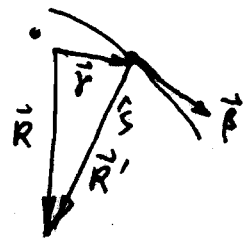


### 第四章 等离子体辐射

#### §4.1 电子回旋辐射

##### 一. 单电子回旋辐射

当辐射的波长远大于带电粒子的回旋半径时，即  $\lambda \gg r_L$ ，由加速运动的电荷的辐射场可以用经典辐射理论处理，且辐射电场为：



★

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c R'} \left\{ \frac{\hat{s} \times [(\hat{s} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \hat{s} \cdot \vec{\beta})^3} \right\}_{t'}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{s} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$$

其中

$$t' = t - \frac{R'}{c} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'(t')|}{c} \approx t - \frac{R}{c} + \frac{\hat{s} \cdot \vec{r}'(t')}{c} \quad (\text{当 } R \gg r_{L0})$$

若电场  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  用巴付里叶变换表示，即

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

则辐射电场的频谱为：

★

$$E(\vec{r}, \omega) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c R'} \int dt e^{-i\omega t} \left\{ \frac{\hat{s} \times [(\hat{s} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \hat{s} \cdot \vec{\beta})^3} \right\}_{t'}$$

变换时是  $t$  为拍息时间  $t'$ ，且利用下式：

$$dt = (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{s}) dt'$$

得：

$$E(\vec{r}, \omega) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c R'} \int dt' e^{-i\omega(t' + R/c - \frac{\hat{s} \cdot \vec{r}'(t')}{c})} \frac{\hat{s} \times [(\hat{s} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \hat{s} \cdot \vec{\beta})^3}$$

利用恒等式：

$$\frac{\hat{s} \times [(\hat{s} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \hat{s} \cdot \vec{\beta})^3} = \frac{d}{dt'} \left\{ \frac{\hat{s} \times (\hat{s} \times \vec{\beta})}{(1 - \hat{s} \cdot \vec{\beta})} \right\}$$

对上式定积分求平方, 得: P. 133~134

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{i\omega q}{4\pi\epsilon_0 c R'} \int dt' \hat{s} \times (\hat{s} \times \vec{\beta}) e^{i\omega(t' + \frac{R}{c} - \frac{\hat{s} \cdot \vec{r}}{c})}$$

由傅里叶变换 Parseval 定理, 可得单位立体角内辐射功率为:

$$\frac{dW(\omega)}{d\Omega} = \int R'^2 (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \hat{s} dt = \epsilon_0 c R'^2 \int |\vec{E}(\vec{r}, \omega)|^2 dt$$

$$= \frac{\epsilon_0 c R'^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}(\vec{r}, \omega)|^2 d\omega$$

将  $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$  的表达式代入得:  $\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{\epsilon_0 c R'^2}{2\pi} |\vec{E}(\vec{r}, \omega)|^2$

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega^2}{32\pi^3 \epsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt' \hat{s} \times (\hat{s} \times \vec{\beta}) e^{-i\omega(t' - \frac{\hat{s} \cdot \vec{r}}{c})} \right|^2$$

这里与自由运动的辐射功率表达式, 区别在于相位因子, 这里已忽略相位因子中略去了  $\frac{R}{c}$  因子, 因此与  $t'$  无关。

现考虑自由运动中粒子的运动方程:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = -e [\vec{v} \times \vec{B}_0]$$

该运动方程解为:

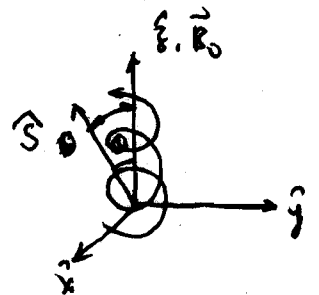
$$\vec{\beta} = \beta_{\perp} (\hat{x} \cos \omega_{ce} t + \hat{y} \sin \omega_{ce} t) + \beta_{\parallel} \hat{z}$$

$$\frac{\vec{r}}{c} = \frac{\beta_{\perp}}{\omega_{ce}} (\hat{x} \sin \omega_{ce} t - \hat{y} \cos \omega_{ce} t) + \beta_{\parallel} t \hat{z}$$

$$\text{其中 } \omega_{ce} \equiv \frac{eB_0}{m_{e0}} \sqrt{1-\beta^2} = \omega_{ce0} \sqrt{1-\beta^2} \quad \omega_{ce0} \equiv \frac{eB_0}{m_{e0}}$$

不失一般性, 选辐射的传播方向为:

$$\hat{s} = \hat{x} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta$$



则相位因子为:

$$e^{-i\omega(t' - \frac{z'}{c})} = \exp\left\{-i\omega\left[t' - \frac{\beta_{\perp}}{\omega c} \sin\theta \sin\omega c t' - \beta_{\parallel} t' \cos\theta\right]\right\}$$

辐射场矢量表示:

$$\begin{aligned} \vec{E} \times (\vec{E} \times \vec{\beta}) &= \hat{x}(\beta_{\parallel} \sin\theta \cos\theta - \beta_{\perp} \cos^2\theta \cos\omega c t') - \hat{y} \beta_{\perp} \sin\omega c t' \\ &\quad + \hat{z}(-\beta_{\parallel} \sin^2\theta + \beta_{\perp} \sin\theta \cos\theta \cos\omega c t') \end{aligned}$$

利用级数表:

$$e^{i\xi \sin\phi} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{im\phi} J_m(\xi)$$

$$i \sin\phi e^{i\xi \sin\phi} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{im\phi} J'_m(\xi)$$

$$i \xi \cos\phi e^{i\xi \sin\phi} = \sum_{-\infty}^{\infty} im e^{im\phi} J_m(\xi)$$

则把级数代入表示:

$$\begin{aligned} \vec{E} \times (\vec{E} \times \vec{\beta}) e^{-i\omega(t' - \frac{z'}{c})} &= \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \hat{x}(\beta_{\parallel} \sin\theta \cos\theta - \beta_{\perp} \cos^2\theta \frac{m}{\xi}) J_m(\xi) \right. \\ &\quad \left. + \hat{y}(-i\beta_{\perp}) J'_m(\xi) + \hat{z}(-\beta_{\parallel} \sin^2\theta + \beta_{\perp} \sin\theta \cos\theta \frac{m}{\xi}) J_m(\xi) \right\} \\ &\quad \times \exp\left\{-i\omega(1 - \beta_{\parallel} \cos\theta)t' + im\omega c t'\right\} \end{aligned}$$

其中

$$\xi \equiv \frac{\omega}{\omega c} \beta_{\perp} \sin\theta$$

由此可得: 电子运动的辐射场中辐射功率分布与辐射场矢量表示:

$$\xi = \frac{\omega}{\omega_{ce}} \beta_{\perp} \sin \theta \quad \text{44}$$

$$\star \quad \vec{E}(\vec{R}, \omega) = \frac{i e \omega}{2 \epsilon_0 c R'} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta) \omega - m \omega_{ce}] \\ \times \left\{ \hat{x} \left[ -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\cos \theta - \beta_{\parallel}) J_m(\xi) + \hat{y} (-i \beta_{\perp}) J'_m(\xi) + \hat{z} (\cos \theta - \beta_{\parallel}) J_m(\xi) \right] \right\}$$

由此可知, 回旋辐射是由一系列不同谐波组成, 且频率为:

$$\omega_m = \frac{m \omega_{ce}}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta}$$

由此可得, 电子在回旋角速度  $\omega$  的辐射场中:

$$\frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} = c \epsilon_0 R'^2 |\vec{E}(\vec{R}, \omega)|^2$$

辐射的总功率为:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i[(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta) \omega - m \omega_{ce}] t\} dt = 2\pi \delta[(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta) \omega - m \omega_{ce}]$$

由此可得, 电子在回旋角速度  $\omega$  的辐射场中, 回旋辐射功率为:

$$\star \quad \frac{d^2 P}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{\cos \theta - \beta_{\parallel}}{\sin \theta} \right)^2 J_m^2(\xi) + \beta_{\perp}^2 J'_m{}^2(\xi) \right] \delta[(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta) \omega - m \omega_{ce}]$$

回旋辐射的谱线, 由  $\vec{E}(\vec{R}, \omega)$  的表达式可分析得到:

当  $\xi \ll 1$  时, 有渐近展开式:

$$J_m(\xi) \approx \frac{1}{m!} \left( \frac{\xi}{2} \right)^m$$

$$J'_m(\xi) \approx \frac{m}{2 \times m!} \left( \frac{\xi}{2} \right)^{m-1}$$

因而回旋辐射电场的各分量分别为:

$$\hat{x} : -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} (\cos\theta - \beta_{11}) \frac{\beta_{\perp} \sin\theta}{2(1 - \beta_{11} \cos\theta)}$$

$$\hat{y} : -i \frac{1}{2} \beta_{\perp}$$

$$\hat{z} : (\cos\theta - \beta_{11}) \frac{\beta_{\perp} \sin\theta}{2(1 - \beta_{11} \cos\theta)}$$

当  $\theta = 0$  时 (平行于  $B_0$  或  $z$  轴)

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &: -\frac{1}{2} \beta_{\perp} \\ \hat{y} &: -i \frac{1}{2} \beta_{\perp} \\ \hat{z} &: 0 \end{aligned} \right\} \text{圆偏振波, 右旋偏振 (与电} \\ \text{子和回旋方向相同)}$$

当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时 (垂直于  $B_0$  或  $z$  轴)

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &: 0 \\ \hat{y} &: -i \frac{1}{2} \beta_{\perp} \\ \hat{z} &: -\frac{1}{2} \beta_{\perp} \beta_{11} \end{aligned} \right\} \text{椭圆偏振波, 且 } E_y \gg E_z \\ \text{寻常波是这大于寻常波是}$$

## 二. 集束辐射效率

假设: 1. 辐射体是均匀管, 可近似自由空间近似地运用  
 2. 各个电子的辐射是不相干的 (即电子是独立运动的)  
 这样, 由各个电子辐射功率谱的代数和就可以求得集束辐射效率。

定义: 体辐射效率  $\eta(\omega, \theta)$  为单位体积内辐射电子沿  $\theta$  方向以单位立体角内, 发出以每单位频率间隔的辐射功率。

设电子的速度分布函数为  $f(\vec{v}) = f(\beta_x, \beta_y)$  (归一化的)

则体辐射效率为

$$\eta(\omega, \theta) = n_e c^3 \int \frac{d^2 P}{d\omega d\Omega} f(\beta_x, \beta_y) 2\pi \beta_x d\beta_x d\beta_y$$

这个积分的得于是: 回旋辐射谱是由一系列有限宽度的辐射线组成的, 这是因为其共振频率

$$\omega_m = m\omega_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta_n \cos\theta}$$

是与电子速度有关的。

辐射展宽机制:

1. 相对论效应: 电子质量  $m$  相对论 ~~效应~~ 因子  $\sqrt{1-\beta^2}$  展宽  $\omega_m$  是 (见 (1) 式):

$$\Delta\omega_m \approx m\omega_0 \beta^2 = m\omega_0 \left(\frac{v_e}{c}\right)^2$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2I_0}{m_e}} \quad \text{电子热运动速度}$$

2. 多普勒展宽:  $(1 - \beta_{||} \cos \theta)^{-1}$

在弱相对论近似下 ( $\beta \ll 1$ ), 展宽系数近似为

$$\Delta \omega_m = m \omega_{ce} \beta_{||} |\cos \theta| = m \omega_{ce} \left( \frac{v_e}{c} \right) |\cos \theta|$$

3. 自然加宽: 带电粒子辐射加宽, 由于电子在辐射过程中损失能量而使其辐射已持续一段有限的时间

4. 碰撞加宽: 由于碰撞造成辐射的暂时中断  
一般 3.4 的展宽效应都较小, 可忽略。

相对论展宽和多普勒展宽的相对意义:

当  $|\cos \theta| < \left( \frac{v_e}{c} \right)$  时, 相对论展宽是主要的,

由此可求出相对论展宽的临界角

$$\theta_c = \cos^{-1} \left( \frac{2T_e}{c^2 m_e} \right)^{1/2} \quad \cos^{-1} \left( \frac{2T_e}{m_e c^2} \right)^{1/2}$$

当

$$\theta_c < \theta < 180^\circ - \theta_c$$

时相对论加宽是主要的, 当  $T_e = 1 \text{ keV}$  时,  $\theta_c = 87^\circ$ , 即: 在弱相对论近似的条件下, 只有在近垂直传播的情况下, 相对论展宽才是主要的, 其它情况下则是多普勒展宽。

弱相对论近似:  $\beta \ll 1$

- (1) 展宽效应很小, 每个谐波辐射功率为  $\omega_{ce}$  的  $\frac{1}{2}$  倍, 不显和
- (2) 贝塞尔函数  $J_m(x)$  取小宗是近似的

$$J_m(x) = \frac{1}{m!} \left( \frac{x}{2} \right)^m, \quad J'_m(x) = \frac{1}{2 \times (m-1)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{m-1}$$

由谐波小宗量条件, 可得:  $\Delta \omega_n < \omega_{ce}, \quad \omega_p$

$$n \left( \frac{v_e}{c} \right)^2 < 1 \quad (\text{有谐波传播}) \quad \text{或} \quad n \left( \frac{v_e}{c} \right) < 1 \quad (\text{无谐波传播})$$

~~对重互传播情况, 证明  $T_e \leq 10 \text{ keV}$~~

取  $\beta$  为最值情况, 则有:

$$\left(\frac{\cos\theta - \beta_{||}}{\sin\theta}\right)^2 J_m^2(\xi) + \beta_{\perp}^2 J_m^2(\xi) \approx \frac{m^{2(m-1)}}{(m-1)!^2} (\sin\theta)^{2(m-1)} (\cos^2\theta + 1) \left(\frac{\beta_{\perp}}{2}\right)^{2m}$$

辐射功率谱 (与谐波) 可表示为

$$j_m(\theta, \omega) = \frac{e^2 \omega_m^2}{8\pi^2 c \epsilon_0} \frac{m^{2(m-1)}}{(m-1)!^2} (\sin\theta)^{2(m-1)} (\cos^2\theta + 1) \times n_e c^3 \iint \delta[(1 + \beta_{||} \cos\theta)\omega - m\omega_{ce}] \left(\frac{\beta_{\perp}}{2}\right)^{2m} f(\beta_{\perp}, \beta_{||}) 2\pi \beta_{\perp} d\beta_{\perp} d\beta_{||}$$

辐射效率  $\alpha$  可表示为

$$\dot{j}_m(\theta, \omega) = j_m(\theta) \phi_m(\theta, \omega)$$

即

$$j_m(\theta) = \int j_m(\theta, \omega) d\omega \quad \text{辐射效率的辐射功率谱}$$

$$\int \phi_m(\theta, \omega) d\omega = 1 \quad \text{归一化的谐波谱分布}$$

若假设分布是麦克斯韦分布:

$$f(\beta_{\perp}, \beta_{||}) = \left(\frac{m_e}{2\pi T_e}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m_e c^2 (\beta_{\perp}^2 + \beta_{||}^2)}{2T_e}\right\}$$

此可以分别互传播 (等离子体层电子) 和重互传播 (相对论电子) 计算谐波谱分布  $\phi_m(\theta, \omega)$ 。

$$j_m(\theta) = \frac{e^2 \omega_m^2}{8\pi^2 c \epsilon_0} \frac{m^{2(m-1)}}{(m-1)!^2} (\sin\theta)^{2(m-1)} (\cos^2\theta + 1) \times n_e c^3 \iint \left(\frac{\beta_{\perp}}{2}\right)^{2m} f(\beta_{\perp}, \beta_{||}) 2\pi \beta_{\perp} d\beta_{\perp} d\beta_{||}$$



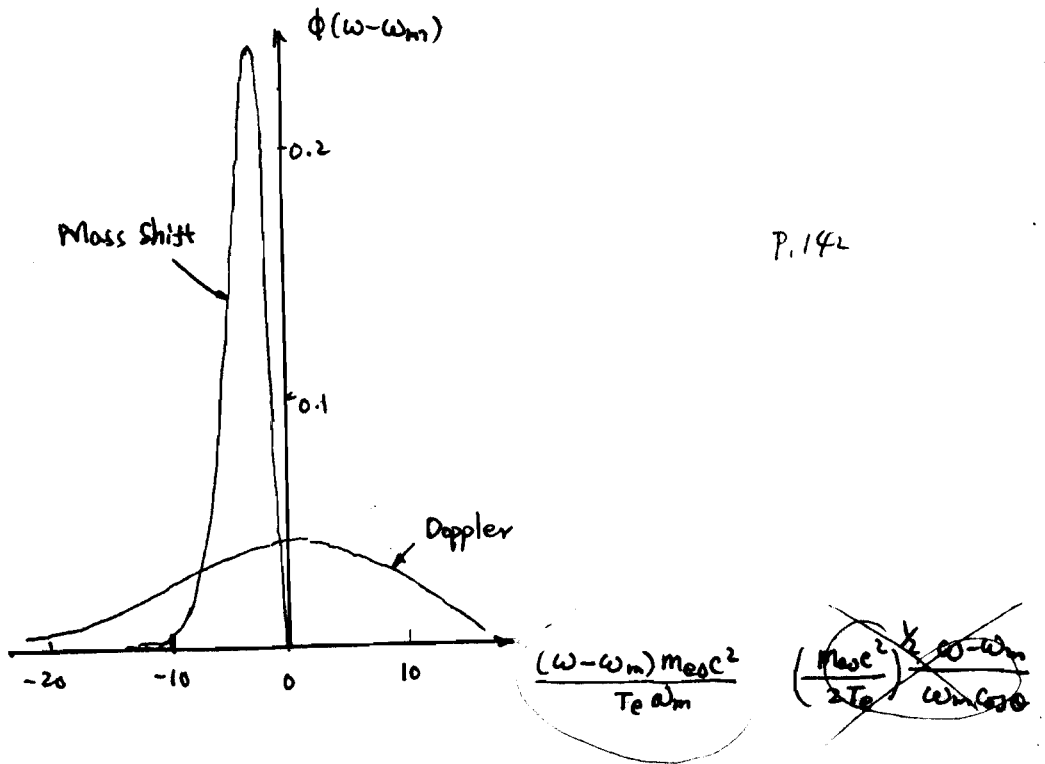
由此可见：多普勒加宽是对谐波共振频率对称的，且其宽度近似为

解得：
$$\Delta\omega_m = \left( \frac{k_b}{2T_e} \right)^{1/2} \cos\theta \omega_m$$
 多普勒加宽

而相对论加宽是非对称的，它完全下移加（相对谐波共振频率），且其宽度近似为：

解得：
$$\Delta\omega_m = \frac{T_e k_b}{m_e c^2} \omega_m$$
 相对论加宽

因此在弱相对论近似中， $\frac{k_b}{m_e c^2} \ll 1$ ，因此相对论加宽加宽远小于多普勒加宽。



P.142

1/2

$$\cos\theta < \left( \frac{2k_b T_e}{m_e c^2} \right)^{1/2} = \frac{v_e}{c}$$

相对论原意

▲ 能流密度与谱分布

$$j_m(\omega) = \frac{e^2 \omega_m^2}{8\pi^2 c \epsilon_0} \frac{m^{2(m+1)}}{(m-1)!^2} (\sin\theta)^{2(m-1)} (\cos^2\theta + 1) \\ \times n_e c^3 \iint \left(\frac{\beta_{\perp}}{2}\right)^{2m} f(\beta_{\perp}, \beta_{\parallel}) 2\pi \beta_{\perp} d\beta_{\perp} d\beta_{\parallel}$$

将麦克斯韦分布代入，并积分或将对  $\beta_{\perp}$ ,  $\beta_{\parallel}$  的积分，即得：

$$j_m(\omega) = \frac{e^2 \omega_m^2 n_e}{8\pi^2 c \epsilon_0} \frac{m^{2m+1}}{(m-1)!} (\sin\theta)^{2(m-1)} (\cos^2\theta + 1) \left(\frac{T_e}{2m_e c^2}\right)^m$$

▲ 斜传播，多普勒展宽的谱分布 ( $\cos\theta \gg \beta$ )

这时，可直接从  $j_m(\theta, \omega)$  的表达式中积分求得  $\phi_m(\theta, \omega)$ 。  
因  $\delta[(1 - \beta_{\parallel} \cos\theta)\omega - \omega_m]$  不含  $\beta_{\perp}$ ，可先完成对  $\beta_{\perp}$  的积分。  
而对  $\beta_{\parallel}$  的积分因是  $\delta$  函数的积分，可直接了当地求得：

$$\phi_m(\theta, \omega) = \left(\frac{m_e c^2}{2\pi T_e}\right)^{1/2} (\omega_m \cos\theta)^{-1} \exp\left\{-\frac{m_e c^2}{2T_e} \left[\frac{\omega - \omega_m}{\omega_m \cos\theta}\right]^2\right\}$$

▲ 垂直传播，相对论展宽的谱分布 ( $\cos\theta \ll \beta$ )

积分比前复杂，(参看 5.1, P-189)

$$\phi_m(\theta, \omega) = \frac{\omega}{2\sqrt{\pi} (\omega_{co} m)^2} \left[\frac{2m_e c^2}{T_e}\right]^{m+1/2} \frac{m!}{(2m+1)!} \left[1 - \frac{\omega^2}{m^2 \omega_{co}^2}\right]^{m+1/2} \\ \times \exp\left\{-\frac{m_e c^2}{2T_e} \left[1 - \frac{\omega^2}{m^2 \omega_{co}^2}\right]\right\}$$

$$E(R, \omega) = \frac{ie\hbar}{2cc_0R} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[(1-\beta_{\parallel} \cos\theta)\omega - m\omega_{ce}]$$

9/18

▲ 单电子回旋辐射

$$\times \left\{ \hat{x} \left[ -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} (\cos\theta - \beta_{\parallel}) J_m(\xi) + \hat{y} (-\beta_{\perp}) J'_m(\xi) + \hat{z} (\cos\theta - \beta_{\parallel}) J_m(\xi) \right] \right\}$$

$$\frac{d^2P}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \sum_1^{\infty} \left[ \left( \frac{\cos\theta - \beta_{\parallel}}{\sin\theta} \right)^2 J_m^2(\xi) + \beta_{\perp}^2 J_m'^2(\xi) \right] \delta[(1-\beta_{\parallel} \cos\theta)\omega - m\omega_{ce}]$$

$$\xi \equiv \frac{\omega}{\omega_{ce}} \beta_{\perp} \sin\theta$$

▲ 等离子体辐射 (稀薄等离子体,  $\beta \ll 1$ )

$$j(\omega, \theta) = n_e c^3 \int \frac{d^2P}{d\Omega d\omega} f(\beta_{\perp}, \beta_{\parallel}) 2\pi \beta_{\perp} d\beta_{\perp} d\beta_{\parallel}$$

$$j_m(\omega, \theta) = \frac{e^2 \omega_m^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{m^{2(m-1)}}{(m-1)!^2} (\sin\theta)^{2(m-1)} (\cos^2\theta + 1) \omega_m = \frac{m\omega_{ce}}{1-\beta_{\parallel} \cos\theta} \sqrt{1-\beta^2}$$

$$\times n_e c^3 \iint \delta[(1-\beta_{\parallel} \cos\theta)\omega - m\omega_{ce}] \left(\frac{\beta_{\perp}}{2}\right)^{2m} f(\beta_{\perp}, \beta_{\parallel}) 2\pi \beta_{\perp} d\beta_{\perp} d\beta_{\parallel}$$

$$j_m(\omega, \theta) \dot{j}_m(\theta) \equiv \dot{j}_m(\theta) \phi_m(\theta, \omega)$$

其中

$$\dot{j}_m(\theta) \equiv \int \dot{j}_m(\theta, \omega) d\omega, \quad \int \phi_m(\theta, \omega) d\omega = 1$$

$$\dot{j}_m(\theta) = \frac{e^2 \omega_m^2 n_e}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{m^{2m-1}}{(m-1)!} (\sin\theta)^{2(m-1)} (\cos^2\theta + 1) \left(\frac{T_e}{2m_e c^2}\right)^m$$

$$\phi_m(\theta, \omega) = \left(\frac{m_e c^2}{2\pi T_e}\right)^{\frac{1}{2}} (\omega_m \cos\theta)^{-1} \exp\left\{-\frac{m_e c^2}{2T_e} \left(\frac{\omega - \omega_m}{\omega_m \cos\theta}\right)^2\right\} \quad \text{钟形谱}$$

$$\phi_m(\theta, \omega) = \frac{\omega}{2\sqrt{\pi} (m\omega_{ce})^2} \left[\frac{2m_e c^2}{T_e}\right]^{m+\frac{3}{2}} \frac{m!}{(2m+1)!} \left[1 - \frac{\omega^2}{m^2 \omega_{ce}^2}\right]^{m+\frac{1}{2}}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{m_e c^2}{2T_e} \left(1 - \frac{\omega^2}{m^2 \omega_{ce}^2}\right)\right\} \quad \text{准平面谱}$$

三 辐射输运:

对辐射问题的完整讨论应包括两部分,即辐射的产生机制和辐射在介质中的输运性质。作为一般原理,介质的发射是一定率的辐射,它也将吸收一定率的辐射。因而,介质对辐射传播过程有显著的影响,例如,介质穿过介质的辐射强度发生变化。这里,我们从能量守恒规律出发,研究辐射在介质中的输运规律。

为此,我们首先定义一些描述辐射场的物理量。

- (1) 辐射强度  $I$ : 单位时间内,沿某方向传播方向上单位立体角穿过垂直于辐射传播方向的单位面积的辐射能量。  $J \cdot s^{-1} \cdot sr^{-1} \cdot m^{-2}$
- (2) 辐射通量  $\Phi$ : 单位时间内通过单位截面积的净辐射能量流量,它与强度关系为:

$$\Phi = \int_{4\pi} I \cos\theta d\Omega$$



- (3) 辐射场的能量密度  $u$ : 单位体积中的总辐射能量,它与辐射强度由同一关系为:

$$u = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I d\Omega$$

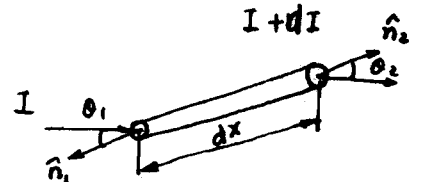
束  $\frac{I}{c}$   
物面积  $\frac{4\pi}{c} I$

- (4) 吸收系数  $\alpha$ : 单位长度上的辐射束穿过单位长度上的吸收介质的吸收量,即

$$\alpha \equiv \frac{-dI}{I dx}$$

根据辐射能量守恒,在稳态情况下,辐射穿过无辐射、无吸收介质时,且辐射通量守恒:

$$\nabla \cdot \vec{\Phi} = 0$$



即:

$$(I + dI) \cos\theta_2 d\Omega_2 dA - I \cos\theta_1 d\Omega_1 dA = 0$$

$$\frac{d\Omega_2}{\Omega_2} = \frac{I \cos\theta_1}{I + dI} \approx (1 - \frac{dI}{I}) \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}$$

因为: 
$$\frac{d\Omega_2}{d\Omega_1} = \frac{\sin\theta_2 d\theta_2}{\sin\theta_1 d\theta_1}$$

$$\begin{cases} (\mu+d\mu) \cos\theta_2 d\theta_2 = \mu \cos\theta_1 d\theta_1 \\ (\mu+d\mu) \sin\theta_2 = \mu \sin\theta_1 \quad (\text{折射定律}) \end{cases}$$

