

# 等离子体诊断方法

俞昌旋 教授

更新日期：2012 年 10 月 7 日

*Not For Distribution*

# 目录

<b>第二章 等离子体折射系数</b>	<b>5</b>
2.1 电磁波在等离子体中的传播	5
2.2 电子密度的测量	15
2.2.1 干涉仪	15
2.2.2 相位移的测量	17
2.2.3 相位调制方法	20
2.2.4 相干、衍射、折射和频率的选择	27
2.2.5 干涉成像*	35
2.3 磁场的测量	35
2.3.1 原理-法拉第旋转	35
2.3.2 法拉第转角的测量	41
▲激光等离子体中强磁场的测量	49
2.4 阿贝尔(Abel)变换	51
2.5 反射法	52
2.5.1 相位延迟的计算	53
2.5.2 反射计	59
▲用于激光等离子体密度测量的干涉仪	64

*Not For Distribution*

## 第二章 等离子体折射系数

### 2.1 电磁波在等离子体中的传播

电磁波在等离子体中的传播已有很详尽的研究，有专著：金兹堡院士，《电磁波在等离子体中的传播》（中译本），科学出版社，1978年。本节仅给出其中一些基本概念以作为以后各节讨论的基础。

一、电磁波作为探针必须满足的条件：

(a) 对等离子体不造成干扰：

$$\frac{eE}{m_e\omega} \ll v_t \quad (2.1)$$

这里 $E$ 是电磁波传播时的电场， $v_t$ 是电子热运动速度。

(b) 能在等离子体中传播：传播区，一般是高频波

二、冷等离子体波的色散关系

冷等离子体近似：是忽略了带电粒子的热运动对电磁波传播特性的影响，只要电磁波远离共振区，它是相当好的近似。

在讨论波在等离子体中传播之前，先进行如下假定：

- ① 电磁波频率远大于粒子间碰撞频率
- ② 等离子体是完全电离气体
- ③ 冷等离子体

一般色散关系可由Maxwell方程组和粒子运动方程联立求解而得到:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{j} = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{E} = en_e \vec{v} \end{cases} \quad (2.2)$$

这里电导率 $\overleftrightarrow{\sigma}$ 是张量。联立后可得波动方程

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \mu_0 \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.3)$$

考虑平面波的情况, 即 $E \propto \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ , 那么上方程变为:

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.4)$$

其中 $\overleftrightarrow{\epsilon}$ 为等离子体介电张量:

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \overleftrightarrow{I} + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \overleftrightarrow{\sigma} \quad (2.5)$$

上述波动方程可改写为:

$$\left( \vec{k} \vec{k} - k^2 \overleftrightarrow{I} + \frac{\omega^2}{c^2} \overleftrightarrow{\epsilon} \right) \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.6)$$

其中光速 $c^2 \equiv \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ , 它是 $\vec{E}$ 的三个分量的线性方程组, 它有非零解的条件是其系数行列式的值等于零, 即:

$$\det \left( \vec{k} \vec{k} - k^2 \overleftrightarrow{I} + \frac{\omega^2}{c^2} \overleftrightarrow{\epsilon} \right) = 0 \quad (2.7)$$

上式的解决定波的色散关系,  $k = f(\omega)$ , 称为矩阵方程的本征值(折射系数 $\mu \equiv \frac{kc}{\omega}$ )。而与本征值相对应的矩阵方程 $\vec{E}$ 的解为本征向量, 它决定波的偏振特性。

最简单的情况是当等离子体中无磁场时，它是各项同性介质，这时

$$\vec{\sigma} = \sigma \vec{I}, \quad \vec{\varepsilon} = \vec{I} \left( 1 + \frac{\iota}{\varepsilon_0 \omega} \sigma \right) = \varepsilon \vec{I}$$

若  $\vec{k} = k\hat{z}$ ，则其系数的行列式为：

$$\vec{k}\vec{k} - k^2 \vec{I} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\varepsilon} = \begin{vmatrix} -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \quad (2.8)$$

其解为：

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon = 0, \quad E_x, E_y \neq 0 \quad \text{横波}$$

及

$$\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon = 0, \quad E_z \neq 0 \quad \text{纵波} \quad (2.9)$$

对于横波，有  $\varepsilon^{1/2} = \frac{kc}{\omega} = \mu \equiv \frac{k}{k_0}$ ；对于纵波，有  $\varepsilon = 0$ 。在本章我们不考虑  $\varepsilon = 0$  的解。

当  $B_0 \neq 0$  时， $\vec{\sigma}$  及  $\vec{\varepsilon}$  不再是各项同性的，这时只要知道  $\vec{\sigma}$ ，我们就可以从上述波动方程的解得到电磁波在等离子体中的色散关系及其偏振特性。

在冷等离子体近似条件下，我们可从单粒子运动方程求得粒子的运动速度  $\vec{v}$ ，并利用欧姆定律求得  $\vec{\sigma}$  ( $\vec{j} = -en_e \vec{v} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E}$ )。

设入射电磁波为  $E_0 \propto \exp[\iota(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ ，取磁场为  $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$ ，电磁波传播的波数  $\vec{k} = k \cdot (0, \sin \theta, \cos \theta)$ ， $\theta$  是  $\vec{k}$  与  $\vec{B}_0$  的夹角，则运动方程为：

$$m_e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.10)$$

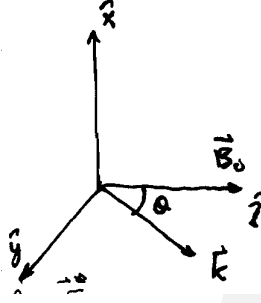


图 2.1: 坐标系选取。

它的解为:

$$\vec{v} = \frac{-ie}{\omega m_e} \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \omega_{ce}^2/\omega^2} & \frac{i\omega_{ce}/\omega}{1 - \omega_{ce}^2/\omega^2} & 0 \\ \frac{i\omega_{ce}/\omega}{1 - \omega_{ce}^2/\omega^2} & \frac{1}{1 - \omega_{ce}^2/\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

由此及欧姆定律可求得:

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \frac{m_e e^2}{m_e \omega} \frac{1}{1 - \omega_{ce}^2/\omega^2} \begin{pmatrix} 1 & -i\omega_{ce}/\omega & 0 \\ i\omega_{ce}/\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \omega_{ce}^2/\omega^2 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

及

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} & \frac{i\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{\omega(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} & 0 \\ -\frac{i\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{\omega(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} & 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

令  $X \equiv \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$ ,  $Y \equiv \frac{\omega_{ce}}{\omega}$ ,  $\mu \equiv \frac{kc}{\omega}$ , 将  $\overleftrightarrow{\varepsilon}$  带入波动方程, 可得其系数行列



式方程为:

$$\begin{vmatrix} -\mu^2 + 1 - \frac{X}{1-Y^2} & \frac{iXY}{1-Y^2} & 0 \\ -\frac{iXY}{1-Y^2} & -\mu^2 \cos^2 \theta + 1 - \frac{X}{1-Y^2} & \mu^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & \mu^2 \sin \theta \cos \theta & -\mu^2 \sin^2 \theta + 1 - X \end{vmatrix} = 0 \quad (2.14)$$

因在冷等离子体近似条件下,  $\vec{\epsilon}$  与  $\vec{k}$  无关, 因此上述色散方程是  $\mu^2$  的二次方程式, 其解可以写成为:

$$\mu^2 = 1 - \frac{X(1-X)}{1-X - \frac{1}{2}Y^2 \sin^2 \theta \pm [(\frac{1}{2}Y^2 \sin^2 \theta)^2 + (1-X)^2 Y^2 \cos^2 \theta]^{1/2}} \quad (2.15)$$

它被称为折射系数的 **Appleton-Hartree** 公式。

下面分三种情况讨论:

(a)  $B_0 = 0$  情况 ( $Y = 0$ )

电磁波的本征值为:

$$\epsilon = \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 = \mu^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{n_e}{n_c} \quad (2.16)$$

其中:

$$n_c \equiv \frac{\epsilon_0 m_e}{e^2} \omega^2 = 1.24 \times 10^{-2} f^2 [\text{Hz}] = 1.11 \times 10^{27} (\lambda [\mu\text{m}])^{-2} \quad [\text{m}^{-3}] \quad (2.17)$$

为电磁波频率  $\omega = \omega_{pe}$  时相对应的密度, 称为截止密度。

相速度:

$$v_p \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\mu} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_{pe}^2/\omega^2}} > c \quad (2.18)$$

群速度:

$$v_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = c\mu = c\sqrt{1 - \omega_{pe}^2/\omega^2} < c \quad (2.19)$$

传播区:

$$\frac{\omega_{pe}}{\omega} < 1 \quad (2.20)$$

截止频率:

$$\omega = \omega_{pe} \quad (2.21)$$

截止时对应  $\mu = 0$ ,  $v_p \rightarrow \infty$ ,  $v_g \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ 。

(b)  $B_0 \neq 0$ ,  $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$

$\mu$ 的解为:

$$\mu^2 = 1 - \frac{X}{1 \pm Y} \quad (2.22)$$

这两个解分别对应左旋和右旋波:

左旋(L):

$$\mu_L^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2/\omega^2}{1 + \omega_{ce}/\omega} - \frac{\omega_{pi}^2/\omega^2}{1 - \omega_{ci}/\omega} \simeq 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)^{-1} \quad (2.23)$$

右旋(R):

$$\mu_R^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2/\omega^2}{1 - \omega_{ce}/\omega} - \frac{\omega_{pi}^2/\omega^2}{1 + \omega_{ci}/\omega} \simeq 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)^{-1} \quad (2.24)$$

电场与磁场垂直:  $\vec{E} \perp \vec{B}_0$ , 并且  $\frac{E_x}{E_y} = \pm i$ ,  $E_z = 0$ 。

在截止区:  $\mu_L^2, \mu_R^2 \leq 0$ , 即:

Ⓐ:

$$\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \geq 1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega} \quad (2.25)$$

Ⓑ:

$$\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \geq 1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \quad (2.26)$$

在共振区:  $\mu_L, \mu_R \rightarrow \infty$  ( $\lambda, v_p \rightarrow 0, v_g \rightarrow 0$ )

Ⓒ:

$$\omega = \omega_{ci} \quad (2.27)$$

Ⓡ:

$$\omega = \omega_{ce} \quad (2.28)$$

在传播区:

Ⓛ:

$$\frac{\omega_{pe}^2}{\omega} < 1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega} \quad (2.29)$$

Ⓢ:

$$\frac{\omega_{pe}^2}{\omega} < 1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \quad \& \quad \frac{\omega_{ce}}{\omega} > 1 \quad (2.30)$$

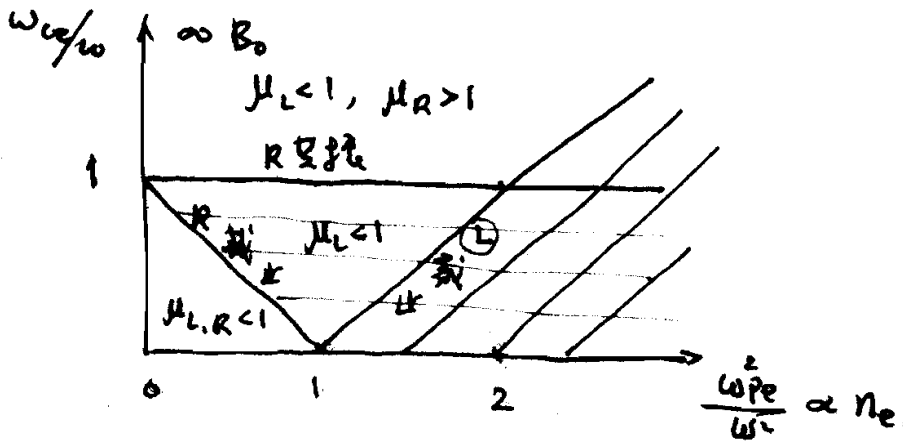


图 2.2:  $B_0 \neq 0, \vec{k} \parallel \vec{B}_0$  共振截止图

(c)  $B_0 \neq 0, \vec{k} \perp \vec{B}_0$

这种情况下得到  $\mu$  的解为:

