) \quad \boxed{(5.3.54) \text{ p.175}} \\ [W \cdot m^3 \cdot s^{-1} \cdot s]$$

用辐射功率表示, 则体辐射率为:

$$j(\lambda_s) = j(\omega_s) \left| \frac{d\omega_s}{d\lambda_s} \right| = j(\omega_s) \frac{2\pi c}{\lambda_s^2} \\ = 1.5 \times 10^{-35} \frac{Z_{eff}^2 n_e^2 [m^{-3}]}{\lambda_s^2 [A] \sqrt{T_e [eV]}} \exp\left[-\frac{12395}{\lambda_s [A] T_e [eV]}\right] [W \cdot m^3 \cdot s^{-1} \cdot A^{-1}]$$

则右样测透射出的轫致辐射光子数为积分, 它可表示为:

$$N_{pj} = \int_0^L dr \frac{j(\lambda_{sj})}{h f_{sj}} l_s d\Omega_r T_j \Delta\lambda_{sj} \Delta t_g$$

其中 ld 为光谱仪入射狭缝与辐射体中的距离 (定, 这为 $W \cdot h$), Δt_g 为测量时间 (一般 $\Delta t_g \geq \Delta t_e$, 以保证 Δt_e 落在测量时间 Δt_g 内). $j(\lambda_{sj})$ 在式中的指数项, 当 $T_e > 10 eV$, $\lambda_s \approx 7000 \text{ \AA}$ 时是有效的, 且这里应包含指数项因子. 此外该透射密度、温度分布分别为:

$$n_e(r) = n_{e0} \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right], \quad T_e(r) = T_{e0} \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^2$$

这或对上式的积分, 可得中心轴线上轫致辐射的光子数表达式:

$$N_{pj} = 5.0 \times 10^{-21} Z_{eff}^2 n_{e0}^2 (T_{e0} [eV])^{\frac{1}{2}} L d l_s \overline{\Delta\Omega_r} T_j \frac{\Delta\lambda_j}{\lambda_{sj}} \Delta t_g$$

这里 $L \equiv 2a$, $\overline{\Delta\Omega_r}$ 为平均接收立体角。上式中 T_{eo} [eV], λ_{sj} [Å], $\Delta\lambda_j$ [Å] 均, 均改用国际单位制。将 (1) 中符号代入得:

$$n_{pj} = 5.0 \times 10^{-21} \frac{Z_{eff}^2 n_{eo}^2}{\sqrt{T_{eo} [eV]}} \frac{\Delta\lambda_j}{\lambda_{sj}} (L d \overline{\Delta\Omega_r} \Delta t_g T_j \eta_j)$$

$$= C_{pj} n_{eo}^2 L d \overline{\Delta\Omega_r} \Delta t_g T_j \eta_j \Delta\lambda_j$$

其中

$$C_{pj} \equiv 5.0 \times 10^{-21} \frac{Z_{eff}}{\sqrt{T_{eo} [eV]}} \frac{1}{\lambda_{sj}}$$

可见 n_{pj} 与 n_{sj} 成正比, 一般说来 d 与散射体中原子核间距相当。故可认为 d 为散射体中原子核间距。此外, $\Delta\lambda_j$ 为谱线宽度, 故 d 即取散射体中原子核间距。此外, $\Delta\lambda_j$ 为谱线宽度, 故 d 即取散射体中原子核间距。此外, $\Delta\lambda_j$ 为谱线宽度, 故 d 即取散射体中原子核间距。

$$E \equiv \hbar \omega = \frac{A_q}{f^2} = d_s d \Delta\Omega_r$$

其中 A_q 为光栅面积, f 为光栅焦距, d_s 为光栅间距。2) n_{sj} 和 n_{pj} 可表示为:

$$n_{sj} \equiv J_i n_{eo} \frac{E}{d} (C_{sj} T_j \eta_j)$$

$$n_{pj} \equiv L E \Delta t_g n_{eo}^2 (C_{pj} T_j \eta_j)$$

$$\frac{S}{N} = \begin{cases} \sqrt{n_{sj}} & = [J_i n_{eo} \frac{E}{d} (C_{sj} T_j \eta_j)]^{1/2} \\ n_{sj} / \sqrt{n_{pj}} & = \frac{J_i C_{sj} (E T_j \eta_j)^{1/2}}{d \sqrt{L C_{pj} \Delta t_g}} \end{cases} \quad \begin{matrix} n_{sj} \gg n_{pj} \\ n_{sj} \ll n_{pj} \end{matrix}$$

由上述各式, 我们可以得到如下结论:

- (1) $n_{sj} \propto J_i n_{eo}$ 或当 $n_{sj} \gg n_{pj}$ 时, $\frac{S}{N} \propto (J_i n_{eo})^{1/2}$
 $n_{sj} \ll n_{pj}$ 时, $\frac{S}{N} \propto J_i$

由此可见, 对于给定的等离子体 n_{e0} , 散射信号与 J_1 成正比, 为了
使散射信号足够大, 要求激光脉冲有足够大的能量。对于托卡
马克等离子体, $n_{e0} = (10^{19} \sim 10^{20}) \text{ m}^{-3}$, 一般要求 $J_1 = 4 \sim 10 \text{ J}$ 。当 n_{e0}
较低时, 对 J_1 的要求还更大。

(2) 当 $n_{sj} \ll n_{pj}$ 时 (远离入射波长的散射区), $\frac{S}{N} \propto \frac{J_1}{\sqrt{\Delta t_d}}$

由此可见, 为了使散射信号有足够大的信噪比, 对测量的带宽
度越窄越好, 相应地也要求 Δt_d 越窄越好。但 Δt_d 越窄, 获得
相同 J_1 越困难, 一般 $\Delta t_d = 10 \sim 50 \text{ ns}$ 技术上比较成熟, 则
相应的探针束平均功率约为 100 MW 。

(3) $\frac{S}{N} \propto d^{-\frac{1}{2}}$ (当 $n_{sj} \gg n_{pj}$ 时) 或 d^{-1} (当 $n_{sj} \ll n_{pj}$ 时)

由此可见, 在散射体积中探针束的直径越小越好, 但光束的最小
直径受到衍射的限制, 即束的发散角限制。一般要求束的发散
角~~限制~~, θ_d 越小越好, 一般最小发散角在 mrad 量级。而
且, d 也与激光棒的大小有关, 又与 J_1 有关, 当 J_1 大时, d 也相
应大些 (当 θ_d 一定时)。

(4) $\frac{S}{N} \propto (E T \eta)^{\frac{1}{2}}$

由此可见, 为了使散射信号的信噪比足够大, 要求光谱仪的
集光本领 E , 傅里叶变换分辨率 T 和探测器的量子效
率 η 越大越好。

能量 $J_1 = 4 \sim 10 \text{ J}$, $\Delta t_d \approx 10 \text{ ns}$

$\Delta \theta_d \leq 1 \text{ mrad}$

二. 散射系统的相对校定和 T_e 的测定

由前述知各散射谱线的光子数表达式为:

$$n_{sj} = J_i n_{e0} l_s \Delta R_r C_{sj} T_j \eta_j G_j \Delta \lambda_j \quad (G_j \text{ 为择优因子})$$