所以 
$$\frac{d\Omega_2}{d\Omega_1} = \left(\frac{\mu}{\mu+d\mu}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} \approx \left(1 - 2\frac{d\mu}{\mu}\right) \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}$$

故可得 
$$\frac{dI}{I} = 2 \frac{d\mu}{\mu}$$

即 
$$\frac{I}{\mu^2} = \text{const}$$

这说明在折射率缓慢变化的非均匀介质中, 即使介质自身没有辐射和吸收, 辐射在传播过程中, 其强度也会沿射线路径而改变, 折射率越大的地方, 其强度也大。

对于有源辐射和吸收的介质, 根据辐射能量守恒, 辐射在穿过介质  $dx$  后, 其通量将是它满足下述关系:

$$AdI = \left(2 \frac{I}{\mu} \frac{d\mu}{dx} dx + j dx - \alpha I dx\right) A$$

其中  $j$  是体辐射率, 它表示单位体积介质沿入射辐射方向单位立体角的辐射功率。由此可得:

$$\mu^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{I}{\mu^2}\right) = j - \alpha I$$

故有 
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{I}{\mu^2}\right) = \frac{j}{\mu^2} - \frac{I}{\mu^2}$$

此即为辐射传输方程。此方程的解为:

$$\left( \frac{I(x)}{\mu^2(x)} = \frac{I_0}{\mu_0^2} e^{-\tau(x)} + \int_0^{\tau(x)} \frac{j}{\mu^2 \alpha} e^{-\tau(x')} d\tau' \right)$$

其中 
$$\tau \equiv \int_0^x \alpha(x') dx'$$
 为光程厚度 
$$\tau(x) = \int_{x_0}^x \alpha(x') dx'$$

此关系式的物理意义很明显:

(1) 若介质中没有辐射源, 即  $j=0$

$$2) \quad \frac{I(x)}{\mu^2(x)} = \frac{I_0}{\mu_0^2} e^{-\tau(x)}$$

这就是辐射通过吸收介质时的指数衰减规律

(2) 当边界没有入射辐射时, 即  $I_0 = 0$

$$2) \quad \frac{I(x)}{\mu^2(x)} = \int_0^{\tau(x)} \frac{j}{\mu^2 \alpha} e^{-\tau'} d\tau' = \int_0^x \frac{j(x')}{\mu^2(x')} e^{-\int_{x'}^x \alpha(y) dy} dx'$$

对于均匀介质

$$\frac{I(x)}{\mu^2(x)} = \int_0^x \frac{j(x')}{\mu^2(x')} e^{-\alpha(x-x')} dx' = \frac{j}{\alpha \mu^2} [1 - e^{-\alpha x}]$$

(3) 在局部热平衡条件下:

根据基尔霍夫定律, 有

$$\frac{j}{\alpha \mu^2} = I_B(T), \quad I_B \text{ 是黑体辐射表示亮度, } T \text{ 为辐射温度}$$

$$2) \quad \frac{I(x)}{\mu^2(x)} = \int_0^{\tau(x)} I_B(T) e^{-\tau'} d\tau' \xrightarrow{\text{基尔霍夫定律}} I_B(T) [1 - e^{-\tau(x)}]$$

对于光学厚介质,  $\tau \equiv \int \alpha dx \gg 1$ , 有

$$\frac{I(x)}{\mu^2(x)} = I_B(T)$$

这说明只有光学厚介质在局部热平衡条件下的辐射是黑体辐射。

对于光学薄介质,  $\tau \ll 1$ , 有:

$$\frac{I(x)}{\mu^2(x)} = \int_0^{\tau} I_B(T) e^{-\tau'} d\tau' = \int_0^{\tau} \frac{j}{\mu^2} dx$$

其辐射强度是体辐射强度的积分。

在真空中, 黑体辐射表示亮度可用普朗克黑体辐射公式表示 (普朗克公式):

$$I_B(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{8\pi^3 c^2} [e^{\frac{\hbar \omega}{T}} - 1]^{-1}$$

当  $\frac{\hbar \omega}{T} \ll 1$  时, 有

$$\dots \dots \frac{\omega^2 T}{c^2} = \frac{j}{\mu^2}$$

其低频辐射近似, 就是瑞利-金斯定律: (当  $h\omega \ll T$  时)

$$I_B(\omega, T) \approx \frac{\omega^2 T}{8\pi^3 c^2}$$

这样, 根据基尔霍夫辐射定律, 从稀薄, 弱相对论性, 热力学体的辐射率公式可导出吸收系数的表达式:

$$\begin{aligned} \alpha_m(\omega, \theta) &= \alpha_m(\theta) \phi_m(\omega) = \frac{j_m(\theta)}{I_B(\omega_m, T_e)} \phi_m(\omega) \\ &= \frac{\pi}{2c} \frac{e^2 n_e}{m_0 \epsilon_0} \frac{m^{2m-1}}{(m-1)!} (\sin \theta)^{2(m-1)} (\omega^2 + 1) \left( \frac{kT_e}{2m_0 c^2} \right)^{m-1} \phi_m(\omega) \end{aligned}$$

在许多情况下, 电子回旋谐波频率下的吸收是很大的, 以致  $\tau \gg 1$ , 即稀薄相对论谐波是光性厚的。在这种情况下, 其辐射强度就是黑体的表面亮度, 它与电子温度成正比, 而与等离子体的电子数无关, 因而可直接利用它测量电子温度, 这就是利用光性厚的电子回旋辐射谐波测量电子温度的原理。

当磁场的回旋辐射是<sup>(磁化)</sup>等离子体中传播时, 由于其特征波是不简并的, 因而磁场的回旋辐射两特征波的吸收系数,

$$\alpha_m^{(\pm)}(\omega, \theta) = \frac{\pi}{2^m} \frac{\omega p_e^2}{c} \frac{m^{2m-1}}{(m-1)!} \left( \frac{kT_e}{m_0 c^2} \right)^{m-1} (\sin \theta)^{2m-2} (1 + \cos^2 \theta) \phi_m(\omega, \theta) \eta_m^{\pm}(\theta)$$

其中  $\eta_m^{\pm}(\theta) \equiv \frac{1}{2} \left[ 1 \mp \frac{\cos^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{4m}}{(1 + \cos^2 \theta) \left( \cos^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{4m^2} \right)^{1/2}} \right]$   $m \geq 2$

其中 “-” 表示 O 波 (当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时) 或左旋波 (当  $\theta = 0$  时)  
“+” 表示 X 波 (当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时) 或右旋波 (当  $\theta = 0$  时)

$$\eta_m^+ + \eta_m^- = 1$$

上式精确到  $\frac{T_e}{m_0 c^2}$ 。因为当  $\theta = 0$  或  $\frac{\pi}{2}$  时,  $\alpha_m^{(\pm)}$  应付正负: 上式对 O 波 ( $m=1$ ) 是不适用的

~~$$\alpha_m^{(\pm)}(\omega, \theta) = \left( \frac{T_e}{m_0 c^2} \right) \alpha_m^{(\pm)}(\omega, \theta)$$~~

~~$$\eta_m^{\pm} = \frac{1}{2} \left[ 1 \mp \frac{\cos^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{4m}}{(1 + \cos^2 \theta) \left( \cos^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{4m^2} \right)^{1/2}} \right]$$~~

~~左旋波 / 右旋波~~

▲ 局部热平衡, 稀薄等离子体, 弱相对论近似 ( $\beta \ll 1$ ) 下

体辐射之和吸收系数  $\left(\frac{u_{pe}}{\omega_{ce}}\right)^2 \ll 1$  (对  $m \geq 2$ ),  $\left(\frac{u_{pe}}{\omega_{ce}}\right)^2 \frac{c}{v_E} \ll 1$

$$j_m(\theta, \omega) = j_m(\omega) \phi_m(\theta, \omega) \quad (\text{对 } m \geq 1)$$

$$j_m(\omega) = \frac{e^2 \omega_m^2 n_e}{8\pi^2 c \epsilon_0} \frac{m^{2m-1}}{(m-1)!} (\sin\theta)^{2(m-1)} (\cos^2\theta + 1) \left(\frac{T_e}{2m_e c^2}\right)^m$$

把体辐射和吸收系数联系起来

$$\frac{j_m(\omega)}{d_m(\omega)} = I_B(\omega_m, T_e) = \frac{\omega_m^2 T_e}{8\pi^3 c^2} \quad (\text{辐射体温度与辐射温度相等})$$

可得吸收系数为

$$d_m(\omega) = \frac{\pi}{2c} \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e} \frac{m^{2m-1}}{(m-1)!} (\sin\theta)^{2(m-1)} (\cos^2\theta + 1) \left(\frac{T_e}{2m_e c^2}\right)^{m-1}$$

由于回旋辐射是稀薄等离子体中传播时其特征波不是简谐波, 所以必须分别计算各特征波的体辐射之和吸收系数。两种特征波的方向应按其偏振特性计算, 这里我们引用 P. 146 中所述的方法计算, 且结果为 (5.2.43) 式:

$$\eta_m^\pm(\theta) = \frac{1}{2} \mp \frac{\cos\theta + \frac{\sin^4\theta}{4m}}{(1+\cos\theta)(\cos\theta + \frac{\sin^4\theta}{4m})^{1/2}} \quad \text{P. 146} \quad (5.2.43) \text{式}$$

其中 “+” 表示 O 波 (当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时) 或左旋波 (当  $\theta = 0$  时)  
“-” 表示 X 波 (当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时) 或右旋波 (当  $\theta = 0$  时)

由于  $\eta_m^\pm(\theta)$  的表达式只取  $\frac{T_e}{2m_e c^2}$  的一阶近似, 因此上述表达式对  $m=1$  的谐波不适用, 特别对  $\eta_1^+$  不适用,  $\eta_1^+$  需取  $\frac{T_e}{2m_e c^2}$  的更高阶近似。



四. 有限电导率

当  $m \neq 1$  时, 近似计算辐射特性, 电场使传播方向由自由空间方向决定。这时, 近似计算 (用自由空间) 比如有损耗, 从而计算吸收

四. 有限电导率

上述的计算中, 我们已忽略了等离子体的介电特性, 它只有在等离子体是稀薄时才适用。当等离子体密度有限时, 以至等离子体的介电常数不可忽略时, 必须对上述结果加以修正。



等离子体有限电导率有两种: (1) 它影响辐射在等离子体中的传播, 即当出现共振或截止时, 在等离子体中将出现非传播区; (2) 在高密度时, 它将通过等离子体介电常数影响其辐射特性。

对辐射传播的影响是比较简单的。当垂直传播时, 对于寻常波,  $\omega < \omega_{pe}$  时波截止; 对于寻常波, 当  $\omega_H \leq \omega \leq \omega_R$  或  $\omega \leq \omega_L$  时波截止, 其中

$$\omega_R = \frac{\omega_{ce}}{2} \left[ 1 + \left( \frac{4\omega_p^2}{\omega_{ce}^2} + 1 \right)^{1/2} \right] \quad \text{又称右旋截止频率}$$

$$\omega_L = \frac{\omega_{ce}}{2} \left[ -1 + \left( \frac{4\omega_p^2}{\omega_{ce}^2} + 1 \right)^{1/2} \right] \quad \text{又称左旋截止频率}$$

$$\omega_H^2 = \omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2$$

因此, 只有当传播频率  $\omega > \omega_{pe}$  时才用于

对辐射特性的影响比较复杂, 一般它与传播角度、谐波和波模有关。这里就不详述它了。但下述不等式满足时: (书中 P.147~150)

$\left( \frac{\omega_{pe}}{m\omega_c} \right)^2 \ll 1$

$\left( \frac{\omega_{pe}}{m\omega_c} \right)^2 \ll 1$

$\left( \frac{\omega_{pe}}{\omega_c} \right) \frac{c}{v_{ee}} \ll 1$

$\left( \frac{\omega_{pe}}{\omega_c} \right) \frac{c}{v_{ee}} \ll 1$

上述稀薄等离子体近似公式仍适用, 否则就应用稠密等离子体近似的结果。

五. 空间变化的磁场

在大多数应用中, 磁场总是与位置无关的。因此, 回旋辐射就不再是一列如常的谐波辐射, 这些谐波而是被沿视线变化的磁场所展宽。通常磁



无电磁波时  $f(\vec{r}, \vec{v}, t) = n_0 f_0(\vec{r}, \vec{v})$

$$E_0 = 0, \quad B_0 \neq 0$$

有电磁波时

$$j_0 = 0$$

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = n_0 f_0(\vec{r}, \vec{v}) + \delta f_1(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_1(\vec{r}, t)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 + \vec{B}_1(\vec{r}, t)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_0 + \vec{j}_1(\vec{r}, t) \quad \vec{j}_1(\vec{r}, t) = -en_0 \int d\vec{v} \vec{v} f_1(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}} - e(\vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}} = en_0 [\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1] \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}}$$

由此解得  $f_1(\vec{r}, \vec{v}, t) \Rightarrow n_1(\vec{r}, t) = \int f_1(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{j}_1(\vec{r}, t) \Rightarrow [\vec{k} \cdot \vec{k} - k^2 \vec{I} + (\frac{\omega}{c})^2 \vec{\epsilon}(\vec{k}, \omega)] \cdot \vec{E} = 0$$

$$\left\{ \mu^2(\vec{k}, \omega) \left[ \frac{\vec{k} \cdot \vec{k}}{k^2} - \vec{I} \right] + \vec{\epsilon}(\vec{k}, \omega) \right\} \cdot \vec{E} = 0 \quad \mu \equiv \frac{kc}{\omega} = \frac{k}{k_0}$$

$$\mu^2(\vec{k}, \omega) \left[ \frac{\vec{k} \cdot \vec{k}}{k^2} - \vec{I} \right] + \vec{\epsilon}(\vec{k}, \omega) = 0$$

求在  $\omega_0$  附近电磁波频率附近的折射率虚部的虚部  $\mu_i$

$$\alpha \equiv \frac{\omega}{c} \text{Im}[\mu(\vec{k}, \omega)]$$

1. Nucl. Fusion 23 (1983), pp. 1153~1257
2. Plasma Physics 24 (1982), pp. 629~638

## 2. 空间变化的磁场

在上述讨论辐射层态和判判时, 实际上是假设磁场是均匀的. 当磁场不均匀时, 辐射的共振层辐射 ~~分布~~ 由磁场的不均匀性引起, 即:

$$\delta\omega_m \equiv m\omega_{ce} \frac{1}{B_0} \frac{\partial B_0}{\partial s} l = m\omega_{ce} \frac{l}{L_B}$$

其中  $L_B \equiv \left( \frac{1}{B_0} \frac{\partial B_0}{\partial s} \right)^{-1}$  是沿辐射传播方向上磁场梯度变化是等效于沿传播方向上的长度. 且取以磁化等离子体中, 通常有:

$$\delta\omega_m \gg \Delta\omega_m \quad (\text{相对共振态或多共振态})$$

下面我们做这:

1)  $B_0$  的空间变化是缓慢的, 即  $\lambda \ll L_B$ , 则 WKB 近似适用;

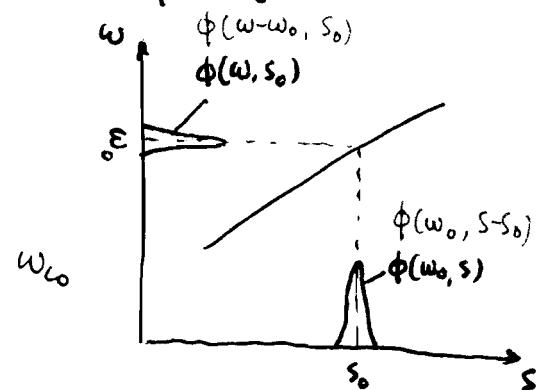
2) 回旋辐射和吸收的共振层很窄, 即

$$|m\omega_{ce}(s) - \omega_0| \ll \omega_0$$

则在共振层内,  $m\omega_{ce}$  的梯度可近似为常数.

对于单调缓慢变化的磁场, 辐射频率  $\omega_0$  与空间坐标是一一对应的. 因此, 对于某一空间点  $s_0$ , 其辐射频率中心为  $\omega_0 = m\omega_{ce}$  的辐射频率为  $\phi_m(\omega - \omega_0, s_0)$ .

辐射在空间中, 相当于辐射频率为  $\omega_0 = m\omega_{ce}$  的空间分布为  $\phi_m(\omega_0, s - s_0)$ . 因此, 对于辐射频率为  $\omega_0 = m\omega_{ce}$  的辐射



射的总厚度为:

$$\begin{aligned}
 \tau_m(\omega_0) &= \int \alpha_m(\omega_0, s) ds = \int \alpha_m(\omega_0) \phi_m(\omega_0, s) ds \quad (\text{窄谱}) \\
 &= \alpha_m(\omega_0) \int \phi_m(m\omega_{ce} - \omega_0, s_0) \left| \frac{d(m\omega_{ce})}{ds} \right|^{-1} d(m\omega_{ce}) \\
 &= \alpha_m(s_0) \left| \frac{d(m\omega_{ce})}{ds} \right|_{s=s_0}^{-1} \int \phi_m(m\omega_{ce} - \omega_0, s_0) d(m\omega_{ce}) \\
 &= \frac{\alpha_m(s_0)}{m \left| \frac{d\omega_{ce}}{ds} \right|_{s_0}} = \frac{L_B \alpha_m(s_0)}{m \omega_{ce}(s_0)}
 \end{aligned}$$

由此可见, 谐波谱函数  $\phi_m$  的精确表达式在计算总厚度时是不需要的, 只要共振层的厚度是常数的就行了。

这样, 当辐射传播的时候, 在任意位置测回波辐射时, 总辐射厚度为:

$$I_m(\omega_m) = \frac{\omega_m^2 T_e(s)}{8\pi^3 c^2} [1 - e^{-\tau_m(s)}]$$

由此可见, 回波辐射的总厚度 ~~是~~ 共振层总厚度  $T_e(s)$  的函数,  $\tau_m(s)$  的函数。因此, 只要  $m\omega_{ce}$  的空间分布 (即磁场的空间分布) 是已知的, 利用辐射谱  $I_m(\omega_m)$  的测量就可以得到等离子体参数分布, 特别是电子温度  $T_e(s)$  的分布 (对于总厚度谐波辐射)。

其他条件

$$\omega_0 \leftrightarrow s_0$$

$$|n\omega_{ce}(s) - \omega_0| \ll \omega_0$$

$$I_n(\omega_0) = \int \frac{d\tau_n}{dt} I_B(\omega_0, \tau_e) e^{-\tau_n(\omega_0)}$$

当  $h\omega \ll T_e$  时

$$I_B(\omega, T_e) = \frac{\omega^2 T_e}{8\pi^3 c^2} = \frac{\omega^2}{T_e} e^{-\tau_n(\omega)}$$

$$\therefore I_n(\omega_0) = \frac{\omega_0^2 T_e(s_0)}{8\pi^3 c^2} [1 - \tau_n(\omega_0)]$$

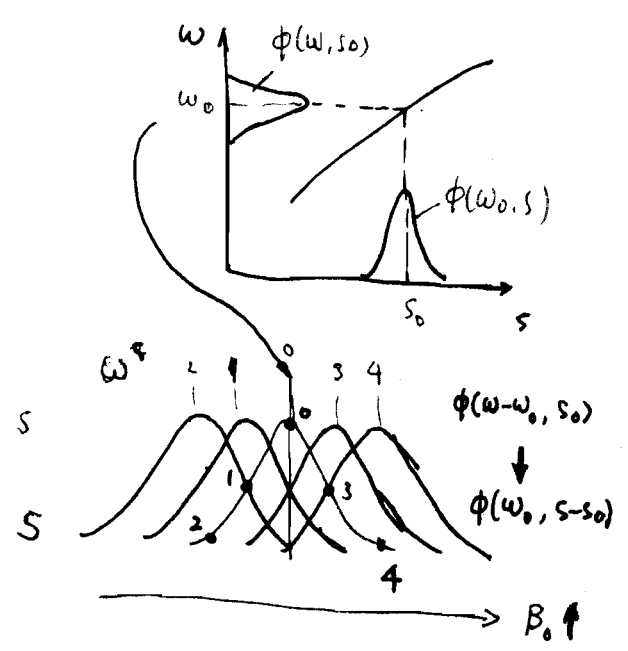
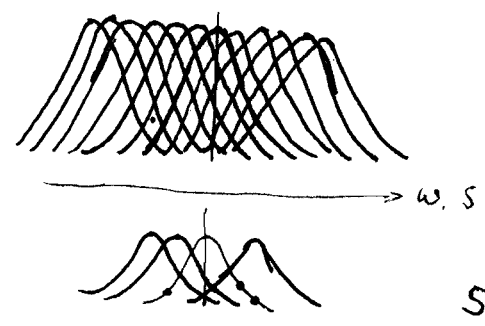
其他条件:

$$\Delta\omega_n \ll \delta\omega_n = n\omega_{ce} \frac{1}{B_0} \frac{\partial B_0}{\partial s} \quad (\text{电子回旋频率沿磁轴方向的变化})$$

$$\Delta\omega_n \ll n\omega_{ce} \frac{1}{L_B} \quad L_B \equiv \left( \frac{1}{B_0} \frac{\partial B_0}{\partial s} \right)^{-1}$$

且  $\lambda \ll L_B$       WKB 适用

$$\begin{aligned} \tau_n(\omega_0) &= \int \alpha_n(\omega_0) ds = \int \alpha_n(s_0) \phi_n(\omega_0 - n\omega_{ce}) \left| \frac{d\omega_{ce}}{ds} \right|^{-1} ds \\ &= \alpha_n(s_0) \left| \frac{d\omega_{ce}}{ds} \right|^{-1} \int \phi_n(\omega_0 - n\omega_{ce}) d\omega_{ce} \\ &= \frac{\alpha_n(s_0)}{n\omega_{ce}} \left| \frac{1}{\omega_{ce}} \frac{d\omega_{ce}}{ds} \right|^{-1} \int \phi_n(\omega_0 - n\omega_{ce}) d(n\omega_{ce}) \\ &= \frac{\alpha_n(s_0)}{n\omega_{ce}} L_B \end{aligned}$$



## 六. 等离子体诊断应用

电子回旋辐射应用于等离子体诊断最成功的是托卡马克诊断。因为在托卡马克中，磁场主要由纵场决定，且它是精确已知的，即：

$$B_r(R) = \frac{B_0 R_0}{R}$$

在这种情况下，若沿大半径方向观测电子回旋辐射，则观测梯度板长为  $L_B \equiv R$ 。这时回旋辐射的传播角基本上为  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ，即垂直传播，故特征波为寻常波(O)和异常波(X)。根据 Bornatici 的计算结果 [Plasma Phys. 24(1982), p. 629]，寻常波和异常波各次谐波的光学厚度表达式为：

$$\begin{aligned} \tau_m^{(O)} &= \frac{\pi^2 m^{2(m-1)}}{2^{m-1} (m-1)!} \frac{R}{\lambda_0} g \left(1 - \frac{g}{m^2}\right)^{m-\frac{1}{2}} \left(\frac{T_e}{m_e c^2}\right)^m \\ \tau_1^{(X)} &= 5\sqrt{2} \pi^2 \frac{R}{\lambda_0} g^{-1} \left(\frac{T_e}{m_e c^2}\right)^2 \left(1 - \frac{g}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \frac{1}{2} \quad 2 \frac{T_e}{m_e c^2} < g < 1 \\ \tau_1^{(O)} &= \pi^2 \frac{R}{\lambda_0} g \quad \frac{1}{2} \quad g < 2 \frac{T_e}{m_e c^2} \\ \tau_m^{(X)} &= \frac{\pi^2 m^{2(m-1)}}{2^{m-1} (m-1)!} \frac{R}{\lambda_0} \left(1 - \frac{g}{m^2} \frac{m^2 - g}{m^2 - 1 - g}\right)^{m-\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{g}{m(m^2 - 1 - g)}\right]^2 \\ &\quad \times \left(\frac{T_e}{m_e c^2}\right)^{m-1} \quad (m \geq 2) \end{aligned}$$

~~而各次谐波的光学厚度表达式为~~

其中

$$g \equiv \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_0^2}$$

$$\lambda_0 \equiv \frac{c}{f_{co}}$$

由此可得：

$$\begin{aligned} \tau_m^{(O)} &\propto n_e B_0^{-1} T_e^m & \frac{1}{2} \quad m \geq 1 \\ \tau_1^{(O)} &\propto n_e^{-1} B_0^3 T_e^2 & \text{或} \quad \tau_1^{(X)} \propto n_e B_0^{-1} \\ \tau_m^{(X)} &\propto n_e B_0^{-1} T_e^{m-1} & \frac{1}{2} \quad m \geq 2 \end{aligned}$$

在一般托卡马克参数条件下，一般有：

$$\tau_1^{(x)} \approx \tau_3^{(x)} \approx \tau_2^{(0)} \ll 1$$

$$\tau_1^{(0)} \approx \tau_2^{(x)} \geq 1$$

即只有 0 模的一次谐波和 X 模的二次谐波是光薄的辐射。~~因此~~在托卡马克中通常都是利用 X 模的二次谐波诊断  $T_e$  分布。因为  $\tau_2^{(x)} \gg 1$  时有：

$$I_2^{(x)}(\omega) = \frac{\omega^2 T_e(r)}{8\pi^3 c^2}, \quad \omega \equiv 2\omega_{ce}(r) = \frac{zeB_0 R_0}{m_e R}$$

这样，只要测量了 X 模的二次谐波<sup>谱</sup>的谱分布，就可以获得  $T_e$  的定向分布的测量，因为  $I_2^{(x)} \leftrightarrow T_e$  和  $\omega \leftrightarrow R$  均有一一对应关系。

此外，反过来讲，还可以利用回旋辐射测定  $n_e(r)$  分布和辐射的方向：

(1) 利用光薄的 X 或 0 模测量  $n_e(r)$  分布，例如利用 m=2 0 模，则有：

$$I_2^{(0)} = I_B \tau_2^{(0)}(\omega) n_e(r) T_e^2(r)$$

只要  $T_e(r)$  已知，由此就可测  $n_e(r)$

(2) 利用回旋辐射的偏振特性，测定辐射的方向

其原理是辐射在等离子体中传播时其偏振方向会保持不変，这只有在  $n_e < 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  时才有意义。

应用电致回旋辐射诊断时，为保证  $\omega - s$  一一对应条件，应注意：

(1)  $\Delta\omega_m \ll \delta\omega_m$ ，即  $(\frac{v_E}{c})^2 \ll \frac{a}{R}$  (相对误差) 可忽略

(2) 不重叠， $\delta\omega_m < \omega_{ce}$ ，即  $m \frac{a}{R} < 1$

(3) 墙壁无反射，有反射时

$$1 - e^{-\tau_m}$$

用... 辐射... 接收... 增益... 噪声... 功率... 谱... 密度... 带宽... 频率... 噪声... 功率... 谱... 密度... 带宽... 频率...

$$B_0 = 1T \quad f_{ce} \approx 28 \text{ GHz} \quad 2f_{ce} = 56 \text{ GHz}$$

$$2T \quad f_{ce} = 56 \text{ GHz} \quad 2f_{ce} = 112 \text{ GHz}$$

$$I(\omega) = \frac{\omega^2 T_e}{8\pi^3 c^2}$$

$$I(f) = I(\omega) \frac{d\omega}{df} = \frac{f^2 T_e}{c^2}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} T_e \alpha$$