寻常波(O):  $\vec{E} \parallel \vec{B}_0$ , 则有:

$$\mu_O^2 = 1 - X = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \simeq 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{n_e}{n_c} \quad (2.31)$$

电场:  $E_x = E_y = 0, E_z \neq 0$ , 为线性偏振波。

非寻常波(X):

$$\begin{aligned}\mu_X^2 &= 1 - \frac{X(1-X)}{1-X-Y^2} \\ &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{1 - \omega_{pe}^2/\omega^2}{1 - \omega_{pe}^2/\omega^2 - \omega_{ce}^2/\omega^2} \\ &= \frac{(\omega^2 - \omega_R^2)(\omega^2 - \omega_L^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_H^2)}\end{aligned}\quad (2.32)$$

其中:

$$\omega_L \equiv -\frac{\omega_{ce}}{2} + \left(\frac{\omega_{ce}^2}{4} + \omega_{pe}^2\right)^{1/2} \quad \text{左旋波} \quad (2.33)$$

$$\omega_R \equiv \frac{\omega_{ce}}{2} + \left(\frac{\omega_{ce}^2}{4} + \omega_{pe}^2\right)^{1/2} \quad \text{右旋波} \quad (2.34)$$

$$\omega_H^2 \equiv \omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2 \quad \text{高混杂共振频率} \quad (2.35)$$

$$\text{电场: } \frac{E_x}{E_y} = -i \frac{1-X-Y^2}{XY}, E_z = 0$$

传播区:

O:

$$\omega < \omega_{pe} \quad (2.36)$$

X:

$$\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} < 1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \quad (2.37)$$

$$1 - \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2} < \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} < 1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega} \quad (2.38)$$

截止区:

X:

$$\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \geq 1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega} \quad (2.39)$$

$$1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \leq \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \leq 1 - \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2} \quad (2.40)$$

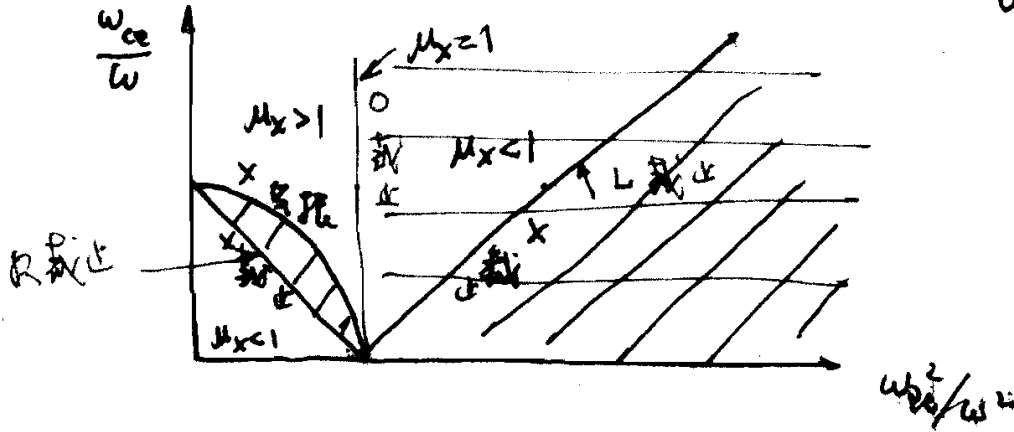


图 2.3: O波X波传播截止区图。

### 三、 诊断应用

我们讨论的介质是均匀介质，即： $\lambda \ll L_n, L_B$ ，色散关系由局域值决定；满足WKB近似（几何光学近似）

$$\frac{|\nabla k|}{k^2} \ll 1 \quad \text{即} \quad \frac{|\nabla \mu|}{\mu^2} \ll 1$$

由以下的应用：

(a) 干涉法测量等离子体密度：

$$\text{选取寻常波: } \mu \simeq \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{n_e}{n_c}$$

等离子体所引起的相移变化：

$$\varphi_p = \int (k_0 - k) dl = \int \frac{\omega}{c} (1 - \mu) dx \simeq r_e \lambda \int n_e dl \quad (2.41)$$

其中：

$$r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2.82 \times 10^{-15} \text{m} \quad \text{电子经典半径} \quad (2.42)$$

$\lambda$ 为真空中波长,  $n_c$ 为:

$$n_c = \frac{\epsilon_0 m_e \omega^2}{e^2} = 1.24 \times 10^{-2} f^2 [\text{Hz}] = 1.11 \times 10^{15} \lambda^{-2} [\text{m}] \quad [\text{m}^{-3}] \quad (2.43)$$

(b) 法拉第旋转:  $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$

左旋和右旋波的 $\mu_L$ 和 $\mu_R$ 为:

$$\mu_L \simeq \left[ 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)^{-1} \right]^{1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right) \quad (2.44)$$

$$\mu_R \simeq \left[ 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)^{-1} \right]^{1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right) \quad (2.45)$$

它表明左、右旋波在等离子体中传播的相速度不同, 它将引起入射线偏振波在等离子体中传播时偏振方向发生旋转—法拉第旋转, 其转角为:

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \int \frac{\mu_L - \mu_R}{2} dl = \int \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{2\omega^2 c} dl \propto \int B_0 n_e dl \quad (2.46)$$

(c) 反射计:  $\vec{k} \perp \vec{B}_0$

O波:

$$\mu_O = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} = 0$$

X波:

$$\mu_X = \frac{(\omega^2 - \omega_R^2)(\omega^2 - \omega_L^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_H^2)} = 0$$

通常情况下选右旋波截止, 即截止频率为 $\omega_R$ :

$$\omega_R \equiv \frac{\omega_{ce}}{2} + \left( \frac{\omega_{ce}^2}{4} + \omega_{pe}^2 \right)^{1/2}$$

$\omega_R$ 是与磁场 $\mathbf{B}$ 有关的量, 在后续课程中将详细阐述如何使用反射计诊断截止层的密度信息。

## 2.2 电子密度的测量

在光学中，介质的折射系数最常用干涉仪测量，它是测量一定厚度的介质插入干涉仪中所引入的附加光程差或附加的相位变化。等离子体也是一种介质，类似地，在等离子体诊断中，也可用干涉法测量等离子体的折射系数。由于寻常波的折射系数简单地与等离子体电子密度有关，即：

$$\mu = \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{n_e}{n_c}$$

其中 $n_c$ 是临界电子密度，从其折射系数的测量可以直接导出电子密度，因而常用寻常波作为干涉仪的探测束。

### 2.2.1 干涉仪

我们熟知，干涉仪是用电场相干叠加的方法使两束或两束以上的光形成干涉，其输出光强因相干干涉或相消干涉（即同相位或反相位）而被调制。

在等离子体诊断中常用的干涉仪有以下两种：

#### 1. 迈克尔逊干涉仪

它是双束干涉仪，它有两臂和两个输出，但光在两臂中均沿两个方向传播，且其一个输出沿入射光路回到光源。在折射系数测量的情况下，干涉仪中任一臂上折射系数的变化，都会在一输出端中的两个分量间产生相位差。

#### 2. 马赫-贞德干涉仪

它是双束干涉仪，但它与迈克尔逊干涉仪不同的是，光束在两臂中都只沿着一个方向传播，而且两个输出都与输入分开。同样地，它也是通过改变一臂中的折射系数来改变相位的。

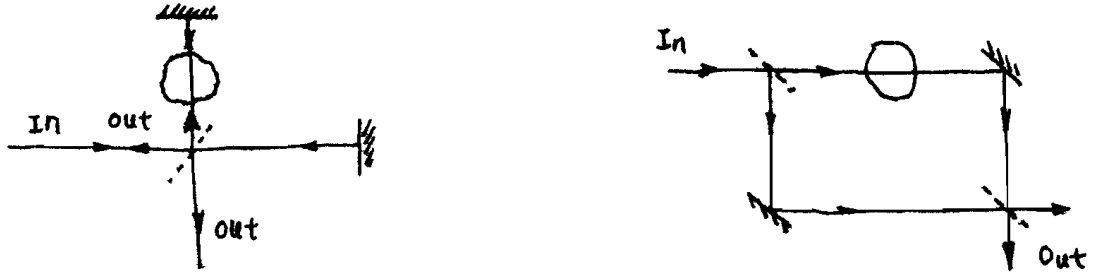


图 2.4: 迈克尔逊干涉仪(左)与马赫-贞德干涉仪(右)示意图。

上述两个干涉仪的部件，如干涉臂可以是自由空间传播的直线光程，也可以是微波波导；而分束器也可以是某种光学部分反射镜，或是某种微波耦合器，但它们的功能都是相同的。

当用干涉仪测量等离子体电子密度时，是把等离子体放在干涉仪中的一臂，并测量等离子体所引入的相位变化（即比较有和没有等离子体时两臂的相位差），即：

$$\begin{aligned}\phi_p &= \int (k_{plasma} - k_0) dl \\ &= - \int (1 - \mu) \frac{\omega}{c} dl = - \frac{\omega}{c} \int \left[ 1 - \left( 1 - \frac{n_e}{n_c} \right)^{1/2} \right] dl\end{aligned}$$

如果等离子体密度足够低（即入射波频率足够高），使得  $n_e \ll n_c$ ，则  $\mu$  可近似表示为：

$$\mu \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{n_e}{n_c} - \frac{1}{8} \left( \frac{n_e}{n_c} \right)^2 - \frac{3}{48} \left( \frac{n_e}{n_c} \right)^3 \quad (2.47)$$

如果只取到一阶，那么相位移就可以简化为：

$$\phi_p \doteq - \frac{\omega}{c} \int \frac{n_e}{2n_c} dl = -r_e \lambda \int n_e dl \quad (2.48)$$

其中  $r_e$  是电子经典半径，

$$r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2.82 \times 10^{-15} m \quad (2.49)$$

从上式可以看出干涉仪输出的相位移与弦积分密度成正比。



### 2.2.2 相位移的测量

由前述可知，干涉仪的输出光强是两束相干光的电场相干叠加所形成的，由于干涉效应，其输出光强将因相长干涉或相消干涉（即同相位与反相位）而被调制。测量光强随两束相干光相位差变化的规律就可以测定相位移 $\phi_p$ 。例如，干涉仪中两臂的光电场分别为：

$$E_1(t) = E_{10} \exp(i\omega t) \quad (2.50)$$

$$E_2(t) \exp(i\phi) = E_{20} \exp(i\omega t + i\phi) \quad (2.51)$$

则它们的总电场为：

$$E_t(t) = E_1(t) + E_2(t) \exp(i\phi) = [E_{10} + E_{20} \exp(i\phi)] \exp(i\omega t) \quad (2.52)$$

平方律探测器所探测的功率是与 $|E_t|^2$ 成正比的，即：

$$I \propto |E_t|^2 = (E_{10}^2 + E_{20}^2) \left( 1 + \frac{2E_{10}E_{20}}{E_{10}^2 + E_{20}^2} \cos \phi \right) \quad (2.53)$$

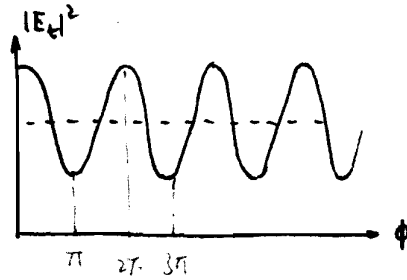


图 2.5:  $E_t(t)$  波形图。

由此可见，输出光强度除了有一个直流分量外，还有一个随余弦函数变化的调制分量，如右图所示。测量调制分量随相位的变化，就可以测定相位差。我们定义干涉条纹的反差（或对比度）为：

$$p \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2E_{10}E_{20}}{E_{10}^2 + E_{20}^2} \quad (2.54)$$

