

等离子体诊断方法

俞昌旋 教授

更新日期：2011年9月30日

Not For Distribution

目录

第一章 等离子体粒子通量测量-静电探针	5
1.1 引言	5
1.2 在无磁场、无碰撞等离子体中的静电探针	10
1.2.1 鞘层的形成与Bohm判据	11
1.2.2 鞘层厚度(离子鞘层)	19
1.2.3 鞘层小结	22
1.3 厚鞘-轨道运动极限理论(圆柱, 球探针)	25
1.4 静电探针伏安(I-V)特性曲线	29
1.5 其它因素对探针特性曲线的影响	32
1.5.1 电子速度分布函数	32
1.5.2 碰撞的影响	40
1.5.3 二次电子发射的影响	43
1.5.4 射频场对探针的影响	44
1.5.5 磁场中的影响	46
1.6 其它静电探针	51
1.6.1 双探针(Double Probe)	51
1.6.2 三探针	53
1.6.3 *谐波法测量电子温度	55
1.6.4 减速场能量分析器	57
1.6.5 发射探针	58

1.6.6 强磁场中的马赫探针	64
1.7 静电探针应用(小结)	68
1.8 参考文献	75

Not For Distribution

第一章 等离子体粒子通量测量—静电探针

1.1 引言

1. 什么是静电探针

伸入等离子体中的导电电极（通常为金属体），它与外电源相接，该电源可使探针偏置在相对于等离子体电位为正或负的电位上，则探针在不同偏置电位上所收集的电流可提供探针所处等离子体的信息。

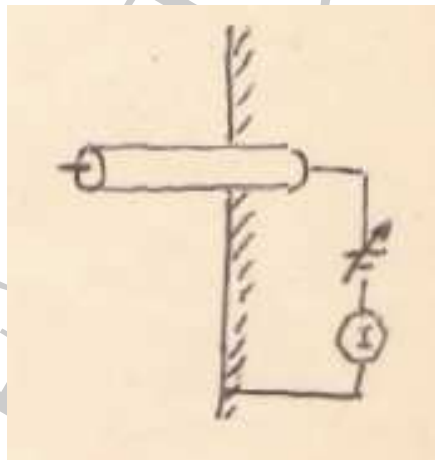


图 1.1: 静电探针

2. 探针理论的复杂性

问题：探针伸入等离子体中形成新的等离子体边界，在这个边界附近决定等离子体运动特征的方程发生变化，即准中性条件不成立，形成鞘层。在鞘层内电子和离子的密度不同，可有大的电场形成。

研究：探针对等离子体的影响是什么？—形成鞘层

探针如何局域地对等离子体产生扰动？—局域性

该扰动对等离子体与远处未被扰动的等离子体有什么关系？—定量关系

3. 典型的探针特性曲线

如图1.2所示，典型的探针I-V特性曲线分为3个部分，A区为电子饱和电流收集区，C区为离子饱和电流收集区，中间的B区为过渡区。

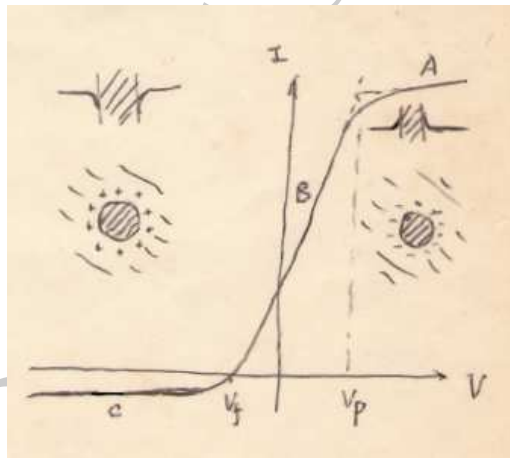


图 1.2: 典型的探针特性曲线：A-电子流收集区；B-过渡区；C-离子流收集区。

4. 鞘层简介

孤立导体与等离子体接触，会有什么情况发生？由气体动力论可以知

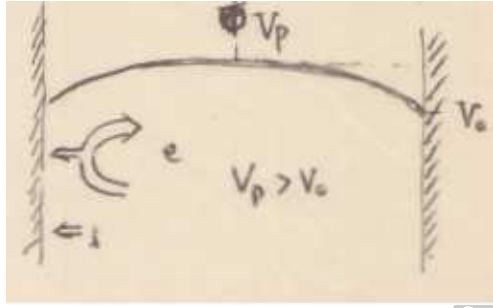


图 1.3: 鞘层示意图

道，单位时间内从一侧通过单位面积的粒子数(即粒子通量密度)为：

$$\Gamma = \int_0^{\infty} n f(v_x) v_x dv_x \quad (1.1)$$

$$= \frac{1}{4} n \bar{v} \quad (1.2)$$

其中 \bar{v} 是粒子的平均热运动速度， $\bar{v} = \sqrt{8kT/\pi m}$ 。假定等离子体的电子温度和离子温度近似相等，即： $T_i \simeq T_e$ 。那么，电子和离子产生的通量分别为：

$$\Gamma_e = \frac{1}{4} n_e \bar{v}_e = \frac{1}{4} n_e \left(\frac{8kT_e}{\pi m_e} \right)^{1/2} \quad (1.3)$$

$$\Gamma_i = \frac{1}{4} n_i \bar{v}_i = \frac{1}{4} n_i \left(\frac{8kT_i}{\pi m_i} \right)^{1/2} \quad (1.4)$$

由于 $m_i \gg m_e$ ，则 $\Gamma_e \gg \Gamma_i$ ，且电流为 $j = e(\Gamma_e - \Gamma_i) \simeq e\Gamma_e$ 。

因此，鞘面积将有过多的负电荷积累，从而使壁电位很快下降而变为负电位，以降低电子到达壁表面的通量。这个调节过程一直持续到：到达壁表面的静电流密度等于零为止，这时孤立导体所达到的电位为悬浮电位。

这时壁表面附近形成的薄的电荷层，即在该层内， $n_i > n_e$ ，以屏蔽壁电位与等离子体电位差所形成的电场的影。

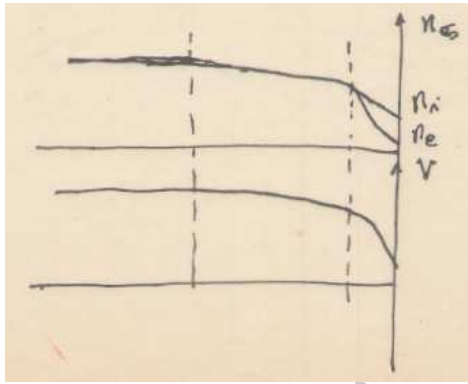


图 1.4: 鞘层内分布参数示意图

5. 德拜屏蔽与鞘层

当假设离子不动时，德拜长度为：

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 k T_e}{e^2 n_0} \right)^{1/2} \quad (1.5)$$

鞘层厚度 δ_s 约为几倍的 λ_D 。

6. 碰撞的影响

碰撞的影响通常是减小探针收集的电流，因为在碰撞不可忽略时，带电粒子要通过扩散才能到达探针表面，而不再是通过自由飞行而到达探针表面。

关于碰撞的影响可理解如下：把探针附近的等离子体作为具有扩散系数为 D 的连续介质处理，而且假定探针处于等离子体电位上，不存在电场扰动，这时可通过求解扩散方程而求得到达探针表面的粒子通量。

设探针为球探针，它为理想吸收体，则稳态的扩散方程为：

$$\nabla^2 n = 0 \quad (1.6)$$

在球坐标下，如果 θ 和 ϕ 方向是对称的，那么扩散方程表示为：

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dn}{dr} \right) = 0 \quad (1.7)$$

其通解形式为：

$$n(r) = A - \frac{B}{r} \quad (1.8)$$

利用探针表面边界条件：

$$\Gamma(a) = D|\nabla n| = \frac{1}{4}n\bar{v} \quad (1.9)$$

$$n(r \rightarrow \infty) = n_\infty \quad (1.10)$$

那么得到：

$$A = n_\infty \quad (1.11)$$

$$\left. \frac{dn}{dr} \right|_{r=a} = \frac{B}{a^2} = \frac{1}{4} \frac{n(a)\bar{v}}{D} \quad (1.12)$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{4} \frac{n(a)\bar{v}a^2}{D} \quad (1.13)$$

那么 $n(r)$ 为：

$$n(r) = n_\infty - \frac{n(a)a^2\bar{v}}{4D} \frac{1}{r} \quad (1.14)$$

把 $r = a$ 带入，得到：

$$n(a) = n_\infty - \frac{\bar{v}a}{4D} n(a) \Rightarrow n(a) = \frac{n_\infty}{1 + \frac{\bar{v}a}{4D}} \quad (1.15)$$

故粒子通量为：

$$\Gamma = \frac{1}{4}n(a)\bar{v} = \frac{1}{4}n_\infty\bar{v} \frac{1}{1 + \frac{\bar{v}a}{4D}} \quad (1.16)$$

又因为扩散系数为：

$$D \equiv \frac{kT}{m\nu} = \frac{1}{3}\lambda^2\nu \quad (1.17)$$

而碰撞频率 ν 为： $\nu \equiv \bar{v}/\lambda$ ，其中 λ 是碰撞平均自由程，那么有：

$$\Rightarrow D = \frac{1}{3}\bar{v}\lambda \quad (1.18)$$

故：

$$\Gamma \Big|_{r=a} = \frac{1}{4}n_{\infty}\bar{v} \frac{1}{1 + \frac{3a}{4\lambda}} \quad (1.19)$$

当 $a/\lambda \ll 1$ 时， $\Gamma = \frac{1}{4}n_{\infty}\bar{v}$ ，即碰撞平均自由程远大于探针尺寸情况下，碰撞效应可以忽略。

当 $a/\lambda \gg 1$ 时， $\Gamma = \frac{1}{4}n_{\infty}\bar{v} \frac{4\lambda}{3a}$ 。

探针理论中用到三个重要的特征参数：

$a(R)$ ： 探针的特征尺度

λ_D ： 德拜长度，决定鞘的厚度

λ ： 平均自由程

它们之间的相对关系决定了各种探针的不同近似理论的适用范围。

对于经典探针理论： $\lambda \gg a$ 有三种情况：

- $\lambda \gg a(R) \gg \lambda_D$ ： 传统的薄鞘理论
- $\lambda \gg \lambda_D \gg a(R)$ ： 轨道极限厚鞘理论
- $\lambda_D \gg \lambda \gg a(R)$ ： 碰撞厚鞘理论

1.2 在无磁场、无碰撞等离子体中的静电探针

基本假设：

1. 等离子体无限均匀，并在无限均匀处满足准中性条件；
2. 磁场 $B = 0$ ；

3. 电子、离子的碰撞自由程(λ)远大于探针尺寸, 即 $\lambda/R \gg 1$;
4. 电子速度分布函数满足麦氏分布, 且离子温度远小于电子温度;
5. 等离子体密度足够高, 使得鞘厚度远比探针尺寸小, $\lambda_D/R \ll 1$;
6. 探针表面是纯吸收体, 次级电子发射系数可忽略;
7. 探针表面是无限大平面, 平面探针的边缘效应可以忽略。

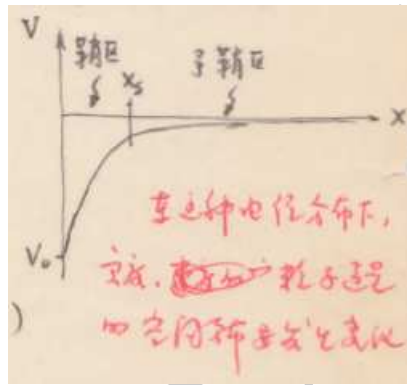


图 1.5: 鞘内电位分布

上述模型是无磁场、无碰撞的一维的平板探针模型。此外为了方便计算, 假定等离子体电位 $V_p = 0$, 探针表面电位 $V_0 < 0$, 空间任意一点的电位为 $V(x)$, 在 $x \rightarrow \infty$ 处为未被扰动的等离子体, 即 $V(\infty) = V_p = 0$ 。

1.2.1 鞘层的形成与Bohm判据

1. 密度分布

首先, 根据粒子数守恒, 在相空间中的任意一个粒子的轨迹有:

$$f(x, v)dx dv = f(x_\infty, v_\infty)dx_\infty dv_\infty \quad (1.20)$$

其次, 根据相空间中的刘维尔定理(Liouville's theorem)¹, 一组粒子所占据的相空间体积是常数, 即

$$dx dv = \text{constant} \quad (1.21)$$

那么有

$$f(x, v) = f(x_\infty, v_\infty) \quad (1.22)$$

再根据粒子能量守恒($V_\infty = V_p = 0$), 有:

$$\frac{1}{2} m_e v^2(x) - eV(x) = \frac{1}{2} m_e v_\infty^2 \quad (1.23)$$

把上面方程合并后得到

$$\begin{aligned} f(x, v) &= n_\infty \left(\frac{m_e}{2\pi k T_e} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_e v_\infty^2}{2k T_e} \right) \\ &= n_\infty \left(\frac{m_e}{2\pi k T_e} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{\frac{1}{2} m_e v^2(x) - eV(x)}{2k T_e} \right] \end{aligned} \quad (1.24)$$

则

$$n_e(x) = \int_{-\infty}^{v_c} f(x, v) dv \quad (1.25)$$

其中

$$v_c = \left\{ \frac{2e[V(x) - V_0]}{m_e} \right\}^{1/2} \quad (1.26)$$

是电子在 x 处为了克服探针的电斥力而被收集所需的最小速度(cutoff速度)。由此, 积分限 v_c 由两类电子所确定:

- (1) 向探针运动的电子, $v < 0$;
- (2) 被探针电位排斥而被反射的电子, $0 < v < v_c$;

¹该定理断言相空间的分布函数沿着系统的轨迹是常数——即给定一个系统点, 在相空间游历过程中, 该点邻近的系统点的密度关于时间是常数。

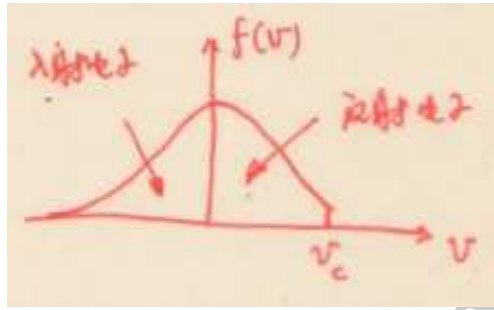


图 1.6: 收集电子分布函数

那么在 x 点处的电子密度为:

$$n_e(x) = \frac{1}{2} n_\infty \exp \left[\frac{eV(x)}{kT_e} \right] \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{e(V(x) - V_0)}{kT_e}} \right) \right\} \quad (1.27)$$

其中误差函数erf为:

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy \quad (1.28)$$

有如下性质: $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = 1$, $\operatorname{erf}(0) = 0$

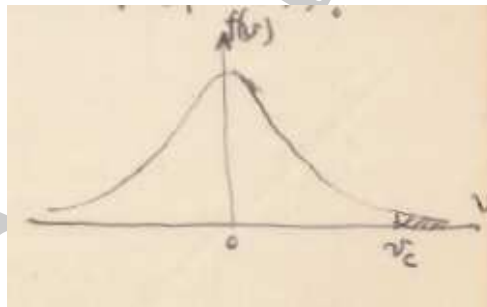


图 1.7:

那么, 当 $V(x) - V_0 \gg kT_e/e$ 时, 有

$$n_e(x) = n_\infty \exp \left[\frac{eV(x)}{kT_e} \right] \quad (1.29)$$

上式就是Boltzmann分布（在热平衡条件下，电子在电势场中的分布）。实际上，只要几乎所有的电子都被反射，即 $V(x) - V_0 \gg kT_e/e$ ，Boltzmann分布近似对所有几何形状（圆柱和球等）的探针都成立。

2. 粒子通量

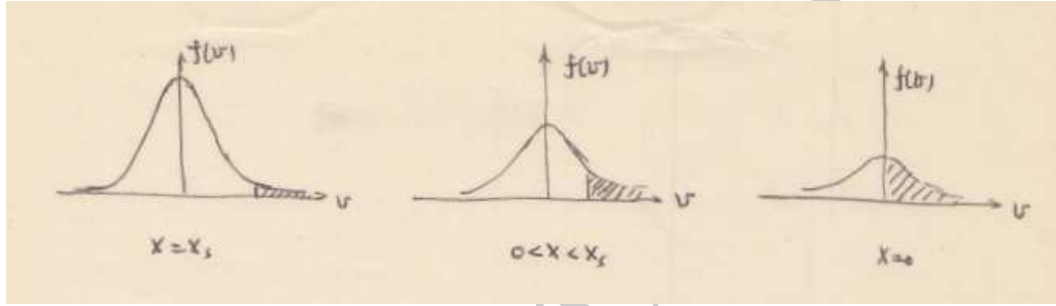


图 1.8:

在前面已经说过，电子做随机热运动，那么电子通量满足

$$\Gamma_e(x) = \frac{1}{4} \bar{v}_e n_e(x) = \frac{1}{4} \bar{v}_e n_\infty \exp \left[\frac{eV(x)}{kT_e} \right] \quad (1.30)$$

离子做定向加速运动

$$\Gamma_i(x) = n_i(x) v_i(x) \quad (1.31)$$

在预鞘区 $x > x_s$ ，满足电中性条件：

$$n_i(x) = n_e(x) = n_\infty \exp \left[\frac{eV(x)}{kT_e} \right] \quad (1.32)$$