习题 回旋辐射接收机

1. 回旋辐射接收机

回旋辐射用增益天线接收，无错至宽带接收中，与本振信号相混频，接收中信号被放大与噪声相混。本振信号与信号同频，也可相混。接收回旋辐射功率谱为：

$$I(f) = I(\omega) \frac{d\omega}{df} = \frac{f^2 k T_e}{c^2} [1 - \exp(-\tau)]$$

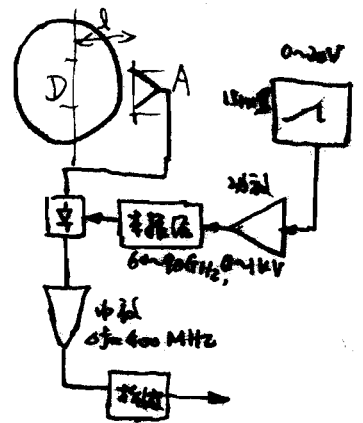
对于温度均匀的辐射源，根据天线理论，有 这同条件

$$\int d\Omega dA = d\lambda^2 = \alpha \frac{c^2}{f^2}$$

$$\frac{A^2}{4\lambda} < 1 < \frac{AD}{2\lambda}$$

接收天线接收的辐射功率为

$$P = I(f) \Delta f \int d\Omega dA = dk T_e [1 - e^{-\tau}] \Delta f$$





对于定性厚  $d = 2 \times \lambda$  板,  $\tau_2^{(x)} \gg 1$ , 故有

$$P^{(x)} = \alpha K T_e \Delta f$$

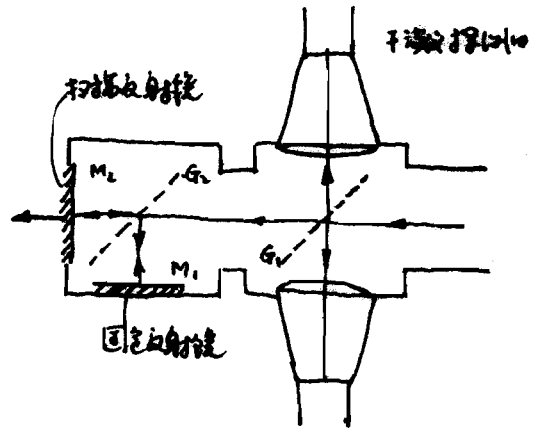
即通过计算接收电子流到接收机的功率直接与电子温度成正比。在热平衡条件下, 发射功率与发射位置有关。因此可以通过改变本振信号的频率 (用扫频, 或时序开关不同频率的本振信号) 而探测不同空间位置上的电子温度。探测电子流可以用微波噪声管标定, 它与微波噪声管射出的电子流与电子温度相比较而进行标定。

**优点:** 灵敏度低, 分辨率低 (约  $\sim 0.001$ ), 时间响应快 (固态噪声  $\sim 1 \mu s$ , 扫频  $\sim 10 \mu s$ )。

**缺点:** 可用频率范围窄,  $\nu < 200 \text{ GHz}$ , 而且受本振频率由谐波限制, 约  $10 \sim 20\%$ 。

## 2. 傅里叶变换谱仪

傅里叶变换谱仪的核心部分是双光束的迈克尔逊干涉仪, 它由具有透射偏特性的线栅  $G_1, G_2$  和固定反射镜  $M_1$ , 动扫描反射镜  $M_2$  组成。动镜  $M_2$  做快速扫描。



线栅  $G_1$  的线垂直于波矢, 这样

透射波矢平行于波矢的入射辐射是全透射, 垂直于波矢的入射辐射是全反射。线栅  $G_2$  的线与波矢成  $45^\circ$  角, 透射  $G_2$  的辐射一半被反射, 一半透射。透射部分, 射入  $M_1$ , 经  $M_1, G_2$  反射后又射到  $G_1$ ; 而反射部分经动镜反射, 透射  $G_2$  而到达  $G_1$  与第一束重合。它由  $G_1$  上相干后又被  $G_1$  反射到探测器上。则探测器接收到的干涉信号为:

$$dI(x) = 2 B(f) df \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) = B(f) (1 + \cos \frac{2\pi x}{\lambda}) df$$

则总信号为:

$$\cos^2\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = A^2 [1 + \cos \Delta\phi]$$

$$dI(x) = [A_1 \cos \omega t + A_2 \cos(\omega t + \Delta\phi)]^2 = \underbrace{2 A_1^2}_{A_1^2} + A_2^2 + 1 \cdot A_1 \cdot \cos \Delta\phi$$

$$I(x) = \int_0^{\infty} B(\phi) d\phi + \int_0^{\infty} B(\phi) \cos \frac{2\pi\phi x}{c} d\phi$$

当  $x=0$  时, 有

$$I(0) = 2 \int_0^{\infty} B(\phi) d\phi$$

故有

$$S(x) = I(x) - \frac{1}{2}I(0) = \int_0^{\infty} B(\phi) \cos \frac{2\pi\phi x}{c} d\phi$$

即为干涉图

其傅里叶变换为

$$B(\phi) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} S(x) \cos \frac{2\pi\phi x}{c} dx$$

由此可见, 干涉图的傅里叶变换就是该谱仪所接收的辐射亮度谱。

实际上, 光程差  $x$  只能在有限的范围内变化, 即:

$$P(x) = \begin{cases} 1 & -L \leq x \leq L \\ 0 & x < -L, x > L \end{cases}$$

其傅里叶变换为:

$$P(\phi) = 2L \frac{\sin \frac{2\pi\phi L}{c}}{2\pi\phi L}$$

将例四的接收到的干涉图实际上用  $S(x)P(x)$ , 故其傅里叶变换为:

$$B(\omega) = 2L \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega') \frac{\sin \frac{2\pi(\omega' - \omega)L}{c}}{2\pi(\omega' - \omega)L} d\omega'$$

$$B(\phi) = 2L \int_{-\infty}^{\infty} B(\phi') \frac{\sin \frac{2\pi(\phi' - \phi)L}{c}}{2\pi(\phi' - \phi)L} d\phi'$$

由此可见谱分辨率由  $L$  定了。该谱仪分辨率的最小频率由  $\frac{c}{L}$  决定。一般  $L$  是光程差为  $1 < L < 3 \text{ cm}$ , 扫描时间为  $\sim 10 \text{ ms}$ , 因而典型的谱分辨率 为 10 GHz。

注意: ① 可进一步对光程差  $x$  随时间的变化, 因而立即去掉了  
是存在起程或减

② 谱分辨率不与光程差有关，而与入射狭缝宽度有关，因此允许有较大的谱分辨率。

从而大的谱分辨率

缺点：① 由于过大的光程差才设计仪器

② 谱分辨率 (~10 GHz), 时间分辨率 (~10 ns) 的矛盾

### 3. 法布里-珀罗干涉仪

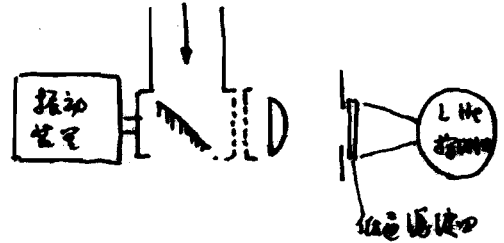
干涉仪由两个相同的平行反射镜组成。

只透射子数为 T, 反射子数为 R, 则反射

射的干涉光入射到干涉仪上时, 透射

率为:

$$T(x) = \left(1 - \frac{A}{T}\right)^2 \left[1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\phi + \frac{2\pi f x}{c}\right)\right]^{-1}$$



即  $A = 1 - R - T$ ,  $\phi$  是透射子数平均的相角

当

$$\phi + \frac{2\pi f x}{c} = n\pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

透射率最大, 取由比可得:

$$f_n = (n\pi - \phi) \frac{c}{2\pi x}$$

其分辨率:

$$\Delta f = \frac{f_0}{F_R}$$

$f_0$  是干涉仪透射极大中心频率

$F_R$  是干涉仪的 finesse

$$F_R = \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R}$$

这种干涉仪可以工作在“扫描模式”工作。静止时, 时间分辨率 ~1 ns, 扫描时, 时间分辨率为 ~2 ns, 扫描范围是 120 ~ 180 GHz,  $\Delta \nu \approx 5$  GHz

缺点是频率分辨率比扫描时低, 扫描范围有限 (但比  $T_c(x)$  是好的)

~~缺点~~

### 4. 衍射光栅谱仪

$f \sim 5$  GHz, 时间分辨率 1 ns, 扫描与接收范围 100 ~ 300 GHz

优点: 时间分辨率与不同频率, 时间分辨率快, 扫描范围宽, 扫描分辨率高

缺点: 分辨率低, 扫描范围有限

5. 四种译码比较

① 最佳应用区域

微波射频频谱计

傅里叶变换译码

F-P 译码

光栅译码

1. 10 GHz ( $\leq 150$  GHz) 的连续时间谱

① 中心频率的. 频率分辨率 10 Hz 的射频频

(60~600 GHz) 连续时间谱

② 较宽的. 频率分辨率 1 Hz 的有限带宽内

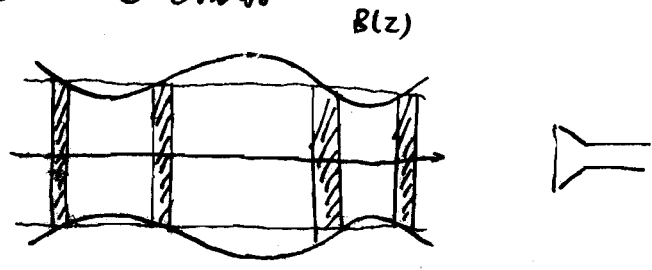
(150~180 GHz) 译码连续时间谱

同时是几个频率的谱射频频谱的连续

② 需知参数和最佳应用比较

参数	要求	特点
指涉的频域成分存在	1. 谱分辨率	扫描傅里叶变换译码
$T_{eq}(t)$	1. 频率分辨率 射频频谱的连续	① 微波射频频谱计 ② 可调 F-P
$T_e(R, t)$	1. 宽谱射频频射 连续. 频率连续	① 傅里叶变换译码 ② 扫描 F-P
$\tilde{T}_e(R, t)$	2. 同频率射频频射 连续时间谱	衍射光栅译码

三. 磁控管电子回旋辐射



当在磁区天线的支持区是线性时. 则天线辐射的功率是  $T_e$ .

## §4.2 等离子体连续辐射

这里, 将电子与带电粒子(主要是离子)的库仑场中<sup>作</sup>加速运动发出的辐射, 称为广义的轫致辐射。严格讲, 电子-离子碰撞产生的辐射与阻碍电子给态能量(或状态)的不同有关:

- (1) 自由-自由跃迁: 末态电子是自由电子, 且动能是大于零, 称为轫致辐射(狭义的);
- (2) 自由-束缚跃迁: 末态电子是束缚电子, 且动能是大于零, 该跃迁发出的辐射称为复合辐射。

这里, 忽略了电子-电子碰撞的贡献, 这是因为同量粒子的双体碰撞过程中, 质心或地壳中心的净加速度为零(除非是相对电子-电子碰撞,  $v \neq 0$ )。

严格讲, 电子的轫致辐射是二过程。在这里, 我们着重讨论自由-自由跃迁, 因为自由辐射占主导地位。电子的轫致辐射是时, 之所以可以忽略束缚跃迁, 且又忽略以下可时进行的自由跃迁。

## 一. 轫致辐射

基本做法:

- (1) 电子是各向同性的速度分布, 且是作随机运动。因此, 有各向同性的速度分布, 因此之加速度的轫致辐射是各向同性的, 且其偏振是随机的。
- (2) 电子速度是非相对论性的, 可用非相对论辐射近似处理辐射过程。
- (3) 电子的辐射频率是连续可忽略, 故可用有心原子的运动方程描述电子在离子库仑场中的运动。

由上述可知, 单电子辐射电场的表达式为:

$$\vec{E}(\vec{R}, \omega) = \frac{e}{4\pi c \epsilon_0 R'} \int dt e^{-i\omega t} [\hat{s} \times (\hat{s} \times \dot{\beta})]_{t'}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{R}, \omega) &= \frac{e}{4\pi c \epsilon_0 R'} \int e^{-i\omega t} \left[ \frac{\hat{s} \times [(\hat{s} - \beta) \times \dot{\beta}]}{(1 - \beta \cdot \hat{s})^3} \right]_{t'} dt \\ &= \frac{e}{4\pi c \epsilon_0 R'} \int e^{-i\omega(t' + \frac{R}{c} - \frac{\hat{s} \cdot \vec{r}}{c})} \frac{\hat{s} \times [(\hat{s} - \beta) \times \dot{\beta}]}{(1 - \beta \cdot \hat{s})^3} dt' \end{aligned}$$

当  $\beta \ll 1$  时, 其辐射场为:

$$\begin{aligned} \frac{d^2W}{d\Omega d\omega} &= \frac{e^2}{16\pi^3 c \epsilon_0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t' + \frac{R}{c} - \frac{\hat{s} \cdot \vec{r}}{c})} \hat{s} \times (\hat{s} \times \dot{\beta}) dt' \right|^2 \end{aligned}$$

因为  $\int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\vec{E}(\vec{r}, \omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} \frac{d^2W}{d\Omega d\omega} d\omega$

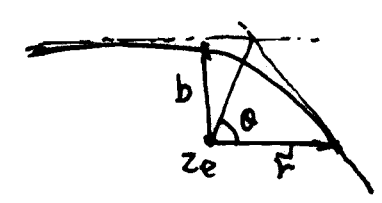
则对上式为积分总辐射场为:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2}{6\pi^2 c^3 \epsilon_0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\beta} e^{-i\omega t} dt \right|^2$$

电子在力场中运动轨迹是双曲线轨迹

$$r = \frac{b^2}{b_0(1 + \epsilon \cos \theta)}$$

b 为碰撞参数



其中  $b_0 \equiv \frac{ze^2}{4\pi \epsilon_0 m v^2}$  为发生  $90^\circ$  偏转时的碰撞参数

$$\epsilon \equiv \left[ 1 + \left( \frac{b}{b_0} \right)^2 \right]^{1/2}$$

为偏转率

能量方程:

$$\frac{1}{2} m_e [\dot{r}^2 + (\dot{\theta} r)^2] - \frac{ze^2}{4\pi \epsilon_0 r} = \frac{1}{2} m_e v^2 \quad m_e r \ddot{\theta} = M (\text{角动量})$$

将电子在力场中运动的加速度代入上式, 积分可得:

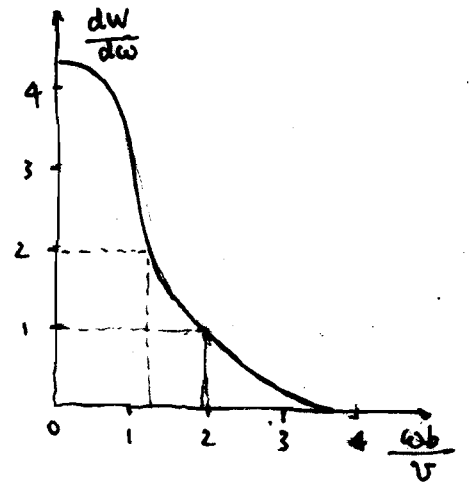
$e^{-\pi\Omega}$

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{ze^2\omega^2}{3\pi^2c^3\epsilon_0} \left(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2}\right)^2 \left\{ [K'_{ia}(\Omega)]^2 + \frac{\epsilon^2-1}{\epsilon^2} [K_{ia}(\Omega)]^2 \right\}$$

即  $\Omega \equiv \frac{\omega b_0}{v}$

$K_0$  是虚数阶的何正汉亥尔函数,  $K'_0$  是对其实数阶的微商。

按式计算辐射功率随  $\frac{\omega b}{v}$  的变化曲线如图。由此可知, 电子的辐射功率随  $\frac{\omega b}{v}$  的变化范围, 在  $\frac{\omega b}{v} \leq 1$  的范围内, 在此范围内, 即  $\frac{\omega b}{v} \gg 1$ , 辐射功率很小。由式  $\frac{\omega b}{v} \sim 1$  或  $\omega \approx \frac{v}{b}$  表明, 速度大的电子产生的辐射功率也大, 这是很自然的, 因为辐射功率是功率耗电子动能的代价值, 功率越大, 电子的动能  $(\frac{1}{2}mv^2)$  越大。此外, 辐射功率随  $b$  的变化, 当  $b \rightarrow \infty$  时,  $\omega \rightarrow 0$ , 这也是很自然的, 因为  $b$  小, 电子的加速度大, 其辐射功率也大。



由上述可知, 辐射功率是电子的速度  $v$  及目标距离  $b$  的函数。

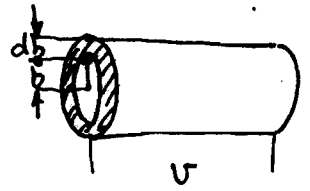
即  $\frac{dW}{d\omega} \equiv W(\omega, v, b)$

若一个电子数为  $(v, b)$  的电子通过离子束或为  $n_i$  的离子束, 则其单位时间内与离子的碰撞次数为:

$$n_i v 2\pi b db$$

则它与离子碰撞产生的辐射功率为:

$$\eta(\omega, v) = 2\pi v n_i \int_0^\infty W(\omega, v, b) b db$$



一个电子在单位时间内与离子碰撞产生的辐射功率

代入式(1)得:

$$\eta(\omega, v) = n_e v \frac{\partial h \alpha}{\partial \omega} \frac{c^2}{v^2} (Z r_e)^2 g(\omega, v)$$

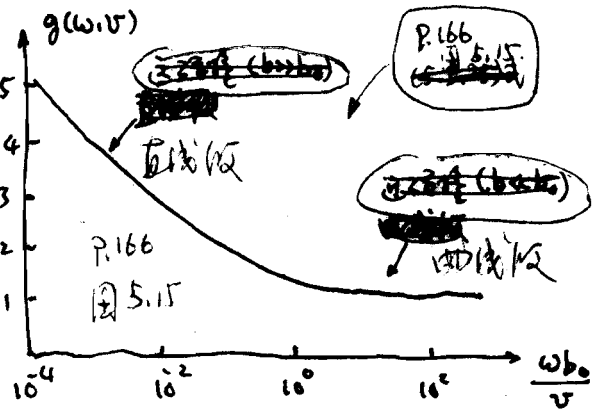
其中

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{2h \epsilon_0 c} \quad \text{为精细结构常数}$$

$$r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m_e c^2} \quad \text{为电子(经典)半径}$$

$$b_0 = \frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0 m v^2}$$

$g(\omega, v)$  为商谱因子, 之表示辐射功率分布因子。由图可知, 对于低速电子 ( $b_0, v$ ) 的电子, 其辐射功率谱集中在  $\frac{\omega b_0}{v} \leq 1$  的范围内; 在高速范围内, 即  $\frac{\omega b_0}{v} \geq 1$ , 其辐射功率的分布就是很小的。



量子力学计算: 涉及两个方面:

- (1) 电子的波动性
- (2) 电磁辐射的量子性

由电子的波动性可知, 电子最小瞄准距离  $b$ 。由于受到不确定性的限制, 即由坐标速度反推定:

$$\Delta x = \hbar / \Delta p$$

而位置的不确定性不能超过其本身, 即:

$$\Delta p \leq m v$$

故有

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{m v}$$

即

$$\frac{\hbar}{m v} \leq b_0 = \frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0 m v^2}$$



即

$$v \leq Z\alpha c \quad \alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$$

$$\frac{1}{2}m_0 v^2 \leq Z^2 R_y \quad (\text{经典近似成立之条件})$$

或

$$R_y \equiv \frac{m_e}{2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \right)^2 \quad \text{为里德堡常数, 可近似认为等于}$$

上述条件不满足, ~~或~~ 上述条件不满足时, 必须用量子理论处理。而由辐射功率  $\frac{dW}{dt}$  曲线可知,  $\frac{\omega b}{v} \leq 1$  为洛伦兹辐射区,  $v$  为电子运动之速度。由此可知, 对于低能辐射, 两种理论所得之结果相差不大, 量子理论对于高能辐射有较大的修正。<sup>D</sup> 量子辐射理论之修正项有:

$$\hbar\omega = \frac{1}{2}m_0 v^2 - \frac{1}{2}m_0 v'^2$$

故有

$$\hbar\omega \leq \frac{1}{2}m_0 v^2$$

(经典近似成立之条件  $\hbar\omega \ll \frac{1}{2}m_0 v^2$ )

这样, 量子理论对经典辐射公式的修正可归结为对洛伦兹因子  $\gamma$  的修正。  
P. 167-169 讨论了各种条件下辐射功率的量子修正的洛伦兹因子的修正式。

辐射功率的量子修正: 量子辐射功率与经典功率之比

$$\sigma(\omega, v) \equiv \frac{\eta(\omega, v)/\hbar\omega}{n_0 v} = \frac{\text{单位时间内辐射功率 } \omega \cdot \text{单位体积内电子数}}{\text{电子单位时间内通过单位面积的能量流}}$$

由此可得:  $\frac{16\alpha}{3\sqrt{3}} \frac{c^2}{v^2} \pi (Zr_e)^2 \frac{1}{\omega} g(\omega, v)$

$$\sigma(\omega, v) = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \frac{c^2}{v^2} \alpha (Zr_e)^2 \frac{1}{\omega} g(\omega, v)$$

由此可知:  $\sigma$  随  $Z$  增大而增大  
随  $v, \omega$  增大而减小

$$j(\omega) = n_e n_i z^2 \frac{8\pi \alpha c^2 r_e^2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{2m_e}{\pi T_e}\right)^{1/2} \bar{g}(\omega, T_e) \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T_e}\right) \quad (4-27)$$

将电子的辐射功率谱对电子的速度分布函数积分，即可得到  
等离子体辐射的总功率谱：

$$j(\omega) = \int \eta(\omega, v) n_e f(\vec{v}) d\vec{v}$$

对于方向同性的高温等离子体中的电子，上式可化为：

$$j(\omega) = n_e n_i z^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^3 \frac{16\pi}{3\sqrt{3} n_e^2 c^3} \left(\frac{2m_e}{\pi T_e}\right)^{1/2} \bar{g}(\omega, T_e) \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T_e}\right)$$

其中  $\bar{g}(\omega, T_e) = \int_0^\infty g(\omega, E' + \hbar\omega) \exp\left(-\frac{E'}{T_e}\right) \frac{dE'}{T_e}$

是高温等离子体分布函数的 Gaunt 因子，它是量子电动力学函数。

其中  $E = \frac{1}{2} m v^2 = E' + \hbar\omega$

书中 P.171 图 5.18 给出了  $\bar{g}(\omega, T_e)$  的曲线。若更明确，在一定的  
范围内，即：

$$0.1 \leq \frac{\hbar\omega}{T_e} < 10$$

P.167~171 给出了在量子电动力学  
中的下例的 Gaunt 因子 (Gaunt factor)  
的公式

$\bar{g}$  的取值范围为  $\bar{g} \approx 0.2 \sim 2$ 。这与  $j(\omega)$  公式中  $T_e^{-1/2} \exp(-\frac{\hbar\omega}{T_e})$   
因子相乘，可近似地取为常数  $\bar{g}(\omega, T_e) \approx 1$  (当  $0.1 \leq \frac{\hbar\omega}{T_e} \leq 10$  时)。

## 二. 逆轫辐射：

当速度为  $v$  的电子与离子碰撞时，被离子(电荷数为  $Z$ )捕获而处  
于量子态离子(电荷数为  $Z-1$ )的主量子数为  $n$  的能级上，这一过程中将产  
生光子能量为：

$$\hbar\omega = \frac{1}{2} m_e v^2 + \chi_{Z-1, n}$$

的逆轫辐射，其中  $\chi_{Z-1, n}$  为电荷数为  $(Z-1)$  的离子主量子数为  $n$  的能级

的电磁场。这个过程的复合辐射，它与轫致辐射的物理过程相类似，但不问以何种形式为束缚电子，而是自由电子。

根据这两个辐射过程的类似性，我们可以从轫致辐射截导出复合辐射截面：

$$\text{轫致辐射} \quad \hbar\omega = E - E' \quad E = \frac{1}{2}mv^2 \text{ 为电子动能, } E' \text{ 为束缚能}$$

$$\text{复合辐射} \quad \hbar\omega = E + X_{z1,n}$$

由此可知，当  $E' \rightarrow 0$  和  $X_{z1,n} \rightarrow 0$  时，这两个辐射过程是等价的，它们的辐射截面也是相等的，即  $\sigma_{\text{fs}}(\omega, v) d\omega = \sigma_{\text{fb}}(\omega, n) dn$ 。

由此可知，轫致辐射当  $E' = 0$  时，相当于高能轫致辐射，其截面为：

$$\sigma_{\text{fs}}(\omega, v) d\omega = \frac{16}{3\sqrt{3}} \frac{c^2}{v^2} \alpha \pi (zr_e)^2 \frac{1}{\omega} d\omega g(\omega, v)$$

$$\text{其中} \quad r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}, \quad \alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$$

对于类氢原子，其束缚能（电离能）可以表示为：

$$X_{z1,n} \equiv \frac{Z^2 R_y}{n^2} \quad R_y = X_{H,1} \text{ 是氢原子基态电离能}$$

则复合辐射截面为：

$$\hbar\omega = E + \frac{Z^2 R_y}{n^2}$$

$$\hbar d\omega = -\frac{2Z^2 R_y}{n^3} dn$$

由此可得：

$$\left| \frac{d\omega}{dn} \right| = \frac{2Z^2 R_y}{n^3 \hbar}$$

则复合辐射截面为：

$$j_{fb}(\omega) = n_e n_i Z^2 \frac{8h\alpha c^2 r_e^2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{2m_e}{\pi T_e}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{h\omega}{T_e}\right] \times \left[ \frac{Z^2 R_y}{n^2 T_e} \frac{2}{n} g_n \exp\left(\frac{Z^2 R_y}{n^2 T_e}\right) \right]$$

$$\sigma_{fb}(\omega, n) = \sigma_{ff}(\omega, v) \left| \frac{d\omega}{dn} \right| = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \frac{c^2}{v^2} \alpha (Zr_e)^2 \frac{1}{h\omega} \frac{2Z^2 R_y}{n^2} g_n$$

4-29

即  $g_n$  为复合时  $n$  壳层上的辐射角动因子。由 (2) 可知:

- (1)  $v$  越大 (初动能越大),  $\sigma_{fb}$  越大
- (2)  $Z$  越大,  $\sigma_{fb}$  越大
- (3)  $n$  越大,  $\sigma_{fb}$  越小

实际上, 我们电子的计量复合辐射与体辐射中。由于复合辐射时, 速度与辐射频率是一一对应的, 即  $h\omega = \frac{1}{2} m_e v^2 + \chi_{Z, n}$ 。因此求体辐射时不需对  $\omega$  求积分, 只需直接计算。即:

$$\Rightarrow j_{fb}(\omega) = n_i v h\omega \sigma_{fb}(\omega, n) \times 4\pi v^2 f(v) n_e \left| \frac{dv}{d\omega} \right|$$

对体辐射

$$= n_e n_i Z^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^3 \frac{16\pi}{3\sqrt{3} m_e^2 c^2} \left(\frac{2m_e}{\pi T_e}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{h\omega}{T_e}\right)$$