则:

$$I \propto |E_t|^2 = (E_{10}^2 + E_{20}^2)(1 + p \cos \phi) \quad (2.55)$$

实际的相位差是与密度相关的, 即:

$$\phi_p(t) = r_e \lambda \int n_e(t) dl$$

一般情况下两支光束的频率并不相同, 分别为 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ , 定义它们之间的频率差为:  $\omega_m \equiv \omega_1 - \omega_2$ , 如果频率差 $\omega_m \ll \omega_1, \omega_2$ , 那么经过平方律检波器后的光强为:

$$I \propto |\vec{E}_t(t)|^2 = (E_{10}^2 + E_{20}^2) \left\{ 1 + \frac{2\vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20}}{E_{10}^2 + E_{20}^2} \cos[\omega_m t + \phi_p(t)] \right\} \quad (2.56)$$

其中余弦项为干涉项, 干涉条纹的对比度为:

$$p \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20}}{E_{10}^2 + E_{20}^2} \quad (2.57)$$

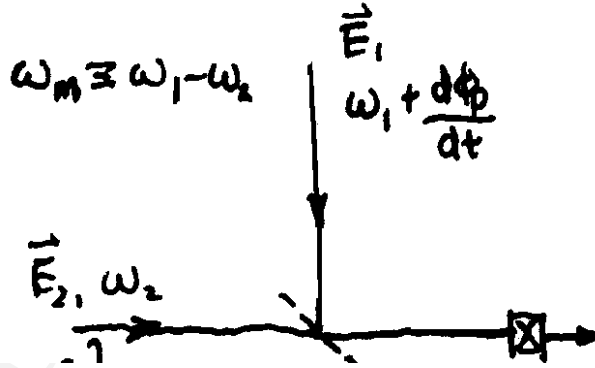


图 2.6: 相位移测定光路图。

由此可获得如下结论:

1. 当 $E_{10} = E_{20}$ 及 $\vec{E}_{10} \parallel \vec{E}_{20}$ 时, 对比度 $p = 1$ 达到极大值;

2. 当 $\omega_m = 0$ 时，为前面讨论的简单干涉仪，又称之为“零拍干涉仪”。 $\phi_p$ 的车辆依赖于条纹的幅度，难以判断密度变化的方向；
3. 当 $\omega_m \neq 0$ 时，为外差干涉仪。 $\phi_p$ 的测量不依赖于条纹的幅度，可以很方便地判断密度的变化方向；
4. 当 $\vec{E}_{10}$ 的偏振方向发生变化时，它对外差干涉仪的相位移的测量没有影响；
5. 当等离子体密度随时间变化时，它等效于对入射电磁波的相位（频率）调制，使入射波的频率发生瞬时变化： $\omega_1 + \frac{d\phi_p}{dt}(t)$

[附注]:

零拍和外差干涉仪的区别。

为了克服零拍干涉仪无法判断运动方向的弱点，使用额外的一组参考光，这组参考光的相位与原参考光的相差 $\pi/2$ 。但是这种方式的诊断设备比较庞大，造价高，现在已经淘汰。

外差干涉仪中相移的检测通常是用相位比较器(鉴相器)自动完成的，因为外差干涉仪提供两个输出信号，一个是参考信号：

$$V_R = A_R \cos \omega_m t \quad (2.58)$$

另一个是探测信号：

$$V_S = A_S \cos(\omega_m t + \phi_p) \quad (2.59)$$

它们都输入到相位比较器中，相位比较器在每个中频信号周期 $T_m \equiv f_m^{-1}$ 内测量它们正向通过零点的时间差，由这个时间差的测量就可以到处等离子体产生的相移。设两信号的正向过零时间分别为：

$$\omega_m t_R = 2\pi m_R + \frac{3}{2}\pi \quad (2.60)$$

$$\omega_m t_S + \phi_p = 2\pi m_S + \frac{3}{2}\pi \quad (2.61)$$

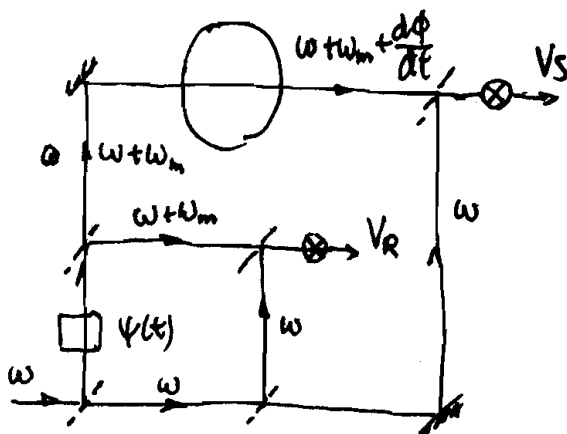


图 2.7: 外差干涉仪。

其中 $m_R$ 和 $m_S$ 都是正整数，则相移为：

$$\phi_p = \omega_m(t_R - t_S) + 2\pi(m_S - m_R) \quad (2.62)$$

当相位差 $\phi_p < 2\pi$ 时， $m_S = m_R$ ，则有

$$\phi_p = \omega_m(t_R - t_S) = 2\pi \frac{t_R - t_S}{T_m} \quad (2.63)$$

由此可见， $\phi_p$ 的测量与信号的幅度无关，它可以从简单的时间测量中获得，而且时间测量有较高的精度。由于相移是在每个中频周期内测量一次，因而 $T_m$ 决定了相移测量的时间分辨率。此外，还可以从时间差的符号确定在测量时刻相位的变化方向。

### 2.2.3 相位调制方法

可以产生相位调制或频移的方法很多，它们与干涉仪所使用的辐射源的频率有关。最常用的方法有以下几种：

#### 1. 运动反射镜-多普勒效应

它是最简单的相位调制方法之一，它是让干涉仪中任一臂的光束射向运动方向与束方向平行的运动反射镜，并从它反射回来。在这种情况下

下，如果反射镜在平行于束方向上的速度分量为 $v$ ，则反射束与入射束之间的光程差为 $2vt$ ，则它所产生的相位移为：

$$\varphi(t) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2vt = 2\pi \frac{t}{T_m} = \omega_m t \quad (2.64)$$

其中： $T_m \equiv \frac{\lambda}{2v}$ ， $\omega_m \equiv \frac{2\pi}{T_m}$ 。

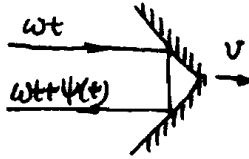


图 2.8: 运动反射镜。

由此可见：为了达到相同的分辨时间(它是由频移 $f_m$ 决定的)，对于波长较短的辐射源，反射镜的运动速度可较低。因此这种相位调制方法多用于可见光或中近红外激光干涉仪中。对于远红外激光干涉仪，由于其波长较长，为了达到相同的时间分辨能力，要求反射镜的运动速度较高，这样当等离子体存在时间较长（如1秒），就要求反射镜的运动距离较长。例如，对于HCN激光干涉仪，波长 $\lambda = 337\mu\text{m}$ ，若要求时间分辨率为 $0.1\mu\text{sec}$ ，则运动速度为：

$$v = \frac{\lambda}{2\tau} = 1.7\text{m/s} \quad (2.65)$$

如果等离子体存在时间为1秒，这就要求反射镜运动距离为1.7m，这在实践中很难实现。为了克服这种困难可以利用振动反射镜，但所得到的结果比较复杂，一般较少应用

## 2. 转动圆柱光栅—多普勒效应

它也是利用多普勒效应产生频移的。如下图所示，圆柱光栅是个闪跃光栅，它的刻槽平行于转轴，其闪跃角为 $\alpha$ ，槽面间的垂直距离

为 $\lambda/2$  (以保证在不同槽面上反射的光束都具有相同的相位), 其光栅常数为 $d = \lambda/(2 \sim \alpha)$ 。入射光束聚焦后射在光栅表面上。如果圆柱半径足够大, 使得光栅曲率可忽略则可以近似地认为整个光束是以闪耀角 $\alpha$ 入射在光栅表面上。则当光栅旋转时, 衍射光束将受到一多普勒频移:

$$f_m = \frac{2v}{\lambda} = 2 \frac{2\pi R n \sin \alpha}{\lambda} = \frac{2\pi R n}{d} = N n \quad (2.66)$$

其中 $v = 2\pi R n \sin \alpha$ 为光栅运动的线速度在入射光束方向上的分量;  $N = 2\pi R/d$ 为光栅总刻槽数;  $n$ 为光栅转速(单位时间的圈数)。

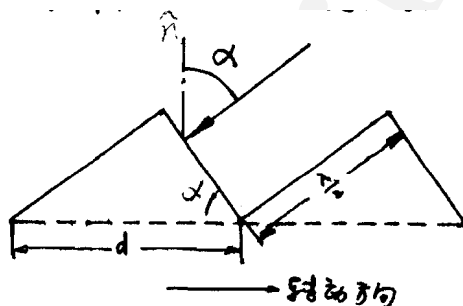


图 2.9: 转动圆柱光栅。

例如, 对于HCN激光器,  $\lambda = 337\mu m$ , 转镜半径 $R = 6 \times 10^{-2}m$ , 光栅角 $\alpha = 54^\circ$ , 总刻槽数 $N = 1800$ , 若时间分辨率为 $0.1\mu s$ , 则需要的转速为 $n = 5.56 \text{ circles/sec}$ , 这样的转速是很容易实现的。当然, 光栅转速还可以很容易提高一个量级, 这样时间分辨率也提高一个量级。这就是说对于给定的光栅, 只要改变光栅的转速, 就可以很方便的改变频移 $f_m$ 值。这种方法最常用语远红外和亚毫米波段。

### 3. 声光调制- 多普勒效应

声波是一种纵向机械应力波, 它在介质中传播时, 会引起介质密度呈疏密交替变化。介质密度的变化, 在一级近似下, 可引起与之成正比的折射率的改变, 因而声波也可表示为:

$$\tilde{\mu}(x, t) = \tilde{\mu}_0 \cos(\omega_a t - k_a x), \quad v_a = \frac{\omega_a}{k_a} \quad (2.67)$$

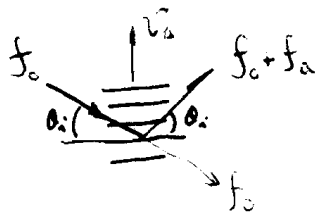


图 2.10: 声光调制。

若有一束光以角度 $\theta_i$ 入射在声波波阵面上，对该光束而言，声波可看成是一系列部分反射镜，其间距为声波波长 $\lambda_a$ ，且其运动速度为 $v_a$ 。这是因在声波压缩处的折射率较高，在稀疏处的折射率较低，因折射率的改变会形成反射，因而可将其视为反射镜面。由于声波的周期性质，其作用类似于间距为 $\lambda_a$ 的晶石的规则排列，则当光束的入射角满足如下的布拉格条件时，

$$2\lambda_a \sin \theta_i = \frac{\lambda_0}{\mu} \quad (2.68)$$

则在镜反射的方向上将产生一级衍射光。因声“晶格”以速度 $v_a$ 运动，因而该一级衍射光的频率相对于原入射频率 $f_0$ 有个频移 $\pm f_a = \pm v/\lambda_a$ 。这样，一束光通过声光介质后，由于声光衍射会产生空间上分离的，具有一定频差的两束光，利用这两束光分别作探测束和参考束，就可组成外差干涉仪。

此外，理论计算表明，在严格的布拉格角入射条件下，声光衍射效率为：

$$\eta = \frac{I_d}{I_0} = \sin^2 \left[ \frac{\pi}{\lambda_0} \sqrt{\frac{MLP_a}{2H}} \right] \quad (2.69)$$