此外，由离子能量守恒：

$$\frac{1}{2} m_i v_i^2(x) + eV(x) = 0(x = \infty) \quad (1.33)$$

那么

$$v_i(x) = \left[-\frac{2eV(x)}{m_i} \right]^{1/2} \quad (1.34)$$

所以，预鞘区($x > x_s$)离子通量为：

$$\Gamma_i(x) = n_\infty \exp\left[\frac{eV(x)}{kT_e}\right] \left[-\frac{2eV(x)}{m_i}\right]^{1/2} \quad (1.35)$$

在鞘区内 $x < x_s$ ，由于没有离子的产生流，那么有：

$$\Gamma_i(x) = \Gamma_i(x_s) = n_\infty \exp\left[\frac{eV_s}{kT_e}\right] \left[-\frac{2eV_s}{m_i}\right]^{1/2} \quad (1.36)$$

3. 鞘边界电位和Bohm判据

由于在整个鞘区内，离子通量守恒，因而有：

$$n_i(x) = \frac{n_i(x_s)v_i(x_s)}{v_i(x)} = n_i(x_s) \sqrt{\frac{V_s}{V(x)}} \quad (1.37)$$

而电子的密度分布为：

$$n_e(x) = n_e(x_s) \exp\left[\frac{e(V(x) - V_s)}{kT_e}\right] \quad (1.38)$$

因在鞘边界上，准中性条件成立，即

$$n_i(x_s) = n_e(x_s) = n_s \quad (1.39)$$

这样，鞘层内的泊松方程为：

$$\begin{aligned} \nabla^2 V &= -\frac{e}{\epsilon_0} [n_i(x) - n_e(x)] \\ &= -\frac{en_s}{\epsilon_0} \left[\left(\frac{V_s}{V}\right)^{1/2} - \exp\left(\frac{eV - eV_s}{kT_e}\right) \right] \end{aligned} \quad (1.40)$$

在鞘层边界附近，泊松方程可用泰勒级数展开，并取一级近似得到：

$$\begin{aligned} \nabla^2 V &= -\frac{en_s}{\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2V_s} - \frac{2}{kT_e} \right) (V - V_s) \\ &= \frac{en_s}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{2V_s} + \frac{2}{kT_e} \right) (V - V_s) \end{aligned} \quad (1.41)$$

该方程有非振荡解的必要条件是:

$$\frac{1}{2V_s} + \frac{2}{kT_e} \geq 0 \quad (1.42)$$

即:

$$e|V_s| \geq \frac{kT_e}{2} \quad (1.43)$$

或者

$$v_i(x) \geq \left(\frac{kT_e}{m_i}\right)^{1/2} = C_s \quad (1.44)$$

上述公式就是鞘层形成的Bohm判据。其中 C_s 是离子声速:

$$C_s = \sqrt{\frac{kT_i + kT_e}{m_i}} = \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}} \quad (1.45)$$

上面我们导出了离子温度为0, 即 $T_i = 0$ 情况下的Bohm判据

$$v_i^2 \geq C_s^2 \quad (1.46)$$

当 $T_i \neq 0$ 时, 可从动力学方程或者流体方程中导出相应的判据。在动力学方程出发, 导出的广义Bohm判据为:

$$\int_0^\infty \frac{f_{is}(v)dv}{v^2} \leq \frac{m_i}{kT_e} \quad (1.47)$$

其中 $f_{is}(v)$ 是鞘边界处的1维离子速度分布函数。

现在考虑粗略近似的情况, $T_i \neq 0$, $f_{is}(v)$ 的分布形式为

$$f_{is}(v) = \begin{cases} (2C_i)^{-1} & v_s - C_i \leq v \leq v_s + C_i \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (1.48)$$

其中 $C_i = (kT_i/m_i)^{1/2}$

将 $f_{is}(v)$ 带入广义Bohm判据, 并完成积分运算, 可以得到:

$$v_s \geq C_s = \left[\frac{k(T_e + T_i)}{m_i} \right]^{1/2} \quad (1.49)$$

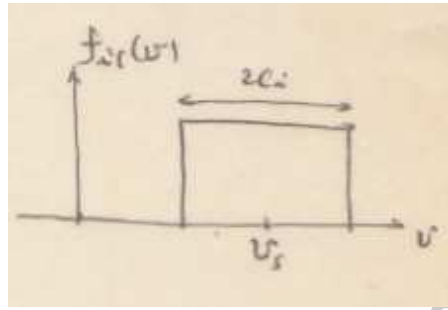


图 1.9: 矩形分布的速度分布函数

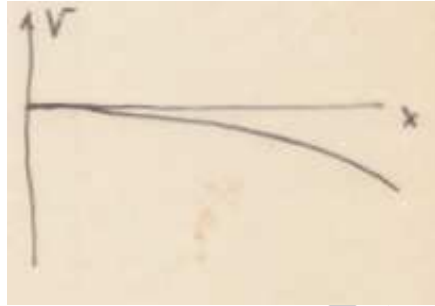


图 1.10:

此外，从简单的一维流体方程也可以导出 $T_i \neq 0$ 情况下的Bohm判据。

假定一维稳态等离子体的电子离子温度与位置无关。因为粒子被探针收集而损失，为达到稳态必须有粒子源（如中性气体电离等）。则离子连续性和动量方程为：

$$\frac{d}{dx}(n_i v_i) = S(x) \quad (1.50)$$

$$n_i m_i v_i \frac{dv_i}{dx} = -\frac{dP_i}{dx} + Z e n_i E - m_i v_i S(x) \quad (1.51)$$

这里已经假定离子产生时动量是0，故有动量方程的右边最后一项，Z为离子电荷数。由准中性条件：

$$Z n_i = n_e = n \quad (1.52)$$

此外，我们也可以导出电子的连续性和动量方程，但它是在减速场中，我们可方便地应用Boltzmann分布条件，即：

$$n_e(x) = n_0 \exp \left[\frac{eV(x)}{kT_e} \right] \quad (1.53)$$

n_0 是未受扰动的等离子体密度，由此可得到：

$$kT_e \frac{dn_e}{dx} = en_e \frac{dV}{dx} = -en_e E \quad (1.54)$$

那么可以得到

$$Zen_i E = en_e E = -kT_e \frac{dn_e}{dx} = -kT_e Z \frac{dn_i}{dx} \quad (1.55)$$

$$\frac{dP_i}{dx} = \gamma kT_i \frac{dn_i}{dx} \quad (1.56)$$

其中 γ 是绝热系数，等温过程 $\gamma = 1$ ，绝热过程 $\gamma = 5/3$ 。

这样，离子连续性方程可以化为：

$$v_i \frac{dn_i}{dx} + n_i \frac{dv_i}{dx} = S \quad (1.57)$$

$$v_i \frac{dv_i}{dx} = -\frac{C_s^2}{dn_i} \frac{dn_i}{dx} - \frac{Sv_i}{n_i} \quad (1.58)$$

其中：

$$C_s = \left(\frac{\gamma kT_i + ZkT_e}{m_i} \right)^{1/2} \quad (1.59)$$

把速度归一化到声速上，引入马赫数：

$$M(x) = v_i(x)/C_s \quad (1.60)$$

做变量替换，并将两方程联立求解得到：

$$\frac{dM}{dx} = \frac{1 + M^2}{1 - M^2} \frac{S}{n_i C_s} \quad (1.61)$$

$$\frac{dn_i}{dM} = -\frac{2M}{1 + M^2} n_i \quad (1.62)$$

由此可见，只要 $M^2 < 1$ ，则 $dM/dx > 0$ ，这表示离子向探针表面做定向运动时，速度是逐渐增加的。此外，当 $M = 1$ 时， $dM/dx \rightarrow \infty$ ，这表示离子被突然加速到很大的速度，那么上方程组的等离子体解不存在。从物理上理解，这相当于等离子体速度达到等离子体声速时，准中性条件不再成立，并开始出现空间电荷鞘层，在该鞘层内有大的电场和高的离子加速度（离子速度大于声速）。这就是鞘层形成的Bohm判据。

上方程的解为：

$$\frac{n_i(x)}{n_{i0}} = \frac{1}{1 + M^2} \quad (1.63)$$

$$V(M) = -\frac{kT_e}{e} \ln(1 + M^2) \quad (1.64)$$

在鞘层边界处 $x = x_s$ ， $M = 1$ ，故有：

$$n_s = \frac{1}{2}n_0 \quad (1.65)$$

$$V_s = -\frac{kT_e}{e} \ln 2 \simeq -0.69 \frac{kT_e}{e} \quad (1.66)$$

这与 $T_i = 0$ 情况下由鞘层的泊松方程导出的结果

$$n_s = 0.61n_\infty \quad (1.67)$$

$$V_s = -0.5 \frac{kT_e}{e} \quad (1.68)$$

略有不同，主要原因是假定离子是来自点源。

1.2.2 鞘层厚度(离子鞘层)

假定鞘层内 ($x < x_s$) 电子密度是可以忽略的(这只有 V_0 足够高时才成立)，但在大多数情况下，只要 T_i 足够大，它们成立。则鞘内的泊松方程为：

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{e}{\epsilon_0} \Gamma_i \left(\frac{m_i}{-2eV} \right)^{1/2} \quad (1.69)$$

对应的边界条件为： $x = x_s$ 时 $dV/dx = 0$ ， $V = V_s$ 。

将 dV/dx 乘以方程的两边，并完成积分运算得到：

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = \frac{2\Gamma_i}{\epsilon_0}(2m_i e)^{1/2} [(-V)^{1/2} - (-V_s)^{1/2}] \quad (1.70)$$

再将上式积分得到：

$$[\sqrt{-V} - \sqrt{-V_s}]^{1/2} [\sqrt{-V} + 2\sqrt{-V_s}] = \frac{3}{4} \left(\frac{8\Gamma_i^2 e m_i}{\epsilon_0^2}\right)^{1/4} (x_s - x) \quad (1.71)$$

将 Γ_i 的表达式：

$$\Gamma_i = n_\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{kT_e}{m_i}\right)^{1/2} \quad (1.72)$$

带入上式，并将探针表面处 $x = 0$ 的电位 $V = V_0$ 代入，得到鞘层厚度 δ 为：

$$\frac{\delta}{\lambda_D} \equiv \frac{x_s}{\lambda_D} = \frac{2}{3} \left[\frac{2}{\exp(-1)}\right]^{1/4} \left[\sqrt{\frac{-eV_0}{kT_e}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^{1/2} \left[\sqrt{\frac{-eV_0}{kT_e}} + \sqrt{2}\right] \quad (1.73)$$

对于氢等离子体，当探针处于悬浮电位时，即 $V_0 = V_f$ 和 $\Gamma_i = \Gamma_e$ ，在这里我们先把后面课程的悬浮电位 V_f 与电子温度 T_e 的关系式拿出来用：

$$\frac{eV_f}{kT_e} = \frac{eV_0}{kT_e} = -\frac{1}{2} \left[1 + \ln\left(\frac{m_i}{2\pi m_e}\right)\right] \quad (1.74)$$

那么

$$\frac{\delta}{\lambda_D} \simeq 4 \quad (1.75)$$

▲ 电子鞘层：

前面我们讨论的都是离子鞘层，在鞘层区域内电子被排斥，但是某些情况下也会出现电子鞘层，我们把 $V_0 > V_p$ 情况下的鞘层称之为电子鞘层。在Lam[Phys. of Plasmas 8, 73(1965)]文献中讨论，当 $T_i/T_e \ll 1$ 时，可能出现 $V_0 - V_p > 0$ ，这时候鞘边界电位近似等于 V_p ，且在鞘边界处电子密度 n_e 和随机热运动速度与等离子体区的近似相等。

在电子鞘中，离子被排斥，即在减速场中运动，其密度和通量分别为：

$$n_i(x) = n_\infty \exp \left[-\frac{eV(x)}{kT_i} \right] \quad (1.76)$$

$$\Gamma_i(x) = \frac{1}{4} n_i(x) \bar{v}_i = \frac{1}{4} n_\infty \bar{v}_i \exp \left[-\frac{eV(x)}{kT_i} \right] \quad (1.77)$$

电子是在加速场中做加速运动，这是在鞘边界的电子通量为：

$$\Gamma_e(x_s) = n_s u_s \quad (1.78)$$

其中 u_s 是电子在鞘边界处垂直于探针表面的平均速度分量，它可近似为：

$$u_s = \frac{\bar{v}_e}{4} + \left(\frac{2eV_s}{m_e} \right)^{1/2} \quad (1.79)$$

V_s 是鞘边界电位。Lam发展了简化的理论，该理论表明：

(1) 当 $T_i/T_e \ll 1$ 时，鞘边界的电位近似为：

$$V_s \simeq 0.69 \frac{kT_i}{e} \quad (1.80)$$

由此可见，当 $V_s \ll \frac{kT_e}{e}$ 时，鞘边界的随机热运动与等离子体区（未被扰动区）的随机热运动近似相同。两个条件联立得到：

$$\frac{T_i}{T_e} \ll 1.4 \quad (1.81)$$

(2) 探针表面电位 V_0 远大于鞘边界电位 V_s ，即：

$$V_0 \gg V_s \quad (1.82)$$

或者

$$V_0 \gg 0.69 \frac{T_i}{T_e} \frac{kT_e}{e} \quad (1.83)$$

当(1)(2)条件满足时, 就可以假定鞘区有锐利的外边界, 而且在鞘边界等离子体的特性与未被扰动的等离子体相同。此外, 从鞘层内的泊松方程的近似表达式也可以估计鞘厚的量级:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{en_s}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{2V_s} + \frac{e}{kT_e} \right) (V - V_s) \quad (1.84)$$

令 $\Delta V \equiv V - V_s$, 那么

$$\frac{\Delta V}{\delta^2} \simeq \frac{en_s}{\epsilon_0} \frac{e}{kT_e} \Delta V \quad (1.85)$$

那么得到:

$$\delta \simeq \left(\frac{\epsilon_0 k T_e}{e^2 n_s} \right)^{1/2} \simeq \lambda_D \quad (1.86)$$

1.2.3 鞘层小结

▲ 一维模型:

1. 等离子体是无限均匀的, $n_e = n_i$ ($Z = 1$);
2. $B_0 = 0$;
3. $\lambda \gg R \gg \delta$;
4. $f_e(\vec{v})$ 是麦克斯韦分布, 冷离子 $T_i = 0$ ($T_i \ll T_e$);
5. 探针表面是纯吸收体

▲ 孤立导体在等离子体中形成的电位分布

粒子随机热运动通量

$$\Gamma_e = \frac{1}{4} n_e \bar{c}_e \quad (1.87)$$

$$\Gamma_i = \frac{1}{4} \quad (1.88)$$

$$\bar{c}_g = \bar{v}_g = \sqrt{\frac{8kT_g}{\pi m_g}}, \quad g \equiv e, i \quad (1.89)$$

由于 $\bar{c}_e \gg \bar{c}_i$, 所以 $\Gamma_e \gg \Gamma_i$

形成鞘区, 在鞘层内准中性条件不成立, 形成强电场。在这种情况下, 鞘层内的离子密度远大于电子密度, $n_i \gg n_e$, 称为离子鞘。

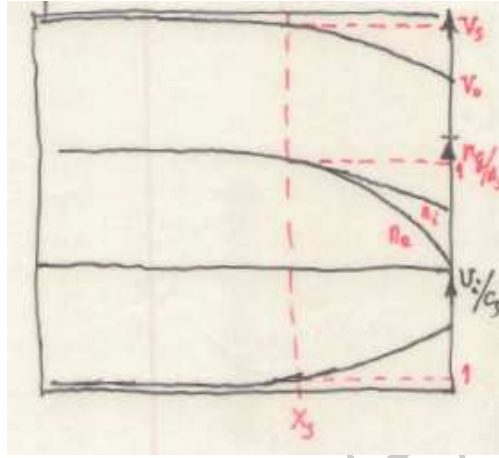


图 1.11: 鞘层参数分布。

▲ 离子鞘的形成条件—Bohm判据

由鞘层内泊松方程的解得到:

$$V_s \leq \frac{kT_e}{2e} \quad (1.90)$$

$$v_{is} \geq \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}} \quad (1.91)$$

由预鞘区内磁流体方程的解得到

$$v_i < \sqrt{\frac{ZkT_e + \gamma kT_i}{m_i}} \quad (1.92)$$

$$\frac{n_i}{n_{i0}} = \frac{1}{1 + M^2} = \exp\left(\frac{eV}{kT_e}\right) \quad (1.93)$$

由此得到Bohm判据:

$$v_{is} = C_s \quad (1.94)$$

鞘边界密度:

$$\frac{n_{is}}{n_{i\infty}} = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \simeq 0.61, \quad \frac{n_{is}}{n_{i0}} = 0.5 \quad (1.95)$$

鞘边界电位:

$$V_s = -0.5 \frac{kT_e}{e}, \quad V_s = -\ln 2 \frac{kT_e}{e} = -0.69 \frac{kT_e}{e} \quad (1.96)$$

▲ 电子和离子通量

1. 电子在减速场中做随机热运动, 其密度分布遵从 Boltzmann 分布:

$$\Gamma_e(x) = \frac{1}{4} n_{e0} \bar{v}_e \exp\left[\frac{eV(x)}{kT_e}\right], \quad 0 \leq x < \infty, \quad V(x) < 0 \quad (1.97)$$

2. 离子在加速场中做定向运动

$$\Gamma_i(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{-2eV(x)}{m_i}} n_{i\infty} \exp\left[\frac{eV(x)}{kT_e}\right] & x \geq x_s \\ \sqrt{\frac{-2eV_s}{m_i}} n_{i\infty} \exp\left[\frac{eV_s}{kT_e}\right] & x < x_s \end{cases} \quad (1.98)$$