代入上式

$$v = \left[ \frac{2(h\omega - Z^2 R_y/n^2)}{m_e} \right]^{1/2} \times \left[ \frac{Z^2 R_y}{n^2 T_e} \frac{2}{n} g_n \exp\left(\frac{Z^2 R_y}{n^2 T_e}\right) \right] \quad \text{当 } h\omega \geq \frac{Z^2 R_y}{n^2} \text{ 时}$$

这个公式与体辐射公式是相类似的, 只是  $j_{ff}(\omega, v)$  中的  $\sigma_{ff}(\omega, T_e)$  被上式中因子  $\left[ \frac{Z^2 R_y}{n^2 T_e} \frac{2}{n} g_n \exp\left(\frac{Z^2 R_y}{n^2 T_e}\right) \right]$  所代替。但应注意, 因为  $h\omega = E + \frac{Z^2 R_y}{n^2}$ ,  $j_{fb}(\omega)$  只有当  $h\omega \geq \frac{Z^2 R_y}{n^2}$  时才成立。对于

(2)  $j_{fb}(\omega) = 0$ 。这个特性由  $v$  的归属在  $g_n$  中。即

$$h\omega < \frac{Z^2 R_y}{n^2}, \quad g_n \neq 0 \quad \text{当 } h\omega \geq \frac{Z^2 R_y}{n^2} \text{ 时}$$

$$g_n = 0 \quad \text{当 } h\omega < \frac{R_y Z^2}{n^2} \text{ 时}$$

$g_n$  可由量子力学计算 (略), 计算表明: 当  $h\omega < 10 Z^2 R_y$  时,  $g_n \approx 1$  (误差在 2% 以内)。

对于非定态剥离的离子复合, 其电离势的计算比如定态。但是电子的动能不比电离势大很多的情况下, 可做定态(准)屏蔽定态屏蔽的。这时把离子电荷 $Z$ 视为核电荷, 视该离子为原子。则对于壳层 $n$ , 其电离势可近似的为:

$$X_{21, n} = \frac{Z^2 R_y}{n^2} \quad \left| \frac{dW}{dn} \right| = \frac{2 R_y Z^2}{n^3}$$

对于主量子数为 $\xi$ 的束缚层 $n_0$ , 其电离电势为:

$$\left( X_{21, n_0} \right)_{\text{eff}} = \frac{\xi}{2n_0^2} X_{21, n_0}, \quad \left| \frac{dW}{dn} \right| = \frac{\xi X_{21, n_0}}{n n_0^2}$$

假设层没有壳层上的复合辐射, 则具体辐射 $j$ 为:

$$j_{jb}(\omega) = n_e n_i Z^2 \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{16\pi}{3\sqrt{3} m_e^2 c^3} \left( \frac{2m_e}{\pi T_e} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T_e}\right)$$

$$\times \left\{ g_{n_0} \frac{\xi}{n_0^2} \frac{X_{21, n_0}}{T_e} \exp\left(\frac{X_{21, n_0}}{T_e}\right) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} g_n \frac{Z^2 R_y}{n^2 T_e} \frac{2}{n} \exp\left(\frac{Z R_y}{n^2 T_e}\right) \right\}$$

这里,  $n_0$ 是满足 $\hbar\omega$ 是 $\hbar\omega$ 相对之 $n$ , 之复合辐射辐射的发生的最小量子数, 之半径满足:

$$n_0 \geq \left( \frac{Z^2 R_y}{\hbar\omega} \right)^{1/2}$$

$$\xi = 2n_0^2 - \mu_0, \quad \mu_0 \text{ 为 } n_0 \text{ 壳层上已有的电子数}$$

### 三. 连续辐射体辐射率和吸收系数

连续辐射总辐射率是轫致辐射和复合辐射的辐射率之和, 单位体积在 $\omega$ 角度的辐射率为:

$$j(\omega, \Omega) = \frac{1}{4\pi} [ j_{\text{ff}}(\omega) + j_{\text{fb}}(\omega) ]$$

$$n_e n_i Z^2 \frac{2 \hbar \omega c^2 r_e^2}{3 \sqrt{3} \pi} \left( \frac{2 m_e}{\pi T_e} \right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\hbar \omega}{T_e}\right\} \quad 4-31$$

$$j(\omega, \Omega) = n_e n_i Z^2 \left( \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0} \right)^3 \frac{4}{3 \sqrt{3} m_e^2 c^3} \left( \frac{2 m_e}{\pi T_e} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\hbar \omega}{T_e}\right)$$

$$\times \left\{ \bar{g}_{\text{eff}} + g_{n_0} \frac{\sum \chi_{21, n_0}}{T_e} \exp\left(\frac{\chi_{21, n_0}}{T_e}\right) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} g_n \frac{z^2 R_y}{n^2 T_e} \frac{2}{n} \exp\left(\frac{z^2 R_y}{n^2 T_e}\right) \right\}$$

将物理量代入上式, 则有:

$$j(\omega, \Omega) = 8.0 \times 10^{-55} n_e n_i Z^2 (T_e [\text{eV}])^{-1/2} \exp\left(-\frac{\hbar \omega}{T_e}\right)$$

$$\times \left\{ \bar{g}_{\text{eff}} + g_{n_0} \frac{\sum \chi_{21, n_0}}{T_e} \exp\left(\frac{\chi_{21, n_0}}{T_e}\right) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} g_n \frac{z^2 R_y}{n^2 T_e} \frac{2}{n} \exp\left(\frac{z^2 R_y}{n^2 T_e}\right) \right\}$$

典型的氢射光谱 ( $T_e = z^2 R_y$ ) 如下图所示。

由此可知:

1. 氢射谱在  $\hbar \omega = z^2 R_y / n^2$  处出现跃迁区,

即为复合边

2. 氢射谱在复合边处出现不连续区

对, 在复合边的一侧, 氢射谱随

$\exp(-\hbar \omega / T_e)$  变化, 因此可利用连续区

的谱线率对数曲线的斜率求出电子温度  $T_e$ 。

3. 复合辐射与氢射辐射功率之比

$$\frac{j_{\text{fb}}(\omega, \Omega)}{j_{\text{ff}}(\omega, \Omega)} = \frac{2}{n^2} \frac{z^2 R_y}{T_e} \frac{g_n}{\bar{g}_{\text{eff}}} \exp\left(\frac{z^2 R_y}{n^2 T_e}\right)$$

这里  $n$  由下式决定:

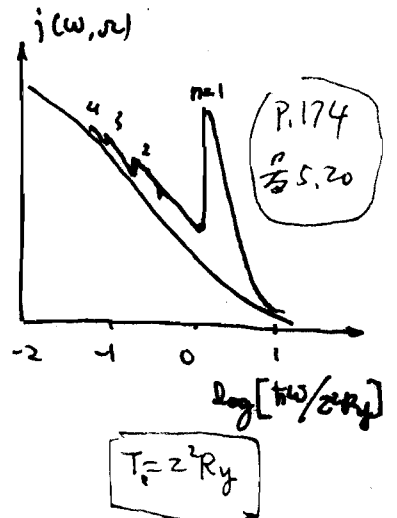
$$n \geq \left( \frac{z^2 R_y}{\hbar \omega} \right)^{1/2} \quad (\because \text{只有 } \hbar \omega \geq \frac{z^2 R_y}{n^2} \text{ 时, 才有 } g_n \neq 0)$$

当  $\hbar \omega \ll z^2 R_y$  时, 只有很大的  $n$  对辐射有贡献, 这时  $j_{\text{fb}}/j_{\text{ff}} \ll 1$

当  $\hbar \omega \geq z^2 R_y$  时, 只有  $n$  有贡献, 则  $j_{\text{fb}} \approx j_{\text{ff}}$ 。

而且当  $z^2 R_y \gg T_e$  时  $j_{\text{fb}} \gg j_{\text{ff}}$

当  $z^2 R_y \ll T_e$  时, 只有  $\omega$  的  $j_{\text{fb}}$  起作用



- x 4. 当  $T_e$  (室温) 时,  $\alpha$  值  $j_{fb}/j_{ff}$  随  $\omega$  增大而增大,  
 这是因为  $\omega$  随  $\omega$  增大而减小,  $\omega$  减小  $j_{fb}/j_{ff}$  增大。特别有:  
 当  $\lambda < 3000 \text{ \AA} / T_e [\text{eV}]$  时,  $j_{fb} > j_{ff}$   
 当  $\lambda > 3000 \text{ \AA} / T_e [\text{eV}]$  时,  $j_{fb} < j_{ff}$
- x 5. 对于给定的  $\omega$ ,  $\alpha$  值  $j_{fb}/j_{ff}$  随  $T_e$  增大而减小。特别有:  
 当  $T_e > 3 Z^2 R_y$  时,  $j_{fb} \ll j_{ff}$   
 当  $T_e < Z^2 R_y$  时,  $j_{fb} \gg j_{ff}$
6.  $j_{ff} \propto Z^2$ ,  $j_{fb} \propto Z^4$   
 因此辐射特性随原子电荷数  $Z$  增大而急剧增大。

#### 逸出辐射的吸收系数

$$\alpha(\omega) = \frac{j(\omega, \rho)}{I_B(\omega, T_e)}$$

$$\text{其中 } I_B(\omega, T_e) = \frac{2\pi^5 \omega^3}{15 \pi^3 c^2} \left[ e^{\frac{h\omega}{T_e}} - 1 \right]^{-1} \quad (\text{单位})$$

(1) 当  $h\omega \ll T_e$  时

$$I_B(\omega, T_e) \approx \frac{\omega^2 T_e}{4\pi^3 c^2}$$

$$\alpha(\omega) = \frac{4\pi^3 c^2}{T_e \omega^2} j(\omega, \rho) \propto \omega^{-2} \exp\left(-\frac{h\omega}{T_e}\right) \propto \omega^{-2}$$

由此可见, 当  $\omega$  减小时,  $\alpha$  增大, 有吸收达到的原子厚辐射

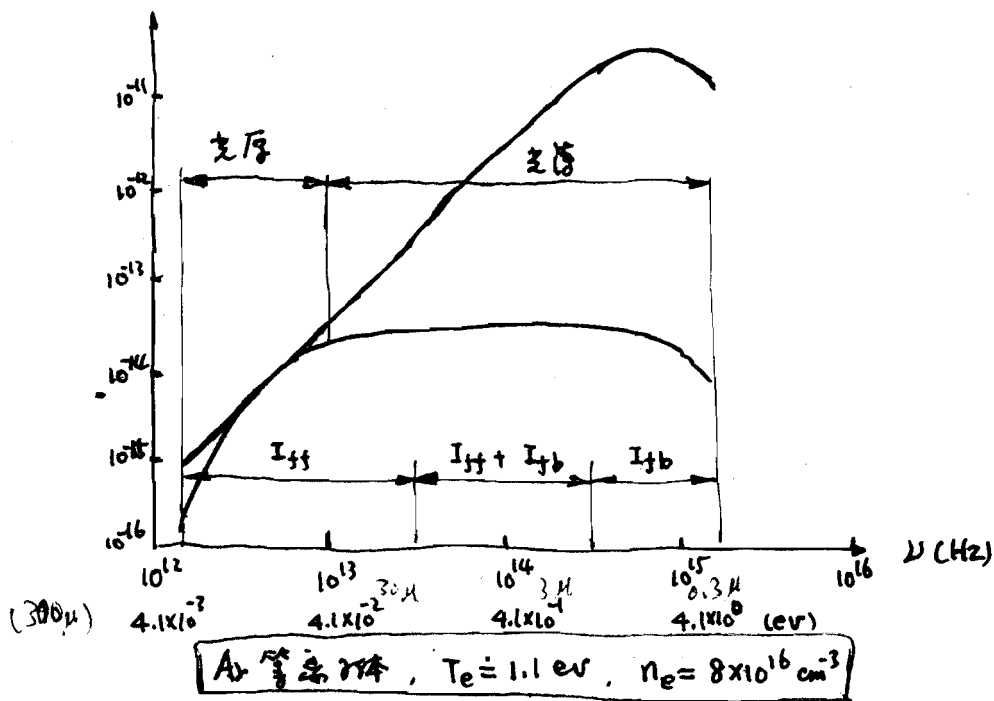
(2) 当  $h\omega \gg T_e$  时

$$I_B(\omega, T_e) \approx \frac{h\omega^3}{4\pi^3 c^2} \exp\left(-\frac{h\omega}{T_e}\right)$$

$$\alpha(\omega) = \frac{4\pi^3 c^2}{h\omega^3} \exp\left(\frac{h\omega}{T_e}\right) j(\omega, \rho) \propto \omega^{-3}$$

由此可见, 当  $\omega$  增大,  $\alpha(\omega)$  随之减小, 且  $\alpha$  射成波短透射比是差薄。

$I(\omega) (\text{W} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1})$



P. 175 式 (5.3.54)

$$j(\omega, \mu) = 8.0 \times 10^{-55} n_e n_i Z^2 (T_e [\text{eV}])^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\hbar\omega}{T_e}\right] \\ \times \left\{ \bar{g}_{ff}(\omega, T_e) + g_{n_0} \frac{\sum \chi_{2l, n_0}}{n_0^2 T_e} \exp\left(\frac{\chi_{2l, n_0}}{T_e}\right) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} g_n \frac{Z^2 R_y}{\hbar^2 T_e} \frac{2}{n} \exp\left(\frac{Z^2 R_y}{\hbar^2 T_e}\right) \right\} [\text{W} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{s}]$$

~~其中  $\bar{g}_{ff}$  为~~

其中

$$\bar{g}_{ff} \approx 1.0 \quad \text{当} \quad 0.1 \leq \frac{\hbar\omega}{T_e} \leq 10 \text{ 时}$$

$$g_n \approx 1.0 \quad \text{当} \quad \hbar\omega < 10 Z^2 R_y \text{ 时}$$

$$(g_n \neq 0 \quad \text{当} \quad \hbar\omega \geq \frac{Z^2 R_y}{n^2} \text{ 时}$$

$$g_n = 0 \quad \text{当} \quad \hbar\omega < \frac{Z^2 R_y}{n^2} \text{ 时})$$



### 四 等离子体诊断中的应用

#### 1. 电子温度测量

等离子体连续辐射可覆盖很宽的频率范围，通常从  $\omega_{pe}$  (之通常微波波段) 到  $\omega \geq T_e$  (对于高温等离子体，之通常甚至X射线波段)。利用不同的谱区，有用于各种等离子体参数诊断。当  $\omega \geq T_e$  时，连续辐射功率与电子温度有密切的联系，减小，则通过谱区，可利用谱的  $\exp(-\frac{\omega}{T_e})$  来校准谱区  $T_e$ 。

对于高温等离子体，特别是磁约束等离子体， $\omega \geq T_e$  的辐射是X射线波段，通常是利用固体探测器测量X射线能谱，这种X射线能谱仪称为X射线脉冲幅度分析器。其测量原理大致如下：当射线探测器(半导体探测器)上的X射线能量较小时，探测器输出的电荷信号是一个脉冲，这时是利用脉冲计数的方式来测量探测器接收的辐射功率。X射线光子在探测器中的吸收(耗尽层，它没有耗尽的情况下不存在自由载流子)由这些光子产生电子-空穴对。若在探测器中每产生一个电子-空穴对消耗的能量为  $\epsilon$ ，则光子能量  $E = h\omega$ ，平均产生的电子数为：

$$\bar{N} = \frac{E}{\epsilon}$$

则之产生的电荷脉冲信号幅度为：

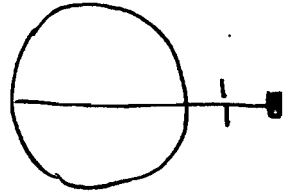
$$V \propto \bar{N}e = Q \propto E = h\omega \quad (\text{电荷灵敏度与频率成正比})$$

而单位时间内测得的脉冲计数率是正比于探测器单位时间内接收的电子数。这样，测量分析器输出的不同幅度脉冲信号的计数率就可得到X射线能谱的测量。

对于低密度的等离子体，X射线辐射是透明的，则单位时

向探测器接收的量子数为:

$$\int d\Omega \frac{j(r, E, \Omega)}{E} A \Omega$$



其中  $\Omega$  为探测器接收立体角, 探测器位置  $r$  为常数,  $A$  为探测器接收面积 (一般也是  $r$  为常数)。设探测器接收通量为  $T(E)$  (这包括探测器如死层和探测器可滤波的吸收效应), 探测器的量子效率为  $Q(E)$  (这是  $x$  射线进入探测器层中的吸收), 之比为:

$$T(E) = \exp\left[-\sum_i \alpha_i(E) x_i\right]$$

$$Q(E) = 1 - \exp(-\alpha x)$$

则探测器输出的脉冲计数率  $S$  的分布 (指数) 分布为:

$$S(E) = \frac{dN(E)}{dt} = T(E)Q(E) \int d\Omega \frac{j(r, E, \Omega)}{E} A \Omega$$

因为

$$j(r, E, \Omega) \propto \exp\left[-\frac{E}{T_e(r)}\right] \times \frac{n_e^2(r)}{\sqrt{T_e(r)}}$$

探测器  $S(E)$  随  $E$  呈指数形式, 主要由指数因子  $\exp\left[-\frac{E}{T_e(r)}\right]$  决定。设电子温度分布为

$$T_e(r) = T_{e0} \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^\alpha\right]^\alpha$$

$r \ll a$  区域中  
在  $r \ll a$  区域, 指数因子可近似地表示为:

$$\begin{aligned} \exp\left[-\frac{E}{T_{e0} \left(1 - \frac{r^\alpha}{a^\alpha}\right)^\alpha}\right] &\approx \exp\left[-\frac{E}{T_{e0}} \left(1 + \alpha \frac{r^\alpha}{a^\alpha}\right)\right] \\ &= \exp\left(-\frac{E}{T_{e0}}\right) \exp\left\{-\frac{\left(\frac{r}{a}\right)^\alpha}{\frac{T_{e0}}{\alpha E}}\right\} \end{aligned}$$

第一个指数因子  $\exp(-E/T_{e0})$  与  $r$  无关, 只决定计数率, 第二

利用如下恒等式：

$$\delta(x-x_0) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta}\right\}$$

可将第一子指数因子化为  $\delta(x)$  函数：(当  $E \gg T_{e0}$  时)

$$\sqrt{\frac{T_{e0}}{\alpha E}} \frac{1}{\sqrt{\frac{T_{e0}}{\alpha E}}} \exp\left\{-\frac{(\frac{x}{\alpha})^2}{\frac{T_{e0}}{\alpha E}}\right\} \xrightarrow{\text{当 } \alpha E \gg T_{e0} \text{ 时}} \sqrt{\frac{\pi T_{e0}}{\alpha E}} \delta(x)$$

这样，当  $\alpha E \gg T_{e0}$  时，上述积分方程可近似地表示为：

$$S(E) = (A_{\Omega})|_{r_{e0}} T(E) Q(E) E^{-1} \left(\frac{\pi T_{e0}}{\alpha E}\right)^{1/2} j(0, E, \Omega)$$

由此可得：

$$S(E) E^{3/2} [T(E) Q(E)]^{-1} = (A_{\Omega})|_{r_{e0}} j(0, E, \Omega) \propto \exp(-E/T_{e0})$$

由此可见，脉冲传播方程所给出的支分方程，在  $E \gg T_{e0}$  的范围内，经推导即是子指数因子所给出的方程。因此，上述方程反映了碰撞中心与外场相互作用，由此可得到该方程中的物理意义。

### 二. $Z_{eff}$ 的测量

$Z_{eff}$  的定义为：

$$Z_{eff} \equiv \frac{\sum n_i Z_i^2}{\sum n_i Z_i} \quad \sum n_i Z_i^0 = n_e$$

这是等离子体中的平均的离子电荷。对于单一离子的等离子体， $Z_{eff} = Z$  ( $Z$  为离子电荷数)。对于含有各层离子的等离子体， $Z_{eff}$  表示该层离子中各层离子的含量，这是与主成分物理量。

从上述讨论可知，复合辐射的包络与条件为  $h\nu \ll ZRy$ ，对于氢原子的离子，之相当于是  $h\nu \ll 13.6 \text{ eV}$ ，对于可见光或

$$1 \text{ eV} = 1.2398 \mu\text{m} = 12398 \text{ \AA} = 1239.8 \text{ nm}$$

波长更长的辐射, 这个条件通常是容易满足的。在这个条件下, 两种离子的散射因子都取为相同的, 即是(在辐射了适当的修正后):

$$j(\omega, \Omega) = 8.0 \times 10^{-57} n_e (T_e [\text{eV}])^{\frac{1}{2}} \bar{g}_{\text{eff}}(\omega, T_e) \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T_e}\right) \times \sum_A \sum_Z n_i(A, Z) Z^2$$

此外, 对于X射线等波段, 对于上述的3个条件或波长更长的条件, 有  $\hbar\omega \ll T_e$ , 则上式可简化为:

$$j(\omega, \Omega) = 8.0 \times 10^{-57} \frac{n_e^2}{\sqrt{T_e [\text{eV}]}} \bar{g}(\omega, T_e) Z_{\text{eff}} \quad [\text{W} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}]$$

$$\text{即 } Z_{\text{eff}} = \frac{\sum_A \sum_Z n_i(A, Z) Z^2}{\sum_A \sum_Z n_i(A, Z) Z} = \frac{\sum_A \sum_Z n_i(A, Z) Z^2}{n_e}$$

由此可知: 只要是对例进行了适当修正(满足条件  $\hbar\omega \ll Z^2 R_y$ ) 的辐射散射功率, 且  $n_e$  和  $T_e$  是已知的, 则由该例是此例的散射有效电荷数  $Z_{\text{eff}}$  的值。

该例是要求:

- (1) 对例例口和谱线子做绝对校正
- (2)  $\hbar\omega \ll Z^2 R_y$ , 进行适当修正
- (3) 选定的例是谱线中所有谱线的总辐射(如  $5240 \text{ \AA}$  或  $5360 \text{ \AA}$  附近)。
- (4)  $T_e \gg Z^2 R_y$  以保证  $j$  的适用。

### 3. X射线谱层例是

利用X射线散射例口阵列和针孔照相的方法, 可获得定向方位的X射线散射例是的方法。是有多(但散射例口阵列进行多方位角)的或系例是, 则通过层析方法可

求得局域的 X 射线衍射率能层图是，这个整体衍射是许多局域的衍射，即

$$I \propto \int j(\nu, E, R) Q(E) T(E) dE \propto Z_{eff}(\nu) n_e^2(\nu) T_e^2(\nu)$$

即

$$T(E) Q(E) = [1 - e^{-\mu(E)X}] e^{-\sum \alpha_i X_i}$$

$\mu$  为 ~~吸收~~ 系数，之大致为 2~5。普通吸收材料种  
的厚度，以及 X 射线剂量而定。由此可知，等效吸收 + 衰减系数，也  
不衰减和电子温度能层图 X 射线光子出射能层。特别在  
MHD 不稳定（不稳定情况），使 X 射线光子出射能层的  
层和厚度。因此之是随着 MHD 不稳定比之变化之一。

层和厚度变化的等效吸收能层图两个方面是：(1) 能层  
是整体稳定的，因而用等效能层图来吸收层 (2) 等效  
吸收是稳定的。

### §4.3 束缚电子的波函数

波函数的研究导致了量子力学的诞生。由于量子力学是描述微观世界的物理理论，所以人们把量子力学的研究称为量子力学。量子力学是研究微观粒子的运动规律，以及它们相互作用的一门科学。量子力学的发展，使得人们能够更深入地认识物质的本质，以及物质的运动规律。

中心力场近似：

- ① 电子在原子核的库仑场和电子之间的平均力场中运动
- ② 电子在平均力场中运动也是中心力场

#### 一. 原子结构与量子力学的基本知识

##### 1. 中心力场近似的电子运动 (单电子问题)

决定单电子问题的有四个量子数：~~三个量子数~~

主量子数  $n$ ：决定电子所处的壳层，表征壳层的符号如下：

$n$	1	2	3	4	5	6	7
符号	K	L	M	N	O	P	Q

角量子数  $l$ ：决定电子所处的子壳层，对每一个  $n$  值， $l$  可取  $0, 1, 2, \dots, n-1$

$l$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
符号	s	p	d	f	g	h	i	k	l	m	n

磁量子数  $m$ ：决定轨道角动量在  $z$  轴上的投影，对于每一个  $l$  值， $m$  可取  $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

自旋量子数  $m_s$ ： $m_s = \pm \frac{1}{2}$

由此可知：对于每一个  $n$  值，主层壳层内包含的电子数为  $2n^2$

对于每一个子壳层  $l$ ，电子数 (即包含的电子数) 为  $2(2l+1)$

电子排布：是某一个原子 (或离子) 中各电子所处的  $n, l$  壳层和  $m$  值。

2. 中心力场近似的原子和 LS 耦合谱项与原子态

中心力场近似的原子态是外层电子间的相互作用力所引入的原子。由于内层(壳层)电子的分布是球对称的, 它们对外层电子不产生非中心力场, 因此非中心力是外层电子(壳层外)之间的相互作用引起的。对满壳层  $^1S$  (即  $L=S=J=0$ )

LS 耦合: 各外层电子的轨道角动量和自旋角动量分别耦合为总轨道角动量  $L$  和总自旋角动量  $S$ , 即:

$$\vec{L} = \sum \vec{l}_i, \quad \vec{S} = \sum \vec{s}_i$$

从而  $L$  和  $S$  耦合为总角动量  $J$ , 即

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

L 取值:  $L \leq n_a l$  ( $n_a$  为价电子的数目)

S 取值:  $S \leq \frac{1}{2} n_a$

J 取值:  $J = L+S, L+S-1, \dots, |L-S|$

共有  $2S+1$  ( $当 L \geq S$ ) 或  $2L+1$  ( $当 L < S$ ) 个 J 值

原子态数  $M_J = \pm J, \pm(J-1), \dots, 0$  壳谱项: 用价电子

在 LS 耦合下, 原子态的符号为:

如总轨道角动量  $L$  和总自旋角动量  $S$  表征的 (用比总角动量  $J$  的原子态) 壳谱项  $^{2S+1}L$ 。

$$^{2S+1}L_J$$

原子态

而 ~~壳谱项的符号为~~ 壳谱项的符号为  $^{2S+1}L$ 。每个这样的壳谱项在 LS 耦合下的多重态的数目为  $2S+1$ , 即有  $2S+1$  (或  $2L+1$ ) 个不同 J 值的原子态或谱项。当有外场作用时, 这些谱项  $M_J$  如谱项方程, 一个谱项的态数目则为  $(2S+1)(2L+1)$ 。

此外, 原子态还可用宇称数  $P$  表征, 之在映室向反射时决定其对称性。之有下式确定

$$P = (-1)^{\sum l_i}$$

$P = +1$  为偶宇称 (even),  $P = -1$  为奇宇称 (odd)。

mod 2

+  
mod 2

由波函数：宇称只取决于  $\sum l_i$ ，与  $L$  无关，同一波函数里包含的支谱项以及不同的  $J$  的及子项的宇称都相同。

▲ 原子的电子组态：

原子中具有不同  $n, l$  值的电子的分布

▲ 支谱项

由于不同电子间以静电相互作用，使得与一给定电子组态相对应的初组态分裂成由不同的  $L, S$  值决定的许多能级。由给定的  $L, S$  值决定的原子能级称为支谱项。由  $L-S$  耦合使一个支谱项分裂成由不同的  $J$  值决定的子项，此称为支谱项的精细结构。支谱项可分裂的子项数目为  $2S+1$  (当  $L > S$  时)，此称为多重态。但当  $S > L$  时，子项的数目为  $2L+1$ 。