其中 $C_{sj} = \frac{r_e^2}{h f_i} \frac{c \Delta \lambda_j}{2 \sqrt{\pi} a \lambda_i \sin \frac{\theta}{2}} \exp \left\{ - \frac{c^2 \lambda_j^2}{4 a^2 \lambda_i^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right\}$

或 $C_{sj} = \frac{r_e^2}{h f_i} \frac{c \Delta \lambda_j}{2 \sqrt{\pi} a \lambda_i \sin \frac{\theta}{2}} \left(1 - 2.5 \frac{\lambda_j}{\lambda_i} + \frac{c^2 \lambda_j^2}{4 a^2 \lambda_i^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right) \exp \left\{ - \frac{c^2 \lambda_j^2}{4 a^2 \lambda_i^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right\}$

这里因子 $(T \eta G)_j$ 是与散射谱的测量几何有关的因子, 它不同的择优谱线的数值是不同的, 令:

$$R_j \equiv T_j \eta_j G_j \Delta \lambda_j$$

为各择优谱线的相对测量灵敏度。因 n_{sj} 表达式中其它因子 (如 $J_i, n_{e0}, l_s, \Delta R_r$) 均是常数, 因此光子数是各择优谱线的相对灵敏度 R_j , 它用于对择优谱线的光子数进行修正, 从而可得校正后的散射谱分布:

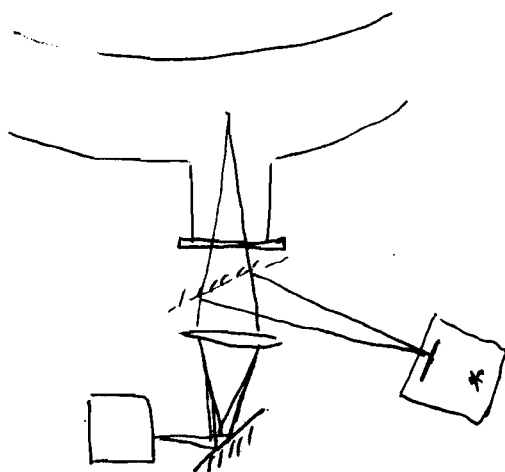
$$\frac{n_{sj}}{R_j} = J_i n_{e0} l_s \Delta R_r C_{sj} \propto C_{sj}$$

一般是利用标准光源 (如钨灯) 进行反定的相对校定:

$$n_{wj} = \frac{P_{wj}}{h f_j} \Delta t_g R_j$$

其中 $P_{wj} = P_w(\lambda_j)$ 已知, 且 Δt_g 已知,

则 $R_j = n_{wj} / \left(\frac{P_{wj}}{h f_j} \Delta t_g \right)$



$$\frac{n_{sj}}{R_j} = \frac{J_i n_{eo} l_s \Delta R_r r_e^2}{2\sqrt{\pi} a h \sin \frac{\theta_s}{2}} \left(1 - 2.5 \frac{\lambda_j^2}{\lambda_i^2} + \frac{c^2 \lambda_j^2}{4 a^2 \lambda_i^2 \sin^2 \frac{\theta_s}{2}} \right) \exp \left[-\frac{c^2 \lambda_j^2}{4 a^2 \lambda_i^2 \sin^2 \frac{\theta_s}{2}} \right] \quad (4)$$

进行相对拟合可得:

$$S_j \equiv \frac{J_i n_{eo} l_s \Delta R_r r_e^2}{\left(1 - 2.5 \frac{\lambda_j^2}{\lambda_i^2} + \frac{c^2 \lambda_j^2}{4 a^2 \lambda_i^2 \sin^2 \frac{\theta_s}{2}} \right)} = \frac{J_i n_{eo} l_s \Delta R_r r_e^2}{2\sqrt{\pi} a h \sin \frac{\theta_s}{2}} \exp \left[-\frac{c^2 \lambda_j^2}{4 a^2 \lambda_i^2 \sin^2 \frac{\theta_s}{2}} \right]$$

从 $\ln S_j \sim \lambda_j^2$ 曲线与直线拟合的斜率, 可求出 T_e . 此外, 将直线外推到 $\lambda_j = 0$ 处 (即 $\lambda_s = \lambda_i$), 从而可得,

$$S_0 \equiv \frac{J_i l_s \Delta R_r r_e^2}{2\sqrt{\pi} a h \sin \frac{\theta_s}{2}} n_{eo}$$

三. 散射功率的绝对校准和 n_{eo} 的测定

常用的绝对校准方法是利用气体分子的瑞利散射, 该极适可原位进行, 可测定极谱精度。

瑞利散射以散射中心是气体分子, 且散射频率与入射频率相同, 但改变了传播方向, 散射波是线偏振的, 在散射截面与传播方向有关, 当入射波电矢量垂直于散射平面时, 垂直散射截面

$$\sigma_R = \frac{4\pi^2 (\mu-1)^2}{n_{R0}^2 \lambda_i^4}$$

n_{R0} 是校准状态下气体分子密度。瑞利散射光电数为:

$$n_s^R = \frac{J_i \sigma_R n_R l_s \Delta R_r}{h f_i} \quad T_0 \eta_0 \quad n_R \text{ 是气体分子数}$$

透射光散射中心是散射光电数为 (单位立体角内)

$$n_{so}^T = \frac{J_i r_e^2 n_{eo} l_s \Delta R_r}{h 2\sqrt{\pi} a \sin \frac{\theta_s}{2}} \quad R_0 = \frac{J_i r_e^2 n_{eo} l_s \Delta R_r}{2\sqrt{\pi} a h \sin \frac{\theta_s}{2}} R_0$$

两式比为:

$$\frac{n_{so}^T}{n_s^R} = \frac{n_{eo}}{n_R} \cdot \frac{r_e^2}{\sigma_R} \cdot \frac{\Delta \lambda_0}{\lambda_i} \cdot \frac{c}{2\sqrt{\pi} a \sin \frac{\theta_s}{2}}$$

四. 应用:

1. 金刚石等离体

$$n_e = 10^{18} \sim 10^{21} \text{ m}^{-3}, \quad T_e \geq 100 \text{ eV}$$

红宝石激光腔 $\lambda_i = 6943 \text{ \AA}$, $\Delta\theta_d < 1 \text{ mrad}$,

$$J_i = 5 \sim 10 \text{ J}, \quad \Delta t_e = 10 \sim 50 \text{ ns}$$

光电倍增管, CCD 象增强器

钠玻璃激光腔, 倍频 $\lambda_i = 5300 \text{ \AA}$

钠玻璃激光腔, 基频 $\lambda_i = 1.06 \mu\text{m}$, 雷崩 = 极窄

$$\text{Nd:YAG} : \Delta L = \frac{c}{2} (\Delta \tau_d^2 + \Delta \tau_d^2 + \Delta \tau_{dy}^2)^{1/2}$$