▲ 探针收集的电流

收集电流: $I = I_e - I_i$

电子收集电流:

$$I_e = e\Gamma_e(0)A_p = \frac{1}{4} en_e \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} \exp\left(\frac{eV_0}{kT_e}\right) \quad (1.99)$$

离子收集电流:

$$I_i = e\Gamma_{is}A_s = \alpha en_i C_s \quad (1.100)$$

— 对于 $T_i \ll T_e$, $\alpha \simeq 0.61$, $C_s = \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}}$

— 对于 $T_i \lesssim T_e$, $\alpha = 0.5$, $C_s = \sqrt{\frac{kT_e + kT_i}{m_i}}$

▲ 鞘的厚度

$$\delta \sim \lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 k T_e}{e^2 n_e} \right)^{1/2} \quad (1.101)$$

1.3 厚鞘-轨道运动极限理论(圆柱, 球探针)

在厚鞘情况下 (即 $r_s \gg a$), 进入鞘层的粒子在有心力场的作用下, 将做轨道运动, 从而使得进入鞘区的粒子并不都能打到探针表面上而被收集。这时, 如果鞘电位的变化足够缓慢, 探针收集的电流将与鞘电位的分布形状 $V(r)$ 有关, 因为粒子在有心力场的作用下运动时, 其总能量 (动能和势能之和) 和角动量是守恒的, 而在考虑探针收集电流时, 我们只需考虑粒子初、末总的动量和角动量。

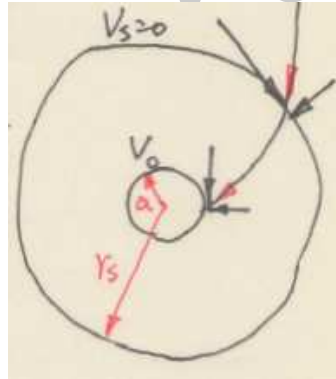


图 1.12: 轨道运动极限理论模型

在这里我们要进行一些假设:

1. 鞘具有锐边界, 即在 $r = r_s$ 处, $V_s = 0$ (等离子体电位);
2. 鞘边界处粒子密度和速度分布函数是已知的;
3. 碰撞平均自由程远大于鞘厚度, 即 $\lambda \gg \delta \equiv r_s - a$;

4. 探针表面是理想吸收体。

若鞘边界处(表面处)粒子的径向和切向速度分别为 v_{sr} 、 $v_{s\theta}$ (v_{ar} 、 $v_{a\theta}$), 则由能量和角动量守恒, 有:

$$\begin{cases} v_{sr}^2 + v_{s\theta}^2 = v_{ar}^2 + v_{a\theta}^2 + 2qV_0/m \\ r_s v_{s\theta} = a v_{a\theta} \end{cases} \quad (1.102)$$

由此可解得到:

$$v_{ar}^2 = v_{sr}^2 + v_{s\theta}^2 \left(1 - \frac{r_s^2}{a^2}\right) - \frac{2qV_0}{m} \quad (1.103)$$

由此可得粒子能打到探针表面上的必要条件是:

$$v_{ar}^2 \geq 0 \quad (1.104)$$

由此必要条件可以进一步求得: 为使进入鞘层的粒子能被探针吸收, 其在鞘边界处的切向加速度必须满足如下条件(由上式得到):

$$v_{s\theta}^2 \leq \left(v_{sr}^2 - \frac{2qV_0}{m}\right) \left(\frac{r_s^2}{a^2} - 1\right)^{-1} \equiv (v_{s\theta}^*)^2 \quad (1.105)$$

设粒子在鞘边界处的速度分布为 $G(v_{sr}, v_{s\theta})$, 则探针的收集电流为:

$$I = A_s j \quad (1.106)$$

$$j = n \int_0^\infty v_{sr} dv_{sr} \int_{-v_{s\theta}^*}^{v_{s\theta}^*} G(v_{sr}, v_{s\theta}) dv_{s\theta} \quad (1.107)$$

若粒子速度分布函数满足麦氏分布:

$$G(v_{sr}, v_{s\theta}) \equiv \left(\frac{m}{2\pi kT}\right) \exp\left[-\frac{m(v_{sr}^2 + v_{s\theta}^2)}{2kT}\right] \quad (1.108)$$

那么带入前式, 并完成积分运算后得到:

$$I = A_p j_r F \quad (1.109)$$

其中 $j_r \equiv \frac{1}{4} q n_\infty \bar{v}$ 为随机热运动电流密度。对于圆柱探针和球探针, 修正因子 F 的表达式分别是:

- 圆柱:

$$F \equiv \frac{r_s}{a} \operatorname{erf}(\sqrt{\eta'}) + e^\eta [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\eta + \eta'})] \quad (1.110)$$

- 球:

$$F \equiv \frac{r_s^2}{a^2} (1 - e^{-\eta'}) + e^{-\eta'} \quad (1.111)$$

其中 $\operatorname{erf}(x)$ 是误差函数, η 和 η' 的表达式为:

$$\eta \equiv \frac{e|V_0 - V_p|}{kT_q} \quad (1.112)$$

$$\eta' \equiv \frac{a^2}{r_s^2 - a^2} \eta \quad (1.113)$$

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt \quad (1.114)$$

此外, 粒子能打到探针表面的充分条件是: 在鞘区内不存在“势垒”, 即电位分布必须满足

$$\frac{V(r)}{V_0} > \left(\frac{a}{r}\right)^2 \quad (1.115)$$

1. 薄鞘近似: $\delta \equiv r_s - a \ll a$

这时,

$$\eta' \equiv \frac{a^2}{r_s^2 - a^2} \eta \gg 1 \quad (1.116)$$

那么 $\operatorname{erf}(\sqrt{\eta'}) \rightarrow 1$

而且有:

$$\begin{aligned} e^\eta [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\eta + \eta'})] &\simeq e^\eta \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-\eta - \eta')}{\sqrt{\eta + \eta'}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-\eta')}{\sqrt{\eta + \eta'}} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

故对于圆柱和球探针, 在薄鞘近似条件下有 $F = 1$ 。

2. 厚鞘近似: $r_s \gg a$

这时候有: $\eta' \ll 1$, 对于误差函数当 $x \ll 1$ 时有近似公式:

$$\operatorname{erf}(x) \Big|_{x \ll 1} \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}} x \quad (1.117)$$

故对于圆柱探针和球探针, F 的值分别为:

(a) 圆柱探针:

$$F \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \eta^{1/2} + e^\eta (1 - \operatorname{erf} \sqrt{\eta}) \quad (1.118)$$

当 $\eta > 2$ 时, 还可以近似为:

$$F \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\eta^{1/2} + \frac{1}{2} \eta^{-1/2} \right) \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}} (1 + \eta)^{1/2} \quad (1.119)$$

(b) 球探针:

F 值近似为:

$$F \simeq \frac{r_s^2}{a^2} \eta' + (1 - \eta') \quad (1.120)$$

$$= 1 + \eta \quad (1.121)$$

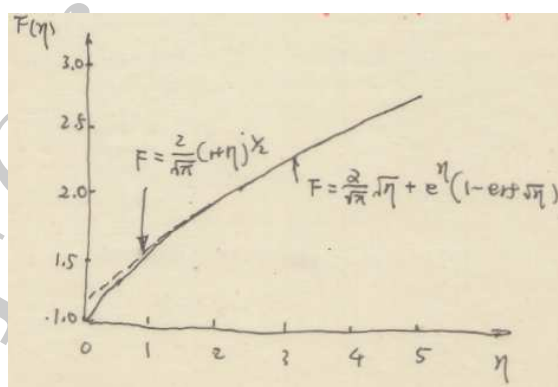


图 1.13: $F(\eta)$ 函数。

1.4 静电探针伏安(I-V)特性曲线

伸入等离子体内部的静电探针的偏置电压如果改变，即探针表面电势 V_0 变化，那么探针收集到的电流也会不一样，即收集电流是偏置电压的函数：

$$I = I_e - I_i = f(V) \quad (1.122)$$

实验上得到的典型探针I-V特性曲线如图所示：

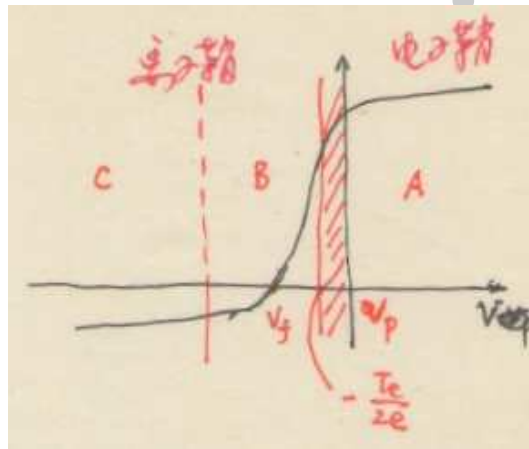


图 1.14: 探针I-V特性曲线

对于探针的不同区域，我们做如下讨论：

1. A区：电子饱和流区，对应 $V - V_p \geq 0$

(a) 当 $V = V_p$ 时，探针收集电子和离子的随机热运动电流

$$I_e = A_p j_{re}, j_{re} \equiv \frac{1}{4} n_e \bar{v}_e \quad (1.123)$$

$$I_i = A_p j_{ri}, j_{ri} \equiv \frac{1}{4} n_i \bar{v}_i \quad (1.124)$$

那么收集电流为：

$$I = I_e - I_i \simeq I_e = \frac{1}{4} n_e \bar{v}_e A_p \equiv I_{e0} \quad (1.125)$$

其中 I_{e0} 称之为电子饱和电流。

(b) 当 $V > V_p$ 时

电子收集电流为:

$$I_e = j_{re} A_{eff} \quad (1.126)$$

其中有效收集面积为: $A_{eff} = A_p F$, 这里 F 已经在前面讨论。

离子在减速场中做减速运动, 那么离子收集电流为:

$$I_i = A_p j_{ri} \exp\left[-\frac{e(V - V_p)}{kT_i}\right] \quad (1.127)$$

由此可见:

(a) 当 $V = V_p$ 时, 处于拐点处收集电流为

$$I \simeq I_{e0} = \frac{1}{4} e n_e \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} A_p \quad (1.128)$$

当电子温度 T_e 已知的时候, 则由 I_{e0} 可求得 n_e

(b) 对于圆柱探针厚鞘情况下, 当

$$\frac{e(V - V_p)}{kT_e} > 2 \quad (1.129)$$

的情况, 收集的电流为:

$$I \simeq I_e = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[1 + \frac{e(V - V_p)}{kT_e}\right]^{1/2} A_p j_{re} \quad (1.130)$$

那么 I^2 为:

$$I^2 = \frac{2}{\pi^2} A_p^2 \frac{e^2}{m_e} n_e^2 [kT_e + e(V - V_p)] \quad (1.131)$$

那么从 $I^2 \propto (V - V_p)$ 的直线拟合, 可以得到其斜率 S 为:

$$S \equiv \frac{2}{\pi^2} A_p^2 \frac{e^3}{m_e} n_e^2 \quad (1.132)$$

由此可以求得电子密度:

$$n_e = \frac{\pi}{A_p e^{3/2}} \sqrt{\frac{m_e S}{2}} \quad (1.133)$$

此外可以由直线在 $I = 0$ 的截距, 在 V_p 已知的情况下求得电子温度:

$$kT_e = e(V - V_p) \Big|_{I=0} \quad (1.134)$$

这里, n_e 和 T_e 均可独立地测得, 与拐点法由 I_{e0} 求 n_e 不同。

2. B区: 过渡区, $V - V_p \leq -kT_e/2e$

收集电流为:

$$I = en_e \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}} \exp\left[\frac{e(V - V_p)}{kT_e}\right] - \exp\left(-\frac{1}{2}\right) en_e \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}} A_s \quad (1.135)$$

当鞘厚度 δ 随着 $V - V_p$ 变化可忽略时, A_s 可认为是常数; 那么离子收集电流为:

$$I_i = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) en_e \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}} A_s \equiv I_{i0} \quad (1.136)$$

其中 I_{i0} 为离子饱和电流; 那么 $I + I_{i0}$ 的表达式为:

$$I + I_{i0} = en_e \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}} \exp\left[\frac{e(V - V_p)}{kT_e}\right] \quad (1.137)$$

由此过渡区的半对数曲线 $\ln(I + I_{i0}) \sim V$ 的斜率可以求得电子温度 T_e , 即

$$kT_e = \frac{e(I + I_{i0})}{d(I + I_{i0})/dV} = -\frac{e(V - V_p)}{\ln\left(\frac{I_{e0}}{I + I_{i0}}\right)} \quad (1.138)$$

其中, $I_{i0} = I_{e0} \exp(eV_f/kT_e)$ 。此外, 当 $I = 0$ 时, 有:

$$en_e \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}} \exp\left[\frac{e(V_f - V_p)}{kT_e}\right] - \exp\left(-\frac{1}{2}\right) en_e \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}} A_s = 0 \quad (1.139)$$

由此可得到(当 $A_p \simeq A_s$ 时):

$$V_f - V_p = -\frac{kT_e}{2e} \left[1 + \ln\left(\frac{m_i}{2\pi m_e}\right) \right] \quad (1.140)$$

由此可以通过上关系式来求得 V_p , 但是该测量误差较大。

3. C区：离子饱和流区， $V - V_p \ll -kT_e/e$

这时电子被排斥，电子收集电流为0，即 $I_e \rightarrow 0$ ，收集到的电流为离子电流，即：

$$I \simeq -I_{i0} = -0.61en_e\sqrt{\frac{kT_e}{m_i}}A_s \quad (1.141)$$

对于不同形状的探针， A_s 的值不相同：

$$A_s = \begin{cases} A_p \left(1 + \frac{\delta}{a}\right) & \text{Cylinder} \\ A_p \left(1 + \frac{\delta}{a}\right)^2 & \text{Sphere} \\ A_p \left(1 + \frac{\delta}{a}\right)^2 & \text{Flat} \end{cases}$$

因为鞘厚 δ 随着 $|V - V_p|$ 的增大而增大，离子电流 I_i 也随着 $V - V_p$ 增大而增大。

对于厚鞘的情况，可应用轨道运动极限理论的结果，当 $\eta > 2$ 时，有：

$$I_i \simeq A_p j_{ri} \frac{2}{\sqrt{\pi}} (1 + \eta)^{1/2} \quad (1.142)$$

其中， $\eta \equiv e|V - V_p|/kT_i$ ， $j_{ri} = en_e\sqrt{kT_i/2\pi m_i}$

上述结果对于 $T_i \lesssim T_e$ 的情况是适合的；当 $T_i \ll T_e$ 时，则用下式代替(即所有的 T_i 都用 T_e 代替)：

$$I_i = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[1 + \frac{e|V - V_p|}{kT_e}\right]^{1/2} A_p en_e \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_i}} \quad (1.143)$$

当 $e|V - V_p|/kT_e > 2$ 时，这个结果与薄鞘的结果基本上一致。

1.5 其它因素对探针特性曲线的影响

1.5.1 电子速度分布函数

在前述的讨论中，我们都已假定电子的速度分布函数是单一的麦氏分布，因而从过渡区的电子电流可以测定 T_e ，且悬浮电位与等离子体空间电

位之间满足如下关系式：

$$V_f - V_p = -\frac{kT_e}{2e} \left[\ln \left(\frac{m_i}{2\pi m_e} \right) + 1 \right] \quad (1.144)$$

但在实际情况下，电子的速度分布函数并不一定是麦氏分布，而且可能存在几种不同的速度分布的组合，这时，上节得到的过渡区的探针电子电流公式就不适用了。而且在很多情况下，我们希望知道电子速度分布函数是如何改变探针I-V特性曲线的，如何从探针特性曲线测定电子速度分布函数 $f(v)$ ，这就是本小节所要讨论的内容。

对于任意的速度分布 $f(\vec{v})$ (归一化分布)，负偏压的平板探针收集的电子电流密度可从如下的积分求得：

$$\begin{aligned} j_e &= en_e \int f(\vec{v}) \vec{v} \cdot \hat{n} d\vec{v} \\ &= en_e \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{v_{\min}}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z) v_z dv_z \\ &= en_e \int_{v_{\min}}^{\infty} f(v, \theta, \varphi) v^3 dv \int_0^{\theta_{\max}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \end{aligned} \quad (1.145)$$

其中：

$$v_{\min} \equiv \left[\frac{-2e(V - V_p)}{m_e} \right]^{1/2} \quad (1.146)$$

$$\theta_{\max} \equiv \cos^{-1} \left(\frac{v_{\min}}{v} \right) \quad (1.147)$$

对于各向同性分布， $f(v, \theta, \varphi) = f(v)$ ，那么上式积分为：

$$j_e = \pi en_e \int_{\left[\frac{-2e(V - V_p)}{m_e} \right]^{1/2}}^{\infty} v^3 f(v) \left[1 + \frac{2e(V - V_p)}{m_e v^2} \right] dv \quad (1.148)$$

如果使用能量分布函数 $f(\varepsilon)$ 代替速度分布函数 $f(v)$ ，即

$$f(v) dv = f(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{\sqrt{2m_e \varepsilon}}, \quad \varepsilon \equiv \frac{1}{2} m_e v^2 \quad (1.149)$$

则有：

$$j_e = \frac{2\pi en_e}{m_e^2} \int_{-e(V - V_p)}^{\infty} \varepsilon f(\varepsilon) \left[1 + \frac{e(V - V_p)}{\varepsilon} \right] d\varepsilon \quad (1.150)$$