对于一个  $J$  值，由于  $J$  在空间的取向不同，它可具有  $2J+1$  个  $M_J$  值。在一般情况下，不同的  $M_J$  值的能级是简并的，只有在某些条件下（如存在外加磁场时），才使每一个  $J$  的子项分裂为  $2J+1$  个分量。因此，支谱子项的统计权重为  $2J+1$ 。

▲ 原子支谱跃迁的选择定则

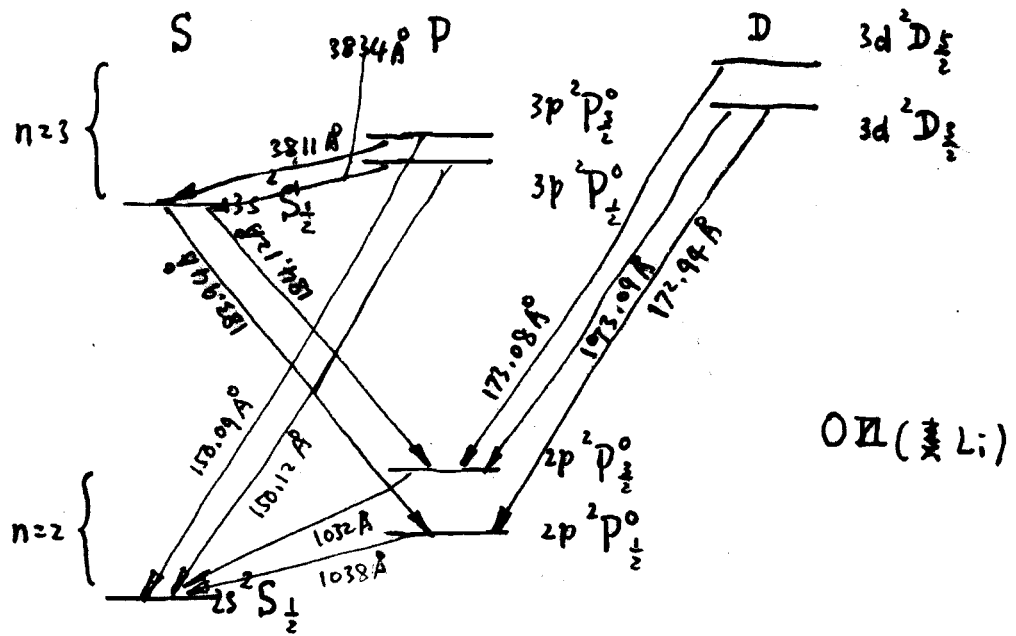
电偶极矩	磁偶极矩	电四极矩
(1) $\Delta J = 0, \pm 1$ ( $0 \nleftrightarrow 0$ )	(1) $\Delta J = 0, \pm 1$	(1) $\Delta J = 0, \pm 1, \pm 2$ ( $0 \nleftrightarrow 0$ )
(2) $\Delta L = 0, \pm 1$ ( $0 \nleftrightarrow 0$ )	(2) $\Delta L = 0$	(2) $\Delta L = 0, \pm 1, \pm 2$ ( $0 \nleftrightarrow 0$ )
(3) $\Delta S = 0$	(3) $\Delta S = 0$	(3) $\Delta S = 0$
(4) $\Delta M_J = 0, \pm 1$	(4) $\Delta M_J = 0, \pm 1$	(4) $\Delta M_J = 0, \pm 1, \pm 2$
(5) 宇称改变	(5) 宇称不变	(5) 宇称不变
(6) 有单电子的精细跃迁	(6) 无单电子跃迁	(6) 可有, 也可没有单电子跃迁
$\Delta l = \pm 1$	$\Delta l = 0, \Delta n = 0$	若有 $\Delta l = 0, \pm 2$
$LSJM \rightarrow L'S'J'M'$	$\Delta l = 0, \Delta n = 0$	

电子组态含  $l$  跃迁  
如  $2s^2 - 1s^2 2s^2$   
 $\bar{s} / nl \rightarrow n'l'$

电四极矩不改变, 即没有  $\pm 2$  的  $(l, l')$  含改变

不同各态方向  $L, S, J$  的  $2L+1, 2S+1, 2J+1$





$O II (Z=8)$  离子 :

电子组态:  $1s^2 2s$ ,  $1s^2 2p$ ,  $1s^2 3s$ ,  $1s^2 3p$ ,  $1s^2 3d \dots$

量子数:  $n=2, l=0, 1$

$n=3, l=0, 1, 2$

$n=4, l=0, 1, 2, 3$

LS 耦合	$2s$ :	$L=0$ ,	$S=\frac{1}{2}$ ,	$J=\frac{1}{2}$
	$2p$ :	$L=1$	$S=\frac{1}{2}$	$J=\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$
	$3s$ :	$L=0$	$S=\frac{1}{2}$	$J=\frac{1}{2}$
	$3p$ :	$L=1$	$S=\frac{1}{2}$	$J=\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$
	$3d$ :	$L=2$	$S=\frac{1}{2}$	$J=\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$

- (1) 图中的跃迁谱线是电偶极跃迁的选择定则允许跃迁的谱线
- (2) 共振线: 终止于基态的辐射跃迁为共振线, 其吸收系数最强, 且其强度随上能级量子数  $n$  的增加而减弱

## 二. 辐射跃迁与爱因斯坦跃迁系数

### 1. 爱因斯坦跃迁系数

#### (1) 自发辐射跃迁 $A_{nm}$

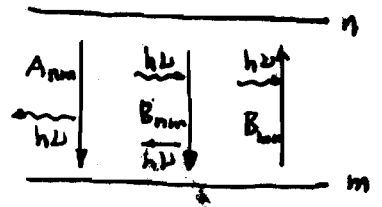
处于上能级  $n$  的电子自发地跃

迁到下能级  $m$  上, 并发射一个光子

$$h\nu = E_n - E_m = \chi_m - \chi_n \equiv \chi_{mn}$$

光子。单位时间内自发辐射跃迁的几率为

$$A_{nm} \quad [s^{-1} \cdot m^{-3}]$$



#### (2) 辐射吸收系数 $B_{mn}$

处于下能级  $m$  的一个电子从辐射场中吸收一个能量为  $h\nu$  的光子而跃迁到上能级  $n$  上, 该过程称为辐射吸收过程。

单位时间内发生辐射吸收跃迁的几率为  $u(\nu) B_{mn}$ , 其中  $u(\nu)$  为辐射场能量密度。

#### (3) 诱发辐射跃迁系数 $B_{nm}$

处于上能级  $n$  的一个电子由于辐射场的作用而诱发产生向下能级  $m$  的跃迁, 该过程称为诱发辐射跃迁, 它也发出一个光子  $h\nu = \chi_{mn}$  的光子。单位时间内发生诱发辐射跃迁的几率为  $u(\nu) B_{nm}$ 。

#### (A) 细致平衡原理

当系统处于热平衡时, 每个微观过程的速率等于该微观过程的逆过程的速率。当系统达到热平衡的充分必要条件, 是每个微观过程都被其相反的过程所平衡。对于辐射跃迁过程, 有:

$$n(n) \rightleftharpoons n(m) + h\nu$$

$$[A_{nm} + B_{nm} u(\nu)] n(n) = B_{mn} u(\nu) n(m)$$

$$\frac{n_n}{n_m} = \frac{g_n}{g_m} \exp\left\{-\frac{E_n - E_m}{T}\right\} \quad 4-43$$

对于处于热平衡的原子系统，辐射场能量密度  $U(\omega)$  和原子布居数分布满足普朗克分布和玻尔兹曼分布定律，即：

$$U(\omega) = \frac{8\pi h \omega^3}{c^3} \left[ e^{\frac{h\nu}{T}} - 1 \right]^{-1} \quad \left( \text{自然光, } u = \frac{4\pi}{c} I_B \right)$$

$$\frac{n(n)}{n(m)} = \frac{g_n}{g_m} \exp\left[-\frac{E_n - E_m}{T}\right] = \frac{g_n}{g_m} \exp\left(-\frac{h\nu}{T}\right) < 1$$

其中  $g_n, g_m$  为上下能级的统计权重。将上两式代入平衡方程，可得：

$$\frac{8\pi h \omega^3}{c^3} \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{T}\right) - 1 \right]^{-1} = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \left[ \frac{g_m B_{mn}}{g_n B_{nm}} e^{\frac{h\nu}{T}} - 1 \right]^{-1}$$

上式对任意的温度  $T$  都成立，因而必定有：

$$\begin{cases} A_{nm} = \frac{8\pi h \omega^3}{c^3} B_{nm} \\ g_n B_{nm} = g_m B_{mn} \end{cases}$$

由于这些系数仅与跃迁的特性有关，与原子是否处于热平衡无关，它们是普遍成立的。由上述关系式可知，只要爱因斯坦跃迁系数中的任意一个已知，其余两个系数均可由上述关系式求出。

对于电偶极辐射过程， $B_{mn}$  可用吸收振子强度  $f_{mn}$  表示，即：

$$B_{mn} = \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e h \omega} f_{mn}$$

吸收振子强度  $f_{mn}$  定义为：经典的振子数与所得到的相同的线积分吸收所需下的能级原子数之比。它是无量纲量，表示相对跃迁强度，对于最强的跃迁，它的数值接近于1。

2. 线辐射的吸收系数及发射线强度

按定义辐射线的吸收系数为

$$\alpha_\nu = -\frac{dI_\nu}{I_\nu ds}$$

在线辐射情况下, 辐射吸收系数即为辐射吸收系数与谱发射系数之和, 即

$$-dI_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \underbrace{(B_{mn} n_m - B_{nm} n_n)}_{\text{单位时间 单位体积吸收的总光子数}} u_\nu ds$$

$$= \frac{h\nu}{4\pi} B_{mn} n_m \left(1 - \frac{B_{nm} n_n}{B_{mn} n_m}\right) u_\nu ds$$

故

$$\alpha_\nu = -\frac{dI_\nu}{I_\nu ds} = \frac{h\nu}{4\pi} B_{mn} n_m \left(1 - \frac{B_{nm} n_n}{B_{mn} n_m}\right) \frac{u_\nu}{I_\nu}$$

因为

$$B_{mn} = \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e h\nu} f_{mn}$$

$$\frac{B_{nm}}{B_{mn}} = \frac{g_m}{g_n}, \quad \frac{u_\nu}{I_\nu} = \frac{4\pi}{c}$$

故

$$\alpha_\nu = \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{mn} n_m \left(1 - \frac{g_m n_n}{g_n n_m}\right)$$

$$= \pi r_e c f_{mn} n_m \left(1 - \frac{g_m n_n}{g_n n_m}\right)$$

线辐射的谱辐射率为:

$$j_\nu(\nu) = \frac{h\nu}{4\pi} A_{nm} n_n$$

线谱范围的谱辐射率的吸收系数

辐射强度

$$I_\nu(\nu) = \int_0^\tau \frac{j_\nu(\nu)}{\alpha_\nu} e^{-\tau'} d\tau'$$

对光谱辐射

$$I_\nu(\nu) = \int_0^x j_\nu(\nu) ds$$

三. 反过程和速率系数 P. 203~214

1. 复合辐射和激发电离

~~$n_{e1} n_{e2} n_{e3}$~~

$$A(z, 1) + e \xrightleftharpoons{\alpha_r} A(z-1, n) + h\nu$$

复合辐射速率系数  $\alpha_r n_i(z) n_e$  单位时间单位体积的复合数

$$\alpha_r(z, n) = \langle \sigma_r v \rangle = \frac{\int d\vec{v} \sigma_r(z, n) v f(\vec{v})}{\int d\vec{v} f(\vec{v})}$$

更进一步的公式 (书中 6.3.5 式) P. 205

$$\alpha_r(z, n) = 5.2 \times 10^{-20} \bar{g}_n z \left(\frac{\chi_n}{T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_n}{T}\right) E_1\left(\frac{\chi_n}{T}\right) [\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}]$$

Et  $E_1(y) = \int_y^\infty \frac{\exp(-s)}{s} ds$  为第一指数积分函数

$$\exp(x) E_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \frac{1}{2} \quad x \rightarrow \infty \text{ 时 } (T \rightarrow 0) \quad \frac{\chi_n}{T} \gg 1 \\ -\ln x & \frac{1}{2} \quad x \rightarrow 0 \text{ 时 } (T \rightarrow \infty) \quad \frac{\chi_n}{T} \ll 1 \end{cases}$$

由此可知：  
 $\alpha_r(z, n)$  随  $n$  增大而减小  
 "  $T$  增大而减小  
 "  $z$  增大而增大

2. 碰撞电离和三体复合：

$$A(z, p) + e \xrightleftharpoons[\alpha_3(z+1, p)]{S(z, p)} A(z+1, 1) + 2e$$

电离速率  $S(z, p) n(z, p) n_e$

三体复合速率  $\alpha_3(z+1, p) n(z+1, 1) n_e^2$  (1 是入射 e)

电离速率系数进一步的公式 (书中 6.3.17) P. 208

$$S(z, p) = 4\pi a_0^2 \left(\frac{8R_H}{\pi m_e}\right)^{3/2} \left(\frac{R_H}{\lambda_p}\right) \left(\frac{R_H}{T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_p}{T}\right) \times \left[ 1 - \left(\frac{\chi_p + E_1}{T}\right) \exp\left(\frac{\chi_p + E_1}{T}\right) E_1\left(\frac{\chi_p + E_1}{T}\right) \right]$$

### 1. 复合场效应

$$A(z, l) + e \xrightleftharpoons{\alpha_r} A(z+1, n) + h\nu$$

$$\alpha_r(z, n) = 5.2 \times 10^{-20} \bar{g}_n z \left( \frac{\chi_n}{T_e} \right)^{3/2} \exp\left( \frac{\chi_n}{T_e} \right) E_1\left( \frac{\chi_n}{T_e} \right) \quad [\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}]$$

$$E_1(y) = \int_y^\infty s^{-1} \exp(-s) ds$$

$$\alpha_r(z, n) \downarrow \text{随 } n \uparrow, T_e \uparrow$$

### 2. 碰撞电离和三体复合

$$A(z, p) + e \xrightleftharpoons[\alpha(z+1, p)]{S(z, p)} A(z+1, l) + 2e$$

$$S(z, p) = 1.7 \times 10^{-14} \bar{g}_p \left( \frac{R_p}{\chi_p} \right) \left( \frac{T_e}{R_p} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{\chi_p}{T_e} \right) \left[ 1 - \exp\left( -\frac{5\chi_p}{T_e} \right) \right] \quad [\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}]$$

$$S(z, p) \uparrow \quad \text{随 } n \uparrow, T_e \uparrow$$

$$\frac{\alpha_3(z+1, p)}{S(z, p)} = \frac{n(z, p)}{n_e n(z+1, l)} = \frac{g(z, p)}{2g(z+1, l)} \left( \frac{h^2}{2\pi m_e T_e} \right)^{3/2} \exp\left( \frac{\chi(z, p)}{T_e} \right)$$

### 3. 碰撞激发和退激发

$$S(z, p) = \frac{4\pi a^3}{3} 1.7 \times 10^{-14} \left[ \frac{m_p}{X_p} \right] \left[ \frac{1}{R_y} \right]^2 \exp\left(-\frac{\chi_p}{T}\right)$$

$$E_+ + X_p \sim 5X_p$$

$$\times \left[ 1 - \exp\left(-\frac{5X_p}{T}\right) \right] \bar{g} \quad [m^3 s^{-1}]$$

~~即  $E_+$  是电离能... 式中  $X_p$  为... 电离能~~

$$\left[ 1 - \exp\left(-\frac{5X_p}{T}\right) \right] \bar{g} = \dots$$

由此可知： $S(z, p)$  随  $n$  的增大而增大  
 随  $T$  的增大而增大

根据细致平衡原理，有：

$$S(z, p) n(z, p) n_e = \alpha_3(z+1, p) n(z+1, p) n_e^2$$

$$\text{取 } \frac{\alpha_3(z+1, p)}{S(z, p)} = \frac{n(z, p)}{n_e n(z+1, p)} \quad \text{或} \quad \frac{S(z, p)}{\alpha_3(z+1, p)} = \frac{n_e n(z+1, p)}{n(z, p)}$$

而当系统处于局部热平衡时，相邻电离态的分布符合玻尔兹曼分布：  
 玻尔兹曼分布方程：

$$\frac{n_e n(z+1, p)}{n(z, p)} = \frac{2g(z+1, p)}{g(z, p)} \left( \frac{2\pi m_e T}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi(z, p)}{T}\right)$$

$$\text{故有 } \frac{S(z, p)}{\alpha_3(z+1, p)} = \frac{2g(z+1, p)}{g(z, p)} \left( \frac{2\pi m_e T}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left[-\frac{\chi(z, p)}{T}\right]$$

### 3. 电离平衡和正负离子



激发速率  $Q(z, p \rightarrow q) = n_e n(z, p) Q_{pq}$

退激发速率  $Q(z, q \rightarrow p) = n_e n(z, q) Q_{qp}$

激发速率的近似表达式 (参 6.3.27 式) p. 240

$$Q(z, p \rightarrow q) = 3.15 \times 10^{-13} f_{pq} \frac{R_y}{X_{pq}} \left( \frac{R_y}{T} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\chi_{pq}}{T}\right) \bar{g} \quad [m^3 \cdot s^{-1}]$$

即  $\chi_{pq} \equiv \chi(z, p) - \chi(z, q)$

$$Q(z, p \rightarrow q) = 2.15 \times 10^{-10} \frac{g}{g_p} \frac{n}{z}$$

4-47

T 最好大越好

由此可知:  $Q(z, p \rightarrow q)$  随  $z$  的减小而增大

由细致平衡原理, 可得:

$$\frac{Q(z, p \rightarrow q)}{Q(z, q \rightarrow p)} = \frac{g(z, q)}{g(z, p)}$$

$$\frac{Q(z, p \rightarrow q)}{Q(z, q \rightarrow p)} = \frac{n(z, q)}{n(z, p)}$$

当系统处于平衡时, 不同能级的布居数遵从玻尔兹曼分布:

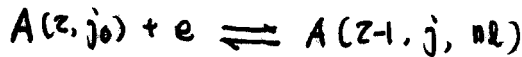
$$\frac{n(z, q)}{n(z, p)} = \frac{g(z, q)}{g(z, p)} \exp\left[-\frac{\Delta X_{pq}}{T}\right] \quad Q_{qp} > Q_{pq}$$

即  $Q_{qp} > Q_{pq}$

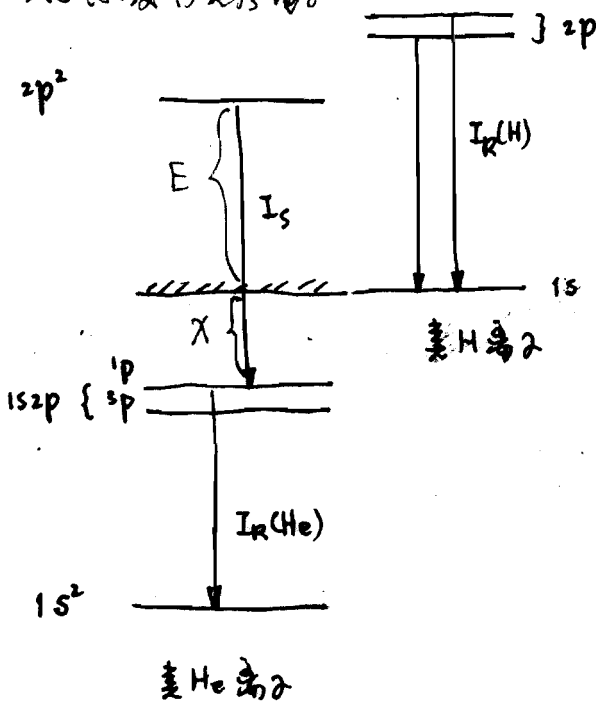
故有: 
$$\frac{Q(z, p \rightarrow q)}{Q(z, q \rightarrow p)} = \frac{g(z, q)}{g(z, p)} \exp\left(-\frac{\Delta X_{pq}}{T}\right) < 1$$

由此可知, 对于相同的两个能级, 碰撞激发速率比自碰撞激发速率小。

#### 4. 双电子离子和自由离子



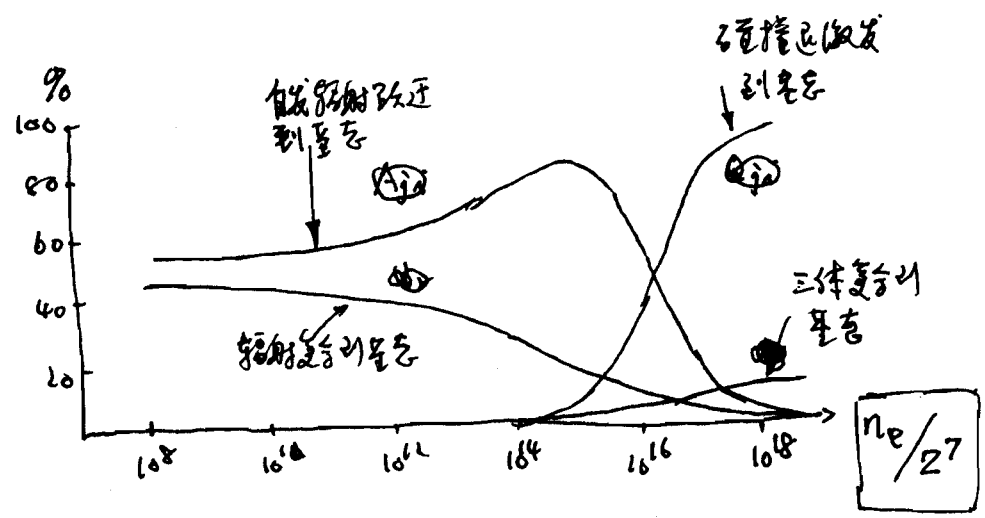
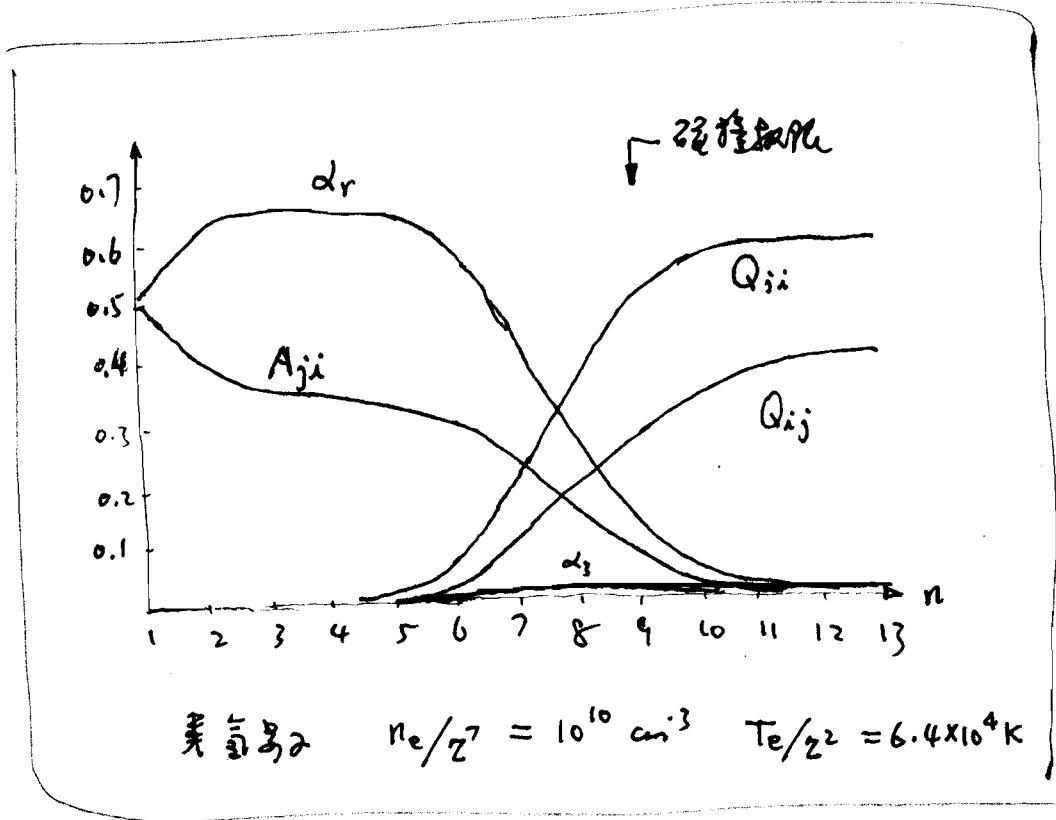
复合过程的速率  $E_0 + \chi_{nl} = \Delta X_{j_0, j}$   $\rightarrow A(z-1, j_0, nl) + h\nu(j \rightarrow j_0, nl)$   
 用于激发由壳层电子  $\rightarrow A(z-1, j_0, n_0 l_0) + \frac{1}{2} h\nu$



P. 243, (6.3.37) 式

$$\alpha_d = 8.8 \times 10^{-18} f_{ij} z^{2/3} \frac{\chi_{ij}}{R_y} \left(\frac{R_y}{T}\right)^{3/2} \times \exp\left(-\frac{\chi_{ij}}{T}\right) \quad [m^3 s^{-1}]$$





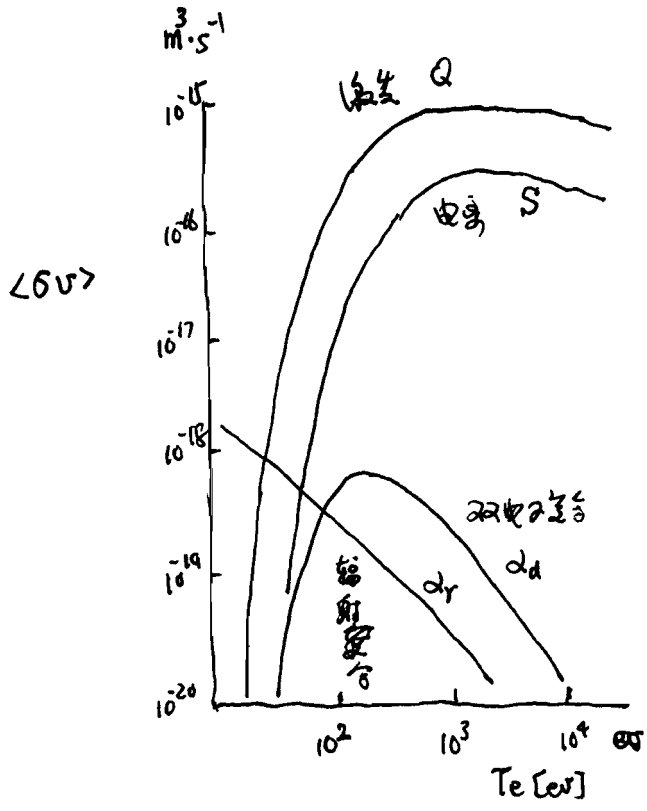
$T_e/z^2 = 3.2 \times 10^4 \text{ K}$

氢 H 离子

《 Applied Atomic Collision Physics 》  
Vol. 2 Controlled Fusion  
P. 77

- ① 主区参数  
 $n \uparrow$   $Q_{ji}, Q_{ij}, S \uparrow$   
 $A_{ji}, \alpha_r \downarrow$
- ② 给定  $T_e$   
 $T_e \uparrow$   $Q, S \uparrow$   
 $\alpha_r \downarrow$