2. 微等离子体

$$n_e \geq 5 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}, \quad T_e \geq 1 \text{ eV}$$

红宝石激光器 (YAG) - 倍频 $\lambda_i = 5300 \text{ \AA}$

$$J_i = 0.5 \text{ J}, \quad \text{重复频率 } 10 \text{ Hz}, \quad \Delta t_e \approx 10 \text{ ns}$$

多次重复测量结果 5000 次 (约 8 分钟)

支计数 光谱仪

Spectrochimica Acta Part B 57, 201~241 (2002)

3. 空间等离子体

微波散射雷达, 背散射, 飞行的同轴电缆散射位置

$$\alpha = 1.07 \times 10^{-11} \frac{\lambda_i [\mu\text{m}]}{\sin \frac{\theta_i}{2}} \left(\frac{n_e [\text{m}^{-3}]}{T_e [\text{eV}]} \right)^{1/2}$$

$$P_s = \frac{1}{4} P_i r_e^2 \lambda^2 \sin^2 \frac{\theta_i}{2} \tilde{n}_e^2$$

4. 激光等离子体

$$n_e = 1.1 \times 10^{27} (\lambda [\mu\text{m}])^{-2} \quad \text{m}^{-3}$$

$$\alpha = 1.07 \times 10^{-11} \frac{\lambda [\mu\text{m}]}{\sin \frac{\theta}{2}} \left(\frac{n_e [\text{m}^{-3}]}{T_e [\text{eV}]} \right)^{1/2}$$

对于铷玻璃 3ω 激光 $n_e = 9 \times 10^{27} \text{ m}^{-3}$

若用 4ω 做探针束时 $\lambda_i = 0.265 \mu\text{m}$, $n_e = 9 \times 10^{26}$, $T_e = 1 \text{ keV}$

$$\alpha = 1.07 \times 10^{-11} \frac{0.265}{\sin \frac{\theta}{2}} \left(\frac{10^{26}}{10^3} \right)^{1/2} = 1.27$$

只有当 $\lambda_i = 10 \text{ \AA}$ 时 α 才小于 4.7×10^{-3} , 非相干散射

§. 3.7 光子散射实验的若干问题

$$f_{pe} = 9 \times (n_e [m^{-3}])^{1/2}$$

一. 光子散射

1. 散射特征变化和 α 选择

$$\Delta \omega_s = k b = \frac{b}{\alpha \lambda_D} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \frac{b}{a} \omega_{pe}$$

$$\Delta f_s = 0.296 \frac{\sqrt{n_{e0} [m^{-3}]}}{\alpha} \left(\frac{T_e}{A T_e} \right)^{1/2}$$

当 $\alpha \gg 1$ 时

$$\begin{aligned} \Delta \omega_s &= k c_s \\ &= \frac{c_s}{\alpha \lambda_D} \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{\sqrt{2} c_s}{a} \omega_{pe} \end{aligned}$$

2. 散射比例问题

3. 实验排列

二. 量子光子散射

1. 散射波矢选择

λ 在, ω 大, 方向不好

光子数守恒相同,

波数守恒相同



2. 散射比例问题 - 外差

设发射电场为 $E_s(t)$, 噪声辐射电场为 $E_n(t)$

本振电场为 $E_e(t) = E_{e0} \exp[i\omega_e t]$

则它们各自在外差探测器上产生的光电流分别为:

$$\langle i_s \rangle = \frac{e\eta}{hf} A r c \epsilon_0 \langle E_s^*(t) E_s(t) \rangle = e\sigma \langle |E_s|^2 \rangle$$

$$\langle i_n \rangle = e\sigma \langle |E_n|^2 \rangle$$

$$\langle i_e \rangle = e\sigma \langle |E_{e0}|^2 \rangle = e\sigma E_{e0}^2 \gg \langle i_s \rangle, \langle i_n \rangle$$

其中 $\sigma \equiv \frac{\eta}{hf} c \epsilon_0 A r$

当它们同时入射到探测器上时, 其总电流为

$$\langle i \rangle = e\sigma \langle E^*(t) E(t) \rangle$$

其中 $E(t) = E_e(t) + E_s(t) + E_n(t)$

取 E_s, E_n 的一级近似, 得

$$\langle i \rangle = e\sigma \left\{ \langle |E_e|^2 \rangle + \langle E_e^* E_s \rangle + \langle E_e E_s^* \rangle + \langle E_e^* E_n \rangle + \langle E_e E_n^* \rangle \right\}$$

其自相关函数为

$$C(\tau) = \langle i(t) i(t+\tau) \rangle = e^2 \sigma^2 \delta(\tau) \langle E^*(t) E(t) \rangle + e^2 \sigma^2 \langle E^*(t) E(t) E^*(t+\tau) E(t+\tau) \rangle$$

它是由两部分组成:

第一项是在 t 和 $t+\tau$ 时刻发射同频率的光子, 第二项是在 t 和 $t+\tau$ 时刻发射不同频率的光子如左图。

取 $\langle i_s \rangle, \langle i_n \rangle$ 的一级近似, 得:

$$\begin{aligned} C(\tau) &\approx e^2 \sigma^2 E_{e0}^2 \delta(\tau) + 2 e^2 \sigma^2 E_{e0}^2 [\langle |E_s|^2 \rangle + \langle |E_n|^2 \rangle] + e^2 \sigma^2 E_{e0}^4 \\ &\quad + e^2 \sigma^2 E_{e0}^2 e^{-i\omega_e \tau} \langle E_s^*(t) E_s(t+\tau) \rangle + e^2 \sigma^2 E_{e0}^2 e^{i\omega_e \tau} \langle E_s(t) E_s^*(t+\tau) \rangle \\ &\quad + e^2 \sigma^2 E_{e0}^2 e^{-i\omega_e \tau} \langle E_n^*(t) E_n(t+\tau) \rangle + e^2 \sigma^2 E_{e0}^2 e^{i\omega_e \tau} \langle E_n(t) E_n^*(t+\tau) \rangle \end{aligned}$$

设散射电场为 $E_s(t)$, 噪声辐射电场为 $E_n(t)$

$$\text{本振电场为 } E_L(t) = E_0 \exp[i\omega_L t]$$

且 $|E_L| \gg |E_s|, |E_n|$

则 它们各自在外差器回路上产生的光电流分别为:

$$\langle i_s \rangle = \frac{e\eta}{hf} A_r c \epsilon_0 \langle E_s^*(t) E_s(t) \rangle = e \sigma \langle |E_s|^2 \rangle$$

$$\langle i_n \rangle = e \sigma \langle |E_n(t)|^2 \rangle$$

$$\langle i_L \rangle = \sigma e \langle |E_L(t)|^2 \rangle = e \sigma E_0^2 = i_{L0} \gg \langle i_s \rangle, \langle i_n \rangle$$