微分后得到:

$$\frac{dj_e}{dV} = \frac{2\pi e^2 n_e}{m_e^2} \int_{-e(V-V_p)}^{\infty} f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1.151)$$

$$\frac{d^2 j_e}{dV^2} = \frac{2\pi e^3 n_e}{m_e^2} f(\varepsilon)|_{\varepsilon=-e(V-V_p)} \quad (1.152)$$

在一般情况下, Drugvesteyn[Z. Phys. 64, 781 (1930)]已经证明, 对于各向同性分布, 任意的凸面探针结构的过渡区电子电流的二次微商, 或者对于非各向同性分布, 球探针的过渡区电子电流的二次微商均与 $f(\varepsilon)$ 成正比。由此可见, 由过渡区电子电流的二次微商, 即可测得电子的能量(速度)分布函数:

$$f(\varepsilon) = \frac{m_e^2}{2\pi e^3 n_e} \left. \frac{d^2 j_e}{dV^2} \right|_{\varepsilon=-e(V-V_p)} \quad (1.153)$$

而且由过渡区电子电流的特性曲线的测量可以测得电子密度和等效电子温度, 其原理如下。

因为 $f(\varepsilon)$ 是用 $\varepsilon \equiv \frac{1}{2} m_e v^2$ 表示的各向同性的速度分布函数, 且是归一化的, 即:

$$\int 4\pi v^2 f(\varepsilon) dv = 1, \quad \int f_\varepsilon(\varepsilon) d\varepsilon = 1$$

其中 $f_\varepsilon(\varepsilon)$ 是归一化的能量分布函数, 则有:

$$f_\varepsilon(\varepsilon) d\varepsilon = 4\pi v^2 f(\varepsilon) dv = \frac{8\pi}{m_e} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2m_e}} f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1.154)$$

将 $f(\varepsilon)$ 的表达式带入上式, 得到:

$$f_\varepsilon(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{4}{e^3 n_e} \sqrt{\frac{m_e}{2}} \frac{d^2 j_e}{dV^2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \quad (1.155)$$

由归一化条件:

$$\int f_\varepsilon(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{4}{e^3 n_e} \sqrt{\frac{m_e}{2}} \int \frac{d^2 j_e}{dV^2} \Big|_{\varepsilon=-e(V-V_p)} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon = 1 \quad (1.156)$$

可得到电子密度:

$$n_e = \frac{4}{e^3} \sqrt{\frac{m_e}{2}} \int_0^{\infty} [-e(V - V_p)]^{1/2} \frac{d^2 j_e}{dV^2} d[-e(V - V_p)] \quad (1.157)$$

此外，根据平均能量的定义：

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon \rangle &= \frac{3}{2} kT_{e,eff} = \int_0^\infty \varepsilon f_\varepsilon(\varepsilon) d\varepsilon \\ &= \frac{8\pi}{m_e^2} \sqrt{\frac{m_e}{2}} \int_0^\infty \varepsilon^{3/2} f(\varepsilon) d\varepsilon\end{aligned}\quad (1.158)$$

从上式可以得到电子温度表达式：

$$kT_{e,eff} = \frac{2}{3} \langle \varepsilon \rangle \quad (1.159)$$

下面讨论几种特殊的分布函数的情况：

1. 无漂移的各向同性麦氏分布

麦氏分布可以写为：

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m_e}{2\pi kT_e} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2kT_e} \right) \quad (1.160)$$

代入积分表达式积分后得到：

$$j_e = \begin{cases} j_{e0} \exp\left[\frac{e(V - V_p)}{kT_e} \right] & V - V_p \leq 0 \\ j_{e0} & V - V_p > 0 \end{cases} \quad (1.161)$$

其中 $j_{e0} \equiv \frac{1}{4} en_e \bar{v}_e$ 为电子饱和电流密度。

由此可求其一、二阶微商分别为：

$$\frac{dj_e}{dV} = \frac{e}{kT_e} j_e \propto \frac{e}{kT_e} f(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=-e(V-V_p)} \quad (1.162)$$

$$\frac{d^2 j_e}{dV^2} = \left(\frac{e}{kT_e} \right)^2 j_e \propto \left(\frac{e}{kT_e} \right)^2 f(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=-e(V-V_p)} \quad (1.163)$$

由此可见，这时过渡区的电子电流密度及其一、二阶微商均与电子速度分布函数成正比。

2. 各向同性单能电子

在表面磁约束的热阴极辉光放电等离子体中，会存在一种各向同性单能电子成分，它与完全热化的麦氏分布电子成分共存。设该单能电子密度为 n_0 ，其分布函数为：

$$f(v) = \frac{\delta(v - v_0)}{4\pi v_0^2} \quad (1.164)$$

或者

$$f(\varepsilon) = \frac{m_e}{4\pi v_0} \delta(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (1.165)$$

其中 $\varepsilon_0 \equiv \frac{1}{2}m_e v_0^2$ ，将上述分布代入 j_e 的积分表达式，然后积分得到：

$$j_e = \begin{cases} \frac{1}{4}en_0v_0 & V - V_p > 0 \\ j_{e0} \left[1 + \frac{e(V - V_p)}{\varepsilon_0} \right] & -\varepsilon_0/e \leq V - V_p \leq 0 \\ 0 & V - V_p < -\varepsilon_0/e \end{cases} \quad (1.166)$$

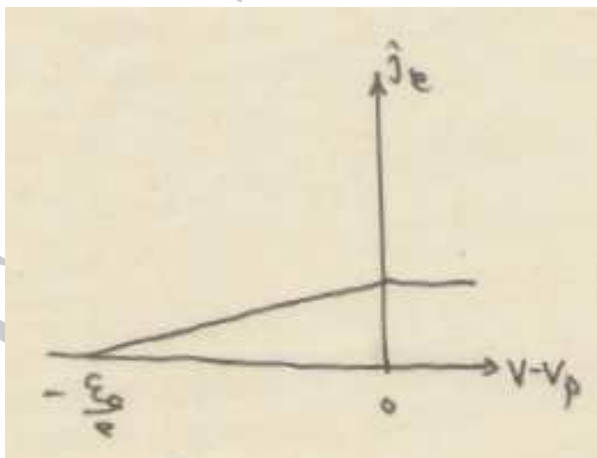


图 1.15: 单能电子等离子体电流-电压曲线。

当等离子体中电子由两种成分组成是：一种是密度为 n_e 的麦氏分布(电子温度为 T_e)；另一种密度是 n_0 的单能电子分布。则过渡区的电子电流密度为：

$$j_e = \frac{1}{4}en_e\bar{v}_e \exp\left[\frac{e(V - V_p)}{kT_e}\right] + \frac{1}{4}en_0v_0 \left[1 + \frac{e(V - V_p)}{\varepsilon_0}\right] \quad (1.167)$$

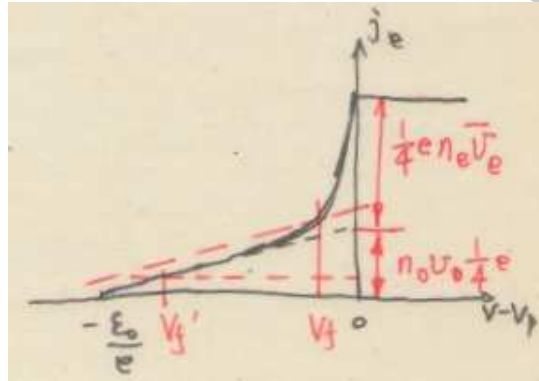


图 1.16: 单能电子加上麦氏分布等离子体电流-电压曲线。

由此可见，当存在少数的高能的各向同性单能电子成分时，它使得探针的悬浮电位变得非常负，从而使上节提到的 $V_f - V_p$ 表达式不适用。这时，为了求麦氏分布的电子温度 T_e ，可求过渡区电子温度区域二阶微商，这时有：

$$\frac{d^2 j_e}{dV^2} \propto \left(\frac{e}{kT_e}\right) f(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon = -e(V - V_p)} \quad (1.168)$$

这与前面的各向同性的麦氏分布电子速度分布的情况相同，这是因为单能电子分布对二阶微商 $d^2 j_e / dV^2$ 的贡献为零。

3. 有漂移的麦克斯韦电子分布

假定 $f(\vec{v})$ 为具有漂移速度为 v_b 的麦氏分布，且电子的漂移动能为 $\varepsilon_b = \frac{1}{2}m_e v_b^2$ 远大于电子温度 kT_e 。这相当于等离子体源处于低电位区，然

后等离子体扩散（漂移）到高电位区。该分布函数可表示为：

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k}\right)^{3/2} \frac{1}{T_{b\perp}\sqrt{T_{b\parallel}}} \exp\left[-\frac{m_e(v_z - v_b)^2}{2kT_{b\parallel}}\right] \exp\left[-\frac{m_e(v_x^2 + v_y^2)}{2kT_{b\perp}}\right] \quad (1.169)$$

当平板探针法向平行于漂移速度方向时，其过渡区电子电流密度为：

$$\begin{aligned} j_e &= en_b \left(\frac{m_e}{2\pi kT_{b\parallel}}\right)^{1/2} \int_{v_{\min}}^{\infty} \exp\left[-\frac{m_e(v_z - v_b)^2}{2kT_{b\parallel}}\right] v_z dv_z \\ &= en_B \left(\frac{kT_{b\parallel}}{2\pi m_e}\right)^{1/2} \exp(-\chi_m^2) + \frac{1}{2} n_b v_b e [1 + \operatorname{erf}(\chi_m)] \quad (1.170) \end{aligned}$$

其中：

$$v_{\min} \equiv \left[\frac{-2e(V - V_p)}{m_e}\right]^{1/2} \quad (1.171)$$

$$\chi_m \equiv \sqrt{\frac{m_e}{2kT_{b\parallel}}}(v_b - v_{\min}) \quad (1.172)$$

其特性曲线如下图所示，

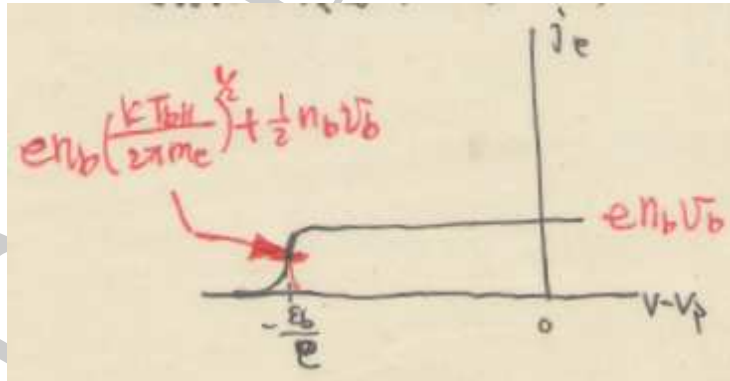


图 1.17: 具有漂移的麦氏分布电子的电流-电压曲线。

该特性曲线类似于等离子体电位接近 $(V_p - \epsilon/e)$ 时的特性曲线。当等离子体中电子是由两种成分电子组成时，即上述的具有漂移的麦氏分

布和无漂移的麦氏分布的电子组成时，过渡区的电子电流为：

$$j_e = \frac{1}{4} en_e \bar{v}_e \exp \left[\frac{e(V - V_p)}{kT_e} \right] + en_b \left(\frac{kT_{b\parallel}}{2\pi m_e} \right)^{1/2} \exp(-\chi_m^2) \quad (1.173)$$

其特性曲线如下图所示。

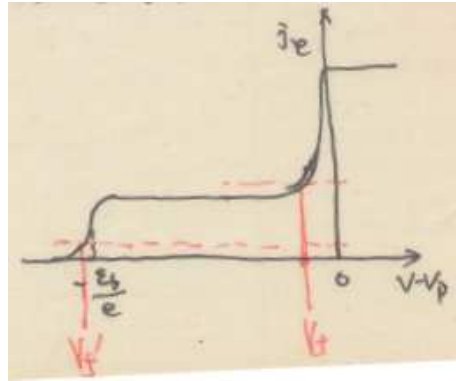


图 1.18: 两种成分具有漂移的麦氏分布电子的电流-电压曲线。

由图可知，这时特性曲线有两个拐点，当 V_p 与 ϵ_b/e 很接近时，很难从特性曲线的拐点区分 V_p 与 ϵ_b 。若对 j_e 取二阶微商，可得：

$$\frac{d^2 j_e}{dV^2} \propto n_b \exp \left[-\frac{m_e(v_{\min} - v_b)^2}{2kT_{b\parallel}} \right] + n_e \exp \left(-\frac{m_e v^2}{2kT_e} \right) \quad (1.174)$$

这时，二次微商特性曲线如下图所示：

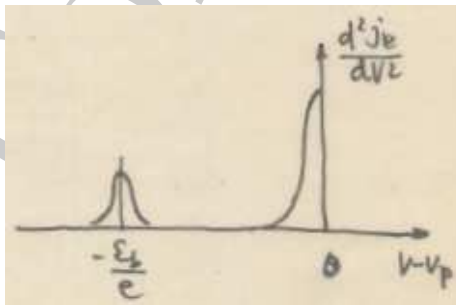


图 1.19: 两种成分具有漂移的麦氏分布电子的电流-电压二次微商曲线。

这里已经假定 $\varepsilon > kT_e$ ，且 $T_{b\parallel}$ 和 T_e 是可比较的，则由该曲线可分别求出两种成分的电子速度分布函数。

与前述相同，当麦氏分布电子中存在少量的漂移麦氏分布电子成分时，会使探针特性曲线的总悬浮电位变得更高。从而使上节得到的 $V_f - V_p$ 的关系式不成立。

1.5.2 碰撞的影响

碰撞对于减速粒子的收集没有影响，因为带电粒子在减速势场中的分布(Boltzmann分布)是通过碰撞而达到的。因此，在这里我们不考虑碰撞对过渡区电流收集的影响，只考虑碰撞对加速粒子的收集的影响。

碰撞对于前述的无碰撞探针理论的影响有两个方面：

- a). 如果碰撞平均自由程 λ 小于鞘的特征厚度 δ 时，即 $\lambda/\delta < 1$ 时，则带电粒子在鞘内的运动将不同于自由飞行，预计鞘内的电位分布和探针电流将发生变化。
- b). 如果 λ 不是显著大于探针尺寸 a 时，即 $\lambda/a \lesssim 1$ 时，则在无碰撞区边界的速度分布将不同于非扰动的分布，因为探针的尺寸将大到足以挡掉一部分粒子到达这个边界，这是必须考虑碰撞对探针边界分布函数的影响。

因此，在 $\lambda \gg \delta$ 或者 $\lambda \gg a$ 的条件不被满足的情况下，我们必须考虑碰撞对收集电流的影响。

1. $V = V_p$ ，电子饱和电流的收集

当碰撞不可以忽略时，电子的输运通量是由扩散和迁移决定的，即有：

$$\Gamma_e = -D_e \nabla n_e - \mu_e n_e \nabla V \quad (1.175)$$

当 $V = V_p$ 时， $\nabla V \simeq 0$ ，故电子通量可以写为：

$$\Gamma_e = -D_e \nabla n_e \quad (1.176)$$

因为通量守恒，那么 $\nabla\Gamma_e = 0$ ，且假定 D_e 为常数，则其扩散方程为：

$$\nabla^2 n_e = 0 \quad (1.177)$$

对于球探针，该扩散方程的通解为：

$$n(r) = A - \frac{B}{r} \quad (1.178)$$

利用边界条件：

$$\Gamma_e(a) = D_e \left. \frac{dn_e}{dr} \right|_{r=a} = \frac{1}{4} n_e(a) \bar{v}_e \quad (1.179)$$

$$n_e|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow n_\infty \quad (1.180)$$

那么可以得到：

$$n_e(r) = n_\infty - \frac{n_e(a) \bar{v}_e a^2}{4D_e r} \quad (1.181)$$

由此可以得到：

$$n_e(a) = \frac{n_\infty}{1 + \frac{\bar{v}_e a}{4D_e}} \quad (1.182)$$

再使用关系式：

$$D_e = \frac{\lambda_e \bar{v}_e}{3} \quad (1.183)$$

那么边界处电子密度为：

$$n_e(a) = \frac{n_\infty}{1 + \frac{3a}{4\lambda_e}} \quad (1.184)$$

边界处电子通量为：

$$\Gamma_e(a) = \frac{1}{4} n_e(a) \bar{v}_e = \frac{1}{4} n_\infty \bar{v}_e \frac{1}{1 + \frac{3a}{4\lambda_e}} \quad (1.185)$$

• 当 $a/\lambda_e \ll 1$ 时，

$$\Gamma_e = \frac{1}{4} n_\infty \bar{v}_e \quad (1.186)$$

- 当 $a/\lambda_e \gg 1$ 时,

$$\Gamma_e = \frac{n_\infty \bar{v}_e}{4} \frac{4\lambda_e}{3a} \quad (1.187)$$

现在我们回过来看 $\nabla V = 0$ 的假设。上述推导对离子也适用。由于 λ_i 与 λ_e 不同, 使得探针收集的电子、离子通量 Γ_e 和 Γ_i 也不同, 这样必然有电场, 以使得两通量达到平衡 $\Gamma_e = \Gamma_i$ 。因此, 当 λ/a 较小时, 实际上不可能使探针偏置在 V_p 上, 因为探针的存在将改变其周围的空间电位。

当探针半径与碰撞平均自由程 λ 可以比较时, 由于探针的遮挡效应, 使得距离探针表面一个平均自由程处的电子速度分布函数不再是各向同性的, 它不同于非扰动区的分布函数。我们以球探针为例, 来考虑探针的遮挡效应对电子电流收集的影响。