其中 $M$ 为介质的声光优值，它与介质的折射率、光电弹射系数、密度及介质中的声速有关； $P_a$ 为超声功率； $L, H$ 为超声换能器的长度和宽度。

当 $\eta < 50\%$ 时，上式可近似地表示为

$$\eta \simeq \frac{\pi^2 MLP_a}{2H\lambda_0^2} \quad (2.70)$$

由此可见，声光颜色效率与光波的波长 $\lambda_0$ 的平方成反比，因而它只适用于可见光和近、中红外激光。这种方法产生频移的优点是：容易获得较高的频移约（几十MHz量级），使干涉仪的时间分辨率高。

#### 4. 双相干辐射源法

这就是简单地利用略有频差 $f_m$ 的两个相干辐射源，这种方法对两源的频率稳定性提出十分严格的要求，这是因为 $f_m/f$ 通常是十分小的。然而，实际上这是可以解决的。

当用激光器做辐射源时，可利用激光谐振腔的纵模频率与腔长有关的特点，即在谐振腔的增益带宽范围内，腔长的微小变化可引起谐振频率产生相应的变化：

$$f_m = f_0 \frac{\Delta f}{L} \quad (2.71)$$

其中 $f_0$ 为腔长为 $L$ 时的谐振频率。若有两个激光器，除了他们的腔长有微小偏差 $\Delta l$ 外，其它参数完全相同，则它们的输出频率之差为 $f_m = f_0 \frac{\Delta l}{L}$ 。对于远红外激光器，为获得 $f_m = 1\text{MHz}$ 的频移所需的腔长偏调量 $\Delta l$ 是可以实现的。如最早应用双激光器的外差干涉仪是用 $\text{CO}_2$ 激光泵浦的甲醇( $\text{CH}_3\text{OH}$ )远红外激光器（光泵远红外激光器：是极化分子气体通过吸收 $\text{CO}_2$ 辐射光子，从它的基态转动动能跃迁到上转动能级的某一个振动能级，然后通过邻近的振动能级间的跃迁发生激光作用，而发出相干的远红外辐射，最后通过弛豫过程而回到基态），它的波长为 $\lambda = 118.8\mu\text{m}$ ， $f_0 = 2.5 \times 10^{12}\text{Hz}$ ，其腔长在1m量级，则

$$|f_m/\Delta l| \simeq 2.5\text{MHz}/\mu\text{m} \quad (2.72)$$

若用精密的螺旋测微器调节激光腔长，其可调的最小位移是 $0.025\mu\text{m}$ ，因而要达到1MHz量级的频移是可以实现的。由于用这种方法获得的频移稳定性，主要取决于激光器频率的相对稳定性，在没有稳频措施时，频移的短期稳定性可达20%，长期稳定性可达10%，因此在频移



稳定性要求较高的系统中，要采取差频稳定措施。用这种双激光器的系统最大的优点是：频移可很容易地达到 $1\text{MHz}$ ，使系统具有较高的时间分辨率，能测量电子密度的快速变化。

在微波和毫米波波段，也可以利用两个具有一定频差的微波源做辐射源。因为微波源大多都可用机械和电调谐的方法，使源频率可在较大的范围内调谐，因而可以很容易地使两个微波源的频差调至所需要的频率。一般讲，当频移高达几十 $\text{MHz}$ 时，无需采取差频稳频措施，仍可保证具有一定的差频稳定性，且相位噪声也较小。当差频在 $1 \sim 10\text{MHz}$ 量级时，为保证相位噪声较小，一般需用自动频率控制(AFC)电路去稳定两源的频差。

## 5. 扫频干涉仪

这是利用微波源可方便地电调谐的特点。其具体做法是：用一锯齿波信号调制微波源的频率，使其输出频率产生周期性的线性变化，然后利用长波导的色散特性，把频率调制转变为相位调制，从而产生一固定的频移 $f_m$ 。

设微波源被一锯齿波信号调制，使其输出近似为线性变化的调频信号：

$$\begin{aligned} f(t) &= f_0 + \Delta f f_{sw} t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{f_{sw}} \\ f(t + \tau) &= f_0 + \Delta f f_{sw} (t + \tau) \\ f(t + \tau) - f(t) &= \tau \Delta f f_{sw} = n f_{sw}, & n \equiv \Delta f \tau \end{aligned}$$

其中 $\Delta f$ 为调频宽度， $f_{sw}$ 为扫频频率。由于波导的色散特性，即对于基模波导，在其中传播的电磁波波长为

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{f^2 - f_c^2}} \quad (2.73)$$

其中  $\lambda_c = 2a$  ( $a$  是波导窄边边长) 为截止波长;  $f_c$  为相应的截止频率。这样上述的源频率调制在波导中就变为相应的相位调制, 即:

$$\phi(t) = \frac{2\pi}{\lambda_g} L = \frac{2\pi L}{c} \sqrt{f^2 - f_c^2} \quad (2.74)$$

其中  $L$  是波导长度。由于  $\Delta f \ll f_0$  (一般  $\Delta f$  为 MHz 量级), 上式可近似表示为:

$$\begin{aligned} \phi(t) &\simeq \frac{2\pi L}{c} [f_0^2 - f_c^2 + 2f_0 \Delta f f_{sw} t]^{1/2} \\ &= \frac{2\pi L}{c} \sqrt{f_0^2 - f_c^2} \left( 1 + \frac{f_0 f_{sw} \Delta f}{f_0^2 - f_c^2} t \right) \\ &= \frac{2\pi L}{\lambda_{g0}} + \frac{L}{\lambda_0} \frac{\lambda_{g0} \Delta f}{\lambda_0 f_0} \Omega t \end{aligned} \quad (2.75)$$

其中:

$$\lambda_{g0} = \frac{c}{\sqrt{f_0^2 - f_c^2}}, \quad \lambda_0 = \frac{c}{f_0}, \quad \Omega = 2\pi f_{sw}$$

如果两臂波导的长度差为  $\mathcal{L}$ , 则两臂固有的相位差为:

$$\Delta\phi(t) = \frac{2\pi\mathcal{L}}{\lambda_{g0}} + \frac{\mathcal{L}}{\lambda_0} \frac{\lambda_{g0} \Delta f}{\lambda_0 f_0} \Omega t \quad (2.76)$$

如果选择波导程差满足下述关系:

$$\frac{\mathcal{L}}{\lambda_0} \frac{\lambda_{g0} \Delta f}{\lambda_0 f_0} \equiv m \quad (2.77)$$

则

$$\Delta\phi(t) = \frac{2\pi\mathcal{L}}{\lambda_{g0}} + m\omega t, \quad f_m \equiv m\Omega \quad (2.78)$$

这样, 在干涉仪的两臂就可以获得固定的频移  $f_m$ 。这种产生频移的方法的优点是: 便于多道应用, 在不同干涉道中使用不同的波导长度, 就可以方便的使各道获得不同的频移, 可以避免不同道间的串扰; 但其缺点是为获得一定的频移, 要使用较长的波导, 损失比较严重。

### 2.2.4 相干、衍射、折射和频率的选择

#### 1. 相干性

两束光相干条件：

- (a) 振动方向相同
- (b) 振动频率相同
- (c) 相位相同或相位差保持恒定

所谓的相干(coherence)就是一致性，相干包括时间相干性和空间相干性。所谓时间相干性是指光场中同一空间点在不同时刻光场之间的相干性。空间相干性指光场中不同空间点在同一时刻光场的相干性。

获得相干光源的三种方法

#### (a) 原理：波阵面分割法

将同一光源上同一点或极小区域（可视为点光源）发出的一束光分成两束，让它们经过不同的传播路径后，再使它们相遇，这时，这一对由同一光束分出来的光的频率和振动方向相同，在相遇点的相位差也是恒定的，因而是相干光。如，杨氏双缝干涉实验。

#### (b) 方法：振幅分割法

一束光线经过介质薄膜的反射与折射，形成的两束光线产生干涉的方法。如，薄膜干涉。

#### (c) 方法：采用激光光源

激光光源的频率,位相,振动方向,传播方向都相同。

干涉仪所用的辐射源，一般都要求其频带宽度很窄。这是因为在测量中，为了提高相位测量的精度，要求干涉仪的相位对比度，即干涉仪输出功率的调制度 $\frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ 越高越好，也就是要求源带宽的所有频率分量对输出功率的贡献，都经历相同的相移。否则的话，干涉仪的相

位对比度要变差。源的频带宽度限制与干涉仪的精确安排有关，但是相干辐射源(诸如束条管、耿氏管等微波源和激光器)几乎都能满足相干性的要求。因此，等离子体诊断中，都采用相干辐射源以保证其满足瞬态(temporal)相干条件—窄带。

## 2. 衍射极限—高斯光束的传播

相干辐射光束在自由空间中的传播时由所谓的高斯光学方程决定的，这是因为束传播的空间本征模是拉盖尔(Laguerre)多项式与高斯函数的乘积，其最低阶的本征模—基模就是高斯光束轮廓：

$$E(x, y, z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} \exp \left\{ -i \left[ kz + \frac{kr^2}{2R(z)} - \eta(z) \right] \right\} \quad (2.79)$$

其中：

$$w^2(z) = w_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right] = w_0^2 \left[ 1 + \frac{z^2}{z_r^2} \right] \quad \text{束半径} \quad (2.80)$$

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] = z \left( 1 + \frac{z_r^2}{z^2} \right) \quad \text{束曲率半径} \quad (2.81)$$

$$\eta(z) = \tan^{-1} \left( \frac{z\lambda}{\pi w_0^2} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_r} \right) \quad \text{高斯束与理想平面波的相移量} \quad (2.82)$$

$$z_r = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad \text{瑞利距离} \quad (2.83)$$

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.84)$$

由上式可知，相干辐射光在自由空间传播时，其场振幅在某一横截面上的分布是按高斯函数分布的，因此称之为高斯光束。其中各参数的物理意义如下： $w(z)$ 定义了场得幅度下降到轴上值的 $1/e$ 的径向位置，称为束半径； $w_0$ 是束半径的极小值，称为束腰半径；而 $R(z)$ 是束在距束腰 $z$ 处波阵面的曲率半径（近似于球面）； $z_r$ 是束半径为束腰半

径的 $\sqrt{2}$ 倍时的轴向位置，称为瑞利距离。在 $z \leq z_r$ 时，这是高斯光束的近场传播区；当 $z \gg z_r$ 时，为高斯束的远场传播区，在该区 $w(z)$ 可近似地表示为：

$$w(z) = \frac{\lambda}{\pi w_0} z \quad (2.85)$$

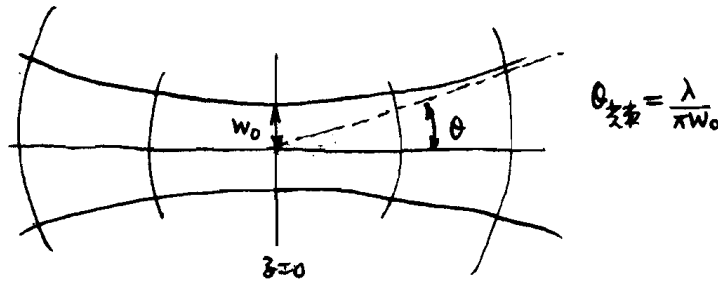


图 2.11: 高斯光束。

由此可知，随着传播距离 $z$ 的增大，束半径也随之线性的增大，光束也扩散了，其极限发散角为（束发散角）：

$$\theta_{\text{光束}} = \frac{dw(z)}{dz} = \frac{\lambda}{\pi w_0} = \frac{w_0}{z_r} \quad (2.86)$$