$C_V (C^{+4})$



### 三. 互子状态分布模型 (书: P. 194~203)

为了研究等离子体中任一种互子的辐射功率, 必须知道它是各种互子状态分布(或布居, population)。有两种状态分布情况: 一种互子等离子体中互子的寿命没有达到平衡分布的情况, 其布居密度是随时间变化的。另一种情况是布居密度达到某种平衡分布, 这时布居密度不随时间变化。平衡分布模型是描述互子等离子体辐射功率的模型。必须知道互子有几种互子的平衡模型。

### 七. 完全热平衡模型 (Complete Thermal Equilibrium)

互子处于统计力学平衡时, 从统计力学可知, 所有的粒子(包括电子, 及等离子体中所有的互子和离子)都达到具有相同的平均能量和麦克斯韦分布:

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m\vec{v}^2}{2T}\right\}$$

此外, 粒子间的碰撞过程, 使各种互子(离子)的不同内部状态之间达到

$$\begin{aligned} \text{玻尔分布: } \frac{n(z, u)}{n(z, l)} &= \frac{g(z, u)}{g(z, l)} \exp\left\{-\frac{\chi_{lu}}{T}\right\} & \chi_{lu} &= \chi_l(z) - \chi_u(z) \\ &= \frac{n(z, l)}{n(z, k)} = \frac{g(z, l)}{g(z, k)} \exp\left\{-\frac{\Delta\chi_{kl}}{T}\right\} & &= \frac{g(z, l) \exp\left(-\frac{E_l}{T}\right)}{g(z, k) \exp\left(-\frac{E_k}{T}\right)} \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \Delta\chi_{kl} \equiv \chi(z, k) - \chi(z, l)$$

同时, 玻尔分布也适用于互子的不同元素态达到沙哈-玻尔分布:

$$\frac{n_e n(zH, 1)}{n(zk)} = 2 \frac{g(zH, 1)}{g(z, k)} \left(\frac{2\pi m_e T}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{\chi(z, k)}{T}\right\}$$

其中 "1" 是氢原子。

而且, 在完全热平衡等离子体中, 辐射功率也被完全包含在互子中,

且与粒子间有碰撞的相互作用,使辐射场与介质的平衡温度有关,即其辐射强度与普朗克分布:

$$I_B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left\{ \exp\left(\frac{h\nu}{T}\right) - 1 \right\}^{-1} \quad (\text{赫兹})$$

或

$$U_B(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \left\{ \exp\left(\frac{h\nu}{T}\right) - 1 \right\}^{-1}$$

从玻尔分布分布可以导出离子如氢-类似  $n$  的布居数及电离态分布密度的方程, 因为:

$$\frac{n(z)}{n(z,1)} = \frac{\sum_l n(z,l)}{n(z,1)} = \frac{\sum_l g(z,l) \exp\left[-\frac{E(z,l)}{T}\right]}{g(z,1) \exp\left[-\frac{E(z,1)}{T}\right]}$$

令

$$U(z,T) \equiv \sum_l^{\infty} g(z,l) \exp\left[-\frac{E(z,l)}{T}\right]$$

为离子  $A^{+Z}$  的配分函数, 对于孤立离子  $l_{\max} \rightarrow \infty$ , 它是发散的。对于等离子体中的离子, 由于与相邻离子的相互作用, 使它的电离极限下降。从而使  $l_{\max}$  为有限值, 因此  $U(z,T)$  也是有限的。H.R. Griem 著的《Plasma Spectroscopy》讨论了  $U(z,T)$  的计算方法, 并给出了  $U(z,T)$  的部分数据。

此外, 由它也可得到玻尔分布分布的另一种形式:

$$\frac{n(z,n)}{n(z)} = \frac{g(z,n)}{U(z,T)} \exp\left\{-\frac{E(z,n)}{T}\right\}$$

类似地, 故也可导出沙哈-玻尔分布分布的另一种形式:

$$\frac{n_e n(z+1)}{n(z)} = \alpha \frac{U(z+1,T)}{U(z,T)} \left(\frac{2\pi m_e T}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{\chi(z,1)}{T}\right\}$$

实际上, 完全热平衡等离子体只有在极特殊的情况下才存在, 如星体内部, 核爆炸瞬间形成的核心等离子体等。实际的实验室和天体

作研究对象, 几乎不用于 CTE 态, 这是因为: (1) 不透明 - 如恒星温度  $T$ , 且温度是不均匀的; (2) 不存在唯一的热辐射温度和唯一的热力学温度; (3) 研究对象与辐射场耦合不是均匀的, 是非均匀的。但 CTE 是个较好的模型, 改以平衡模型与它相比较。

## 2. 局部热平衡模型 (Local Thermal Equilibrium)

它与 CTE 模型可用  $\mu$  的热力学统计软件。同, 它列于下:

分布定律	CTE	LTE
温度	$\nabla T = 0$	$\nabla T \neq 0$
光子	普朗克分布, $0 < \nu < \infty$ $T = T_{rad}$	普朗克分布不连续 $T \neq T_{rad}$
电离态	Saha 分布 $T = T_{ion}$	Saha 分布 $T = T_{ion}$
激发	Boltzmann 分布 $T = T_{excit}$	Boltzmann 分布 $T = T_{excit}$
速度	Maxwell 分布 $T = T_{kin}$	Maxwell 分布 $T = T_e$
	$T = T_{rad} = T_{ion} = T_{excit} = T_{kin}$	$T = T_{ion} = T_{excit} = T_e \neq T_{rad}$

对 LTE 分布, 通常认为电离态是均匀的, 且认为辐射场经过过程是均匀的。由上述可知, 下能级与辐射场相互作用大于上能级与辐射场相互作用。因此, 对下能级的辐射场相互作用进行统计, 这可以认为是 LTE 态。为此, 我们假设它与第一激发态间的跃迁, 平衡时有:

$$n_1 u(\nu_{12}) B_{12} + n_1 n_e Q_{12} = n_2 u(\nu_{21}) B_{21} + n_2 A_{21} + n_2 n_e Q_{21}$$

若辐射场为各向同性，则反射辐射和吸收过程平衡，则有：

$$n_1 n_e Q_{12} = n_2 n_e Q_{21} + n_2 A_{21}$$

当  $n_e \gg A_{21}/Q_{21}$  时，LTE 成立

则有

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{Q_{12}}{Q_{21}} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{\Delta\chi_{12}}{T_e}\right)$$

因为

$$Q_{21} \propto \left(\frac{1}{T_e}\right)^{1/2}, \quad A_{21} \propto \nu^3 \propto \Delta\chi_{12}^3$$

故得 LTE 模型成立的判据为：

LTE 成立条件

$$n_e n_n \sum_{n \neq l} Q_{nl} \geq 10 n_n \sum_{l < n} A_{nl}$$

$$n_e \gg 10^{19} (T_e [\text{eV}])^{1/2} (\Delta\chi_{ij} [\text{eV}])^3 [\text{cm}^{-3}]$$

$$n_e > 1.8 \times 10^{20} (T_e [\text{eV}])^{1/2} (\Delta\chi_{ij} [\text{eV}])^3 [\text{cm}^{-3}]$$

之中仅对最大吸收截面是成立的。例如，对于氢原子，主要是 1S-2P 跃迁， $\Delta\chi_{12}(Z_n) = Z_n^2 R_H$ 。

### 3. 非热平衡等离子体的状态分布模型

当有不满足 LTE 模型的等离子体，即作为非局部热平衡的等离子体（或简称为非热平衡的等离子体）。这时，它的特征只能用付速及分布的玻尔曼方程来描述

$$\frac{\partial n(z,k)}{\partial t} + \nabla_r \cdot [n(z,k) \langle \vec{v}(z,k) \rangle] = \left( \frac{\partial n(z,k)}{\partial t} \right)_{\text{碰撞, 辐射}}$$

上式右端是由于碰撞和辐射过程引起的粒子产生率，而左端第一项是表示由于粒子通量梯度引起的粒子数变化。

这个方程是正能量的，同时它包括了所有电离态。所有粒子的离子，这个方程是适用的。因此，一般要作进一步简化，以便得到更近似的解。

### 1) 日冕平衡 (Coronal Equilibrium)

该模型最早用于描述太阳冕区等离子体中离子的状态分布。冕区等离子体是低密度等离子体，因此日冕平衡模型适用于低密度等离子体。对于低密度等离子体，辐射-吸收过程可以忽略，等离子体是透明的。离子的激发态分布主要是由激发碰撞过程和上能级的自发辐射跃迁向平衡决定的。而电子态分布则是由碰撞电离和复合过程决定的。故日冕模型的假设如下： $\sum_{m \neq 1} \frac{n_m}{n_1} \ll 1$

1. 电子速度分布是麦克斯韦分布
2. 射线分布：

$$n_e n(z, 1) Q_{1u}(z) = n(z, u) \sum_{k < u} A_{uk}$$

$$\therefore \frac{n(z, u)}{n(z, 1)} = \frac{n_e Q_{1u}(z)}{\sum_{k < u} A_{uk}(z)}$$

3. 电离态分布：

$$\frac{n(z)}{n(z+1)} = \frac{\alpha(z+1)}{S(z)}$$

$$\text{即} \quad \alpha(z+1) = \alpha_r(z+1) + \alpha_d(z+1) + n_e \alpha_3(z+1) + \frac{n(H)}{n_e} \alpha_{\alpha}(z+1)$$

上述两个方程，实际上可从速率方程导出。取冕区的一个元胞，元胞内粒子运动速度远小于碰撞和辐射速率，则射线之和电子的速率方程分别为：

$$\begin{aligned} \frac{dn_2}{dt} = & n_e n_1 Q_{12} - n_2 (n_e Q_{21} + A_{21} \beta_{21} + n_e S_2) \\ & + n_e n_i (n_e \alpha_{3,2} + \alpha_{r,2} \beta_{12}) \end{aligned}$$

$$\frac{dn_e}{dt} = n_e (n_1 S_1 + n_2 S_2) - n_1 n_e (n_e \alpha_{3,1} + n_e \alpha_{3,2} + \alpha_{r,1} \beta_{\lambda 1} + \alpha_{r,2} \beta_{\lambda 2})$$

即  $\beta_{21}$ 、 $\beta_{\lambda}$  分别为吸收和逆吸收的速率因子

$$\begin{aligned} \text{即} \quad n_2 A_{21} \beta_{21} &= n_2 A_{21} + n_2 B_{21} U_{21} - n_1 B_{12} U_{21} \\ &= n_2 A_{21} \left[ 1 - \frac{B_{21}}{A_{21}} U_{21} \left( \frac{n_1 g_2}{n_2 g_1} - 1 \right) \right] \\ &= \cancel{n_2 A_{21} - B_{12} U_{21} \left( 1 - n_2 \frac{g_1}{g_2} \right)} = n_2 A_{21} \left[ 1 - \frac{B_{12}}{A_{21}} U_{21} \left( \frac{n_1 g_2}{n_2 g_1} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

这正反映了自发辐射、受激辐射和吸收过程对谱线分布的贡献。

它构成了稳态辐射的方程。如上所述，谱线分布的平衡方程如下所示：

$$\begin{cases} S_2 \ll Q_{21} \\ n_1 n_e \alpha_{3,2} + n_1 \alpha_{r,2} \beta_{\lambda 2} \ll n_1 Q_{12} \end{cases}$$

在这种情况下，谱线分布的平衡方程可写为：

$$\dot{n}_2 = n_e n_1 Q_{12} - n_2 (n_e Q_{21} + A_{21} \beta_{21})$$

且稳态 ( $\dot{n}_2 = 0$ ) 解为：

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{n_e Q_{12}}{n_e Q_{21} + A_{21} \beta_{21}} = \frac{Q_{12}}{Q_{21}} \frac{1}{1 + \frac{\beta_{21} A_{21}}{n_e Q_{21}}}$$

令

$$R_2 \equiv \frac{A_{21} \beta_{21}}{n_e Q_{21}}$$

$$\left( \frac{n_2}{n_1} \right)^* \equiv \frac{Q_{12}}{Q_{21}} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{\Delta X_{12}}{T_e}\right) \quad \text{为平衡时的比值}$$

则

$$\frac{n_2}{n_1} = \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^* \frac{1}{1 + R_2}$$

故应予以讨论如下两种极限情况：(1) 高激发极限，即  $n_e$  很大，使得  $\beta_{21}$  变得很小（忽略），以致  $R_2 \ll 1$ 。在这种情况下有：

$$\beta_{21} \ll 1$$



$$\frac{n_2}{n_1} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^* \quad \text{即 LTE 模型下的分布}$$

(2) 低密度极限, 即  $n_e \ll n_0$ ,  $\beta_2 \approx 1$  (电子源). 可近似  $R_2 \gg 1$ , 此时有:

$$\frac{n_2}{n_1} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^* \frac{1}{R_2} = \frac{Q_{12}}{Q_{21}} \frac{n_e Q_{21}}{A_{21}} = \frac{n_e Q_{12}}{A_{21}}$$

这就是说是平衡模型下的分布。

其次, 双层电子的速率方程, 且稳态解为:

$$\frac{n_e n_i}{n_1} = \frac{s_1 + s_2 \frac{n_2}{n_1}}{d_{3,1} + d_{3,2}} \frac{1}{1 + R_\lambda}$$

$$\text{则} \quad R_\lambda \equiv \frac{\alpha_{r,1} \beta_{\lambda,1} + \alpha_{r,2} \beta_{\lambda,2}}{n_e (d_{3,1} + d_{3,2})}$$

利用局部平衡模型下的公式:

$$\frac{s_k}{\alpha_{3,k}} = \left(\frac{n_i n_0}{n_k}\right)^* \quad \text{②}$$

上式代入可得:

$$\frac{n_e n_i}{n_1} = \left(\frac{n_e n_i}{n_1}\right)^* \frac{1}{1 + R_\lambda} \frac{1 + \frac{d_{3,2}}{d_{3,1}} \frac{n_2}{n_1} / \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^*}{1 + d_{3,2}/d_{3,1}}$$

(1) 低密度极限:  $n_e \ll n_0$ ,  $\beta_{21}, \beta_{\lambda,1}, \beta_{\lambda,2} \ll 1$ , 可得  $R_2, R_\lambda \ll 1$

则有  $\frac{n_i n_e}{n_1} = \left(\frac{n_i n_0}{n_1}\right)^* \quad \text{LTE 模型下的分布}$

(2) 低密度极限:  $n_e \ll n_0$ , 可得  $R_\lambda, R_2 \gg 1$ ,  $\beta_{21}, \beta_{\lambda,1}, \beta_{\lambda,2} \approx 1$ , 则

$$\text{有} \quad \frac{n_i n_e}{n_1} \approx \frac{1}{R_\lambda} \frac{s_1 + s_2 \frac{n_2}{n_1}}{d_{3,1} + d_{3,2}} = \frac{n_e (d_{3,1} + d_{3,2})}{\alpha_{r,1} \beta_{\lambda,1} + \alpha_{r,2} \beta_{\lambda,2}} \frac{s_1 + s_2 \frac{n_2}{n_1}}{d_{3,1} + d_{3,2}}$$

$$\approx \frac{n_e s_1}{\alpha_{r,1} + \alpha_{r,2}} = \frac{n_e s_1}{\alpha_r} \quad \text{这是 CE 模型下的分布}$$

上述 CE 模型如电荷分布是满足下列电荷守恒方程组<sup>稳</sup>的解:

$$\dot{n}(z) = n_e \left\{ -n(z)S(z) - n(z)\alpha(z) + n(z-1)S(z-1) + n(z+1)\alpha(z+1) \right\}$$

$1 \leq z \leq z_{W-1}$

$$\dot{n}(0) = n_e \left\{ -n(0)S(0) + n(1)\alpha(1) \right\}$$

$$\dot{n}(z_W) = n_e \left\{ -n(z_W)\alpha(z_W) + n(z_W-1)S(z_W-1) \right\}$$

由于  $\alpha$ ,  $S$  均与  $T_e$  有关, 因而若知电荷分布则确定了  $T_e$ , 而  $n_e$  又与之有关。

电流的守恒方程:

$$j(\omega) = \frac{W}{4\pi} n(z, \omega) A_{ul} = \frac{W}{4\pi} n(z, 1) Q_{lu}(z) \frac{A_{ul}}{\sum_{kcu} A_{uk}}$$

取  $A_{ul} / \sum_{kcu} A_{uk}$  为归一化系数, 它是无量纲数。已知  $n_e$ 。由此可知, 由  $j(\omega)$  的测量 (相对测量), 可求得  $n(z, 1) \approx n(z)$ 。这样, 再根据 CE 模型如电荷分布就可求得电荷分布函数。

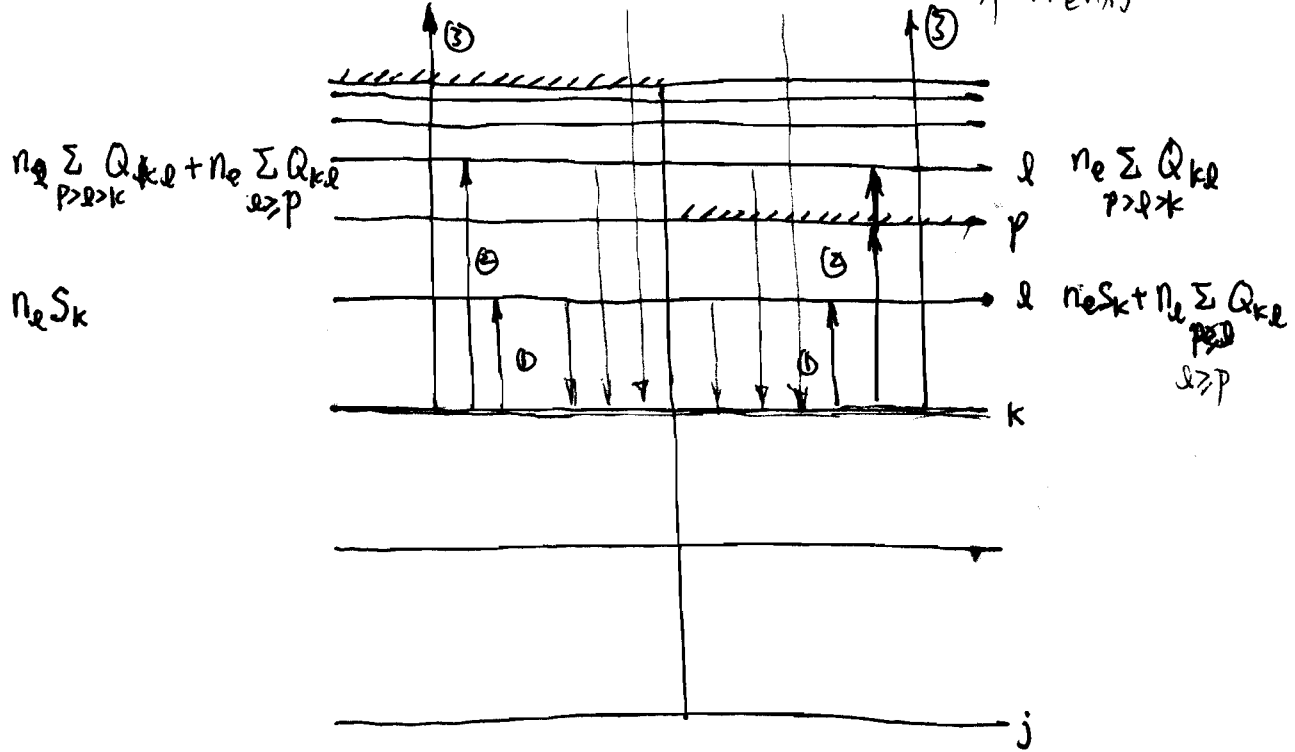
上述模型是  $n_e$  足够低, 使得碰撞过程是“非干扰”的。随着  $n_e$  的增加, 碰撞过程变为  $Q(k) = \sum_{i+k} A_{ki}$ 。碰撞过程将干扰自发辐射跃迁过程, 这有一个临界电子密度  $n_{e,c}$  使得  $\sum_{i+k} A_{ki} = n_{e,c} Q(k)$ , 从而使得  $k$  级谱线的上述模型 CE 模型不成立。因为  $A_{ki}$  随  $n$  的增加而增加, 而  $Q(k)$  随  $n$  的增加而增大。因此, 上述模型在  $n$  趋向于无穷大时, 有一个极限的无量纲数  $n_{e,c}$ , 当  $n > n_{e,c}$  时, 碰撞过程占主导, CE 模型不成立。对于氢 H 原子, 通常取  $n_{e,c} = 6$ , 则有:

$$n_e \leq 6.0 \times 10^{16} Z^6 (T_e [\text{eV}])^2 \exp\left(\frac{Z}{10 T_e [\text{eV}]}\right) \quad [\text{cm}^{-3}]$$

$$S'_k \equiv S_k + \sum_{l \geq p} Q_{kl}$$

$$d'_{3,k} \equiv d_{3,k} + \sum_{l \geq p} \left( \frac{n_l}{n_e n_i} \right)^* Q_{lk}$$

$$d_{r,k} = d_{r,k} + \sum_{l \geq p} \left( \frac{n_l}{n_e n_i} \right)^* A_{lk}$$



$$\sum_{p > l > k} n_l n_e Q_{lk} + \sum_{\substack{p > l \\ l \geq p}} n_l n_e Q_{lk}$$

$$\sum_{p > l > k} n_l n_e Q_{lk}$$

$$n_e^2 n_i d_{3,k}$$

$$n_e^2 n_i d_{3,k} + \sum_{l \geq p} n_l n_e Q_{lk}$$

$$\sum_{p > l > k} n_l A_{lk} + \sum_{l \geq p} n_l A_{lk}$$

$$\sum_{p > l > k} n_l A_{lk}$$

$$n_e n_i d_{r,k}$$

$$n_e n_i d_{r,k} + \sum_{l \geq p} n_l A_{lk}$$

CE ( Corona Equilibrium )

LTE ( Local Thermal Equilibrium )

CTE ( Complete Thermal Equilibrium )

(2) 碰撞辐射模型 ( Collisional-Radiative Model )

当  $n_e$  介于 CE 和 LTE 模型的适用范围之间时, CE 和 LTE 模型均不适用. 这时必须考虑电子碰撞过程对级布居密度的影响, 当碰撞过程占优势时, 这时在离  $Z$  轴每一级  $k$  的离子和电子密度的速率方程可表示为: 碰撞激发 辐射激发

$$\begin{cases} \dot{n}_k = -n_k \left\{ \sum_{j < k} (n_e Q_{kj} + A_{kj} \beta_{kj}) + n_e \left( \sum_{l > k} Q_{kl} + S_k \right) \right\} \\ + n_e \sum_{j < k} n_j Q_{jk} + \sum_{l > k} n_l (n_e Q_{lk} + A_{lk} \beta_{lk}) \\ + n_e n_i (n_e \alpha_{i,k} + \alpha_{r,k} \beta_{i,k}) \\ \dot{n}_e = \sum_k [n_e n_k S_k - n_e n_i (n_e \alpha_{i,k} + \alpha_{r,k} \beta_{i,k})] \end{cases}$$

此外, 由于粒子数守恒, 有:

$$n_e + \sum_k n_k = 0$$

因此,  $n_k$  和  $n_e$  组成的方程组中有一方程是多余的.

上述方程组求解范围相同的, 因方程的数目很多, 往往难以求解, 以减少方程的数目.