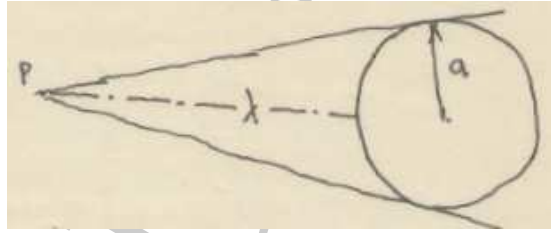


图 1.20: 碰撞立体角。

如图所示, P 点到球探针表面的距离为 λ , 这时从探针右侧的一个立体角为 $\pi a^2/\lambda^2$ 的电子不能到达 P 点。由此可见, 当 λ 越小时, P 点越接近探针表面, 分布函数越变得非各向同性。由此可求得被探针屏蔽的立体角为:

$$2\pi \left[1 - \frac{1 + \alpha}{(1 + 2\alpha)^{1/2}} + \frac{\alpha^2}{(1 + 2\alpha)^{1/2}(1 + \alpha)} \right]$$

其中 $\alpha \equiv a/\lambda$ 。当 P 接近于探针表面时, 则被屏蔽的立体角为 2π , 这时所有从探针右侧到达 P 点的电子都被探针屏蔽了而不能到达 P 点, 则这时探针收集的粒子通量为:

$$\Gamma = \frac{1}{2} n(\lambda) \bar{v} \quad (1.188)$$

相反地，当 $\lambda \gg a$ 时，其通量为：

$$\Gamma = \frac{1}{4}n(\lambda)\bar{v} \quad (1.189)$$

因此，当 $\lambda \sim a$ 时，探针收集的粒子通量可近似表示为：

$$\Gamma = \frac{n(\lambda)\bar{v}}{4K} \quad (1.190)$$

其中， K 的表达式为：

$$K \equiv 1 - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1 + \alpha}{(1 + 2\alpha)^{1/2}} + \frac{\alpha^2}{(1 + 2\alpha)^{1/2}(1 + \alpha)} \right] \quad (1.191)$$

2. 完全电离等离子体：

对于完全电离等离子体，电子碰撞截面是：

$$\sigma = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4\pi \ln \Lambda}{m_e^2 v_e^4} \quad (1.192)$$

其中 $\ln \Lambda$ 是碰撞对数。则碰撞平均自由程为：

$$\lambda_e \equiv \frac{1}{n_e \sigma} = \frac{4\pi}{\ln \Lambda} n_e \lambda_{De}^4 \simeq (n_e \lambda_{De}^3) \lambda_{De} \quad (1.193)$$

对于等离子体，应满足等离子体条件，即德拜球内粒子数远大于1： $n_e \lambda_{De}^3 \gg 1$ ，故有：

$$\lambda_e \gg \lambda_{De} \sim \delta \quad (1.194)$$

因此，在完全电离等离子体中，在强电势扰动的鞘区内，等离子体是无碰撞的；只有在弱电离的等离子体，与中性粒子的碰撞频率足够大，以使得 $\lambda_e \lesssim \lambda_{De}$ ，因此鞘是碰撞的。

1.5.3 二次电子发射的影响

这里主要考虑电子引起的二次电子发射。因为电子能量达到几百电子伏特($E_e \geq$ 几百eV)时，就会发生二次电子发射，而离子只有能量 $E_i \geq 1keV$ 时才会诱发二次电子发射。

二次电子发射存在的情况下，探针收集的电流为：

$$I_{total} = I_{\infty} - I_s = I_{in} - \gamma_e I_{in} = (1 - \gamma_e) I_{in} \quad (1.195)$$

其中 $\gamma_e \equiv I_s/I_{in}$ ，那么电子收集电流为：

$$I_e = I_{e0}(1 - \gamma_e) \exp \left[\frac{e(V - V_p)}{kT_e} \right] \quad (1.196)$$

当探针悬浮时，悬浮电位的修正为：

$$V_f - V_p = -\frac{kT_e}{2e} \left\{ \ln \left[\left(\frac{m_i}{2\pi m_e} \right) (1 - \gamma_e)^2 \right] + 1 \right\} \quad (1.197)$$

从上式可以看出，当存在二次电子发射情况时，悬浮电位比原电位要偏正，从物理上可以理解为从探针发射出电子，从而电位向正方向偏移。此外，二次电子发射会随着探针表面温度的升高而变得容易，因为电子要克服表面能所需的能量减少了，在实验中经常能够观测到探针热负荷到一定程度后，出现大量二次电子发射现象，在悬浮电位测量中表现为悬浮电位突然向正方向偏移。

1.5.4 射频场对探针的影响

射频(RF)电场的存在会使得等离子体空间电位产生振荡，这将会影响探针对载流子的收集。这里我们考虑RF场频率较低的情况，即 $f_{rf} < f_{pe}$ ，使得电子能跟上电势的变化。这时，RF电场使 V_p 产生交流分量，即加在鞘层上的电压除了直流电压 V_{dc} 外，还有一个交流电压 $V_{ac} \sin \omega_{rf} t$ 。由于鞘层的整流作用和探针特性曲线的非线性，使探针实际上收集到的是平均电流，使探针I-V特性曲线发生畸变。

我们假设探针上的偏置电压表达式为：

$$V = V_{dc} + V_{ac} \sin \omega_{rf} t \quad (1.198)$$

且 $V_{ac} < V_{dc}$, $V - V_p < 0$, 则探针收集的电流为:

$$\begin{aligned} I &= I_{e0} \exp \left[\frac{e(V_{dc} - V_p + V_{ac} \sin \omega_{rf} t)}{kT_e} \right] - I_{i0} \\ &= I_{e0} \exp \left[\frac{e(V_{dc} - V_p)}{kT_e} \right] \exp \left[\frac{eV_{ac} \sin \omega_{rf} t}{kT_e} \right] - I_{i0} \end{aligned} \quad (1.199)$$

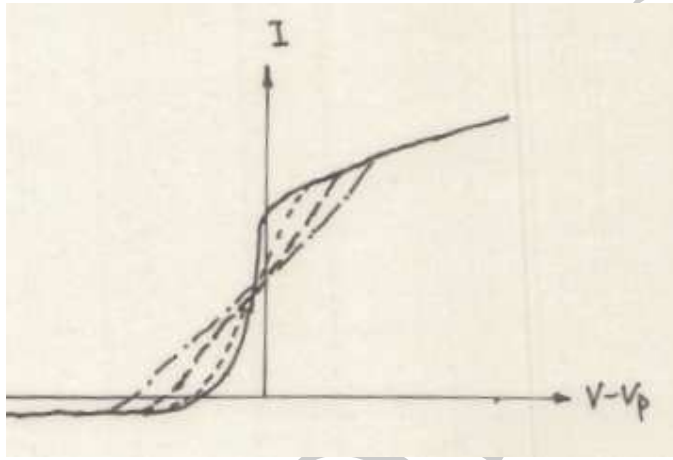


图 1.21: 射频影响下的探针特性曲线。

则一个射频周期内, 探针收集的电子平均电流为:

$$\begin{aligned} \langle I_e(t) \rangle &= I_{e0} \frac{\omega_{rf}}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_{rf}} \exp \left[\frac{eV_{ac} \sin \omega_{rf} t}{kT_e} \right] dt \times \exp \left[\frac{e(V_{dc} - V_p)}{kT_e} \right] \\ &= I_{e0} I_0 \left(\frac{eV_{ac}}{kT_e} \right) \exp \left[\frac{e(V_{dc} - V_p)}{kT_e} \right] \end{aligned} \quad (1.200)$$

其中 $I_0(x)$ 是第一类修正贝塞尔函数, 那么平均电流为:

$$\langle I \rangle = I_{e0} I_0 \left(\frac{eV_{ac}}{kT_e} \right) \exp \left[\frac{e(V_{dc} - V_p)}{kT_e} \right] + I_{i0} \quad (1.201)$$

令 $\langle I \rangle = 0$, 可以得到此时的悬浮电位为:

$$\begin{aligned} eV_f' &= eV_p - kT_e \left\{ \ln \left(\frac{I_{e0}}{I_{i0}} \right) + \ln \left[I_0 \left(\frac{eV_{ac}}{kT_e} \right) \right] \right\} \\ &= eV_f - kT_e \ln \left[I_0 \left(\frac{eV_{ac}}{kT_e} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.202)$$

令 V_f' 与原悬浮电位 V_f 的差值为 $\Delta V = V_f' - V_f$, 那么

$$\Delta V = -kT_e \ln \left[I_0 \left(\frac{eV_{ac}}{kT_e} \right) \right] < 0 \quad (1.203)$$

这是RF在探针上自生的负偏压, 所以

$$\langle I \rangle = I_{e0} \exp \left[\frac{e(V_{dc} - \Delta V - V_p)}{kT_e} \right] - I_{i0} \quad (1.204)$$

这相当于等离子体空间电位降低了 ΔV 。

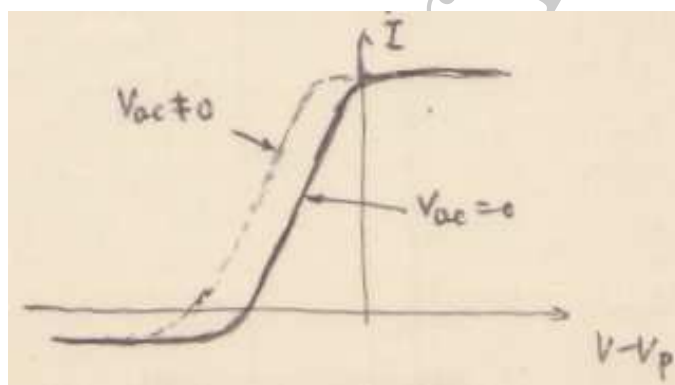


图 1.22: 射频影响下的探针特性曲线。

1.5.5 磁场中的影响

1. 一般影响

磁场对探针特性曲线的影响的直接原因是, 电子和离子在磁场中是做回旋运动而不是直线运动, 这就使得粒子的运动是各向异性的, 即横越磁场的平均自由程是回旋半径 ρ_c 而平行于磁场的平均自由程仍是碰撞平均自由程 λ 。

很显然, 磁场效应的重要性主要是由回旋半径与探针特征线度之比决定的。如果 $\rho_c \gg a$, 则磁场没有影响, 以前的结果仍然可以应用。

此外，由于电子回旋半径比离子回旋半径小很多(当磁场相同，温度相等)，因此在磁场相同时，磁场对电子运动的影响要比对离子的影响要大得多。故磁场对探针的影响最明显地表现为电子饱和电流与离子饱和电流之比，即 I_{e0}/I_{i0} 要随着磁场 B_0 增大而下降。

磁场对探针特征曲线的影响，可按磁场的强弱分类：

(a) 弱磁场： $\rho_{ce}, \rho_{ci} \gg a$

磁场的影响很小，可以忽略。

(b) 中等磁场： $\rho_{ce} < a, \rho_{ci} \gg a$

有如下影响：

- 电子饱和电流要减小；
- 在探针电位足够负的过渡区，大部分电子都被探针鞘层内的位垒所排斥而被反射，这时电子密度仍可由 Boltzmann 分布决定，过渡区内电子电流仍服从指数衰减规律；
- 离子的收集基本上不受影响，其电流仍由 n_e 和离子动力学决定；
- 可利用电位足够负的过渡区测 T_e ，利用离子饱和流测 n_e 。

(c) 强磁场： $\rho_{ce} \ll a, \rho_{ci} < a$

这时，离子饱和电流也受磁场影响，但由于在磁力线方向上 Bohm 判据仍然成立，因此 $B = 0$ 时候导出的离子饱和流的公式仍可继续使用，但是收集面积要修正。目前还没有满意的理论可给出收集面积修正的解析表达式。

(d) 极强磁场： $\rho_{ce}, \rho_{ci} \ll a$

这时离子的运动可看成为准一维运动， $B = 0$ 时的离子饱和流公式仍可用，但是收集面积应改为投影面积。在这种情况下，不存在无碰撞的探针理论。

在这种情况下，鞘层仍是薄的，但沿磁场方向的预鞘区线度很长，形成长的通量管。特别是当探针是吸收离子时(负电位)，进

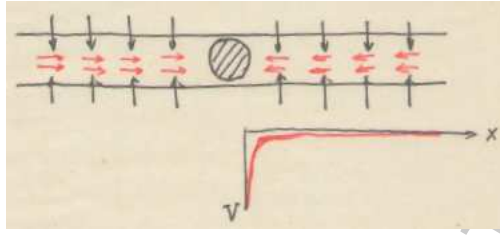


图 1.23: 极强磁场下的探针收集电流通路。

入鞘层的离子通量几乎完全是由横越磁场扩散而进入通量管的离子贡献的，从端部进入通量管的离子的贡献是很小的。这时根据粒子数守恒，有：

$$\Gamma_{\parallel} A_{\parallel} = \Gamma_{\perp} A_{\perp} \quad (1.205)$$

其中 $\Gamma_{\parallel} = \frac{1}{2} n_{\infty} C_s$, $A_{\parallel} = \pi a^2$, $\Gamma_{\perp} = -D_{\perp} \nabla_{\perp} n$, $A_{\perp} = 2\pi a L$, 其中我们还近似认为密度梯度 $\nabla_{\perp} n \simeq n_{\infty}/4a$, 那么可以得到：

$$L \simeq \frac{a^2 C_s}{D_{\perp}} \quad (1.206)$$

此即为在平行于磁场的方向上预鞘长度，称为收集长度(通量管长度)。

当离子碰撞平均自由程 $\lambda_{ei} > L$ 时，为准无碰撞预鞘(平行于 B_0)

2. 强磁场中电子饱和电流的收集 ($V \geq V_p$)

1982年Stangeby[J. Phys. **D15**, 1007(1982)]推导了在磁场中收集的电子饱和电流的公式，并研究了磁场对 I_e 的影响。假定： $\lambda_{ei} > L \gg d \gg \rho_{ce}, \lambda_D$ ，导出的饱和电子电流公式为：

$$I_e = \frac{1}{4} e n_e \bar{v}_e \frac{R}{1+R} A_p \quad (1.207)$$

$$R \equiv 2 \frac{\lambda_{ei}}{d} \sqrt{\frac{D_{e\perp}}{D_{e\parallel}}} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \quad (1.208)$$

由此可见，当 $B_0 = 0$ 时， $R \gg 1$ ，故有

$$I_e = \frac{1}{4}en_e\bar{v}_eA_p \equiv I_{e0} \quad (1.209)$$

当 B_0 很大时，使 $D_{e\perp} \ll D_{e\parallel}$ ，因而 $R \ll 1$ ，故有

$$I_e = \frac{1}{4}en_e\bar{v}_eRA_p \ll I_{e0} \quad (1.210)$$

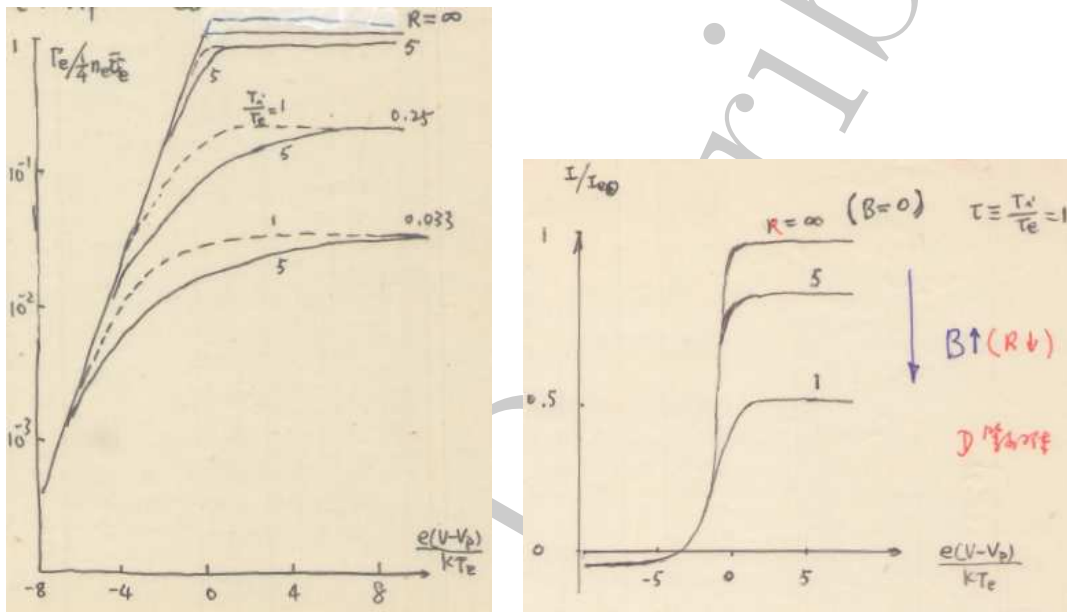


图 1.24: 强磁场下的探针电子饱和流。

由此可见，在磁场中，电子收集电流 I_{e0} 要减小，而 I_{i0} 基本不变。因为 I_{e0} 随着 R 的减小而减小，而

$$R \equiv 2\lambda_{ei}\sqrt{\alpha}\frac{1+\tau}{d} \propto \sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{D_{e\perp}}{D_{e\parallel}}} \quad (1.211)$$

一般在强磁场中，电子横越磁场的扩散是反常的，它遵从Bohm扩散定标率（实验），即：

$$D_{\perp}^B \simeq 0.06 \frac{T_e[eV]}{B[T]} [m^2/s] \quad (1.212)$$

由此可见，随着 B 增大， D_{\perp} 减小，那么 R 也减小，因而 I_{e0}/I_{i0} 随着 B 增大而减小。

其次，由于 I_{e0} 随着 B 增大而减小，它也影响近 V_p 处的过渡区特性曲线，使由过渡区导出的 T_e 有较大的误差。但由上面可以导出，在 V_f 处附近，过渡区I-V特性曲线基本上不受磁场的影响，由该部分的I-V曲线仍可得到较精确的电子温度 T_e 。