它是波的衍射现象的严格表现。由此可见，高斯光束区别于非相干光束的重要特征是：它是衍射限制的光束，即束的发散角和束尺寸的关系是唯一地由衍射原理决定的。

此外，由上述也可知，对于给定波长的高斯束，其最主要的特征参数是束腰半径 $w_0$ 及其位置，它们确定之后，高斯光束的基本传播特性也就确定了。

由于高斯光束随着传播距离的增大，束半径也随之增大。而在实际应用中，长要求束半径适当的小，因而通常要借助于透镜组来传输高斯光束，以使其具有一定的束半径。

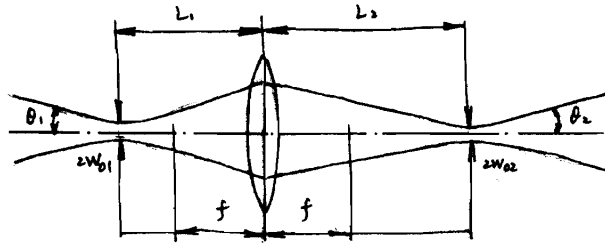
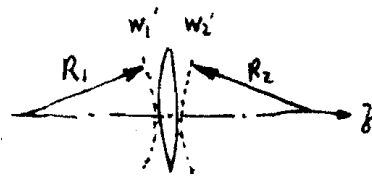


图 2.12: 透镜成像1。



$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}$$

$$w_1' = w_2'$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f}$$

$$q(z) = z + q_0 = z + i \frac{\lambda}{\pi w_0^2}$$

$$\begin{cases} q_1 = L_1 + i \frac{\lambda}{\pi w_{01}^2} \\ q_2 = L_2 + i \frac{\lambda}{\pi w_{02}^2} \end{cases}$$

图 2.13: 透镜成像2。

高斯光束经过薄透镜之后:

$$\begin{cases} w_{02} = \alpha w_{01} \\ \theta_2 = \frac{\lambda}{\pi w_{02}} = \frac{\theta_1}{\alpha} \\ z_{r2} = \frac{w_{02}}{\theta_2} = \frac{\alpha w_{01}}{\theta_1 / \alpha} = \alpha^2 z_{r1} \end{cases}$$

其中 $\alpha$ 为:

$$\alpha \equiv \frac{|f|}{\sqrt{(L_1 - f)^2 + z_{r1}^2}} \quad (2.87)$$

由于高斯光束的光强是按照高斯函数分布的,因而原则上讲,其光强主要是集中在其光轴附近,但在整个横截面上都有光强分布。当用于传播高斯光束的光学元件直径有限时(直径 $D$ ),由高斯分布函数可计算出:射在直径为 $D$ 的光学元件上的光功率为:

$$P_D = P_{\text{总}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2D^2}{d_0^2}\right) \right] \quad (2.88)$$

其中 $d_0$ 是束直径(场分布的 $e^{-1}$ 直径)。由此可知,在光学元件通光孔径有限时,高斯束通过它时将有部分损失。当 $D \geq 1.5d_0$ 时,光束的传播损失可小于1%,因此,作为一般规律,光学元件选择的原则是:

$$D \geq 1.5d_0 \quad (2.89)$$

### 3. 折射

当沿波束的传播路程上,等离子体有横向密度梯度时,探测束将会产生折射(由于 $\mu$ 变化),使其偏离直线传播轨迹。这时干涉测量有重要影响,特别是在多道干涉仪中,严重的折射效应会使不同的干涉道之间产生串扰。因此,我们必须对折射效应可能产生的探测束的最大偏转角,做一定量估计。对于圆柱对称的等离子体,若其电子密度分布是抛物线分布。即:

$$n_e(r) = \begin{cases} n_{e0} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

在Hutchinson的等离子体诊断原理中,把光束在二次函数密度分布介质中的传播作为一个习题,给出最大的偏转角是:

$$\psi_M \simeq \frac{n_{e0}}{n_c} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad (2.90)$$

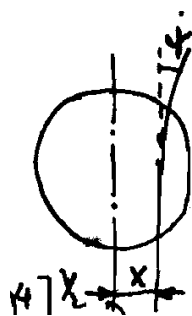
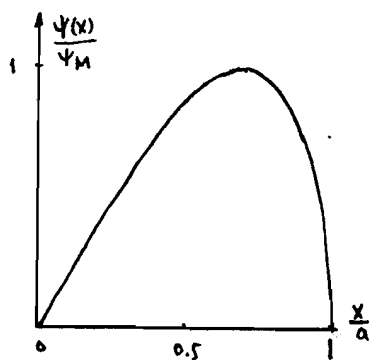


图 2.14: 折射。

下图是有上式计算的偏转角随着 $x/a$ 变化的计算曲线。若探测器大哦等离子体界面中心的距离为 $S$ ，则由此最大偏转角所造成的出射束最大偏转位置偏移为：

$$\Delta_M = S\psi_M \quad (2.91)$$

实际上可接受的最大偏转角 $\psi_c$ 是由实际问题决定的，一旦定下来，

图 2.15: 偏转角随着 $x/a$ 变化的计算曲线。

这要求束的频率必须满足：

$$\omega \geq \omega_{pe}/\sqrt{\psi_c} \quad (2.92)$$

#### 4. 源频率的选择



由上述可知，对用于等离子体密度测量的辐射源的要求是，其频率要足够高与预计的电子等离子体频率，以避免探测束在等离子体中折射偏转或者截止。然而，源频率也不能选择太高，对于干涉仪的机械稳定性的要求也越高。特别是在噪声环境比较恶劣的等离子体实验中使用的干涉仪，光路中光学部件的机械振动将产生假的光程（即相位变化）。若机械振动所产生的中的光程扰动为 $\delta l$ ，则它所产生的假的相位变化为：

$$\delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta l \quad (2.93)$$

总的相位为：

$$\phi_p = r_e\lambda \int n_e dl + \frac{2\pi}{\lambda}\delta l \quad (2.94)$$

由此可见，对于给定的光程扰动，探测束波长越短，所产生的相位测量误差越大。应等离子体所产生的相移是正比于波长的，因此振动产生的相位误差与等离子体相位变化之比是与 $\lambda^{-2}$ 成正比。故对短波长来说，机械振动变成是个十分严重的问题。

当机械整栋是不可避免时，可以用两个不同波长同时测量相移的办法，来补偿振动所造成的相位测量误差。比较短的补偿（通常可见光）主要是用来测量机械振动，而比较长的波长的相移与等离子体折射系数有较强的依赖关系，把长波长的相移（包括等离子体和机械振动的相移），减去适当比例的短波长的相移，就可以去除振动的影响。另一个办法是用短波长探测器的输出去反馈稳定干涉仪的程长，例如利用一个压电感应器去反馈控制一个反射镜，以保持短波长下的相对差是常数。这样做就不需要再短波下进行条纹计数，但要求传感器有足够快和大的位移，以跟随机械振动的变化。

此外，探测器的噪声电平，相移的测量方法等决定了干涉仪的可测的最小相移 $\phi_{\min}$ 。当 $\phi_{\min}$ 给定时，相应的可测最小线密度也被限定了，因为：

$$\left( \int n_e dl \right)_{\min} = \frac{\phi_{\min}}{r_e\lambda} \quad (2.95)$$

由此可见，当 $\phi_{\min}$ 给定的时候，可测的最小线密度与 $\lambda$ 成反比，它也要要求源频率也不能太高。

总之，上述诸因素对波长（或频率）的选择是相互制约的，需根据具体情况加以具体分析。作为一般原则，可用下述关系初略地选择探测束波长：

$$(5 \sim 10)n_{e0} = n_c \quad (2.96)$$

总之，由频率选择需结合考虑如下几个因素：

1. 截止(可传播条件)

$$n_e < n_c = 1.11 \times 10^{15} \lambda^{-2} [m^{-3}] \quad (2.97)$$

2. 折射（避免不同道间的串扰）

$$\frac{n_{e0}}{n_c} < \psi_M \quad (2.98)$$

若直径为 $d$ 的界面内要排 $M$ 个干涉道，则其道间距为 $\Delta x = d/M$ ，起最大偏转角为 $\psi_M = \delta x/d = 1/M$ ，那么有：

$$\frac{n_{e0}}{n_c} < \frac{1}{M} \quad (2.99)$$

3. 衍射

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (2.100)$$

4. 机械振动

$$\delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta l \quad (2.101)$$

其引入的相对误差为：

$$\frac{\delta\phi}{\phi_p} = \frac{2\pi\delta l}{r_e \lambda^2 \int n_e dl} \quad (2.102)$$

## 5. 可测的最小密度:

由可测的最小相移 $\phi_{\min}$ 决定

$$\left( \int n_e dl \right)_{\min} = \frac{\phi_{\min}}{r_e \lambda} \quad (2.103)$$

## 2.2.5 干涉成像\*

干涉成像适用于小尺度地变化等离子体, 如激光等离子体。这时有意思地在干涉仪中引入小的波阵面夹角, 从而在探测平面上形成空间的干涉系统(即空间调制), 这种引入的空间调制在整个束截面上形成连续的初始相位差, 在探测平面可直接得到正交干涉的信息, 可正确地判断相位的变化方向, 而无需采用外差技术。

## 2.3 磁场的测量

## 2.3.1 原理—法拉第旋转

## 1. 非剪切磁场

当电磁波平行于磁场传播时, 有两个本征模, 假定:  $\omega_{pe}^2 \ll \omega^2$  和  $\omega_{ce} \ll \omega$ , 它们的折射系数分别近似为:

$$\mu_L = \left[ 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)^{-1} \right]^{1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \left( 1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right) \quad (2.104)$$

$$\mu_R = \left[ 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)^{-1} \right]^{1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \left( 1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right) \quad (2.105)$$

令  $\vec{B}_0 \parallel \hat{z} \parallel \vec{k}$ , 初始入射波为线偏振  $\vec{E}(0) = E\hat{x}$ , 它可以分解为同频率旋转的左右旋波, 即:

$$\vec{E}(0) = \frac{E}{2} [(1, -i) + (1, +i)] \quad (2.106)$$

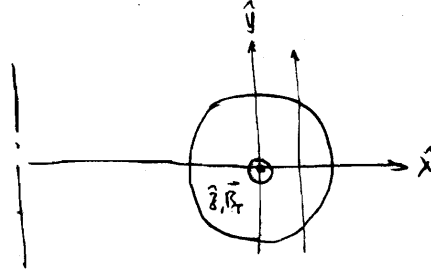


图 2.16: 坐标系。

当它在等离子体中传播到 $z \neq 0$ 处时，该波就变为：

$$\begin{aligned}\vec{E}(z) &= \frac{E}{2} \left[ (1, -i) \exp\left(i\mu_L \frac{\omega}{c} z\right) + (1, +i) \exp\left(i\mu_R \frac{\omega}{c} z\right) \right] \\ &= E [\cos \alpha, \sin \alpha] \exp(i\phi_P)\end{aligned}\quad (2.107)$$

其中

$$\alpha \equiv \frac{\mu_L - \mu_R}{2} \frac{\omega}{c} z = \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{2\omega^2 c} z = \frac{e r_e}{2\pi m_e c} \lambda^2 n_e B_0 z \quad (2.108)$$

$$\phi_P \equiv \left(1 - \frac{\mu_L + \mu_R}{2}\right) \frac{\omega}{c} z = \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega c} z = \lambda r_e n_e z \quad (2.109)$$

$\alpha$ 是电磁波通过等离子体后偏振光转过的角度，称为法拉第转角。当测量了法拉第转角后，由上述 $\alpha$ 的表达式即可求出 $(n_e B_0)$ 的线积分（对称均匀等离子体）。

## 2. 剪切磁场

在磁剪切磁化等离子体中，即使初始是寻常波，它在等离子体中传播时，其偏振态也要发生复杂的变化，剪切磁场会使它产生X, L, R波分量，从而使其合成波通常是椭圆偏振波，其偏振波的主轴将在传播过程中发生旋转，即旋光效应。下面我们以托卡马克位型为例，详细计算初始线偏振波在其传播过程中，其偏振面是如何变化的。