即
$$\sigma \equiv \frac{\eta}{hf} c \epsilon_0 A_r$$

当它们同时入射到探测器回路上时, 总光电流为

$$\langle i \rangle = \frac{e\eta}{hf} A_r c \epsilon_0 \langle E^*(t) E(t) \rangle = e W^{(1)}(t)$$

即
$$W^{(1)}(t) \equiv \sigma \langle E^*(t) E(t) \rangle \quad \text{为单位时间发射光电子的期望值(数)}$$

$$E(t) = E_L(t) + E_s(t) + E_n(t)$$

其自相关函数为:

$$C(\tau) = \langle i(t) i(t+\tau) \rangle = e^2 \delta(\tau) \langle W^{(1)}(t) \rangle + e^2 \langle W^{(1)}(t) W^{(1)}(t+\tau) \rangle$$

它是由两部分组成的:

第一项是在 t 和 $t+\tau$ 时刻发射的光电子是相同的, 即 $\delta(\tau) \langle W^{(1)}(t) \rangle$

第二项是在 t 和 $t+\tau$ 时刻发射的光电子是不同的, 即

$$W^{(1)}(t) W^{(1)}(t+\tau) = W^{(2)}(t, t+\tau)$$

将 $\dot{\lambda}_{20} = e\sigma E_{20}^2$, $\langle \dot{\lambda}_s \rangle = e\sigma \langle |E_s|^2 \rangle$ 及 $\langle \dot{\lambda}_n \rangle = e\sigma \langle |E_n|^2 \rangle$ 代入, 得:

$$c(t) = e\dot{\lambda}_{20}\delta(t) + 2\dot{\lambda}_{20}\langle \dot{\lambda}_s \rangle + 2\dot{\lambda}_{20}\langle \dot{\lambda}_n \rangle + \dot{\lambda}_{20}^2$$

$$+ \dot{\lambda}_{20} e\sigma \langle E_s^*(t) E_s(t+t\tau) \rangle e^{-i\omega_s\tau} + \dot{\lambda}_{20} e\sigma \langle E_s(t) E_s^*(t+t\tau) \rangle e^{i\omega_s\tau} \\ + \dot{\lambda}_{20} e\sigma \langle E_n^*(t) E_n(t+t\tau) \rangle e^{-i\omega_n\tau} + \dot{\lambda}_{20} e\sigma \langle E_n(t) E_n^*(t+t\tau) \rangle e^{i\omega_n\tau}$$

取 $c(t)$ 的付氏变换

$$P(f_s) = \int_{-\infty}^{\infty} dt c(t) e^{i\omega_s t}$$

由上式可得:

$$P(f_s) = e\dot{\lambda}_{20} + 2\pi\delta(f_s) \dot{\lambda}_{20}^2 + 2\pi\delta(f_s) \times 2\dot{\lambda}_{20} (\langle \dot{\lambda}_s \rangle + \langle \dot{\lambda}_n \rangle) \\ + \dot{\lambda}_{20} e\sigma \int dt \left\{ \langle E_s^*(t) E_s(t+t\tau) \rangle e^{i(\omega_s-\omega_s)\tau} + \langle E_s(t) E_s^*(t+t\tau) \rangle e^{i(\omega_s+\omega_s)\tau} \right\} \\ + \dot{\lambda}_{20} e\sigma \int dt \left\{ \langle E_n^*(t) E_n(t+t\tau) \rangle e^{i(\omega_s-\omega_n)\tau} + \langle E_n(t) E_n^*(t+t\tau) \rangle e^{i(\omega_s+\omega_n)\tau} \right\}$$

因为

$$e\sigma \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle E_a^*(t) E_a(t+t\tau) \rangle e^{i(\omega_s-\omega_a)\tau} \\ = \frac{e\eta}{hf_s} c\epsilon_0 A_r \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle E_a^*(t) E_a(t+t\tau) \rangle e^{i(\omega_s-\omega_a)\tau} \\ = \frac{e\eta}{hf_s} P_a(f_s-f_a) \quad a=s,n$$

所以有:

$$P(f_s) = e\dot{\lambda}_{20} + 2\pi\delta(f_s) \left\{ \dot{\lambda}_{20}^2 + 2\dot{\lambda}_{20}\langle \dot{\lambda}_s \rangle + 2\dot{\lambda}_{20}\langle \dot{\lambda}_n \rangle \right\} \\ + \frac{e\eta}{hf_s} P_s(f_s-f_s) + \frac{e\eta}{hf_s} P_n(f_s-f_n)$$

其中 $P_a(f_s+f_a) = 0$

则有

$$C(\tau) = e^2 \delta(\tau) \langle W^{(1)}(t) \rangle + e^2 \langle W^{(1)}(t) W^{(1)}(t+\tau) \rangle$$

$$= e^2 \delta(\tau) \langle E^*(t) E(t) \rangle + e^2 \delta^2 \langle E^*(t) E(t) E^*(t+\tau) E(t+\tau) \rangle$$

取 $\langle i_s \rangle, \langle i_n \rangle$ 为 - 平均值 (见 4.1), 得:

$$C(\tau) \approx e i_{s0} \delta(\tau) + i_{s0}^2 + 2 i_{s0} \langle i_s \rangle + 2 i_{s0} \langle i_n \rangle$$

$$+ i_{s0} \langle i_s \rangle \left\{ e^{-i\omega_s \tau} g_s(\tau) + e^{i\omega_s \tau} g_s^*(\tau) \right\}$$

$$+ i_{s0} \langle i_n \rangle \left\{ e^{-i\omega_n \tau} g_n(\tau) + e^{i\omega_n \tau} g_n^*(\tau) \right\}$$

其中

$$g_\alpha(\tau) = \frac{\langle E_\alpha^*(t) E_\alpha(t+\tau) \rangle}{\langle |E_\alpha(t)|^2 \rangle} \quad \alpha = s, n \quad (\text{归一化的相关函数})$$

取 $C(\tau)$ 的付里叶变换:

$$P(f_s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau C(\tau) e^{+i\omega_s \tau}$$

由上式可得:

$$P(f_s) = e i_{s0} + i_{s0}^2 2\pi \delta(f_s) + 2 i_{s0} (\langle i_s \rangle + \langle i_n \rangle) 2\pi \delta(f_s)$$

$$+ i_{s0} \langle i_s \rangle \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[g_s(\tau) e^{i(\omega_s - \omega_s)\tau} + g_s^*(\tau) e^{i(\omega_s + \omega_s)\tau} \right]$$

$$+ i_{s0} \langle i_n \rangle \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[g_n(\tau) e^{i(\omega_s - \omega_n)\tau} + g_n^*(\tau) e^{i(\omega_s + \omega_n)\tau} \right]$$