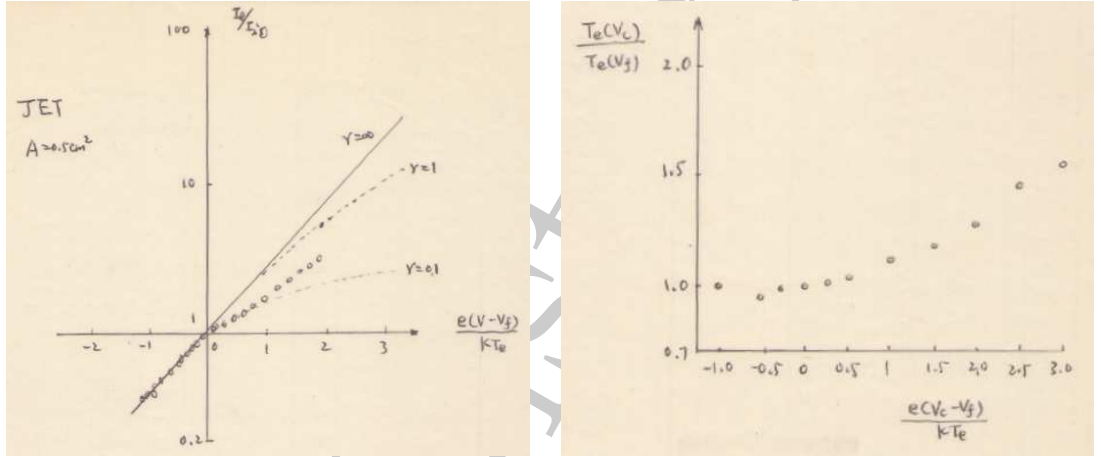


图 1.25: JET装置测量电子温度的结果。

3. 碰撞对离子饱和电流收集的影响： $\lambda_i < L$ 时根据Stangeby的推导，离子通量公式为：

$$\Gamma_i = n_{\infty} v_0 \frac{R}{R+1} \quad (1.213)$$

这里 v_0 是有效离子流速度，通常根据Bohm判据，它应为： $v_0 \simeq C_s/2$ ，则 R 可以化为：

$$R = \frac{2D_{\parallel}}{aC_s} \sqrt{\frac{D_{\perp}}{D_{\parallel}}} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \quad (1.214)$$

在无磁场的情况下， $D_{\parallel} = D_{\perp}$ ，那么

$$R = \frac{2D}{aC_s} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) = \frac{2\lambda'}{3a} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \simeq \frac{4\lambda'}{3a} \quad (1.215)$$

其中 $\lambda' = 3\frac{D}{C_s}$ ，为等效碰撞平均自由程。

在有磁场的情况下： $\lambda' = 3(D_{\parallel}D_{\perp})^{1/2}/C_s$

那么有：

$$\Gamma_i = \frac{1}{2}n_{\infty}C_s \frac{\frac{4\lambda'}{3a}}{1 + \frac{4\lambda'}{3a}} \quad (1.216)$$

当 $\lambda' \ll a$ 时，有

$$\Gamma_i = \frac{1}{2}n_{\infty}C_s \frac{4\lambda'}{3a} \quad (1.217)$$

1.6 其它静电探针

1.6.1 双探针(Double Probe)

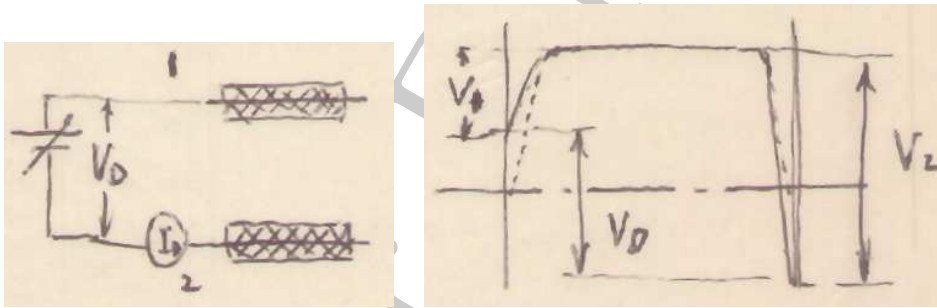


图 1.26: 双探针示意图。

双探针使用的场合：

1. 没有可用的参考电极；
2. V_p 有较大的瞬时涨落，它会使 T_e 的测量有较大的误差；
3. 在稠密等离子体中，希望引出的探针电流较小，此法对等离子体的干扰较小。

双探针是双悬浮探针系统，它是由两个表面积和形状相近(通常是完全相同的)的探针所组成。工作电压是加在两探针之间，但它们是整体悬浮着，因为没有静电引出，它对等离子体的干扰较小。

由双探针图可知，两个探针都工作于 $V - V_p < 0$ 的区域。若两探针相同，它们所处的等离子体是均匀的，且具有相同的等离子体系数和空间电位，则它们各自的特性曲线是相同的。而且在双探针系统中，流入一探针的电流必定是流出另一探针的电流。因此两探针的工作点必定位于原探针特性曲线中悬浮电位的两侧正负电流绝对值相等的点上，如下图所示。

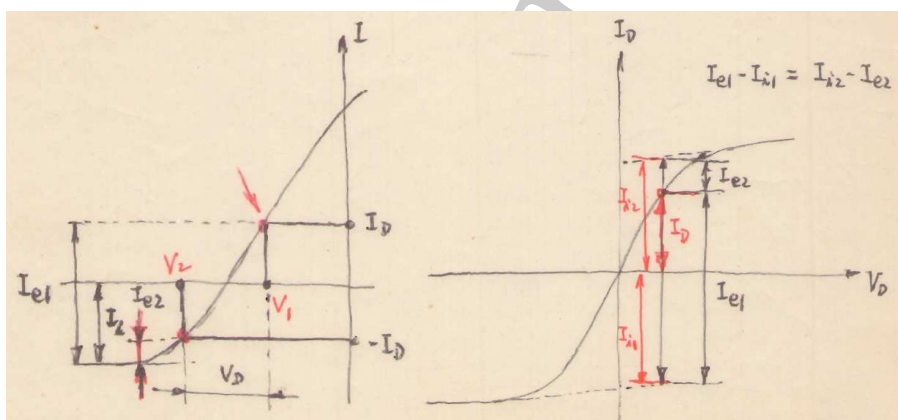


图 1.27: 双探针原理。

由双探针特性曲线可列出下列方程组：

$$\begin{cases} I_D = I_{e1} - I_{i1} = I_{i2} - I_{e2} \\ V_D = V_1 - V_2 \\ I_{e1} = I_{e01} \exp \left[\frac{e(V_1 - V_p)}{kT_e} \right] \\ I_{e2} = I_{e02} \exp \left[\frac{e(V_2 - V_p)}{kT_e} \right] \end{cases}$$

由此方程可得到:

$$\frac{I_{e1}}{I_{e2}} = \frac{I_D + I_{i1}}{I_{i2} - I_D} = \frac{A_1}{A_2} \exp\left(\frac{eV_D}{kT_e}\right) \quad (1.218)$$

$$I_D = I_{i1} \frac{\exp\left(\frac{eV_D}{kT_e}\right) - 1}{\frac{A_1}{A_2} \exp\left(\frac{eV_D}{kT_e}\right) + 1} \quad (1.219)$$

$$\left. \frac{dI_D}{dV_D} \right|_{I_D=0} = \frac{e}{kT_e} \frac{I_{i1}I_{i20}}{I_{i10} + I_{i20}} \quad (1.220)$$

其中, I_{i10} 和 I_{i20} 是双探针电流 $I_D = 0$ 处的离子饱和电流。当 $A_1 = A_2$ 时, 有:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_D = I_i \tanh\left(\frac{eV_D}{2kT_e}\right) = I_i \frac{\exp\left(\frac{eV_D}{kT_e}\right) - 1}{\exp\left(\frac{eV_D}{kT_e}\right) + 1} \\ \frac{kT_e}{e} = \frac{I_{i0}}{2 \left(\frac{dI_D}{dV_D}\right)_{I_D=0}} \end{array} \right. \quad (1.221)$$

双探针的优点:

1. 所求的 T_e 与等离子体空间电位无关;
2. 因双探针工作在悬浮电位 V_f 附近, 磁场对其影响较小, 所测的 T_e 较为精确。

双探针的缺点:

探针采样的是电子速度分布函数 $f_e(v)$ 的高能尾巴, 很容易受高能电子成分的影响。

1.6.2 三探针

它是由一个双探针和一个单悬浮探针组成。

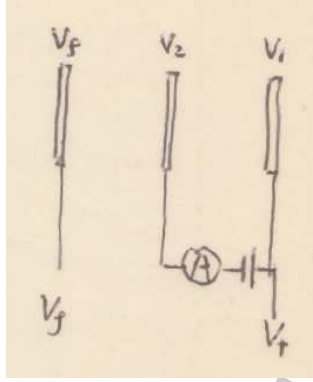


图 1.28: 三探针示意图。

三探针的用途：用于同时测量 n_e 、 T_e 和 V_f 。

当三个探针参数完全相同，且他们所处的等离子体参数完全相同时，可以有：

$$\begin{cases} I_1 = I_{e0} \exp \left[\frac{e(V_1 - V_p)}{kT_e} \right] - I_{i0} \\ I_2 = I_{i0} - I_{e0} \exp \left[\frac{e(V_1 - V_p)}{kT_e} \right] \\ I_3 = 0 \\ I_1 = I_2 = I_D, V_1 - V_2 = V_D \\ I_{i0} = I_{e0} \exp \left(\frac{eV_f}{kT_e} \right) \end{cases}$$

由此可得：

$$\frac{2 \exp \left(\frac{eV_f}{kT_e} \right)}{1 + \exp \left(-\frac{eV_D}{kT_e} \right)} = \exp \left[\frac{e(V_1 - V_p)}{kT_e} \right] \quad (1.222)$$

当双探针偏压 V_D 足够大时，即： $V_D \gg kT_e/e$ ，则有：

$$\exp \left(-\frac{eV_D}{kT_e} \right) \rightarrow 0 \quad (1.223)$$

故电子温度为:

$$\frac{kT_e}{e} = \frac{1}{\ln 2}(V_1 - V_f) \quad (1.224)$$

此外, 电流 I_D 为:

$$I_D = I_{i0} \left\{ \exp \left[\frac{e(V_1 - V_f)}{kT_e} \right] - 1 \right\} \quad (1.225)$$

而离子饱和流为: $I_{i0} = \alpha e C_s n_e A_s \simeq \alpha e C_s n_e A_p$, 那么可以得到电子密度为:

$$n_e = \frac{I_D}{\alpha e C_s A_p \left\{ \exp \left[\frac{e(V_1 - V_f)}{kT_e} \right] - 1 \right\}} \quad (1.226)$$

当 V_D 足够大时, 电子密度的计算式可以简化为:

$$n_e \simeq \frac{I_D}{\alpha e C_s A_p} \quad (1.227)$$

可以看出, 流过探针上的电流正比于等离子体密度和电子温度的平方根, 即:

$$I_D \propto n_e \sqrt{T_e} \quad (1.228)$$

三探针的优点: 可连续监测 T_e 和 n_e , 无需获得完整的I-V特性曲线。

1.6.3 *谐波法测量电子温度

在单探针的过渡区, 收集电流为:

$$I = I_{e0} \exp \left[\frac{e(V - V_p)}{kT_e} \right] - I_{i0} \quad (1.229)$$

其中 $I_{e0} = \frac{1}{4} e n_e \bar{v}_e A_p$, $I_{i0} = 0.5 e n_e C_s A_p$ 。若在探针上加载正弦振荡电压信号:

$$V = V_0 + U_0 \cos \omega t \quad (1.230)$$

这里 U_0 是正弦振荡电压幅度， V_0 是考虑正弦电压所产生的自偏压后的悬浮电位。所以有：

$$\begin{aligned}
 I &= I_{e0} \exp \left[\frac{e(V_0 - V_p)}{kT_e} \right] \exp \left(\frac{eV_0 \cos \omega t}{kT_e} \right) - I_{i0} \\
 &= I_{e0} \left\{ \exp \left[\frac{e(V_0 - V_p)}{kT_e} \right] \left[I_0 \left(\frac{eU_0}{kT_e} \right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} I_m \left(\frac{eU_0}{kT_e} \right) \cos(m\omega t) \right] \right\} \\
 &\quad - I_{i0}
 \end{aligned} \tag{1.231}$$

其中，直流分量为：

$$I_{dc} = I_{e0} \left\{ \exp \left[\frac{e(V_0 - V_p)}{kT_e} \right] I_0 \left(\frac{eU_0}{kT_e} \right) \right\} - I_{i0} = 0 \tag{1.232}$$

那么可以得到：

$$\begin{aligned}
 eV_0 &= eV_p + kT_e \ln \left[\frac{I_{i0}}{I_{e0}} \frac{1}{I_0 \left(\frac{eU_0}{kT_e} \right)} \right] \\
 &= eV_p + kT_e \ln \left(\frac{I_{i0}}{I_{e0}} \right) - kT_e \ln \left[I_0 \left(\frac{eU_0}{kT_e} \right) \right] \\
 &= eV_f - kT_e \ln \left[I_0 \left(\frac{eU_0}{kT_e} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{1.233}$$

它就是考虑正弦电压自偏压后的新的悬浮电位。此外，交流电流分量为：

$$I_{ac} = I_{i0} \left\{ \frac{2}{I_0 \left(\frac{eU_0}{kT_e} \right)} \sum_{m=1}^{\infty} I_m \left[\frac{eU_0}{kT_e} \cos(m\omega t) \right] \right\} \tag{1.234}$$

特别是对于1,2次谐波的电流比(幅度比)为：

$$\frac{I_{2\omega}}{I_{1\omega}} = \frac{I_2 \left(\frac{eU_0}{kT_e} \right)}{I_1 \left(\frac{eU_0}{kT_e} \right)} \tag{1.235}$$

当 $eU_0/kT_e < 1$ 时, 可对 I_1, I_2 做级数展开并取第一项, 得到

$$\frac{I_{2\omega}}{I_{1\omega}} = \frac{eU_0}{4kT_e}$$

$$\Rightarrow kT_e = \frac{eU_0 I_{1\omega}}{4 I_{2\omega}} \quad (1.236)$$

用这种谐波法可连续测量 T_e 及其涨落 \tilde{T}_e 的演化。但要注意 ω 要选择大于涨落的带宽的两倍。此外, 原则上讲任意谐波比都可以用来测量 T_e , 但是由于随着谐波阶数的增大, 其幅度迅速下降, 从而使测量的信噪比很差, 因此通常用 1ω 和 2ω 两个最低阶谐波进行测量。

1.6.4 减速场能量分析器

从上面的分析可知, 以上各种静电探针都不能用来测量离子温度和离子速度分布函数。减速电场能量分析器是简单的静电探针的推广, 它不仅可用来测量离子能量分布函数和离子温度, 而且也可测量电子分布函数。其工作原理如下:

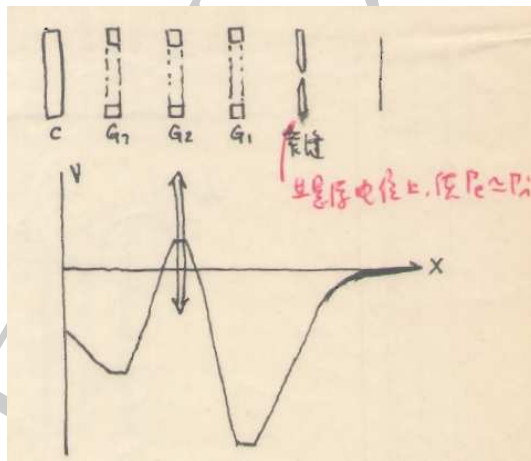


图 1.29: 减速场能量分析器原理。

上图是静电能量分析器的示意图。它由狭缝, 栅网 G_1, G_2, G_3 和收集极组成。各个部分的作用如下:

1. 入口狭缝的作用是形成足够均匀的鞘层，因而其尺寸要足够小，以使得鞘层均匀，同时要足够大，以保证有足够的粒子能够进入分析器，通常其取值小于 λ_D 。
2. G_1 的作用是用来排斥电子；
3. G_2 是用来限制被收集的离子能量，它是起分析作用的，其电压可变。
4. G_3 的作用是抑制收集极发射二次电子。则收集极所收集到的离子电流与 V_2 的关系为：

$$I = \begin{cases} TeA(0.5n_0C_s) \exp\left(\frac{-eV_2}{kT_i}\right) & V_2 \geq 0 \\ TeA(0.5n_0C_s) & V_2 < 0 \end{cases} \quad (1.237)$$

则由I- V_2 曲线就可求出 T_i 。其中 T 是透射系数，它一般与能量有关，作为一级近似可忽略它与能量的关系，精确的值要用到Monte-Carlo方法计算 $T(E_i)$ 。

1.6.5 发射探针

发射探针实际上是热金属丝探针，它被加热到较高的温度以产生热阴极发射电子。当发射探针的偏置电位高于局部的等离子体电位时，热发射的低能电子将被反射回到探针表面，这时发射电流为零；当探针偏置电位低于等离子体电位时，热发射的电子能够脱离探针而被等离子体所吸收，它相当于探针收集离子电流。原则上讲利用了这个事实可以用来测量发射探针处的等离子体电位。由于这个过程直接与等离子体电位有关，而与电子动能无关，因此它对等离子体的流动（漂移运动）不灵敏；而且，因为加热表面本身是比较干净的，因而它测得的等离子体电位对探针表面的污染不敏感。但它与收集探针不同，它不能用来测定电子密度和电子温度。