为简单起见，我们假定：

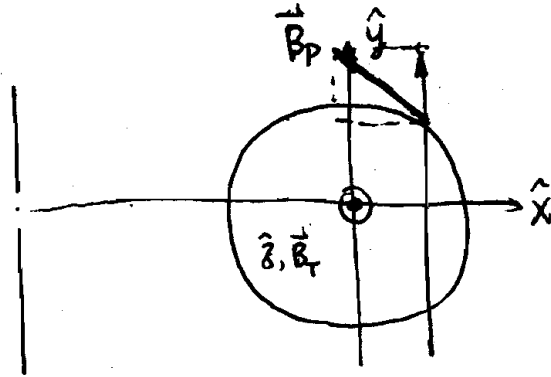


图 2.17: 坐标系。

- (a)  $\omega_{pe}^2 \ll \omega^2$  和  $\omega_{ce} \ll \omega$ ,
- (b) 冷等离子体近似
- (c) 等离子体是柱对称
- (d) WKB近似成立
- (e) 双折射效应较小, 但不可忽略

取如图所示的坐标系, 等离子体中电磁波的波动方程为:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \mu_0 \vec{\sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.110)$$

其中  $\vec{\sigma}$  为等离子体电导率张量, 它可以由电子运动方程的解导出,

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0), \quad \vec{B}_0 = (B_{p\perp}, B_{p\parallel}, B_T)$$

其表达式为:

$$\vec{\sigma} = \frac{\epsilon_0 \omega_{pe}^2}{\omega (1 - \omega_{cz}^2 / \omega^2)} \begin{pmatrix} i & \omega_{cz} / \omega & -\omega_{cy} / \omega \\ -\omega_{cz} / \omega & i & \omega_{cx} / \omega \\ \omega_{cz} / \omega & -\omega_{cx} / \omega & i \end{pmatrix} \quad (2.111)$$

上式中已利用了如下的近似:

$$\omega_c^2 = \omega_{cx}^2 + \omega_{cy}^2 + \omega_{cz}^2 \simeq \omega_{cz}^2 \quad (\because B_T \gg B_P)$$

及  $\omega^2 \gg \omega_c^2$

假定上述波动方程中  $\vec{E}$  的每个分量都有如下的形式解:

$$E_j(y) = A_j(y) \exp [\iota(\phi_j(y) - \omega t)] \quad j = x, y, z \quad (2.112)$$

其中  $A_j(y)$  是空间包络函数,  $\phi_j(y)$  是空间相位函数, 在特定的垂直弦线上 (已知弦心距  $x$ ), 她只与  $y$  的坐标有关。将它带入波动方程中, 可由此导出  $A_j(y)$  和  $\phi_j(y)$  所满足的常微分方程, 它们的解近似为:

$$A_x(\bar{y}) = A_{x0} + A_{z0} \int_{\bar{y}} dy \left( 1 + \frac{\omega_{cz}^2}{\omega^2} \right) \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{cy}}{2c\omega^2} \quad (2.113)$$

$$A_z(\bar{y}) = A_{z0} - A_{x0} \int_{\bar{y}} dy \left( 1 + \frac{\omega_{cz}^2}{\omega^2} \right) \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{cy}}{2c\omega^2} \quad (2.114)$$

$$\phi_x(\bar{y}) = \frac{\omega}{c} \int_{\bar{y}} dy \left[ 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{cz}^2}{2\omega^4} \right] \quad (2.115)$$

$$\phi_z(\bar{y}) = \frac{\omega}{c} \int_{\bar{y}} dy \left[ 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2} \right] \quad (2.116)$$

由此可见, 初始线偏振波(O波或X波), 通过具有磁剪切的等离子体后, 其幅度和相位均发生变化, 它们的合成波一般为椭圆偏振波, 且其主轴将相对于初始偏振方向发生旋转, 其旋转角可由熟知的椭圆偏振光的关系式求得(M. 波恩, E. 沃夫耳基, 光学原理, 上册p.43~46):

$$\tan(2\alpha) = \tan(2\psi) \cos \Delta\phi \quad (2.117)$$

其中

$$\psi \equiv \tan^{-1} \left[ \frac{A_x(\bar{y})}{A_z(\bar{y})} \right] \quad (2.118)$$

$$\Delta\phi = \phi_z(\bar{y}) - \phi_x(\bar{y}) \quad (2.119)$$

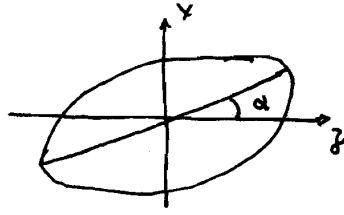


图 2.18: 坐标系。

电场可以假定具有如下形式:

$$E_x = a_1 \cos(\tau + \delta_1) \quad (2.120)$$

$$E_y = a_2 \cos(\tau + \delta_2) \quad (2.121)$$

其中  $\tau = \omega t$ , 由此可得:

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 \sim 2 \frac{E_x E_y}{a_1 a_2} \cos \delta = \sin \delta \quad (2.122)$$

$$\delta \equiv \delta_1 - \delta_2 \quad (2.123)$$

它是椭圆方程式, 得到的解是椭圆。

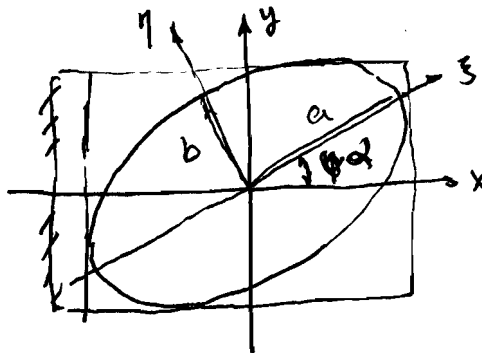


图 2.19: 椭圆偏振。

也可用 $\xi - \eta$ 坐标系描述:

$$\begin{cases} E_\xi = a \cos(\tau + \delta_0) \\ E_\eta = \pm b \sin(\tau + \delta_0) \quad (\pm \text{表示旋转方向}) \\ \pm ab = a_1 a_2 \sin \delta_0 \end{cases} \quad (2.124)$$

由此可得:

$$\tan \psi \equiv \frac{a_2}{a_1} \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.125)$$

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + a_2^2 \quad (2.126)$$

$$\tan(2\alpha) = \tan 2\psi \cos \delta \quad (2.127)$$

$$\sin 2\chi = \sin 2\psi \sin \delta \quad (2.128)$$

其中椭圆率 $\tan \chi \equiv \pm \frac{b}{a}$ ,  $-\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4}$

当 $\psi \ll 1$ 及 $\alpha \ll 1$ 时 (通过适当地选择 $\omega$ ), 通常都可满足, 上述可近似为:

$$\alpha \simeq \psi \cos \Delta\phi = \psi \left[ 1 - \frac{(\Delta\phi)^2}{2} \right] \quad (2.129)$$

若初始偏振波为寻常波, 即 $A_{z0} \neq 0, A_{x0} = 0$ , 则椭圆偏振主轴转过的角度为:

$$\alpha \simeq \left[ 1 - \frac{(\Delta\phi)^2}{2} \right] \int_{\bar{y}} dy \left( 1 + \frac{\omega_{cz}^2}{\omega^2} \right) \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{cz}}{\alpha \omega^2 c} \quad (2.130)$$

$$\Delta\phi = \frac{\omega}{c} \int_{\bar{y}} dy \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{cz}^2}{2\omega^4} \quad (2.131)$$

将各物理常数代入上式, 可得:

$$\alpha = 2.63 \times 10^{-25} \lambda^2 [\mu m] \left( 1 - \frac{(\Delta\phi)^2}{2} \right) \int_{\bar{y}} (1 + 0.87 \times 10^{-8} \lambda^2 [\mu m] B_T^2) n_e B_{p\parallel} dy \quad (2.132)$$

$$\Delta\phi = 2.46 \times 10^{-29} \lambda^3 [\mu m] \int_{\bar{y}} n_e B_T^2 dy \quad (2.133)$$



实际上， $\Delta\phi$ 是双折射效应引起的相位差，它是与探针束的波长三次方 $\lambda^3$ 成正比，只有当 $\lambda$ 较短时，才能得证 $\Delta\phi \ll 1$ ，双折射效应对法拉第转角的影响才可以忽略。

### 2.3.2 法拉第转角的测量

因为 $\alpha$ 与 $B_{p\parallel}n_e$ 的线积分成正比，因此通常都是利用同一光路同时进行干涉和偏振的测量，以便分别获得 $B$ 和 $n_e$ 的数据。

#### 1. 检偏法

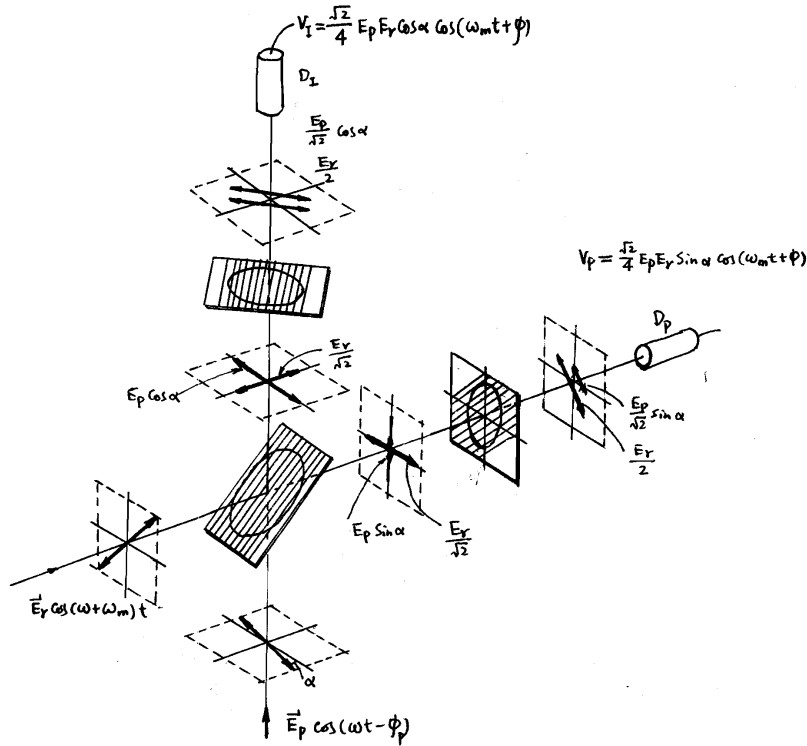


图 2.20: 检偏器。

这是偏振测量的最简单方法，它用检偏器测量偏振旋转角度的强度比，因该强度比与转角的余弦成正比，使它在零度附近测量的灵

灵敏度最低，为提高 $\alpha$ 的测量精度，最好采用正交检偏法，它与转角的 $\sin \alpha$ 成正比，这时在小转角情况下其测量灵敏度最高。

它与干涉仪的主要区别是：将一个对偏振方向灵敏的分束片代替干涉仪中最后的分束片（它与偏振方向不灵敏），通过它使得法拉第旋转后的探测束分解成两个偏振分量，它们的偏振方向分别平行、垂直于初始的偏振方向，然后对这两偏振量进行检测。

在这个例子中，对偏振方向灵敏的分束片是用栅网做成的。在微波和远红外波段，线栅可用做检偏器。这是利用线栅对入射电磁波响应的特点：即当线栅足够厚时，电矢量平行于线方向的电磁波入射到线栅上，它将被完全反射；而入射电磁波检偏方向与线方向垂直时，它将完全透过线栅。这样，利用它就可以把偏振方向相互垂直的两个分量分离开来。