所以 $g_\alpha(\tau)$ 的付里叶变换在 λ 上式 (4.10) 中, 得:

$$\langle i_\alpha \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle E_\alpha^*(t) E_\alpha(t+\tau) \rangle}{\langle |E_\alpha(t)|^2 \rangle} e^{i(\omega_s - \omega_\alpha)\tau} d\tau$$

$$= \frac{e\eta}{hf_s} A_r C E_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle E_\alpha^*(t) E_\alpha(t+\tau) \rangle e^{i(\omega_s - \omega_\alpha)\tau}$$

$$= \frac{e\eta}{hf_s} P_\alpha(f_s - f_\alpha)$$

$$P_{\alpha}(f_s - f_e) \equiv \text{Ar c } \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle E_{\alpha}^*(t) E_{\alpha}(t+\tau) \rangle e^{i(\omega_s - \omega_e)\tau}$$

故有

$$\begin{aligned} P(f_s) = & e i_{L0} + 2\pi \delta(f_s) [i_{L0}^2 + 2 i_{L0} \langle i_s \rangle + 2 i_{L0} \langle i_n \rangle] \\ & + i_{L0} \frac{e\eta}{h f_s} [P_s(f_s - f_e) + P_s(f_s + f_e)] \\ & + i_{L0} \frac{e\eta}{h f_s} [P_n(f_s - f_e) + P_n(f_s + f_e)] \end{aligned}$$

上式中含有的物理意义：

第一项： $e i_{L0}$ ，是外差振荡器产生的载波噪声功率谱，这是白噪声，与频率无关

第二项： $2\pi \delta(f_s) i_{L0}^2$ ，为本机振荡外差振荡器上产生的直流电流的功率谱，它只有在 $f_s = 0$ 时，才不为零

第三项： $i_{L0} \frac{e\eta}{h f_s} P_s(f_s - f_e)$ ，是载波信号与本机振荡器产生的功率谱，它是相对于 f_e 频率的功率谱

第四项： $i_{L0} \frac{e\eta}{h f_s} P_n(f_s - f_e)$ ，是混频器的噪声功率谱

由此可见：外差振荡器产生的中频信号功率与信号功率成正比，而且当本机振荡是相干的单色电磁波，且没有相位噪声时，它所产生的中频功率谱是信号功率谱的复制，即不同的只是有一固定的频率 $(f_s - f_e)$

外差振荡器输出信号与噪声的功率比为：

$$\frac{S}{N} = \frac{i_{L0} \frac{e\eta}{h f_s} P_s(f_s - f_e)}{e i_{L0} + i_{L0} \frac{e\eta}{h f_s} P_n(f_s - f_e)} = \frac{P_s(f_s - f_e)}{\frac{h f_s}{e\eta} + P_n(f_s - f_e)}$$

由此可见：当没有噪声功率谱时，即外差振荡器输出的中频信号功率与噪声功率比为 1，即信号功率与噪声功率比为 $\frac{h f_s}{e\eta}$ ，这就是外差振荡

Equivalent

噪声等效功率为 NEP (Noise Equivalent Power), 这由探测器的
响应率 R 决定的。

$$S \equiv \frac{S}{N} \equiv \frac{P_s(f_s - f_0)}{NEP + P_n(f_s - f_0)}$$

这是外差探测的噪声功率谱密度。

近似为常数

$$P(f_s) = \frac{hf_s}{\eta} + P_s(f_s - f_0) + P_n(f_s - f_0)$$

这是随机变量, 信号功率是 $P_s(f_s - f_0)$ 或其期望值 $E[P_s(f_s - f_0)]$,
噪声功率是 $P(f_s)$ 的方差 $\sigma[P(f_s)]$, 故信噪比为:

$$\frac{S}{N} = \frac{E[P_s(f_s - f_0)]}{\sigma[P(f_s)]} = \frac{P_s(f_s - f_0)}{\frac{hf_s}{\eta} + P_s(f_s - f_0) + P_n(f_s - f_0)} < 1$$

M 次平均后, 信号功率为

$$\sigma[P(f)] = \frac{E[P(f)]}{\sqrt{M}}$$

21

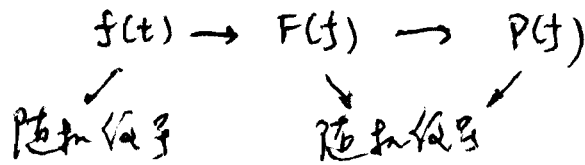
$$\begin{aligned} \frac{S}{N} &= \frac{E[P_s(f_s - f_0)]}{E[\frac{hf_s}{\eta} + P_n(f_s - f_0) + P_s(f_s - f_0)]} \sqrt{M} \\ &= \frac{P_s(f_s - f_0)}{\frac{hf_s}{\eta} + P_n(f_s - f_0) + P_s(f_s - f_0)} \sqrt{M} \\ &= \frac{(\frac{S}{N})_{\min}}{1 + (\frac{S}{N})_{\min}} \sqrt{M} \end{aligned}$$

$$\alpha = 1.07 \times 10^{-11} \frac{\lambda_n [\mu m]}{\sin \frac{\theta_1}{2}} \left(\frac{n_e [m^{-3}]}{T_e [eV]} \right)^{\frac{1}{2}} \geq 1$$

≡ (62)

$n_e = 10^{23} m^{-3}$, $T_e = 2eV$, $T_i \ll T_e$
 PRL 62 (1989)
 1848

随机信号的统计



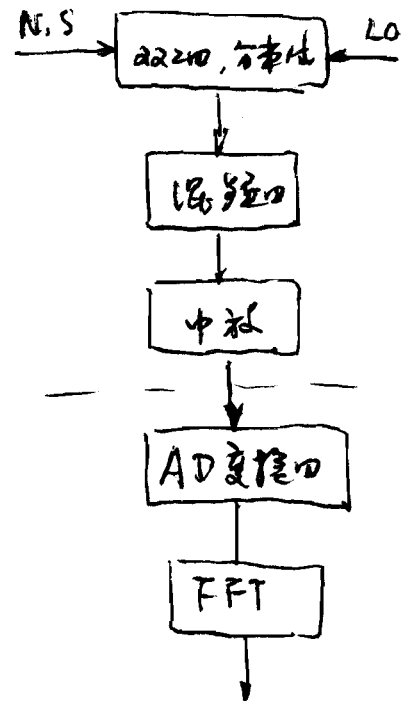
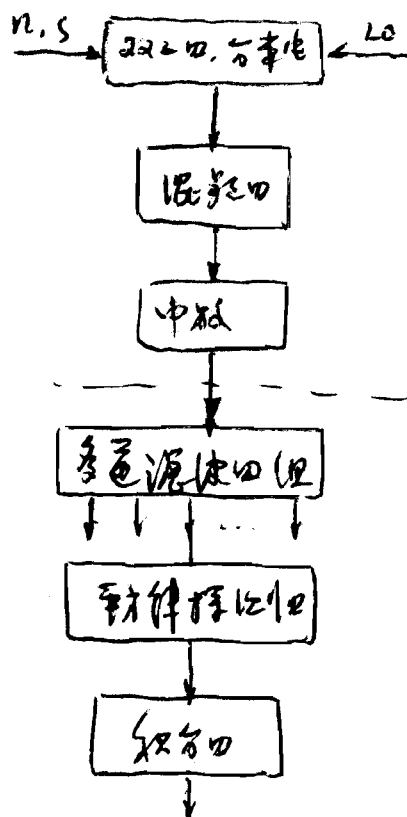
$$Var\{P(f)\} = \frac{[E\{P(f)\}]^2}{M}$$