发射探针的偏置电路典型的I-V特性曲线如下图所示。

由此特性曲线，可以看到有几个重要特征可以用来测量等离子体电位：

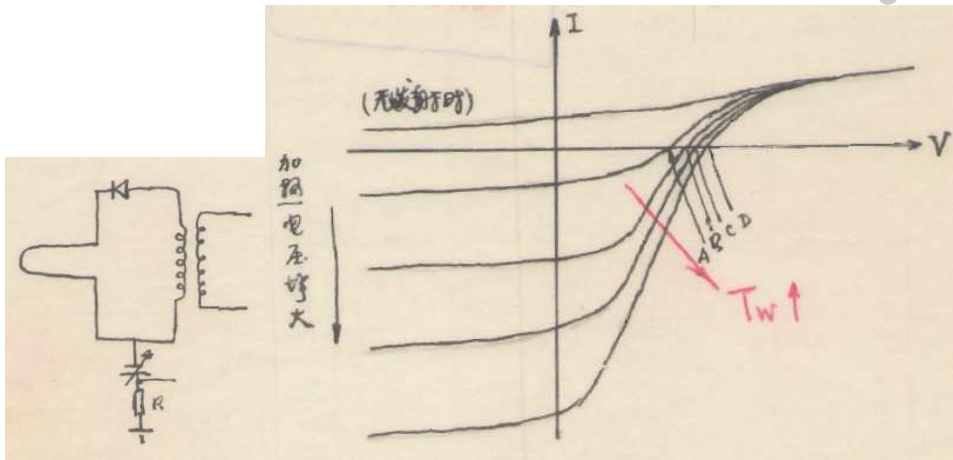


图 1.30: 发射探针示意图与工作特性曲线。

1. 发射探针(热探针)和无发射探针(冷探针)的特性曲线在等离子体电位附近趋于彼此分开, 两特性曲线开始分离处的偏压可取为等离子体电位的指示;
2. 当探针加热时, 随着加热电压的加大, 探针的悬浮电位会向正电位方向移动, 它会接近于等离子体空间电位。然而, 在强发射探针附近, 由于空间电荷效应将形成双鞘层, 从而使其电子发射电流是空间电荷限制的, 它将影响用第二种方法测量等离子体电位的精度。

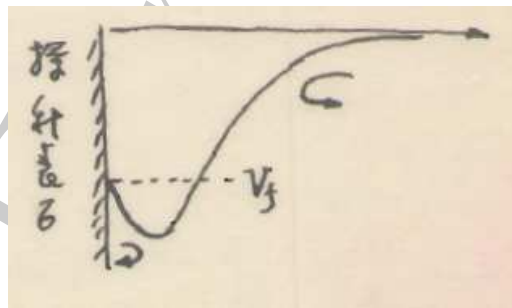


图 1.31: 空间电荷积累效应。

对于给定的探针偏置电压 V , 空间电荷效应随着电子发射电流的增大

而变得显著。由于空间电荷效应与探针附近的局域电场有关，因此它对探针几何形状很敏感，例如：在相同的偏压 V 下，圆柱和球探针的电场比平板探针附近的电场强很多，而且对固体或球探针，其半径越小，表面附近的电场越强，空间电荷效应越不显著。因此，发射探针表面通常是用线径很小的金属（钨丝）制成，以减小空间电荷效应的影响。

下面是发射探针简化的理论：

1. 简化的理论

为了简化发射探针特性的描述，我们首先考虑弱发射探针的情况，因这时空间电荷效应不太显著，从而可以忽略。这种简化的理论是有用的，有助于对拐点方法（在零发射极限下）和差分发射探针的理解，也可以给出强发射情况下的定性结果。

当空间电荷效应可忽略时，从热金属丝发射的电流可表示为：

$$I_e = \begin{cases} I_{e0} \exp \left[-\frac{e(V - V_p)}{kT_e} \right] g(V - V_p) & V > V_p \\ I_{e0} & V \leq V_p \end{cases}$$

类似的，从温度为 T_e 的麦克斯韦等离子体收集的电子电流可表示为：

$$I_c = \begin{cases} I_{c0} \exp \left[-\frac{e(V - V_p)}{kT_e} \right] & V \leq V_p \\ I_{c0} g'(V - V_p) & V > V_p \end{cases}$$

理想的收集和发射探针的I-V特性曲线如图1.32所示。

其中，函数 $g(V - V_p)$ 和 $g'(V - V_p)$ 是考虑鞘层厚度随着偏压变化的函数，对于圆柱体探针，当其半径比鞘层厚度小时， g 和 g' 函数可近似表示为：

$$g(V - V_p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[1 + \frac{e(V - V_p)}{kT_w} \right]^{1/2}, \quad V > V_p \quad (1.238)$$

$$g'(V - V_p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[1 + \frac{e(V - V_p)}{kT_e} \right]^{1/2}, \quad V > V_p \quad (1.239)$$

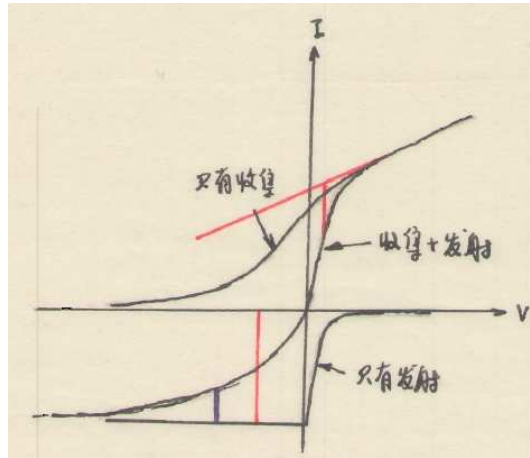


图 1.32: 圆柱体探针的收集和发射I-V特性曲线。

2. 悬浮电位

悬浮电位就是探针的静电流为零时的电位。对于发射探针，通常是既发射电子又收集电流，因而其总探针电流为：

(a) 当 $V \leq V_p$ 时

$$I = I_{c0} \exp \left[\frac{e(V - V_p)}{kT_e} \right] - I_{e0} - I_{i0} \quad (1.240)$$

(b) 当 $V > V_p$ 时

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} I_{c0} \left[1 + \frac{e(V - V_p)}{kT_e} \right]^{1/2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} I_{e0} \exp \left[-\frac{e(V - V_p)}{kT_w} \right] \left[1 + \frac{e(V - V_p)}{kT_w} \right]^{1/2} \quad (1.241)$$

因而，其悬浮电位的表达式在两种工作状态下是不同的。

对于弱发射的探针， $I_{e0} \leq I_{c0}$ ，其悬浮电位 $V_f \leq V_p$ ，且有：

$$I_{c0} \exp \left[\frac{e(V_f - V_p)}{kT_e} \right] = I_{e0} + I_{i0} \quad (1.242)$$

一般情况下，离子饱和流比电子饱和流小得多，可以忽略，那么悬浮电位为：

$$V_p - V_f = \frac{kT_e}{e} \ln \frac{I_{c0}}{I_{e0}} \quad (1.243)$$

由此可见，随着发射电流的增大，悬浮电位 V_f 越接近于等离子体电位，特别是 $I_{e0} = I_{c0}$ 时， $V_f = V_p$ 。

对于强发射的探针($I_{e0} > I_{c0}$)，悬浮电位 $V_f > V_p$ 。由前面的讨论可以知道，在强发射的情况下，发射电流将受双鞘层的空间电荷的限制。由于电位凹槽大约为几个 kT_w/e 的量级，而且通常 $T_w \ll T_e$ ，因而空间电荷的主要影响是使得其悬浮电位比没有空间电荷效应时小几个 kT_w/e 。这样，仍可用无空间电荷效应时的发射探针特性来估计强发射时的悬浮电位。这时 $V_f > V_p$ ，因而有：

$$I_{e0} \exp \left[-\frac{e(V_f - V_p)}{kT_w} \right] \left[1 + \frac{e(V - V_p)}{kT_w} \right]^{1/2} = I_{c0} \left[1 + \frac{e(V - V_p)}{kT_e} \right]^{1/2} \quad (1.244)$$

当 $e(V_f - V_p) \ll kT_e$ 时，由此可得：

$$\ln \left(\frac{I_{e0}}{I_{c0}} \right) = \frac{e(V_f - V_p)}{kT_w} - \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{e(V_f - V_p)}{kT_w} \right] \quad (1.245)$$

由此可见，通常悬浮电位比等离子体电位大几个 kT_w/e ，随着发射电流逼近收集电流 $I_{e0} \rightarrow I_{c0}$ ，其悬浮电位往等离子体电位靠近。

3. 零电流极限下的拐点方法

从理想的发射探针特性(只发射不收集)，当 $V \geq V_p$ 时，发射电子被反射而回到探针表面，其发射电流接近于0，此时，从实际的发射探针特性(发射+收集)，可以看到当 $V \simeq V_p$ 时，探针电流随探针电位的变化率最大，因而利用特性曲线的这一特点有可能测定等离子体空间电位。

将探针总电流对偏压 V 取微商，可得：

(a) 当 $V \leq V_p$ 时

$$\frac{dI}{dV} = \frac{eI_{e0}}{kT_e} \exp\left[\frac{e(V - V_p)}{kT_e}\right] \quad (1.246)$$

(b) 当 $V > V_p$ 时

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dV} = & \frac{eI_{e0}}{kT_e} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[1 + \frac{e(V - V_p)}{kT_e}\right]^{-1/2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{eI_{e0}}{kT_w} \exp\left[-\frac{e(V - V_p)}{kT_w}\right] \\ & \times \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{e(V - V_p)}{kT_w}\right]^{-1/2} - \left[1 + \frac{e(V - V_p)}{kT_e}\right]^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (1.247)$$

典型的实验室等离子体参数下，由上式测得到的 $dI/dV \sim V$ 曲线如图1.33所示。

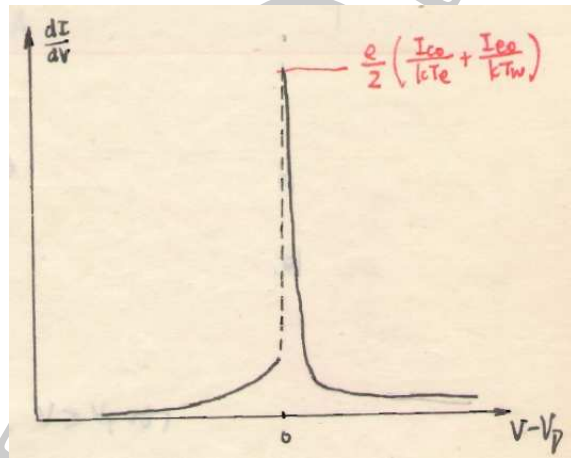


图 1.33: 发射探针 $dI/dV \sim V$ 曲线。

从图上可以看到，当 $V = V_p$ 时，发射探针的微分特性曲线有个奇点，且峰宽度大约为温度 T_w 量级。图中曲线 $V = V_p$ 时不连续，这里忽略了空间电荷效应的结果。虽然现在还没有包括空间电荷效应的发射探

针一般解析表达式。但是可以预计由于空间电荷效应，在 $V = 0$ 附近的发射电流和收集电流将减少，这将趋于使 $V = V_p$ 处的不连续性消失，从而使微分特性曲线在 $V = V_p$ 附近有个峰值。因此，我们可以相信，如果探针工作在足够低的发射电流状态，以使空间电荷效应最小，这样，发射探针微分特性曲线的峰值电位将趋于 V_p ，这就是在零发射电流极限下用拐点法测定等离子体电位的方法，其精度可达小于 kT_w/e 。

1.6.6 强磁场中的马赫探针

马赫探针理论使用的假设包括：

- (1). 准无碰撞：碰撞平均自由程大于通量管收集长度 $\lambda > L_c$ ，离子回旋半径小于探针尺寸 $\rho_{ci} < a$ ；
- (2). 探针偏置于足够高的电位上，以收集离子饱和电流

马赫探针的结构如图1.34所示：

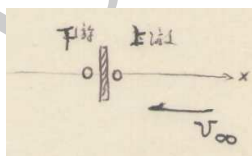


图 1.34: 马赫探针结构图。

马赫探针主要包括以下两种模型：

1. Stangeby 模型[Phys. Fluids **27**, 2099 (1984)]：1D模型

粒子守恒和力平衡方程联立得到：

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(nv) = S \\ mnv \frac{dv}{dx} = -\frac{dP}{dx} + ZenE - Sm(v - v_\infty) \end{cases}$$

忽略电子温度在隔板两边的变化，有

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dx}(nv) = S \\ v \frac{dv}{dx} = -\frac{C_s^2}{n} \frac{dn}{dx} + \frac{ZeE}{m} - \frac{S}{n}(v - v_\infty) \end{cases}$$

这里我们认为在隔板两侧等离子体空间电位相等，即 $E = 0$ ，并定义马赫数 M ：

$$M \equiv \frac{v}{C_s}, \quad M_\infty \equiv \frac{v_\infty}{C_s} \quad (1.248)$$

那么变量替换之后可以得到：

$$\frac{dM}{dx} = \frac{S}{nC_s} \frac{1 - M_\infty M + M^2}{1 - M^2} \quad (1.249)$$

$$\frac{dn}{dM} = -n \frac{2M - M_\infty}{1 - M_\infty M + M^2} \quad (1.250)$$

利用边界条件： $x \rightarrow \infty$ 时， $M = M_\infty$ ， $n = n_\infty$ 得到：

$$\frac{n(M)}{n_\infty} = \frac{1}{1 - M_\infty M + M^2} \quad (1.251)$$

取鞘边界条件（Bohm判据）： $M_s = \pm 1$ 。对于上游鞘边界（离子流向探针），取 $M_s = -1$ ；对于下游鞘边界，取 $M_s = +1$ 。当 $|M_\infty| < 1$ 时，则有：

$$R \equiv \frac{\Gamma_{iu}}{\Gamma_{id}} = \frac{n_{su}}{n_{sd}} = \frac{2 - M_\infty}{2 + M_\infty} > 1 \quad (1.252)$$

$$M_\infty = 2 \frac{1 - R}{1 + R} \quad (1.253)$$

这里，通过测量上游(n_{iu})和下游(n_{id})探针的密度比，来获得马赫数（流速）。

2. Hutchinson模型[Phys. Rev. **A37**, 4358 (1988)]：2D模型

可以列出粒子数守恒和粘滞方程:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (n\vec{v}) = 0 \\ \nabla \cdot (nm\vec{v}\vec{v}) + \nabla(nkT_i) + en\vec{E} - \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\Pi} = 0 \end{cases}$$

其中 $\overset{\leftrightarrow}{\Pi}$ 是粘滞胁强张量。利用电子的Boltzmann分布, 可得:

$$\nabla(nT_i) + en\vec{E} = (\gamma kT_i + kT_e)\nabla n \quad (1.254)$$

只取动量方程的平行分量得到:

$$\nabla_{\parallel}(nv_{\parallel}) = -\nabla_{\perp}(n\vec{v}_{\perp}) \equiv S \quad (1.255)$$

$$\nabla_{\parallel}(nmv_{\parallel}v_{\parallel}) + (\gamma kT_i + kT_e)\nabla_{\parallel}n = -\nabla_{\perp} \cdot (nm\vec{v}_{\perp}v_{\parallel}) + (\nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\Pi})_{\parallel} \equiv S_m \quad (1.256)$$

我们用唯象的垂直扩散方程代替垂直动量方程:

$$n\vec{v}_{\perp} = -D_{\perp}\nabla_{\perp}n \quad (1.257)$$

假定平行粘滞可以忽略, 则剪切粘滞胁强由以下方程的粘滞系数决定:

$$(\nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\Pi})_{\parallel} = \nabla_{\perp} \cdot (\eta\nabla_{\perp}v_{\parallel}) \quad (1.258)$$

这样, 有关垂直速度的量可用上述的扩散方程表示, 而有关垂直梯度可用垂直标长近似表示:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \begin{pmatrix} n \\ v_{\parallel} \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{Bmatrix} n_{\infty} - n \\ v_{\parallel\infty} - v_{\parallel} \end{Bmatrix} \frac{1}{a} \\ \nabla_{\perp}^2 \begin{pmatrix} n \\ v_{\parallel} \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{Bmatrix} n_{\infty} - n \\ v_{\parallel\infty} - v_{\parallel} \end{Bmatrix} \frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

将各变量无量纲化:

$$\begin{aligned} z/a &\rightarrow z, & y/a &\rightarrow y, & \int \frac{D_{\perp}}{C_s a^2} dx &\rightarrow x \\ \frac{n}{n_{\infty}} &\rightarrow n, & \frac{v_{\parallel}}{C_s} &\rightarrow M \end{aligned}$$

则连续性方程和动量方程变为:

$$\begin{cases} M \frac{dn}{dx} + n \frac{dM}{dx} = 1 - n \\ \frac{dn}{dx} + nM \frac{dM}{dx} = (M_\infty - M) \left(1 - n + \frac{\eta}{mn_\infty D_\perp} \right) \end{cases}$$

令:

$$\alpha \equiv \frac{\eta}{mn_\infty D_\perp} \quad (1.259)$$

是动量扩散与粒子扩散系数之比, 但它与 D 无关, 上方程组可进一步化为:

$$\begin{cases} \frac{dM}{dx} = \frac{(M_\infty - M)[1 - n(1 - \alpha)]M - (1 - n)}{n(M^2 - 1)} \\ \frac{dn}{dM} = n \frac{(1 - n)M - (M_\infty - M)[1 - n(1 - \alpha)]}{(M_\infty - M)[1 - n(1 - \alpha)]M - (1 - n)} \end{cases}$$