由上面的光路安排的线栅检偏器的特点，就可以计算出两探测器输出的交流信号分别为：

$$V_I = \frac{\sqrt{2}}{4} E_p E_r \cos \alpha \cos(\omega_m t + \phi) \quad (2.134)$$

$$V_P = \frac{\sqrt{2}}{4} E_p E_r \sin \alpha \cos(\omega_m t + \phi) \quad (2.135)$$

这里 $\alpha$ 、 $\phi$ 分别为法拉第转角和等离子体相移。

由上式可见，当 $\alpha \ll 1$ 时， $V_P$ 是与 $\alpha$ 成正比的，只要能够精确地测量信号的幅度，就可以测量法拉第转角 $\alpha$ 。此外，由于 $V_P$ 和 $V_I$ 有相同的相位关系，因而可利用 $V_I$ 做参考信号，而用锁相放大器精确地测量 $V_P$ 的幅度 $\frac{\sqrt{2}}{4} E_r E_p \alpha$ ，这是因为锁相放大器的输出信号是与 $V_{P0} V_{I0} = \frac{1}{8} (E_r E_p)^2 \alpha$ 成正比的。锁相放大器的输出幅度与 $\alpha$ 的关系，可用位于探测束光程上的 $\lambda/2$ 波片来标定。当没有等离子体时，使 $\lambda/2$ 波片转过已知的角度，测量这时锁相放大器的输出电压，它应与转角 $\alpha$ 相等价。但这样测量的 $\alpha$ 角的精度，要受源强度变化的影响。为了消除源

强的变化时对 $\alpha$ 测量的影响，可用 $V_I$ 的输出信号幅度归一。其整个信号处理的框图如下：

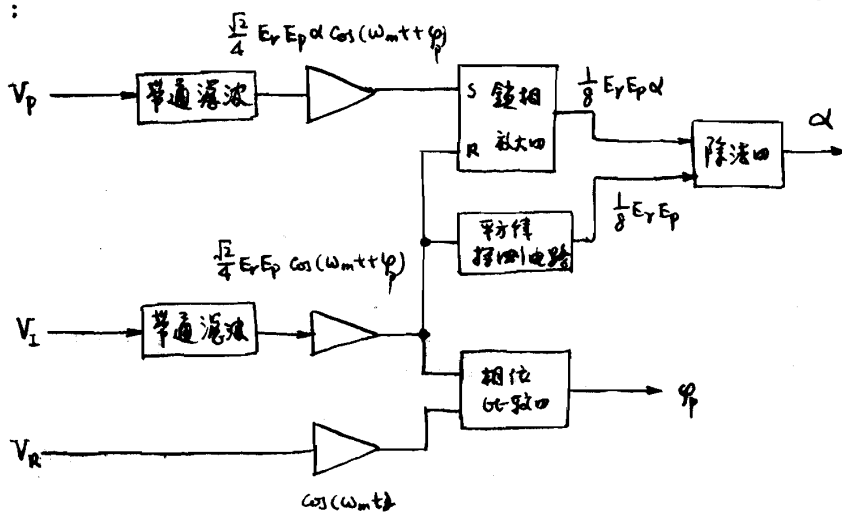


图 2.21: 信号处理框图。

由上框图可知，等离子体相移可用常规的方法同时地被测量。

设入射波是线性偏振波，O波：

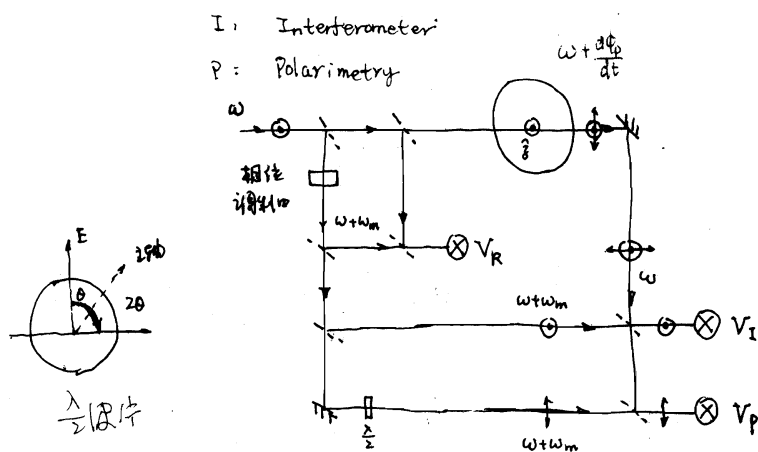
$$\begin{cases} E_z(0) = a \cos \omega t \\ E_x(0) = 0 \end{cases}$$

它可以分解为左右旋波，即：

$$\vec{E}(0) = \vec{E}_r(0) + \vec{E}_l(0) \quad (2.136)$$

其中

$$\begin{cases} E_{rz}(0) = \frac{a}{2} \cos \omega t \\ E_{rx}(0) = \frac{a}{2} \sin \omega t \end{cases}$$



$$V_R = A_R \cos(\omega + \omega_m)t$$

$$V_I = A_I \cos \alpha \cos(\omega_m t + \phi_p)$$

$$V_P = A_P \sin \alpha \cos(\omega_m t + \phi_p)$$

图 2.22: 原理图。

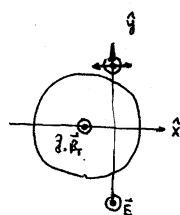


图 2.23: 坐标系。

$$\begin{cases} E_{Iz}(0) = \frac{a}{2} \cos \omega t \\ E_{Ix}(0) = -\frac{a}{2} \sin \omega t \end{cases}$$

通过等离子体后，他们的相移分别是 $\phi_r$ 和 $\phi_l$ ，则

$$\begin{cases} E_{rz}(L) = \frac{a}{2} \cos(\omega t - \phi_r) \\ E_{rx}(L) = \frac{a}{2} \sin(\omega t - \phi_r) \end{cases} \quad (2.137)$$

$$\begin{cases} E_{lz}(L) = \frac{a}{2} \cos(\omega t - \phi_l) \\ E_{lx}(L) = -\frac{a}{2} \sin(\omega t - \phi_l) \end{cases} \quad (2.138)$$

其中 $\phi_l$ 和 $\phi_r$ 分别是左右旋波分量的相移，它与 $\phi_r$ 和 $\phi_l$ 略有差别，当 $\omega_{ce}^2 \ll 1$ 时，它们的差别可忽略（即 $\Delta\mu = \mu_z - \mu_x \ll 1$ ）。他们的合成波为：

$$\begin{cases} E_z(L) = a \cos\left(\frac{\phi_l - \phi_r}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\phi_l + \phi_r}{2}\right) \\ E_x(L) = a \sin\left(\frac{\phi_l - \phi_r}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\phi_l + \phi_r}{2}\right) \end{cases} \quad (2.139)$$

因为 $\phi_l - \phi_r \doteq 2\alpha = \int \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{\omega^2 c} dl$ ， $\phi_l + \phi_r = 2\phi_p = 2r_e \lambda \int n_e dl$ ，那么

$$\begin{cases} E_z(L) = a \cos \alpha \cos(\omega t - \phi_p) \\ E_x(L) = a \sin \alpha \cos(\omega t - \phi_p) \end{cases} \quad (2.140)$$

对于干涉仪： $E_{Rz} = b \cos(\omega + \omega_m)t$ ， $E_{Rx} = 0$ ，

$V_I \propto ab \cos \alpha \cos(\omega_m t + \phi_p)$

对于偏振仪： $E_{Rz} = 0$ ， $E_{Rx} = b \cos(\omega + \omega_m)t$ ，

$V_P \propto ab \sin \alpha \cos(\omega_m t + \phi_p)$

由于干涉仪信号 $V_I \propto ab \cos \alpha \cos(\omega_m t + \phi_p)$ 与 $V_R \propto ab \cos \omega_m t$ 的相位比较，可测得等离子体所产生的相移：

$$\phi_p = r_e \lambda \int n_e dl \quad (2.141)$$

另一方面，由于干涉仪与偏振仪信号的幅度比为：

$$R = \frac{V_I}{V_P} = \tan \alpha \simeq \alpha \quad (\text{当 } \alpha \ll 1 \text{ 时}) \quad (2.142)$$

可测得法拉第转角

$$\alpha = \int_0^L \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{2\omega^2 c} dy = 2.63 \times 10^{-25} \lambda^2 [\mu m] \int_0^L n_e B_{p\parallel} dy \quad (2.143)$$

## 2. 偏振调制法(一)

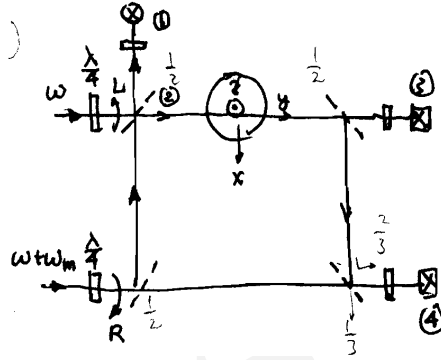


图 2.24: 偏振调制法一。

$\frac{\lambda}{4}$ 波片的作用: 当入射线偏振波的 $\vec{E}$ 与其主轴的夹角为 $\pm\frac{\pi}{4}$ 时, 其输出光为圆偏振光, 且旋转方向相反。

设入射波为左右旋波, 且角频率分别为 $\omega$ 和 $\omega + \omega_m$ , 即

$$Z_L = a \cos \omega t, \quad Z_R = a \cos(\omega + \omega_m)t$$

$$X_L = -a \sin \omega t, \quad X_R = a \sin(\omega + \omega_m)t$$

在1,2处电场相同, 即:

$$Z_{1L} = \frac{2}{2} a \cos \omega t, \quad Z_{2R} = \frac{2}{2} a \cos(\omega + \omega_m)t \quad (2.144)$$

$$X_{1L} = -\frac{2}{2} a \cos \omega t, \quad X_{2R} = \frac{2}{2} a \cos(\omega + \omega_m)t \quad (2.145)$$

它们的合成波为:

$$Z_{1,2} = \sqrt{2} a \cos\left(\frac{1}{2} \omega_m t\right) \cos\left(\omega + \frac{1}{2} \omega_m t\right)$$

$$X_{1,2} = \sqrt{2} a \sin\left(\frac{1}{2} \omega_m t\right) \cos\left(\omega + \frac{1}{2} \omega_m t\right)$$

它们是电矢量的 $\frac{1}{2}\omega_m$ 的角频率旋转的线偏振波。在1处z分量的干涉仪信号为:

$$V_{1z} \propto \cos \omega_m t \quad (2.146)$$

通过等离子体后, 在3处的波电场为:

$$\begin{aligned} Z_{3L} &= \frac{1}{2}a \cos(\omega t - \phi_l) & Z_{3R} &= \frac{1}{2}a \cos[(\omega + \omega_m)t - \phi_r] \\ X_{3L} &= -\frac{1}{2}a \sin(\omega t - \phi_l) & X_{3R} &= \frac{1}{2}a \sin[(\omega + \omega_m)t - \phi_r] \end{aligned}$$

它们的Z分量的干涉信号为:

$$V_{3Z} \propto \cos(\omega_m t + 2\alpha) \quad (2.147)$$

在4处的波电场为:

$$\begin{cases} Z_{4L} = \frac{2}{2}a \cos(\omega t - \phi_l) \\ X_{4L} = -\frac{2}{2}a \sin(\omega t - \phi_l) \end{cases} \quad (2.148)$$

$$\begin{cases} Z_{4R} = \frac{2}{2}a \cos[(\omega + \omega_m)t - \phi_R] + \frac{2}{2}a \cos(\omega + \omega_m)t \\ X_{4R} = \frac{2}{2}a \sin[(\omega + \omega_m)t - \phi_R] + \frac{2}{2}a \sin(\omega + \omega_m)t \end{cases} \quad (2.149)$$