方差

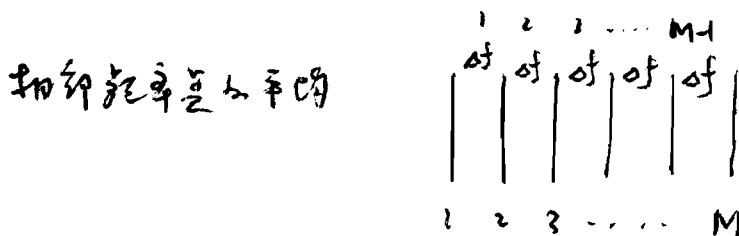
$$\sigma\{P(f)\} = \frac{E\{P(f)\}}{\sqrt{M}}$$

标准误差

PRL 62 (1989),
 2833 噪声谱



对FFT: 采样时间 $T \rightarrow$ 频率分辨率 $\Delta f = 1/T$
 采样频率 $f_s \rightarrow$ 信号带宽(B) $B = \frac{1}{2} f_s$



$$\Delta B = B_m = (M-1) \Delta f$$

$$M = \frac{\Delta B}{\Delta f} + 1$$

$$= \Delta B T + 1$$

PRL 62 (1989), 2833

TCA 控制 (端土)

$n_e = 1.2 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ $T_e = 700 \text{ eV}$ $T_i = 400 \text{ eV}$ $Z_{\text{eff}} = 2.5$
 $\lambda_i = 385 \mu\text{m}$ (支路 (24 级支路) 0.55) $P_i = 0.5 \text{ MW}$ $\theta_s = 40^\circ$
 $S/N = 0.6$ 通数 = 20 $1.4 \mu\text{s}$ $\Delta B = 80 \text{ MHz}$
 $T = 5 \mu\text{s}$
 $\sigma T_i / T_i = 10\%$



$$\alpha = 1.07 \times 10^{-11} \frac{385}{0.707} \left(\frac{1.2 \times 10^{20}}{700} \right)^{1/2} = 2.4$$

$$B = \frac{\sqrt{2} \omega_{pi}}{2\pi \alpha} \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{1/2} = 1.02 \text{ GHz} \quad (e^{-1} \text{ 截止})$$

$$n_c = 1.11 \times 10^{27} \lambda_i^{-2} [\mu\text{m}] = 7.5 \times 10^{21} \text{ (m}^{-3}\text{)}$$

$n_e = 7 \times 10^{14} \text{ m}^{-3}$
 $T_e = 670 \text{ eV}$
 $Z_{\text{eff}} = 4.4$
 $T_i = 250 \text{ eV}$

设计:

1. P_i

$$P_s = \frac{P_i}{A_i} v_e^2 n_{e0} l_s A_i \Delta R_r S(k) = \text{NEP} \times B \Rightarrow P_i$$

$S(k) \approx 0.5$, $A_i \Delta R_r = \frac{1}{4} \lambda_s^2$

等效长度

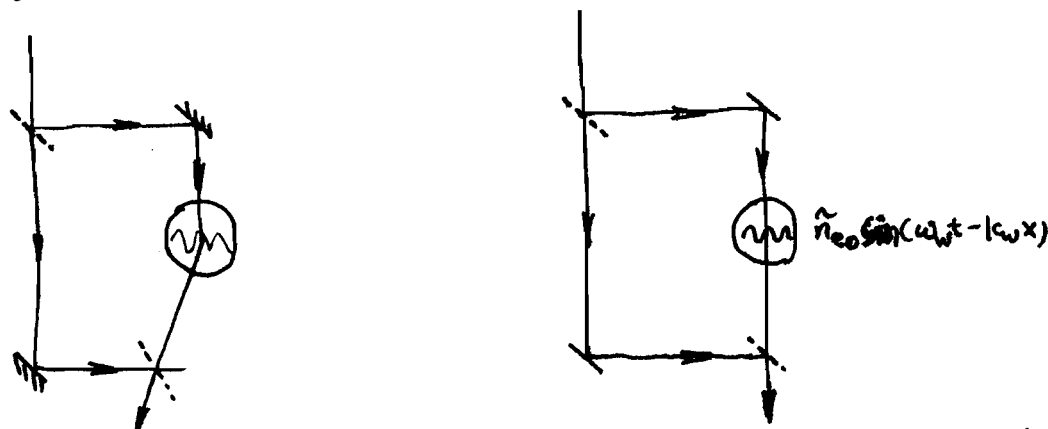
$$A_i = \frac{1}{2} \pi w_{i0}^2 \quad l_s = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{w_{i0}}{\sin \theta_s}$$

2. 等效长度

$$\frac{S}{N} \approx 0.5 \sqrt{\Delta B T + 1}$$

$\frac{S}{N} = 2$ 时 T_i 精度 30%
 10 时 10%

书上 P.273 页: 当用相干探测法测量散射波时, 散射和干涉的定域安排是相似的, 如下图所示:



在这种情况下, 干涉仪在其功能上可等效地看成为极小角散射。P.283 页 习题 7.8, 当有相干的主波存在 $\tilde{n}_{e0} \sin(\omega_0 t - k_0 x)$ 垂直于入射波的方向传播时, 总散射系数为: $P_s = \frac{1}{4} P_i r_e^2 l_s^2 \lambda_s^2$ (当 $k_i \gg k_w$ 时)。

这可以证明如下:

这时探测波通过等效介质的相位变化为:

$$\Delta\phi(t) = (1 - \mu_p) l K_i = r_e \lambda_i l n_e$$

因为: $n_e(t) = n_{e0} + \tilde{n}_{e0} \sin(\omega_0 t - k_0 x)$

所以: $\Delta\phi(t) = r_e \lambda_i l_s n_{e0} + r_e \lambda_i l_s \tilde{n}_{e0} \sin(\omega_0 t - k_0 x)$

故探测波通过等效介质的电势为:

$$\begin{aligned} E(\vec{r}, t) &= E_{i0} e^{i[\omega_i t - k_i R + \Delta\phi(t)]} \\ &= E_{i0} e^{i[\omega_i t - k_i R + \phi_0]} e^{i r_e \lambda_i l_s \tilde{n}_{e0} \sin(\omega_0 t - k_0 x)} \end{aligned}$$