事实上, 实际上已发现在一定的条件下, 激发态离子是与自由电子处于沙哈平衡的. 这是因为随着电子密度的增大, 级间距缩小, 碰撞几率 ( $Q, S$ ) 增大, 而辐射过程的几率 ( $\alpha_r, A$ ) 减小. 如果某一级的  $p$  且碰撞速率远大于该级的辐射速率, 即:

$$\frac{n_e \sum_{u > p} n_u Q_{up}}{n_p \sum_{j < p} A_{pj}} \gg 1$$

$$n_k A_{ki} \beta_{ki} = n_k A_{ki} + n_k B_{ki} u_{kj} - n_j B_{jk} u_{kj} = n_k A_{kj} \left[ 1 - \frac{B_{kj}}{A_{kj}} u_{kj} \left( \frac{n_j g_k}{n_e} \right) \right]$$

2) 流到级棒与相应级棒处于稳态平衡。此外, 对于任何  $r \geq p$  的级棒, 它流到级棒是变得更大, 而稳态流是变得更大, 故对所有  $r \geq p$  的级棒, 它们都棒处于稳态平衡。这样, 级棒流到级棒无限多(是叫上讲)的  $n_k$  流与级棒方程整理后, 级棒流到级棒相加可得:

$$\begin{aligned} \dot{n}_k = -n_k \left\{ \sum_{j < k} (n_e Q_{kj} + A_{kj} \beta_{kj}) + n_e \sum_{p > k} Q_{kp} + n_e (S_k + \sum_{l > p} Q_{kl}) \right\} \\ + n_e \sum_{j < k} n_j Q_{jk} + \sum_{p > k} n_p (n_e Q_{pk} + A_{pk} \beta_{pk}) \\ + n_e (n_i n_e \alpha_{z,k} + \sum_{l > p} n_l Q_{lk}) + n_e (n_i n_i \alpha_{r,k} \beta_{rk} + \sum_{l > p} n_l A_{lk} \beta_{lk}) \end{aligned}$$

对所有  $k \geq p$  级棒, 令:

$$\begin{aligned} S'_k &\equiv S_k + \sum_{l > p} Q_{kl} \\ \alpha'_{z,k} &\equiv \alpha_{z,k} + \sum_{l > p} \left( \frac{n_l}{n_e n_i} \right)^* Q_{lk} \\ (\alpha_{r,k} \beta_{rk})' &\equiv \alpha_{r,k} \beta_{rk} + \sum_{l > p} \left( \frac{n_l}{n_e n_e} \right)^* A_{lk} \beta_{lk} \end{aligned}$$

则有:

$$\begin{aligned} \dot{n}_k = -n_k \left\{ \sum_{j < k} (n_e Q_{kj} + A_{kj} \beta_{kj}) + n_e \left( \sum_{p > k} Q_{kp} + S'_k \right) \right\} \\ + n_e \sum_{j < k} n_j Q_{jk} + \sum_{p > k} n_p (n_e Q_{pk} + A_{pk} \beta_{pk}) \\ + n_e n_i (n_e \alpha'_{z,k} + \alpha'_{r,k} \beta'_{rk}) \quad \text{若 } k < p \end{aligned}$$

对所有  $k \geq p$  的级棒  $r, s$ , 它们的级棒方程可用 LTE 模型描述

進. 27

$$\frac{n_s}{n_r} = \frac{g_s}{g_r} \exp\left(-\frac{\Delta\chi_{rs}}{T_e}\right) \quad r, s \geq p$$

$$\frac{n_i n_e}{n_r} = \frac{2 g_i}{g_r} \left(\frac{2\pi m_e T_e}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_r}{T_e}\right) \quad r \geq p$$

這樣，方程組中方程的數目比減少的  $p$  个方程，從而減少了方程組求解的困難。

## 四 谱线展宽机制

### 1. 自然展宽

由于自发辐射跃迁的上能级的寿命是有限的, 即

$$\tau = \frac{1}{\sum_{i>j} A_{ji}}$$

而根据海森堡测不准原理, 其激发态的能量有一定的宽度

$$\Delta E = \frac{h}{2\pi\tau}$$

因此所得自发辐射跃迁谱线的谱线也具有一定的宽度

$$\Delta\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{\sum_{i>j} A_{ji}}{\pi}$$

展宽的谱线形状由能级寿命展宽决定的。由于了激发态的展宽由指数衰减几率的平方根的付里叶变换, 可得自然展宽的谱线轮廓为:

$$X(t) = X_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega_0 t \rightarrow \mathcal{X}(\omega) \rightarrow I(\omega) \propto \mathcal{X}^2(\omega)$$

$$I(\omega) = I(\omega_0) \frac{1}{1 + [(\omega - \omega_0) 2\pi\tau]^2} \quad \text{— 洛伦兹型轮廓}$$

(能级寿命展宽几率的平方)

即  $I(\omega)$  为谱线中心对称分布。谱线轮廓也可表示为归一化的分布,

$$I(\omega) = I_0 \phi(\omega) \quad \text{--- 归一化}$$

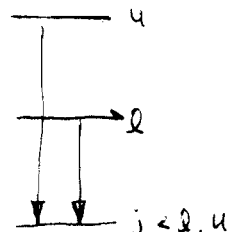
$$\phi(\omega) = \frac{2\tau}{1 + [(\omega - \omega_0) 2\pi\tau]^2} \quad \text{为归一化谱线轮廓}$$

$I_0$  为对谱线积分的常数。

通常用谱线轮廓的半宽度 (FWHM) 作为展宽的尺度。

对于自然展宽的展宽为:

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{1}{\pi\tau} = \frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{i>u} A_{uj} + \sum_{i<u} A_{ij} \right]$$



这里同时考虑了跃迁上下能级的寿命。对于共振线，由于下能级是基态，对于基态和激发态，其寿命  $\tau \rightarrow \infty$ ，可不考虑下能级的寿命。对于非共振线跃迁，必须考虑下能级的寿命。对于电偶极允许跃迁的上能级  $\tau = 10^6 \sim 10^9$  s,  $\Delta\nu \approx 0.1 \sim 100$  MHz。

因为  $A_{ji} \propto \nu_{ji}^3$ ，对于可见光波段自然展宽是显著的。但对于高频电磁态原子核磁共振谱线，自然展宽可忽略不计。

## 2. 多普勒展宽:

这里我们考虑由于辐射场加热运动引起的多普勒展宽:

$$\Delta\nu = \nu - \nu_0 = \frac{\nu_0 v}{c} \quad \nu = \left(\frac{v}{c} - 1\right) c \quad I(\omega) \propto f(\omega)$$

$v$  为沿观测方向上的运动速度。当原子速度分布是麦克斯韦分布时，则由多普勒效应引起的谱线展宽是麦克斯韦分布:

$$I(\omega) = I(\nu_0) \exp\left[-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{\nu_0^2} \frac{c^2}{v_t^2}\right] \quad v_t = \sqrt{\frac{2T}{M}}$$

(单位频率间隔)

$I(\nu_0)$  为谱线中心的强度。同样地， $I(\omega)$  也用谱线总强度  $I_0$  和归一化线廓分布函数表示:

$$I(\nu) = I_0 \phi(\nu)$$

$$I_0 = I(\nu_0) \frac{\sqrt{\pi} \nu_0 v_t}{c}$$

即

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{c}{v_t} \frac{1}{\nu_0} \exp\left[-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{\nu_0^2} \frac{c^2}{v_t^2}\right]$$

且多普勒展宽 (FWHM) 为:

$$\Delta\nu_{1/2} = 2\nu_0 \frac{v_t}{c} (\ln 2)^{1/2}$$

即

$$v_t = \sqrt{\frac{2T}{M}}$$



## ▲ 碰撞 (碰撞, 斯塔克) 展宽

碰撞展宽: 辐射体 (原子, 离子) 在碰撞之间的多数时间由不受任何扰动, 只有碰撞瞬间受到扰动, 而使辐射波列瞬间中断, 从而在一系列碰撞中形成了一系列独立的短波列。对短波列进行傅里叶分析 → 求得展宽, 然后对所有可能的碰撞之间的时间求统计平均, 就可得到谱线展宽分布。  
— 适用于电子碰撞

准静态 (统计) 展宽:

辐射体在发出辐射期间不断有邻近粒子的静电场加扰动, 且粒子的运动是缓慢的, 因此它们的扰动电场是准静态电场。由此可计算每个粒子的扰动电场的斯塔克效应引起的谱线分裂。然后求出所有粒子的扰动电场的限年分布, 再将斯塔克效应谱线对谱线率分布求平均, 就可得到谱线展宽分布。  
— 适用于离子碰撞

量子力学理论

### 3. 碰撞展宽 — 斯塔克展宽或斯塔克展宽

这是由带电粒子间(辐射离子与电子或带电离子间)的碰撞所产生的展宽效应。它本质上属于斯塔克效应,即邻近的带电粒子对辐射离子(电子)的影响。斯塔克效应的理论计算是复杂的,它已由许多作者详细地计算。这些理论效应是与离子密度有关的。例如, Griem 计算了氢的巴耳末线( $n \rightarrow 2$ 跃迁)的斯塔克展宽(FWHM):

$$\Delta\lambda_{1/2} = 0.54 \alpha_{1/2} (n_{20})^{2/3} \quad [\text{nm}]$$

其中  $n_{20}$  是离子密度,以  $10^{20} \text{ m}^{-3}$  为单位,即  $n_{20} = n_i / 10^{20} \text{ m}^{-3}$ 。 $\alpha_{1/2}$  是与谱线有关的:

谱线	上能级 $n$	$\alpha_{1/2}$	
H $\alpha$	3	0.015	0.015
H $\beta$	4	0.087	0.087
H $\gamma$	5		0.10
H $\delta$	6	0.18	
H $\epsilon$	8	0.28	
H $\zeta$	10	0.46	

由此可见,对于低阶跃迁,斯塔克展宽是主要的。因此,天体物理学家对斯塔克展宽是感兴趣的。

### 4. 各种展宽效应的叠加

当几种展宽效应不可忽略时,总的谱线展宽是它们的叠加。一般讲,若两个独立展宽效应的谱线轮廓为  $f_1(\nu)$ 、 $f_2(\nu)$ , 则总的展宽是这两个轮廓函数的卷积,即

$$f(\nu) = \int f_1(\nu - \nu') f_2(\nu') d\nu'$$

类似地,如果还有其它展宽函数,  $f_3(\nu)$ , ..., 则继续完成卷积

叙述了。

但对于德高斯线廓的叠加，或洛伦兹线廓的叠加，情况就较为简单。它们的公式为：

$$\Delta^2 = \sum_i \Delta_i^2 \quad \text{高斯线廓}$$

$$\Delta = \sum_i \Delta_i \quad \text{洛伦兹线廓}$$

对于高斯线廓和洛伦兹线廓的卷积，在光谱学里称为傅克瓦 (Voigt) 函数，它已制成表。可利用此表求得对之谱线的宽度。

仪器线廓：

对于光栅光谱仪，当入射狭缝很窄时

$$I(\omega - \omega_0) = I_0 \left[ \frac{\sin \left[ \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega} \right]}{N \sin \left[ \frac{\omega - \omega_0}{N\Delta\omega} \right]} \right]^2$$

$N$  为光栅刻线数

$\Delta\omega$  反比于光栅的宽度

或近似的 (假定仪器线廓不是洛伦兹线廓) 公式为

Cambridge University Press 1997

## 五. 在等离子体诊断中的应用

对光谱线辐射, 辐射吸收和谱发射的平衡. 则

$$I(\nu) = \int j(\nu, \rho, r) dl \rightarrow \dot{\rho}(\nu, \rho)$$

$$I_{nm} = \int j_{nm}(r) d\tau \approx j_{nm} l = \frac{h\nu_{nm}}{4\pi} A_{nm} n_n l$$

$$j(r, \nu, \rho) = \frac{h\nu}{4\pi} A_{nm} n_n(r)$$

1. 从同一谱. 同一电离态的谱线之比求  $T_e$ :

$$R \equiv \frac{j_{nm}}{j_{n'm'}} = \frac{\nu_{nm}}{\nu_{n'm'}} \frac{A_{nm}}{A_{n'm'}} \frac{n_n}{n_{n'}}$$

对 LTE 模型:

$$\frac{n_n}{n_{n'}} = \frac{g_n}{g_{n'}} \exp\left(\frac{\chi_{n'} - \chi_n}{T_e}\right)$$

$$\text{则 } R = \frac{\nu_{nm}}{\nu_{n'm'}} \frac{A_{nm}}{A_{n'm'}} \frac{g_n}{g_{n'}} \exp\left(\frac{\chi_{n'} - \chi_n}{T_e}\right)$$

$$T_e = \frac{\chi_{n'} - \chi_n}{\ln\left(R \nu_{n'm'} A_{n'm'} g_{n'} / \nu_{nm} A_{nm} g_n\right)}$$

由此可知,  $T_e$  的相对误差为

$$\frac{\Delta T_e}{T_e} = \frac{T_e}{|\chi_{n'} - \chi_n|} \left| \frac{\Delta X}{X} \right| \geq 10\%$$

其中  $X$  为对数函数中的变量, 它的相对误差不少于 10%,  $\frac{T_e}{\chi_{n'} - \chi_n} \sim 1$ . 故  $T_e$  的相对误差不少于 10%

对 Saha 模型:

$$n_n = \frac{n_e n_1 Q_{1n}}{\sum_{2 < n} A_{n2}}$$

$$\therefore R = \frac{\nu_{nm}}{\nu_{n'm'}} \frac{A_{nm} / \sum_{2 < n} A_{n2}}{A_{n'm'} / \sum_{2 < n'} A_{n'2'}} \cdot \frac{Q_{1n}}{Q_{1n'}}$$

对于共振线 (以氢原子为例) 跃迁

$$A_{nm} / \sum_{lcn} A_{nl} \approx 1$$

$$R \equiv \frac{U_{nm}}{U_{n'm'}} \frac{Q_{in}}{Q_{in'}} = \frac{(\bar{g}f)_{in}}{(\bar{g}f)_{in'}} \exp\left(\frac{\chi_{n'} - \chi_n}{T_e}\right)$$

$$T_e = \frac{\chi_{n'} - \chi_n}{\ln(R \bar{g}_{in'} f_{in'} / \bar{g}_{in} f_{in})}$$

此方法对于共振线适用性不太适用, 这时复合和吸收对谱线分布的影响之差不可以忽略。此外, 这时在谱线的连续区也不适用。

2. 同一元素相邻电离态离子线强度比  $I_{21}$   $T_e$ :

$$R = \frac{U_{nm}(z+1)}{U_{n'm'}(z)} \cdot \frac{A_{nm}}{A_{n'm'}} \frac{n(z+1, n)}{n(z, n')}$$

对于LTE模型

$$\frac{n_e n(z+1, l)}{n(z, n')} = \frac{2g(z+1, l)}{g(z, n')} \left(\frac{2\pi m_e T_e}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{\chi(z, n')}{T_e}\right]$$

$$\frac{n(z+1, n)}{n(z+1, l)} = \frac{g(z+1, n)}{g(z+1, l)} \exp\left[-\frac{\chi(z+1, l) - \chi(z+1, n)}{T_e}\right]$$

$$R = \frac{U_{nm}}{U_{n'm'}} \frac{A_{nm}}{A_{n'm'}} \frac{2g(z+1, n)}{g(z, n')} \left(\frac{2\pi m_e T_e}{h^2}\right)^{3/2} n_e^{-1} \times \exp\left[-\frac{\chi(z, n') - \chi(z+1, n) + \chi(z+1, l)}{T_e}\right]$$

$$= \frac{U_{nm}}{U_{n'm'}} \frac{A_{nm}}{A_{n'm'}} \frac{2g(z+1, n)}{g(z, n')} \left(\frac{2\pi m_e T_e}{h^2}\right)^{3/2} n_e^{-1} \times \exp\left[-\frac{\Delta\chi_{in}(z+1) - \Delta\chi_{in}(z) + \chi(z, l)}{T_e}\right]$$

$$= \frac{U_{nm}}{U_{n'm'}} \frac{A_{nm}}{A_{n'm'}} \frac{g(z+1, n)}{g(z, n')} \frac{1}{\sqrt{\pi}} (4\pi a_0^3 n_e)^{-1} \left(\frac{T_e}{R_y}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{\Delta\chi_{in}(z+1) - \Delta\chi_{in}(z) + \chi(z, l)}{T_e}\right]$$

$a_0 \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$   
玻尔半径

$$\frac{\Delta T_e}{T_e} = \frac{T_e}{|X_{in}(z+1) - X_{in}(z) + X(z,1)|} \left| \frac{\Delta X}{X} \right|,$$

466

对日冕模型:

$$\frac{T_e}{|X_{in} - X_{in'} + X(z,1)|} < 1$$

$$R = \frac{U_{nm} A_{nm} n(z+1, n)}{U_{n'm'} A_{n'm'} n(z, n')}$$

$$\therefore n(z+1, n) = \frac{Q_{in}(z+1) n(z+1, 1) n_e}{\sum_{l < n} A_{nl}}, \quad n(z, n') = \frac{Q_{in'}(z) n(z, 1) n_e}{\sum_{l < n'} A_{n'l}}$$

$$\frac{n(z+1, 1)}{n(z, 1)} = \frac{S(z, 1)}{d_r(z+1, 1)} \approx \exp\left[-\frac{\chi(z, 1)}{T_e}\right]$$

$$\therefore R = \frac{U_{nm}}{U_{n'm'}} \cdot \frac{A_{nm} / \sum_{l < n} A_{nl}}{A_{n'm'} / \sum_{l < n'} A_{n'l}} \cdot \frac{Q_{in}(z+1) \cdot S(z, 1)}{Q_{in'}(z) \cdot d(z, 1)} = f(T_e)$$

$$\approx \frac{U_{nm} \cdot A_{nm} / \sum_{l < n} A_{nl}}{U_{n'm'} \cdot A_{n'm'} / \sum_{l < n'} A_{n'l}} \cdot \frac{(\bar{g}f)_{in} \cdot \Delta X_{in'}(z)}{(\bar{g}f)_{in'} \cdot \Delta X_{in}(z+1)} \exp\left[-\frac{\Delta X_{in}(z+1) - \Delta X_{in'}(z)}{T_e}\right]$$

$$\times \exp\left[-\frac{\chi(z, 1) + \Delta X_{in}(z+1) - \Delta X_{in'}(z)}{T_e}\right]$$

3. 从辐射度及其相等的总辐射射流比到  $T_e$  运用平衡方程求解

条件: (1) 平衡态平衡方程

(2) 部分局部平衡 (2级近似)

$$j_{\omega} = \frac{h\nu}{4\pi} A_{nm} n_n \quad (\text{忽略}) \quad (\text{忽略})$$

$$= \frac{h\nu A_{nm}}{4\pi} n_e n_i \frac{g_n}{2g_i} \left(\frac{h^2}{2\pi m_e T_e}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_n}{T_e}\right)$$

$$j_{\omega} \Delta\omega = n_e n_i \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^3 \frac{4}{3\sqrt{3} m_e^2 c^3} \left(\frac{2m_e}{\pi T_e}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{h\nu}{T_e}\right) \left[\frac{g_n}{g_i} + \frac{2g_n}{g_i} \frac{2^2 R_{ij}}{n^2 T_e}\right] \Delta\omega$$

$$\times \left[ \bar{g}f + \sum g_n \frac{2^2 R_{ij}}{T_e h^2} \frac{2}{n} \exp\left(\frac{2^2 R_{ij}}{n^2 T_e}\right) \right] \Delta\omega$$

$$A_{nm} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e h \nu} \frac{g_m}{g_n} f_{mn} = \frac{2\pi e \omega^2}{c} \frac{g_m}{g_n} f_{mn}$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi c \Delta\lambda}{\lambda^2}$$

$$a_0 \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = \frac{r_e}{\alpha^2}$$

玻尔半径

由此可得:

$$\frac{j_0}{j_0 \Delta\omega} = \frac{\pi^3 3^{3/2} (a_0/\alpha)^2 g_m f_{mn}}{\lambda \Delta\lambda g_i \beta} \exp\left[\frac{\chi_n + \hbar\omega}{T_e}\right]$$

其中 
$$\beta = \frac{T_e}{Ry} \bar{g}_{ff} + \sum_n \frac{2g_n}{n^3} \exp\left(\frac{z^2 Ry}{n^2 T_e}\right)$$

这里  $z=1$  (氢原子)

4. 碰撞截面与绝对速率度关系为:

$$j = \frac{1}{4\pi} h\nu A_{nm} n(z, n) \Rightarrow n(z, n)$$

对于碰撞模型:

$$n(z, n) \sum_{l < n} A_{nl} = n_e n(z, 1) Q_{in} \Rightarrow$$

$$n(z, 1) = \frac{n_e n(z, n) \sum_{l < n} A_{nl}}{n_e Q_{in}} \approx n(z)$$

$$n(z) S(z) = n(z+1) \alpha(z+1) \Rightarrow n(z+1)$$

$$n(z) \alpha(z) = n(z-1) S(z-1) \Rightarrow n(z-1)$$

对于局部平衡模型

$$\frac{n(z, n)}{n(z, 1)} = \frac{g(z, n)}{g(z, 1)} \exp\left[-\frac{\Delta\chi_{in}(z)}{T_e}\right]$$

$$\frac{n(z)}{n(z, 1)} = \frac{1}{n(z, 1)} \sum_{n=1}^{n_{max}} n(z, n) = \frac{1}{g(z, 1)} \sum_{n=1}^{n_{max}} g(z, n) \exp\left[-\frac{\Delta\chi_{in}(z)}{T_e}\right]$$

$$= \frac{U(z, T_e)}{g(z, 1)}$$

对于LTE模型：从谱线度与绝对测量获得上能级布居  $n(z, n)$  之  
后，可利用如下的关系式

$$\frac{n(z, n)}{n(z)} = \frac{g(z, n)}{U(z, T_e)} \exp\left[-\frac{\Delta\lambda_{ln}(z)}{T_e}\right] \exp\left[-\frac{E(z, n)}{T_e}\right]$$

$$\frac{n(z, n)n_e}{n(z)} = 2 \frac{U(z, n, T)}{U(z, T)} \left(\frac{2\pi m_e T_e}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{\chi(z, n)}{T_e}\right]$$

求得所有电离态的布居布居。

### 5. 利用线谱的多普勒展宽测 $T_e$ :

对于高温、低密度等离子体，即当无碰撞展宽和谱线的自吸收  
效应可忽略时，而多普勒展宽是展宽的主要机制时，这时谱线  
的轮廓是高斯型，谱线的半高全宽与辐射场温度有关：

$$\Delta\lambda_d(\text{FWHM}) = \lambda \sqrt{\frac{8T_e}{m_i c^2} \ln 2} = 2.43 \times 10^{-3} \lambda [\text{\AA}] \sqrt{\frac{T_e [\text{K}]}{A}} [\text{\AA}]$$

这里， $A$  是辐射展宽线方频率的原子序数。

这里应注意：

- (1) 对于不同离子的不同电离态的多普勒展宽测  $T_e$  总是相同的，  
否则的话，不同离子的温度没有达到同一平衡。
- (2) 中低密度谱线谱线展宽测  $T_e$  (这也就是达到的  $T_e$ ) 时  $T_e$  的  
影响。这时，可测是不同离子的谱线展宽测  $T_e$  的  
之和与离子的量无关，因此时谱线展宽测  $T_e$  是由谱线展宽  
测  $T_e$  引起的。
- (3) 离子温度  $T_e$  由于多普勒展宽



6. 利用谱线的斯塔克效应层流  $n_e$

对于高电离等离子体, 当多普勒展宽与包之展宽效应可忽略时, 可利用谱线的斯塔克效应层流  $n_e$ 。对于谱线的谱线展宽, 较好的方法是, 最好利用整个谱线展宽拟合的方法, 不用比较谱线展宽的方法。因为谱线展宽与电离度  $n_e$  成正比, 谱线展宽与谱线中心附近, 至今使得谱线展宽比谱线展宽的约数即谱线展宽  $\lambda$  2~3 倍。

7. 利用谱线的多普勒展宽测流体速度

谱线的流体速度下限与多普勒展宽效应的限制。由于流体速度与谱线展宽无关, 多普勒展宽与谱线展宽的平方根成正比, 因此选择高电离多普勒展宽测流体速度比较有利, 因为谱线展宽与谱线展宽比较大。

此外, 对于比较精确地测得多普勒展宽, 可同时在同一方向和反方向 (与流速方向) 的谱线展宽测出, 且谱线展宽的平均值即为中心谱线, 而谱线展宽与谱线展宽相差约  $\lambda$  2 倍。

8. 研究李曼层流:

$$\frac{\partial n(A, z)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla n(A, z) + \nabla \cdot [D(A, z) \nabla n(A, z)] = \left( \frac{\partial n(A, z)}{\partial t} \right)_{\text{碰撞, 辐射}}$$

9. 双电子复合律与碰撞电离度比值  $T_e$

A. H. Gabriel Mon. Not. R. Astron. Soc. 100 (1972), 99

10.

▲清华大学蒲以康教授小组的实验

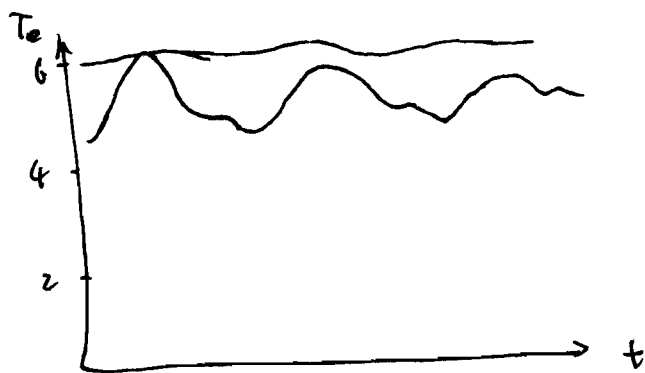
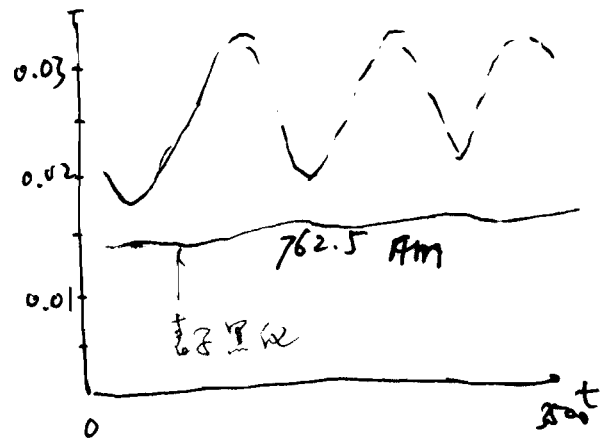
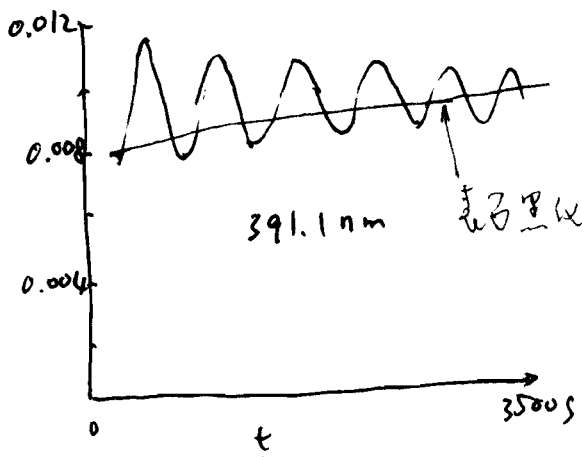
电子耦合等离子体,  $CH_4/N_2$  等离子体

利用  $N_2^+$  (52 离子) 的谱线在 391.1 nm

$N_2$  分子谱线

762.5 nm

的谱线比例  $T_e$ . 发现

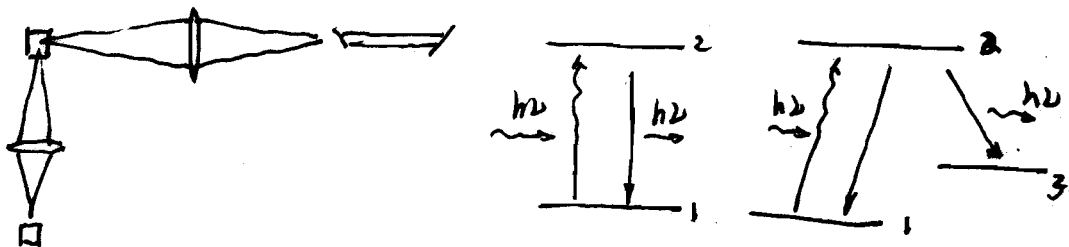


## §4.4 激光诱导荧光光谱学 (Laser-Induced Fluorescence) LIF

激光诱导荧光光谱学, 又称激光共振荧光光谱, 激光选择激发光谱学, 是等离体诊断的重要手段之一, 对等离子体密度、离子(或)电子密度、速度分布和温度、以及等离子体中的电场等。

## 一、工作原理:

激光诱导荧光光谱学的基本原理是: 利用适当频率的激光辐射有选择地激发特定的原子或离子(跃迁的激光频率与入射光子的能量相匹配), 在观测基态激发时态发出的荧光辐射。该荧光辐射的特征与激发离子(或电子)的状态(速度、速度分布)有关, 而且也与激发点的场特征(电、磁场)有关。因此可用该诊断等离子体中的粒子和场。其主要步骤如下图所示: 入射激光束被聚焦到样品



体积内, 用共振激光谱线激发离子, 该离子在激发时态发出的荧光辐射被收集透镜收集并探测。荧光波长可与入射激光波长相同(共振荧光), 也可与入射激光不同(非共振荧光)。

从主要步骤上看, 它与激光散射是类似的, 但本质上它是不同的。汤姆逊散射是入射激光与自由电子间的弹性散射, 它没有特征时间。而 LIF 是激光与离子间的相互作用, 光子被离子(或原子)吸收后使离子内电子组态发生准永久变化, 其退激发时态发出的荧光辐射是有特征时间, 这与激光谱线的谱寿命有关。

LIF 的最大优点是共振吸收截面比汤姆逊散射截面大十

在爱因斯坦辐射跃迁系数中, 我们得到。频率附近的线谱吸收系数为:

$$\begin{aligned}\alpha_{lu} &= \frac{g_u}{g_l} \frac{c^2}{8\pi\nu^2} A_{ul} \left[ 1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l} \right] n_l \\ &= \pi r_e c f_{lu} n_l \left[ 1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l} \right]\end{aligned}$$

这可以表示为

$$\alpha_{lu} \equiv \bar{\alpha}_{lu} \cdot \Delta\nu \equiv \bar{\sigma}_{lu} n_l \cdot \Delta\nu$$