当 $\alpha = 0$ 时, 即忽略掉粘滞力, 那么上方程组化简得到:

$$\begin{cases} \frac{dM}{dx} = \frac{1 - n}{n} \frac{1 - M_\infty M + M^2}{1 - M^2} \\ \frac{dn}{dM} = -n \frac{2M - M_\infty}{1 - M_\infty M + M^2} \end{cases}$$

这就是前面提到的Stangeby模型。把上述方程的一维方程与完全的两维流体方程的计算结果相比较, 总结为如下的鞘边界离子通量的表达式:

$$\Gamma_i = f n_\infty C_s \quad (1.260)$$

其中 f 的表达式为:

$$f(M_\infty, \alpha) \equiv \exp[-1 - 1.1M_\infty + (1 - \sqrt{\alpha})(0.31 + 0.6M_\infty)] \quad (1.261)$$

实验表明 $\alpha \simeq 1$, 这时 f 为:

$$f(M_\infty, \alpha = 1) \doteq \exp(-1 - 1.1M_\infty) \quad (1.262)$$

如果上游探针的流速取 $-M_\infty$ ，下游的流速为 M_∞ ，那么上下游的离子通量之比为：

$$\frac{\Gamma_{iu}}{\Gamma_{id}} = \frac{\exp(-1 + 1.1M_\infty)}{\exp(-1 - 1.1M_\infty)} \simeq \exp\left(\frac{M_\infty}{M_c}\right) \quad (1.263)$$

其中 $M_c \simeq 0.45$ 。

1.7 静电探针应用(小结)

1. 平衡量的测量

(a) 电子温度 T_e

i. 单探针过渡区：

$$I_e = I + I_{i0} = I_{e0} \exp\left[\frac{e(V - V_p)}{kT_e}\right] \quad (1.264)$$

$$\frac{kT_e}{e} = \frac{1}{d(\ln I_e)/dV} \quad (1.265)$$

ii. 双探针： $(A_1 = A_2)$

$$I_D = I_i \tanh\left(\frac{eV_D}{2kT_e}\right) \quad (1.266)$$

$$\frac{kT_e}{e} = \frac{I_{i0}}{2 \left(\frac{dI_D}{dV_D}\right)\Big|_{I_D=0}} \quad (1.267)$$

I_{i0} 是 $I_D = 0$ 时的离子饱和电流。

iii. 三探针

$$\frac{kT_e}{e} = \frac{V_+ - V_f}{\ln 2} \quad (1.268)$$

iv. *谐波探针

$$\frac{kT_e}{e} = \frac{V_{ac}}{4} \frac{I_{1\omega}}{I_{2\omega}} \quad (1.269)$$

当 $eV_{ac}/kT_e \simeq 0.5$ 时，误差为1%；当 $eV_{ac}/kT_e \simeq 1$ 时，误差为5%。

- v. 厚鞘圆柱探针电子饱和流区 $e(V - V_p)/kT_e > 2$

$$I^2 = \frac{2}{\pi^2} A_p^2 \frac{e^2}{m_e} n_e^2 [kT_e + e(V - V_p)] \quad (1.270)$$

做 $I^2 \sim |V - V_p|$ 的拟合直线的截距 ($I^2 = 0$), 得到:

$$kT_e = e(V - V_p)|_{I^2=0} \quad (1.271)$$

- vi. 通过电子速度分布函数求有效电子温度

$$kT_{e,eff} = \frac{4\sqrt{2m_e}}{3e^3 n_e} \int_0^\infty \varepsilon^{3/2} \frac{d^2 j_e}{dV^2} d\varepsilon \quad (1.272)$$

其中 $\varepsilon = -e(V - V_p)$ 。

(b) 离子温度

- i. 减速场(栅网)能量分析器

$$I_i = \alpha n_i C_s A_p T \exp \left[-\frac{e(V - V_p)}{kT_i} \right], \quad V > V_p \quad (1.273)$$

$$\frac{kT_i}{e} = \frac{I_i}{\left| \frac{dI_i}{dV} \right|} \quad (1.274)$$

如果存在磁场, 那么测到的是平行方向分量的离子温度, 即 v_{\parallel} 。

- ii. Katsumata 探针

公式同上, 但只能在存在磁场的环境下测量, 这时候测到的是垂直方向上离子温度, 即 v_{\perp} 。

(c) 电子(离子)密度

- i. 单探针电子饱和流 ($V = V_p$ 处)

$$I \simeq I_{e0} = en_e A_p \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}} \quad (1.275)$$

ii. 单双探针离子饱和电流

$$I_{i0} = \alpha e n_e C_s A_s \quad (1.276)$$

iii. 厚鞘圆柱探针电子饱和电流区 ($e(V - V_p) > 2kT_e$)

$I^2 \sim |V - V_p|$ 的拟合直线的斜率 S 表达式为:

$$S \equiv \frac{2}{\pi^2} A_p^2 \frac{e^3}{m_e} n_e^2 \quad (1.277)$$

那么电子密度为:

$$n_e = \frac{\pi}{A_p \sqrt{e^3}} \sqrt{\frac{S m_e}{2}} \quad (1.278)$$

iv. 单探针电流二次微商的积分

$$n_e = \frac{2\sqrt{2m_e}}{e^2} \int_0^\infty \sqrt{\varepsilon} \frac{d^2 j_e}{dV^2} d\varepsilon \quad (1.279)$$

其中 $\varepsilon = -e(V - V_p)$ 。

(d) 等离子体空间电位 V_p

i. 单探针特性曲线拐点 (一次微商的极大值);

ii. 单探针特性曲线二次微商过零值;

iii. 单探针悬浮电位

$$V_p = V_f + \frac{kT_e}{2e} \left[\ln \left(\frac{m_i}{2\pi m_e} \right) + \frac{1}{2} \right] \quad (1.280)$$

$$= V_f + \frac{kT_e}{e} \ln \left(\frac{I_{e0}}{I_{i0}} \right) \quad (1.281)$$

(e) 电场 E

$$E = -\nabla V_p \quad (1.282)$$

(f) 电子速度分布函数

对于各项同性，凸面探针，过渡区电流的二次微商有：

$$\frac{d^2 j_e}{dV^2} = \frac{2\pi e^3 n_e}{m_e^2} f(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=-e(V-V_p)} \quad (1.283)$$

那么 $f(\varepsilon)$ 有：

$$f(\varepsilon) = \frac{m_e^2}{2\pi e^3 n_e} \frac{d^2 j_e}{dV^2} \quad (1.284)$$

$f(\varepsilon)$ 是各项同性归一化的速度分布，即：

$$\int f(\varepsilon) d\varepsilon = \int 4\pi v^2 f(\varepsilon) d\varepsilon = 1, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} m_e v^2 \quad (1.285)$$

能量分布函数 $f_\varepsilon(\varepsilon)$ 的表达式为：

$$f_\varepsilon(\varepsilon) = 4\pi \sqrt{\frac{2}{m^3}} \sqrt{\varepsilon} f(\varepsilon) = \frac{2\sqrt{2m_e}}{e^3 n_e} \frac{d^2 j_e}{dV^2} \sqrt{\varepsilon} \quad (1.286)$$

有效温度：

$$\begin{aligned} kT_{e,eff} &= \frac{2}{3} \langle \varepsilon \rangle = \frac{2}{3} \frac{\int_0^\infty \varepsilon^{3/2} f(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_0^\infty \varepsilon^{1/2} f(\varepsilon) d\varepsilon} \\ &= \frac{4\sqrt{2m_e}}{3e^3 n_e} \int_0^\infty [-e(V - V_p)]^{3/2} \frac{d^2 j_e}{dV^2} d[-e(V - V_p)] \quad (1.287) \end{aligned}$$

(g) 离子速度分布函数

减速场能量分析器电流的二阶微商：

$$\frac{d^2 I_i}{dV^2} \propto f(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=e(V-V_p)}, \quad V > V_p \quad (1.288)$$

(h) 流体速度

马赫探针：在强磁场环境中测量平行磁场方向的流体速度 v_{\parallel} 。

2. 涨落量和输运通量的测量

(a) 密度涨落 \tilde{n} 电子饱和电流和离子饱和电流的表达式分别为:

$$I_{e0} = \frac{1}{4}en_eA_p\sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}}, \quad I_{i0} = \alpha en_eA_s\sqrt{\frac{kT_e}{m_i}}$$

那么, 它们的涨落量形式为:

$$\frac{\tilde{I}_{e0}}{I_{e0}} = \frac{\tilde{n}_e}{n_e} + \frac{1}{2} \frac{\tilde{T}_e}{T_e} \simeq \frac{\tilde{n}_e}{n_e}, \quad (\text{当 } T_e \text{ 的影响可忽略时}) \quad (1.289)$$

$$\frac{\tilde{I}_{e0}}{I_{i0}} = \frac{\tilde{n}_e}{n_e} + \frac{1}{2} \frac{\tilde{T}_e}{T_e} \simeq \frac{\tilde{n}_e}{n_e}, \quad (\text{当 } T_e \text{ 的影响可忽略时}) \quad (1.290)$$

在磁场环境中, 原则上使用电子饱和电流和离子饱和电流都可以用来测量密度涨落, 但是由于电子饱和电流变化较大, 故一般使用离子饱和电流来测量。

(b) 空间电位涨落 \tilde{V}_p

从 V_p 和 V_f 的关系出发:

$$V_p = V_f + \frac{kT_e}{2e} \left[\ln \left(\frac{m_i}{2\pi m_e} \right) + \frac{1}{2} \right] = V_f + \mu kT_e/e \quad (1.291)$$

那么空间电位涨落为: $\tilde{V}_p = \tilde{V}_f + \mu k\tilde{T}_e/e$, 使用 kT_e 归一化后得到:

$$\frac{e\tilde{V}_p}{kT_e} = \frac{e\tilde{V}_f}{kT_e} + \mu \frac{\tilde{T}_e}{T_e} \quad (1.292)$$

忽略电子温度涨落的影响后: $\tilde{V}_p \simeq \tilde{V}_f$ 。

当 \tilde{T}_e 影响不可以忽略的时候:

$$\left\langle \frac{\tilde{n}_e}{n_e} \right\rangle_{rms} = \left[\left(\frac{\tilde{I}}{I} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\tilde{T}_e}{T_e} \right)^2 + \frac{\langle \tilde{I}\tilde{T}_e \rangle}{IT_e} \right]^{1/2} \quad (1.293)$$

$$\left\langle \frac{e\tilde{V}_p}{kT_e} \right\rangle_{rms} = \left[\left(\frac{e\tilde{V}_f}{kT_e} \right)^2 + \mu^2 \left(\frac{\tilde{T}_e}{T_e} \right)^2 + 2\mu \frac{\langle e\tilde{V}_f\tilde{T}_e \rangle}{T_e^2} \right]^{1/2} \quad (1.294)$$

(c) 电子温度涨落

i. 三探针法

$$kT_e = \frac{e(V_+ - V_f)}{\ln 2} \Rightarrow \tilde{T}_e = \frac{e(\widetilde{V_+ - V_f})}{\ln 2} \quad (1.295)$$

ii. *谐波探针法

$$T_e = \frac{eV_{ac}}{4} \left(\frac{I_{1\omega}}{I_{2\omega}} \right) \Rightarrow \tilde{T}_e = \frac{eV_{ac}}{4} \left(\frac{\widetilde{I_{1\omega}}}{\widetilde{I_{2\omega}}} \right) \quad (1.296)$$

iii. 扫描双探针曲线拟合法

探针收集电流为: $I = \alpha n_e A_s \sqrt{8kT_e/m_i} \tanh[e(V_D - V_d)/2kT_e]$,
那么电流涨落为:

$$\begin{aligned} \tilde{I}^2 = & f_1^2 \tilde{n}_e^2 + f_2^2 \tilde{T}_e^2 + f_3^2 \tilde{V}_d + 2f_1 f_2 \langle \tilde{n}_e \tilde{T}_e \rangle \\ & + 2f_1 f_3 \langle \tilde{n}_e \tilde{V}_d \rangle + 2f_2 f_3 \langle \tilde{T}_e \tilde{V}_d \rangle \end{aligned} \quad (1.297)$$

其中:

$$f_1 = \tanh \frac{x}{2}$$

$$f_2 = \frac{1}{2} \left[\tanh \frac{x}{2} - x \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2} \right]$$

$$f_3 = -\frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2}$$

$$x = \frac{eV_D}{kT_e}$$

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{I}}{I}, \quad \tilde{n}_e = \frac{\tilde{n}_e}{n_e}, \quad \tilde{T}_e = \frac{\tilde{T}_e}{T_e}, \quad \tilde{V}_d = \frac{e\tilde{V}_d}{kT_e}$$

V_d 是两探针点处悬浮电位差。

(d) 电场涨落

$$\tilde{E} = -\frac{\tilde{V}_{p1} - \tilde{V}_{p2}}{\Delta r} \simeq -\frac{\tilde{V}_{f1} - \tilde{V}_{f2}}{\Delta r} \quad (1.298)$$

(e) 横越磁场的输运通量

径向粒子通量 Γ_r 为:

$$\Gamma_r = \langle \tilde{n}_e \tilde{v}_r \rangle = \frac{\langle \tilde{n}_e \tilde{E}_\theta \rangle}{B} \quad (1.299)$$

热输运通量 Q_r 为:

$$\begin{aligned} Q_r &= \frac{5}{2} \langle \tilde{P} \tilde{v}_r \rangle = \frac{5}{2} n_e \langle k \tilde{T}_e \tilde{v}_r \rangle + \frac{5}{2} \langle \tilde{n}_e \tilde{v}_r \rangle k T_e \\ &= \frac{5}{2} n_e \frac{\langle k \tilde{T}_e \tilde{E}_\theta \rangle}{B} + \frac{5}{2} k T_e \frac{\langle \tilde{n}_e \tilde{E}_\theta \rangle}{B} \end{aligned} \quad (1.300)$$

其中 $\tilde{v}_r = \frac{\tilde{E}_\theta}{B}$ 。

3. 注意事项

(a) 输出阻抗

在 $V = V_f$ 时, 电流的增量约为 $\Delta I \simeq I_{i0}$, 其相应的电压变化为 $\Delta V = kT_e/e$, 故输出阻抗(等离子体负载阻抗)为:

$$R_0 = \frac{\Delta V}{\Delta I} \simeq \frac{kT_e}{e I_{i0}} \quad (1.301)$$

当测量饱和电流时, 要求测量电阻远小于等离子体电阻: $R \ll R_0$; 当测量悬浮电位时, 要求测量电阻远大于等离子体电阻: $R \gg R_0$ 。

(b) 磁场中测量时, 要避免相邻探针的屏蔽效应。

(c) 注意非热电子的影响

(d) 避免rf电场的影响

i. 时间平均

ii. 考虑RF补偿

- iii. 滤波技术: Plasma Source Sci. Tech. **1**, 36 (1992); Plasma Source Sci. Tech. **3**, 162 (1994)

(e) 适用范围

- $n_e = 10^8 \sim 10^{19} \text{m}^{-3}$
- $T_e = 0.1 \sim 100 \text{eV}$
- $V_p = 0.1 \sim 10^3 \text{V}$
- $P = 10^{-6} \sim 1 \text{Torr}$

1.8 参考文献

1. 总论

- Rev. Sci. Instruments **73**, 3409 (2002)
- Plasma Phys. Control. Fusion **36**, 1595 (1994)

2. 双探针

- Phys. Rev. **80**, 58 (1950)
- Plasma Phys. **11**, 73 (1969)
- Phys. Fluids **B1**, 2027 (1989)
- Rev. Sci. Instruments **63**, 4612 (1992)

3. 三探针

- J. Appl. Phys. **36**, 2363 (1965)
- J. Phys. **D10**, 1065 (1977)

4. *谐波探针法

- Rev. Sci. Instruments **59**, 1053 (1988)

- Rev. Sci. Instruments **70**, 2997 (1999)

5. 减速栅网分析器

- J. Phys. **D17**, 2243 (1984)
- Rev. Sci. Instruments **70**, 476 (1999)
- Phys. Fluids **B3**, 2271 (1991)
- Rev. Sci. Instruments **57**, 1542 (1986)

6. 发射探针

- Rev. Sci. Instruments **50**, 210 (1929)
- Rev. Sci. Instruments **56**, 519 (1985)
- Rev. Sci. Instruments **37**, 455 (1966)
- Phys. Plasmas **7**, 3457 (2000)
- Rev. Sci. Instruments **67**, 849 (1996)

7. 马赫探针

- Phys. Fluids **27**, 2699 (1984)
- Phys. Rev. **A37**, 4358 (1988)

8. *高气压探针

- Advances in Physics **25**, 517 (1976)
- J. Appl. Phys. **91**, 9529(2002)

9. *Katsumata探针

- Jpn. J. Appl. Phys. **6**, 124 (1967)
- Contr. Plasma Phys. **365**, 73 (1996)

10. 精确的数值方法

- Phys. Plasmas **8**, 3029(2001)
- G. Laframboise AD634596(1966)
- J. Vac. Sci. Technical. **A8**, 1663 (1990)
- J. Vac. Sci. Technical. **A15**, 2923 (1997)
- J. Vac. Sci. Technical. **A17**, 3051 (1999)

11. 非麦克斯韦等离子体的探针诊断

- J. Appl. Phys. **73**, 3657 (1993) (V.A. Godyak)

Not For Distribution