其中 $\phi_0 \equiv r_e \lambda_i l_s n_{e0}$

根据恒等式 $e^{i\zeta \sin\phi} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_\ell(\zeta) e^{i\ell\phi}$

故有: $E(\vec{r}, t) = E_{i0} \sum_{-\infty}^{\infty} J_\ell(\xi) e^{i[(\omega_i + \ell\omega_0)t - k_i R - \ell k_0 x + \phi_0]}$

其中 $\xi \equiv r_e \lambda_i l_s \tilde{n}_{e0} \ll 1$

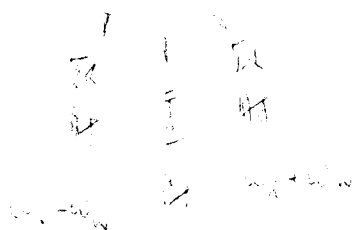
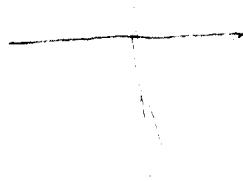
根据2重贝塞尔函数展开式, 有:

$$J_0(\xi) = 1 - \frac{1}{4}\xi^2, \quad J_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi, \quad J_{-1}(\xi) = -\frac{1}{2}\xi$$

故:

~~$$E(\vec{r}, t) = (1 - \frac{1}{4}r_e^2 \lambda_i^2 \lambda_j^2 \tilde{n}_{e0}^2) E_{i0} + \frac{1}{2} r_e \lambda_i^2 \lambda_j^2 \tilde{n}_{e0} E_{i0} e$$~~

$$\begin{aligned} E(\vec{r}, t) = & E_{i0} e^{i[\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r} + \phi_0]} \\ & + \frac{1}{2} r_e \lambda_i \lambda_j \tilde{n}_{e0} E_{i0} e^{i[(\omega_i + \omega_j)t - \vec{k}_i \cdot \vec{r} - \vec{k}_j \cdot \vec{r} + \phi_0]} \\ & - \frac{1}{2} r_e \lambda_i \lambda_j \tilde{n}_{e0} E_{i0} e^{i[(\omega_i - \omega_j)t - \vec{k}_i \cdot \vec{r} + \vec{k}_j \cdot \vec{r} + \phi_0]} \end{aligned}$$



二. 超短脉冲反射 —— 非线性效应及稳定性

研究非线性稳定性过程：三波共振相互作用

共振吸收 (RA)

$$\omega_0 = \omega_{EPW}$$

离子声变 (IAD)

$$\omega_0 = \omega_{ia} + \omega_{EPW}$$

$k \approx 2k_0$ SBS Brillouin

$$\omega_0 = \omega_s + \omega_{ia}$$

$k \approx k_0 \sim 2k_0$ SRS

$$\omega_0 = \omega_s + \omega_{EPW}$$

$n \ll \frac{n_c}{4}$ TPD

$$\omega_0 = \omega_{EPW} + \omega_{EPW}$$

LPI

$$\omega_{EPW} = \omega_{EPW1} + \omega_{IA}$$

$$\omega_{ois}^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k_{ois}^2$$

$$\omega_{EPW}^2 = \omega_{pe}^2 + 3V_e^2 k_{EPW}^2$$

$$\omega_{IAW} = k_{IAW} C_s$$

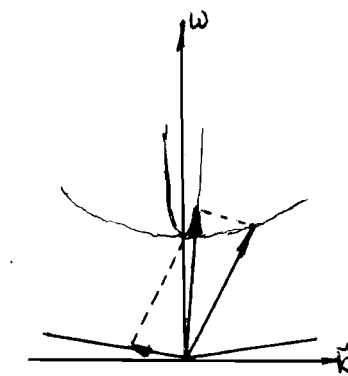
$$n_e \approx n_c$$

$$n_e \approx n_c$$

$$n_e < n_c \text{ Stimulated Brillouin}$$

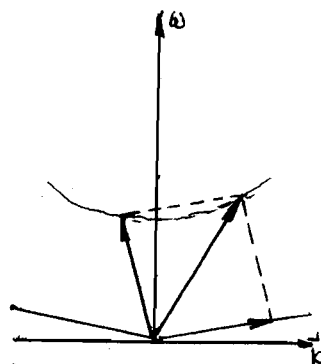
$$n_e \leq \frac{1}{4} n_c \text{ Stimulated Raman}$$

$$n_e \approx \frac{1}{4} n_c \text{ Two-plasmon Decay}$$

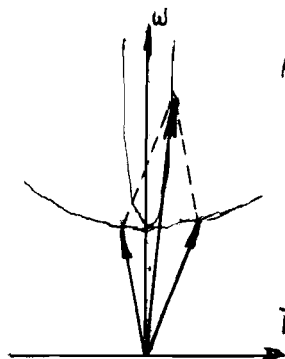


IAD (PD): $\omega_0 = \omega_{ia} + \omega_{EPW}$

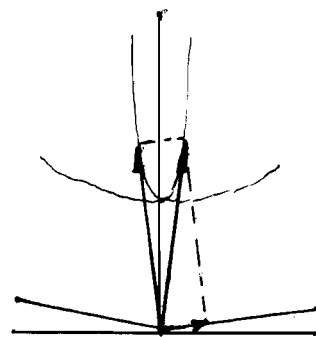
LDI



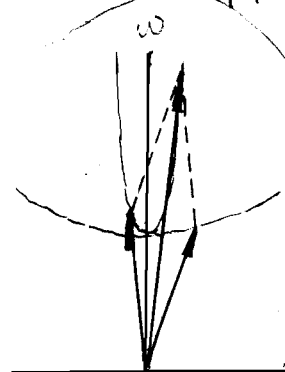
LD: $\omega_{EPW} = \omega_{EPW} + \omega_{ia}$



TPD: $\omega_0 = \omega_{EPW1} + \omega_{EPW2}$ 产生两个等离子体波



SBS: $\omega_0 = \omega_s + \omega_{ia}$



SRS: $\omega_0 = \omega_s + \omega_{EPW}$

电场强度为 $\vec{E}_0$ 的波通过时

产生非线性效应，如谐波、参量共振等

非线性效应 δn (这里指非线性极化率)