其中  $\bar{\alpha}_{lu}$  和  $\bar{\sigma}_{lu}$  为线谱频率范围内平均的吸收系数和吸收截面

由此得平均吸收截面为

$$\bar{\sigma}_{lu} = \frac{\alpha_{lu}}{n_l \cdot \Delta\nu} = \frac{g_u}{g_l} \frac{c^2}{8\pi\nu^2} \frac{A_{ul}}{\Delta\nu} \left[ 1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l} \right]$$

因为  $\Delta\nu \equiv \frac{\sum_{jcu} A_{uj}}{2\pi} \quad \frac{c}{\nu} \equiv \lambda$

所以 
$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{lu} &= \frac{\lambda_{ul}^2}{4} \frac{g_u}{g_l} \frac{A_{ul}}{\sum_{jcu} A_{uj}} \left[ 1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l} \right] \\ &\approx \frac{\lambda_{ul}^2}{4} \frac{g_u}{g_l} \left[ 1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l} \right] \quad (\text{对于多谱线}) \\ &\approx \frac{\lambda_{ul}^2}{4} \frac{g_u}{g_l} \quad (\text{对于CM模型, } n_u \ll n_l)\end{aligned}$$

当发射线宽  $\Delta\nu_L$  大于吸收线宽  $\Delta\nu_N$  时, 平均吸收截面为:

$$\bar{\sigma}_{lu} \approx \frac{\lambda_{ul}^2}{4} \frac{g_u}{g_l} \frac{A_{ul}}{\Delta\nu_L} \approx \frac{\lambda_{ul}^2}{4} \frac{g_u}{g_l} \frac{\Delta\nu_N}{\Delta\nu_L} \quad (\text{对于多谱线})$$

由此可见, 对于可见光谱, 平均吸收截面近于  $10^{-13} \text{ m}^2$ , 这比 Thomson 散射截面 ( $\sigma_T \approx 10^{-29} \text{ m}^2$ ) 大约十几个量级

$$\alpha_{lu}(\nu) = \frac{h\nu}{c} B_{lu} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right) \phi(\nu) \quad (\text{对电偶极跃迁}) \quad 4-71$$

几个量级。下面我们仍可以从吸收系数的定义出发导出吸收截面的表达式。由前述可知，线吸收系数为：

$$\alpha_{lu}(\nu) = \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{lu} n_l \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right) \phi(\nu)$$

其中  $\phi(\nu)$  为归一化的吸收线形。此外，吸收截面与吸收系数之间的关系为：

$$\alpha_{lu}(\nu) = \sigma_{lu}(\nu) n_l$$

故有

$$\sigma_{lu}(\nu) = \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{lu} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right) \phi(\nu)$$

$$\int \sigma_{lu}(\nu) d\nu = \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{lu} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right) \int \phi(\nu) d\nu$$

$$= \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{lu} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right) \left[\frac{h\nu}{c} B_{lu}\right]$$

对于电偶极跃迁

$$B_{lu} = \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e h \nu} f_{lu}$$

且

$$A_{ul} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} B_{ul} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{g_l}{g_u} B_{lu}$$

故

$$\int \sigma_{lu}(\nu) d\nu = \frac{h\nu}{c} B_{lu} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right)$$

$$= \frac{g_u}{g_l} \frac{c^2}{8\pi \nu_{ul}^2} A_{ul} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right)$$

$$= \frac{\lambda_{ul}^2}{8\pi} \frac{g_u}{g_l} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right) A_{ul}$$

若用吸收线轮廓归一化宽度  $\Delta\nu_{ul}$  内的平均吸收截面  $\bar{\sigma}_{lu}$  表示频率范围内的吸收截面，则有

▲ 线吸收系数

$$d_{lu} = \frac{h\nu}{c} B_{lu} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right) n_l$$

线吸收系数  
 积分吸收  
 吸收系数

$$= \frac{c^2}{8\pi\nu_{ul}^2} \frac{g_u}{g_l} A_{ul} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right) n_l \quad \left(\because A_{ul} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{g_l}{g_u} B_{lu}\right)$$

$$= \frac{e^2}{4\epsilon_0 m e c} f_{lu} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right) n_l \quad (\text{对电偶极辐射的改进})$$

$$= \pi r_{ec} f_{lu} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right) n_l$$

这已对电偶极辐射积分吸收系数，按定义有：

$$d_{lu} = \int n_l \sigma_{lu}(\nu) d\nu$$

代入上式可得：

$$\int \sigma_{lu}(\nu) d\nu = \frac{c^2}{8\pi\nu_{ul}^2} \frac{g_u}{g_l} A_{ul} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right)$$

$$= \frac{\lambda_{ul}^2}{8\pi} \frac{g_u}{g_l} A_{ul} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right)$$

$$= \bar{\sigma}_{lu} \cdot \Delta\nu_N \quad (\text{积分宽度})$$

$$\Delta\nu_N = \frac{\sum_{j>u} A_{uj}}{2\pi} \quad (\text{总辐射})$$

$$\therefore \bar{\sigma}_{lu} = \frac{\lambda_{ul}^2}{4} \frac{g_u}{g_l} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right) \frac{A_{ul}}{\sum_{j>u} A_{uj}}$$

$$\bar{\sigma}_{su} \cdot \Delta\nu_N = \int \sigma_{su}(\omega) d\nu = \frac{\lambda_{ue}^2}{8\pi} \frac{g_u}{g_l} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right) A_{ul}$$

对自然展宽 (Lorentz)

$$\Delta\nu_N = \frac{\sum_{r \neq u} A_{ur}}{2\pi}$$

故有

$$\bar{\sigma}_{su} = \frac{\lambda_{ue}^2}{4} \frac{g_u}{g_l} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right) \frac{A_{ul}}{\sum_{r \neq u} A_{ur}}$$

对于共振线, 有

$$\frac{A_{ul}}{\sum_{r \neq u} A_{ur}} \approx 1$$

故

$$\bar{\sigma}_{su} \approx \frac{\lambda_{ue}^2}{4} \frac{g_u}{g_l} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right) \approx \frac{\lambda_{ue}^2}{4} \frac{g_u}{g_l} \quad (\text{对 CE 模型})$$

由此可见, 对于典型的可见光波段, 其平均吸收截面约为  $10^{13} \text{ m}^2$  量级, 这比汤姆逊散射截面 ( $\sigma_T \approx 10^{-29} \text{ m}^2$ ) 大十几个量级, 因而可以用中等功率的激光去做 LIF 实验。当激光强度  $I_L$  大于吸收强度  $\Delta\nu_N$  时, 其平均截面为:

$$\bar{\sigma}_{su} \approx \pi r_e c f_{su} \frac{I}{\Delta\nu_L} = \frac{g_u}{g_l} \frac{\lambda_{ue}^2}{4} \frac{A_{ul}}{\Delta\nu_L} \approx \frac{\lambda_{ue}^2}{4} \frac{g_u}{g_l} \frac{\Delta\nu_N}{\Delta\nu_L}$$

了解激光辐射与原子初始状态参数及激光参数间的关系。由速率方程。可简写为：  
 1. 激光辐射与自发辐射 (1, 2 之间), 1 是基态  
 2. 速率方程通用 (与自发辐射吸收以上自发辐射及受激辐射)  
 3. 激光辐射与自发辐射的跃迁范围内是准连续辐射, 即  $\Delta u > \Delta u_{sp}$   
 4. 激光脉冲是窄脉冲, 且  $\tau_L \gg$  大于原子通过观察体时的渡越时间, 即观察体中的原子密度可视为常数  
 5. 激光速率方程中的分布是均匀的。



由此可知, 在没有激光辐射时 ( $t < 0$ ), 原子 2 的初始浓度为:

$$n_{20} = \frac{n_e Q_{12}}{A_{21}} n_{10} \ll n_{10}$$

当  $t=0$  时, 加上激光脉冲, 则在  $0 \leq t \leq \tau_L$  时间内, 原子 2 的速率方程为:

$$\begin{cases} \dot{n}_2 = (u_L B_{12} + n_e Q_{12}) n_1 - (u_L B_{21} + A_{21}) n_2 \\ \dot{n}_1 = (u_L B_{21} + A_{21}) n_2 - (u_L B_{12} + n_e Q_{12}) n_1 \end{cases}$$

粒子数守恒方程:

$$\dot{n}_1 + \dot{n}_2 = 0 \quad , \quad \text{即} \quad n_1 + n_2 = n_{10} + n_{20} = n_0$$

初始条件

$\therefore$

$$\dot{n}_2 = (u_L B_{12} + n_e Q_{12}) n_0 - [u_L (B_{12} + B_{21}) + A_{21} + n_e Q_{12}] n_2$$

(因为  $n_2 A_{21} = n_1 n_e Q_{12}$ ,  $n_2 \ll n_1$ )

对于速率方程通用形式, 有  $A_{21} \gg n_e Q_{12}$ , 则

$$\dot{n}_2 \approx (u_L B_{12} + n_e Q_{12}) n_0 - [u_L (B_{12} + B_{21}) + A_{21}] n_2$$

速率方程的解为: (利用初始条件  $n_2|_{t=0} = n_{20}$ )



$$n_2(t) = \frac{u_b B_{12} + n_e Q_{12}}{A_{21} + u_b (B_{12} + B_{21})} n_0 \left[ 1 - \exp \left\{ - [A_{21} + u_b (B_{12} + B_{21})] t \right\} \right] \\ + n_{20} \exp \left\{ - [A_{21} + u_b (B_{12} + B_{21})] t \right\}$$

令:  $S \equiv \frac{B_{12} + B_{21}}{A_{21}} u_b = \frac{u_b}{u_0} = \frac{I_b}{I_0}$  饱和参数

$$u_0 \equiv \frac{A_{21}}{B_{12} + B_{21}} = \frac{A_{21}/B_{21}}{1 + B_{12}/B_{21}} = \frac{g_1}{g_1 + g_2} \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}$$
 饱和辐射场强度

$$I_0 \equiv c u_0$$
 饱和辐射功率

代入上式, 则  $n_2(t)$  为:

$$n_2(t) = \left( \frac{g_2}{g_1 + g_2} \frac{S}{1+S} + \frac{n_e Q_{12}/A_{21}}{1+S} \right) n_0 \left[ 1 - e^{-A_{21}(1+S)t} \right] \\ + n_{20} e^{-A_{21}(1+S)t}$$

$$\approx \frac{g_2}{g_1 + g_2} \frac{S}{1+S} n_0 \left[ 1 - e^{-A_{21}(1+S)t} \right] + n_{20} e^{-A_{21}(1+S)t}$$

因为激发态平衡的弛豫时间  $\ll A_{21}^{-1}$  短, 而  $A_{21}^{-1}$  通常比  $\tau_L$  短得多 (即  $A_{21}^{-1} \ll \tau_L$ ,  $\tau_L A_{21} \gg 1$ ), 因此当  $\tau_L A_{21} \gg 1$  时, 有近似:

$$n_2(t) \approx \frac{g_2}{g_1 + g_2} \frac{S}{1+S} n_0, \quad \Delta n_2 = n_2 - n_{20}$$

由此可知:

(1) 当  $S \ll 1$  时,  $\Delta n_2$  与激发辐射功率  $S$  成正比, 而与吸收的辐射功率成反比

(2) 当  $S \gg 1$  时,  $\Delta n_2$  与  $n_0$  成正比, 而与吸收辐射功率 ~~无关~~

。因此, 2.8.1.2 节中关于饱和辐射功率的讨论是合理的。

离子的激发。此外, 当  $S \gg 1$  时, 因为

$$n_2 = \frac{g_2}{g_1 + g_2} n_0 = \frac{g_2}{g_1 + g_2} (n_1 + n_2)$$

由此可得:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1}$$

其物理意义是: 在能级和激发时, 激发跃迁是饱和, 使得吸收和诱导发射过程之大小与辐射上、下能级激发之比有无限大过程, 因此有:

$$n_1 B_{12} U_\nu = n_2 B_{21} U_\nu$$

$$\text{故} \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{B_{12}}{B_{21}} = \frac{g_2}{g_1} \quad (\text{辐射场光子数 } n_\nu \text{ 的激发级为无限大})$$

二. 能级和辐射的激发效率和能级跃迁

LIF 用于诊断离子激发, 最好是用能级和系谱, 即  $S \gg 1$ . 这时能级和激发跃迁与激发跃迁无关, 因此比较简便。而对能级和系谱以及能级和激发跃迁分布估计, 中求能级和辐射的激发效率或能级跃迁。如可述, 对于二能级系统, 能级和激发效率:

$$u_0(\omega) = \frac{A_{21}}{B_{21} + B_{12}} = \frac{g_1}{g_1 + g_2} \frac{8\pi h \omega^3}{c^3}$$

且能级和能级跃迁为:

$$\text{①} \quad I_0(\omega) = c u_0(\omega) = \frac{g_1}{g_1 + g_2} \frac{8\pi h \omega^3}{c^2}$$

用波数表示:

$$I_0(\lambda) = I_0(\omega) \left| \frac{d\omega}{d\lambda} \right| = \frac{c}{\lambda^2} I_0(\omega) = \frac{g_1}{g_1 + g_2} \frac{8\pi h c^2}{\lambda^5}$$

由此可知, 铷和铯谱线的吸收与波长 $\lambda$ 成反比, 因此波长越短, 吸收率 $\alpha$ 和谱线吸收越大. 例如 (设  $g_1 = g_2$ ):

$$\lambda = 6000 \text{ \AA}$$

$$I_0 = 100 \text{ W/cm}^2 \cdot \text{\AA}$$

$$\lambda = 3000 \text{ \AA}$$

$$I_0 = 3000 \text{ W/cm}^2 \cdot \text{\AA}$$

$$\lambda = 1200 \text{ \AA}$$

$$I_0 = 300 \text{ kW/cm}^2 \cdot \text{\AA}$$

简言之, 铷和铯谱线的吸收可用下式求得: 对左侧吸收线, 由左侧辐射与自发辐射跃迁速率之和与右侧辐射跃迁速率 $\gamma_2$ :

$$B_{21} u_0(\omega) n_2 = A_{21} n_2$$

因此

$$u_0(\omega) = \frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h \omega^3}{c^3}$$

同理, 对右侧吸收线, 由左侧辐射跃迁速率之和与自发辐射跃迁速率 $\gamma_3$ 跃迁速率之和相同平衡而求得, 即:

$$B_{32} u_0(\omega) n_3 = n_3 [A_{32} + A_{31} + n_e \sum_{i \neq 3} Q_{3i}]$$

因此

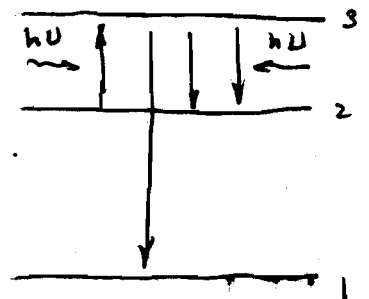
$$u_0(\omega) = \frac{A_{32}}{B_{32}} \left( \frac{A_{32}}{A_{32}} + \frac{n_e \sum_{i \neq 3} Q_{3i}}{A_{32}} \right)$$

或

$$I_0(\lambda) = \frac{8\pi h c^2}{\lambda^5} \left[ \frac{A_{32}}{A_{32}} + \frac{n_e \sum_{i \neq 3} Q_{3i}}{A_{32}} \right]$$

即

$$A_{32} = \sum_{i \neq 3} A_{3i}$$



三. 原子速度分布函数问题

假设: (1) 只考虑两种跃迁, 1为吸收, 2为辐射

(2) 入射激光是单色的,  $I(\omega) = I_0 \phi(\omega)$

$I_0$  为辐射强度,  $\phi(\omega)$  为归一化分布, 且  $\int \phi(\omega) d\omega = 1$

运动速度为  $\vec{v}$  的原子对频率  $\omega$  的吸收为  $\vec{k}_2$  的入射激光的吸收

吸收率为: 
$$\sigma_{12} L_a(\omega - \vec{k}_2 \cdot \vec{v}) K_a[\omega - \omega - \vec{k}_1 \cdot \vec{v}]$$

即

$$\sigma_{12} \equiv \pi c v_e f_{12} = \frac{g_2}{g_1} \frac{\lambda_0^2}{8\pi} A_{21}, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$$

洛伦兹函数

$$L_a(\omega) \equiv \frac{\frac{A_{21}}{2\pi}}{(\omega - \omega_0)^2 + (\frac{A_{21}}{2})^2} \quad \text{为归一化洛伦兹吸收线型}$$

则原子吸收功率 (谱功率) 为  $W(\vec{v})$ :

$$W(\vec{v}) = \sigma_{12} \frac{I_0}{h\omega} \int d\omega \phi(\omega) L_a(\omega - \vec{k}_2 \cdot \vec{v})$$

假设原子在辐射跃迁过程中受到扰动, 总能量守恒, 则原子吸收功率等于辐射功率  $A_{21}$ . 则

$$\frac{W(\vec{v})}{W(\vec{v}) + A_{21}}$$

若考虑原子速度在  $\vec{v} \rightarrow \vec{v} + d\vec{v}$  范围内的原子数为  $n_1 f(\vec{v}) d\vec{v}$ , 则原子吸收功率为  $n_2 f(\vec{v}) d\vec{v}$  的辐射功率为  $A_{21} n_1 f(\vec{v}) d\vec{v}$ :

$$n_2 f(\vec{v}) d\vec{v} = \frac{W(\vec{v})}{W(\vec{v}) + A_{21}} n_1 f(\vec{v}) d\vec{v}$$

对于弱吸收情况,  $W(\vec{v}) \ll A_{21}$ , 则有:

$$n_2 f(\vec{v}) d\vec{v} \approx \frac{W(\vec{v})}{A_{21}} n_1 f(\vec{v}) d\vec{v}$$

由吸收谱在  $E$  方向上各点辐射功率, 谱线, 谱角, 频率间隔  $\Delta\nu$  的辐射功率为:

$$W(\vec{\omega}) = \frac{I_0}{\hbar\omega} \sigma_{12} \int d\omega \phi(\omega) L_a(\omega - \vec{k}_e \cdot \vec{v}) \quad (4.78)$$

$$\frac{d^2N}{d\omega d\Omega} = \int d\vec{v} \frac{A_{21}}{4\pi} n_2(\vec{v}) L_e(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$$

$$= \frac{A_{21} n_1}{4\pi} \int d\vec{v} \frac{W(\vec{v})}{W(\vec{v}) + A_{21}} f(\vec{v}) L_e(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$$

即  $L_e(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$  为  $\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}$  的发射谱函数。通常由 LIF 用于  $\omega \gg \Delta\omega_0$  时，即正用弱系谱。即  $A_{21} \gg W(\vec{v})$ ，这样，可避免能级展宽对发射谱函数  $L_e$  的影响。故在弱系谱极限下有：

$$\frac{d^2N}{d\omega d\Omega} \approx \frac{n_1}{4\pi} \int d\vec{v} W(\vec{v}) f(\vec{v}) L_e(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$$

以下讨论两种极限情况下的发射谱：

1. 宽线极限，即  $\Delta\omega_0 \gg \Delta\omega_{\text{Dop}}$  (多普勒展宽)

则

$$\phi(\omega) \approx \frac{1}{\Delta\omega_0} \approx \text{常数}$$

$$W(\vec{v}) = \sigma_{12} \frac{I_0}{\hbar\omega_0} \frac{1}{\Delta\omega_0} \int d\omega L_a(\omega - \vec{k}_e \cdot \vec{v}) = \sigma_{12} \frac{I_0}{\hbar\omega_0} \frac{1}{\Delta\omega_0}$$

故

$$\frac{d^2N}{d\omega d\Omega} \approx \frac{n_1}{4\pi} \sigma_{12} \frac{I_0}{\hbar\omega_0} \frac{1}{\Delta\omega_0} \int d\vec{v} f(\vec{v}) L_e(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$$

$$= \frac{n_1}{4\pi} \sigma_{12} \frac{I_0}{\hbar\omega_0} \frac{1}{\Delta\omega_0} G(\omega, k)$$

即  $G(\omega, k)$  是在  $\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}$  上的积分

$$f(\omega, k) = \int d\vec{v}_k f(\vec{v}_k, \vec{v}_k)$$

与发射谱函数  $L_e(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_k)$  的卷积。

当自然展宽远小于多普勒展宽时，即  $\Delta\omega_0 \ll \Delta\omega_D$ ，则  $L_e(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_k)$  可近似为  $\delta$  函数  $\delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_k)$ ，这样卷积积分变为

$$\frac{d^2N}{d\omega d\Omega} \approx \int d\vec{v}_k f(\vec{v}_k) L_e(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_k)$$

变为: 
$$\frac{d^2N}{d\omega d\Omega} = \frac{A_0 n_1}{4\pi} \sigma_{12} \frac{I_0}{\hbar\omega_0} \frac{1}{\Delta\omega_0} f(\omega_k) \quad v_k = \frac{\omega}{k}$$

由此可见, 在通常情况下, 发射的荧光光谱直接与实际方向上的谱分布函数  $F(v_k)$  成正比。利用这一方向的谱分布函数是发射的荧光光谱, 此方向叫  $F(v_k)$ 。

2. 窄线系近似: 即  $\Delta\omega_0 \ll \Delta\omega_{\text{谱}}$   
 这时, 谱线展宽函数可用  $\delta$  函数近似, 即

$$\phi(\omega) \approx \delta(\omega - \omega_0)$$

则 
$$W(\vec{\omega}) \approx \sigma_{12} \frac{I_0}{\hbar\omega_0} \int d\omega \phi(\omega) L_a(\omega - \vec{k}_2 \cdot \vec{v})$$

$$= \sigma_{12} \frac{I_0}{\hbar\omega_0} L_a(\omega_0 - \vec{k}_2 \cdot \vec{v})$$

故 
$$\frac{d^2N}{d\omega d\Omega} = \frac{n_1}{4\pi} \sigma_{12} \frac{I_0}{\hbar\omega_0} \int d\vec{v} L_a(\omega_0 - \vec{k}_2 \cdot \vec{v}) f(\vec{v}) L_e(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$$

将上式对  $\vec{v}$  积分, 得:

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{n_1}{4\pi} \frac{I_0}{\hbar\omega_0} \sigma_{12} \int d\vec{v} f(\vec{v}) L_a(\omega_0 - \vec{k}_2 \cdot \vec{v}) \int d\omega L_e(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$$

$$= \frac{n_1}{4\pi} \frac{I_0}{\hbar\omega_0} \sigma_{12} \int d\vec{v} f(\vec{v}) L_a(\omega_0 - \vec{k}_2 \cdot \vec{v})$$

当谱线自然宽度远小于多普勒展宽时, 即  $\Delta\omega_0 \ll \Delta\omega_D$ , 吸收线展宽可近似的为  $\delta$  函数, 即:

$$L_a(\omega_0 - \vec{k}_2 \cdot \vec{v}) = \delta(\omega_0 - \vec{k}_2 \cdot \vec{v})$$

将此代入上式, 则积分部分变为:

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{n_1}{4\pi} \frac{I_0}{\hbar\omega_0} \sigma_{12} f(v_{k_2})$$

即

$$v_{k_2} \equiv \frac{\omega_0 - \omega_0}{k_2}$$

$\omega_0$  为原子速度为  $v_{k_2}=0$  时作谐振中心频率。

由此可知，在  $k$  方向上测得的是对激光束射速宽度为  $k_2$  的激光束的接收。与激光入射方向上原子的速度分布函数  $F(v_{k_2})$  成正比。~~由此可知，在  $k$  方向上测得的是对激光束射速宽度为  $k_2$  的激光束的接收。~~ 当入射激光频率  $\omega_0$  在共振吸收线宽  $\Delta\omega$  范围内扫描时，测得的比例是原子在  $k_2$  方向上的速度分布。

激光束测得  $f(v_{k_2})$  的特点是其分辨率低。对于商定的  $k_2$  可以连续调谐的激光束来说，其最小速度  $\Delta v$  可达：

$$\Delta v \approx 1 \text{ MHz}$$

对于3.2微米激光波长  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ ，其对应的速度分辨率为：

$$\delta\lambda = 8.3 \times 10^{-6} \text{ \AA}$$

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta v}{c} \quad \Delta v = \frac{\lambda}{c} \Delta\nu = \frac{\lambda^2}{c} \Delta\nu$$

对应的速度分辨率为：

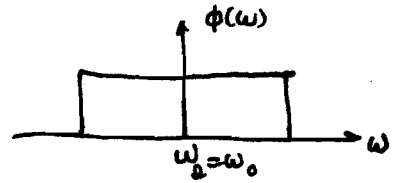
$$\delta v \approx 0.5 \text{ m/s}$$

这可用于测量室温下的原子或离子的热运动速度分布。

(室温下 Ar 原子的热运动速度为  $350 \text{ m/s}$ )

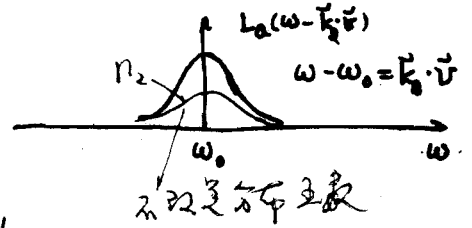
$$W(\vec{v}) = \frac{I_0}{h\nu} \sigma_{12} \int d\omega \phi(\omega) L_a(\omega - \vec{k}_0 \cdot \vec{v})$$

$$n_2(\vec{v}) = \frac{W(\vec{v})}{W(\vec{v}) + A_{21}} n_1 f(\vec{v})$$

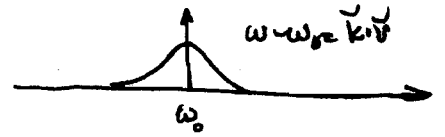
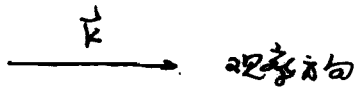


$$\Delta\omega_L \gg \Delta\omega_D$$

$$\Delta\omega_R \gg \Delta\omega_D$$



$W(\vec{v}) \approx \frac{I_0}{h\nu} \frac{\sigma_{12}}{\Delta\omega_L}$  在  $\vec{k}_0$  方向 的有速度的原子被激发  
 的 2 种原子上 的台数比例于  $\frac{W(\omega)}{W(\omega) + A_{21}}$



与波矢传播方向是相区别的：(1) 位于谱了，(2) 具有定向分布  
 相同：谱线宽度相同，由谱线的寿命决定



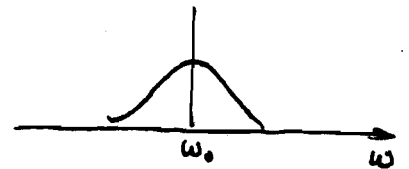
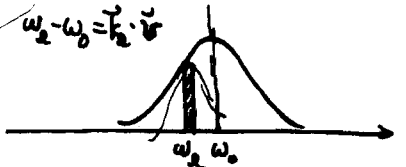
解方程

$$\Delta\omega_L \ll \Delta\omega_{\text{谱线}} \sim \Delta\omega_D$$



$$\Delta\omega_L \ll \Delta\omega_D$$

在速度空间中 只有 在  $\vec{k}_0$  方向上 的  
 有速度的 原子  $\omega_2 - \omega_0 = k_0 v_2$  的原子  
 才被激发 谱线的线宽又上，但是  
 $\vec{v}$  上  $\vec{k}_0$  方向上 的 原子 原子 被激发 谱线  
 又窄又



这时观察到的谱线是观察方向上 原子 原子 的 谱线  
 除了 有上述特点外，还是 有如下 特点：其谱线宽度 大大 变宽了，  
 这 理由 谱线的 寿命 决定