~ 谐波(波)，因为电场 $\vec{E}$ 与极化

率作用下产生 $V_L = \frac{e \vec{E}_0}{m \omega_0}$ ， ω

产生极化电流 $\delta \vec{J} = -e V_L \delta n$ 。

该电流与入射波共振，产生极化

电流产生散射波，其电场

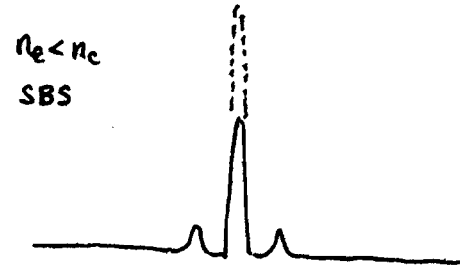
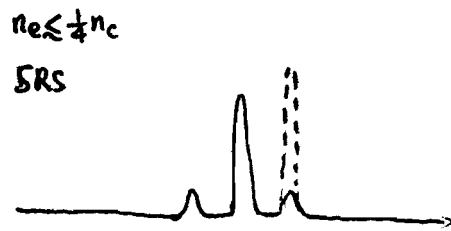
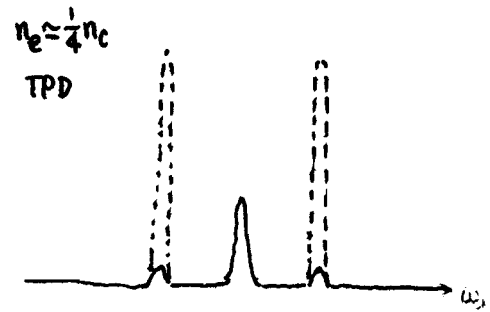
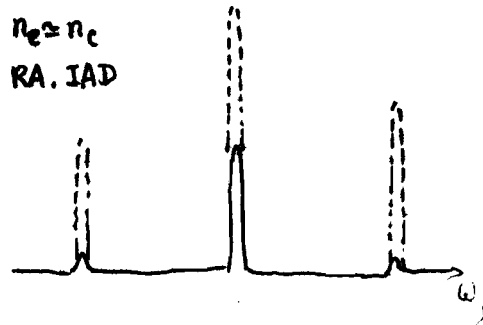
为 $\delta \vec{E}$ ，该波与入射波共振

$$\text{产生波在 } \nabla \left(\frac{\vec{E}^2}{2\epsilon_0} \right) = \nabla \left(\frac{\vec{E} \cdot \delta \vec{E}}{\epsilon_0} \right)$$

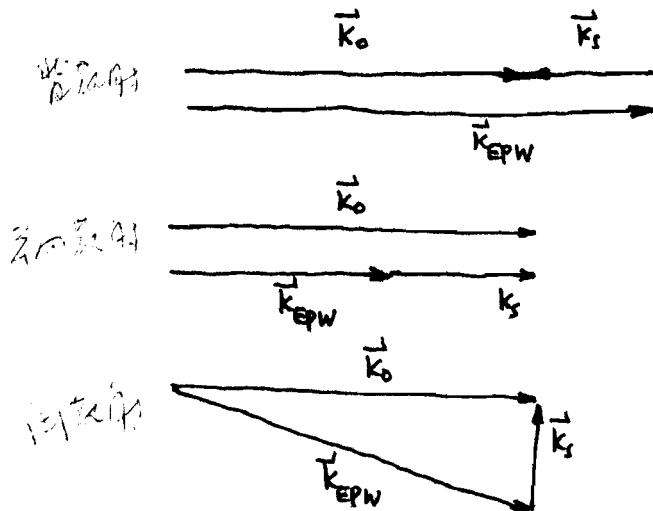
产生，因为非线性极化率

为，由于非线性过程， ω

由于这些参量变化过程令从等离子体噪声中生长出的离子声波和电子等离子体波，因而用于研究这些过程的汤姆逊散射是超热相干散射，如下面所示：



以SRS为例：



与Thomson散射类似，它们必须满足能量和动量守恒条件：

$$\omega_0 = \omega_s + \omega_{EPW} \geq 2\omega_{pe}$$

$$\vec{k}_0 = \vec{k}_s + \vec{k}_{EPW}$$

此外，各分波又要各自满足等离子体中的色散关系：

$$\omega_{0,s}^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k_{0,s}^2$$

$$\omega_{EPW}^2 = \omega_{pe}^2 + 3v_e^2 k_{EPW}^2$$

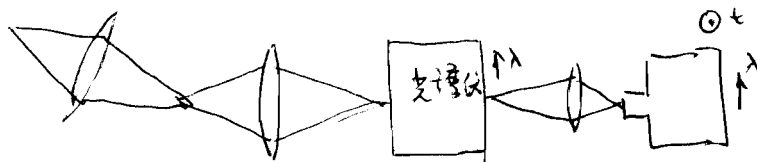
$$\therefore \omega_s, \omega_{EPW} \geq \omega_{pe}$$

$$\therefore \omega_{pe} \leq \omega_0/2$$

因此 SRS 只能发生在 $n_e \leq n_c/4$ 处。

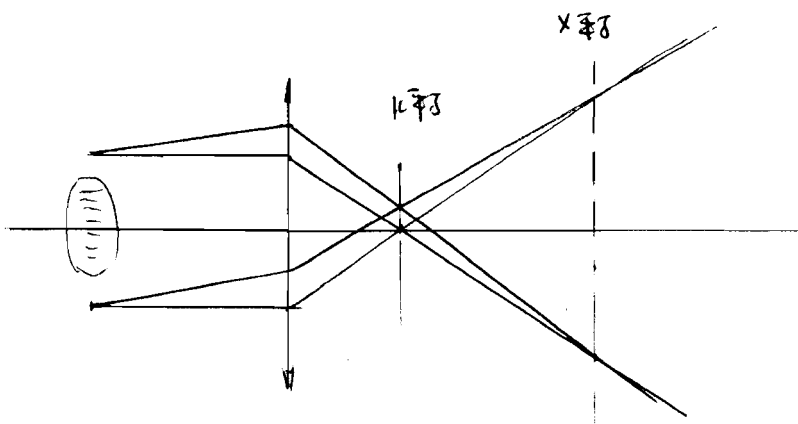
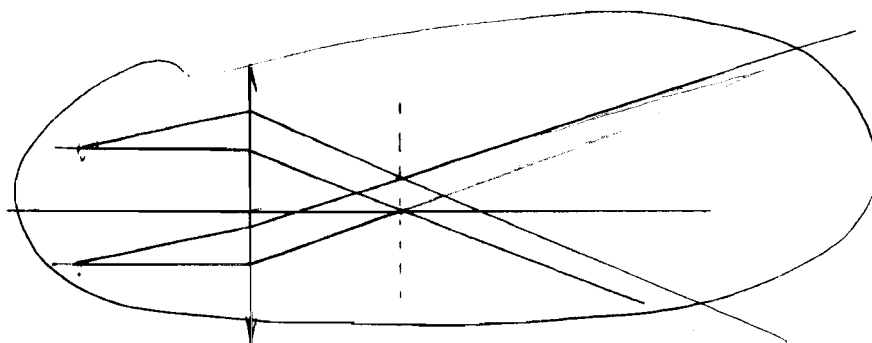
▲ 实验安排:

1. $\omega-t$ 分辨率:



扫描相机, 时间分辨率达 2 ps, 包络时
问分辨率是些

2. $x-t$ 和 $k-t$ 分辨率:



3. $\omega-k$ 分辨率: 光谱相机