它们的z分量的干涉信号为:

$$\begin{aligned} V_{4z} &\propto \cos(\omega_m t + 2\alpha) + \cos(\omega_m t + \phi) \\ &\propto \cos \frac{\phi_r}{2} \cos(\omega_m t + \alpha + \frac{\phi_l}{2}) \end{aligned} \quad (2.150)$$

由此可得:

$$\begin{cases} V_{1z} = A_1 \cos \omega_m t \\ V_{3z} = A_3 \cos(\omega_m t + 2\alpha) \\ V_{4z} = A_4 \cos(\omega_m t + \alpha + \frac{\phi_l}{2}) \end{cases}$$

$V_{1z}$ 和 $V_{3z}$ 的相位比较得到:

$$2\alpha \equiv \phi_l - \phi_r = a \quad (2.151)$$

$V_{1z}$ 和 $V_{4z}$ 的相位比较得到:

$$\alpha + \frac{\phi_l}{2} = \phi_l - \frac{\phi_r}{2} = b \quad (2.152)$$

由此可得:

$$\phi_P \equiv \frac{\phi_l + \phi_r}{2} = 2b - \frac{3}{2}a \quad (2.153)$$

### 3. 偏振调制法(二)

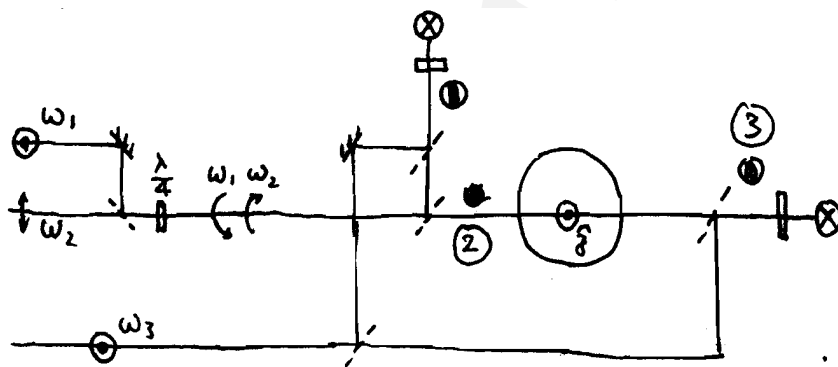


图 2.25: 偏振调制法二。

探针束:

- 角频率 $\omega_1$ : 右旋波
- 角频率 $\omega_2$ : 左旋波
- 角频率 $\omega_3$ : 线偏振波 $\vec{E} \parallel \hat{z} \parallel \vec{B}_T$

在2处波的电场为:

$$Z_{2r} = a \cos \omega_1 t, Z_{2l} = a \cos \omega_2 t$$

$$X_{2r} = a \sin \omega_1 t, X_{2l} = -a \sin \omega_2 t$$



通过等离子体后在3处的波电场为:

$$Z_{3r} = a \cos(\omega_1 t - \phi_r), Z_{3l} = a \cos(\omega_2 t - \phi_l)$$

$$X_{3r} = a \sin(\omega_1 t - \phi_r), X_{3l} = -a \sin(\omega_2 t - \phi_l)$$

本振束电场为:

$$Z_{1o} = b \cos \omega_3 t \quad (2.154)$$

检偏器测量z分量, 探测器输出的干涉信号为:

$$\begin{aligned} V_S = & a^2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + 2\alpha] \quad (V_{S1}) \\ & + ab \cos[(\omega_1 - \omega_3)t - \phi_r] \quad (V_{S2}) \\ & + ab \cos[(\omega_1 - \omega_3)t - \phi_l] \quad (V_{S3}) \end{aligned} \quad (2.155)$$

在1处, 参考干涉仪的波电场为:

$$Z_{1r} = a \cos \omega_1 t, Z_{1l} = a \cos \omega_2 t, Z_{1o} = b \cos \omega_3 t$$

$$X_{1r} = a \sin \omega_1 t, X_{1l} = -a \sin \omega_2 t$$

检偏器测量z分量, 其探测器输出的干涉信号为:

$$\begin{aligned} V_R = & a^2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t \quad (V_{R1}) \\ & + ab \cos(\omega_1 - \omega_3)t \quad (V_{R2}) \\ & + ab \cos(\omega_2 - \omega_3)t \quad (V_{R3}) \end{aligned} \quad (2.156)$$

则 $V_{S1}$ 与 $V_{R1}$ 间的相位比较, 可得到 $2\alpha$ 。同理,  $V_{S2}$ 与 $V_{R2}$ 的相位比较可得 $\phi_r$ ,  $V_{S3}$ 与 $V_{R3}$ 间的相位比较, 可得 $\phi_l$ , 由 $\phi_l$ 与 $\phi_r$ 的平均得到 $\phi_P \equiv (\phi_l + \phi_r)/2$ 。

### ▲激光等离子体中强磁场的测量

参考文献:

- Physics of Plasmas 9 (2002), 2244
- Plasma Phys. Control. Fusion 44 (2002), B233
- Physical Review E70 (2004), 026401

自生磁场产生机制:

1. 不平行的温度和密度梯度  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{en_e} \nabla(k_B T_e) \times \nabla n_e$
2. 激光脉冲本身的辐射压强
3. 快电子电流

利用激光-等离子体相互作用中自生的高谐波作探针束:

1. 这些谐波在临界密度处产生, 各向同性传播;
2. 其偏振方向与入射作用束的偏振方向相同;
3. 其产生时间与磁场产生时间相同;
4. 可测量方向  $\vec{k} \perp \vec{B}$ 。

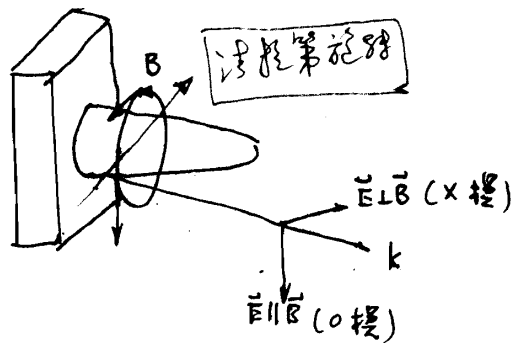


图 2.26: 利用X波测量磁场。

## 2.4 阿贝尔(Abel)变换

从上两节可以看到，干涉法和偏振法，以及后面几章的许多其它诊断方法，都有个共同的特点，它们测量的都是某个物理量沿通过等离子体的一条弦线的积分（平均值）。现在的问题是如何从可得到的弦测量导出所考虑的物理量的局域值。然而，许多等离子体都具有圆柱对称的特点，即其特征物理量在柱坐标系中 $(r, \theta, z)$ 与角度及轴坐标无关。这就使得我们能够利用Abel变换的已知的数学特征，解决从弦测量导出径向分布的问题。

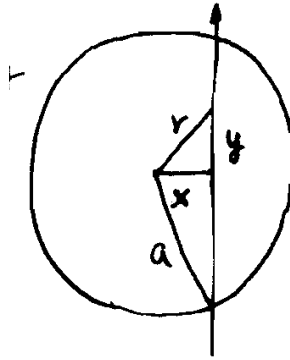


图 2.27: 阿贝尔变换。

现在让我们考虑一个柱对称量 $f(r)$ ，其可得到的测量量是弦积分：

$$F(x) = \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(r) dy = 2 \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(r) dy \quad (2.157)$$

把积分变量变为 $r$ ，则

$$F(x) = 2 \int_x^a f(r) \frac{r dr}{\sqrt{r^2-x^2}} \quad (2.158)$$

它就是熟知的Abel积分方程，它的解就是我们所要求的量 $f(r)$ ：

$$f(r) = -\frac{1}{\pi} \int_x^a \frac{dF}{dx} \frac{dx}{\sqrt{x^2-r^2}} \quad (r \geq a \text{ 时, 有 } f(r) = 0) \quad (2.159)$$

这样我们就有了一个简单公式，利用它可以从弦积分测量 $F$ 求得径向分布函数，这个过程常称之为Abel变换。

## 2.5 反射法

频率为 $f$ 的电磁波在密度单调增长（沿波传播方向）的等离子体中传播时，若达到截止层（即 $n_e = n_c$ ），波将被截止层反射，并沿着原入射方向传播回去。若测量到了反射波，就有可能利用它来测量等离子体密度，这就是所谓反射法。

对于电离层等离子体，电子密度早就用反射雷达测量的，其原理就是反射法。雷达发射的一定频率的电磁波，在电离层传播时，若达到截止层，即 $f = f_{pe}$ 时，它就被反射。反射层的位置就由反射脉冲相对于发射脉冲的时间延迟决定（雷达原理）。这样，通过扫雷频率，就可以测定电离层不同高度处的电子密度（当然要求电子密度随高度分布式单调上升的）：

$$\begin{cases} n_e(h) = 1.24 \times 10^{-2} f^2 & [m^{-3}] \\ h = c \Delta t / 2 \end{cases}$$

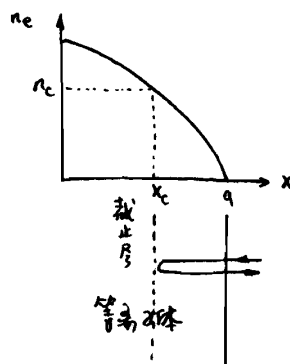


图 2.28: 反射法。

这里假定了波在电离层中传播距离远小于电离层到地球的距离。如果电磁波频率为1GHz，那么它的截止密度是 $1.24 \times 10^{16} m^{-3}$ 。所不同的是，由于实验室等离子体尺寸小，源与反射层的距离短，反射信号的时间延迟是很小的（典型的是几个纳秒），因而测量的不是反射波与入射波间的时间

延迟，而是相位差。然而相位通常也是利用相干干涉效应测量的，因而反射法实际上也是干涉法。

其实验安排如图所示，电磁波由位于等离子体边界上的天线射入等离子体，它在截止层处被反射，并在发射点附近探测该反射波。由此可见，它实际上是迈克尔逊干涉仪的结构，我们测量的是反射波相对于入射波的相位。由于这个相位携带反射点位置的信息，因而它有可能测量电子密度分布。但它与反射雷达不同，这个相位差不仅与反射点和发射点间的距离有关，而且还与这区间中的等离子体折射系数有关，这个干涉仪的情况一样，它会改变相位延迟。因而在推算反射层位置时，必须考虑整个光程上的等离子体折射系数的变化，故从相位延迟导出反射层的位置并不是直接了当的。

### 2.5.1 相位延迟的计算

因为反射法测量等离子体折射系数涉及电磁波在截止区附近的传播，这时因为 $\mu \rightarrow 0$ 和 $\lambda \rightarrow \infty$ ，几何光学近似不适用，必须用全波解的方法求解波动方程。

为简单起见，我们假定：(1)入射波是寻常波；(2)波传播是一维的。它在等离子体中传播时满足下述的波动方程：

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \mu^2(\omega, x) E = 0 \quad (2.160)$$

可以证明，当

$$\frac{\lambda}{2\pi} \left| \frac{d\mu}{dx} \right| \ll 1 \quad \text{或} \quad \frac{|\nabla k|}{k^2} \ll 1, \quad L_n \gg \lambda$$

时，该波动方程有如下的形式解：

$$E(x) = E_0(x) e^{i\phi(x)} \quad \phi(x) = \pm \frac{\omega}{c} \int \mu(x) dx$$

这就是干涉法和偏振法得以应用的基本依据。实际上应用时都选择电磁波频率远大于等离子体截止频率，上述条件一般都满足。

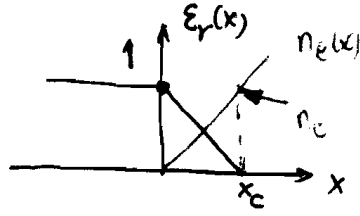


图 2.29: 相位延迟计算。

当电磁波在截止层附近传播时，必须求解波动方程。一般情况下，波动方程必须数值求解。只有几种简单情况下才有精确的解析解。这里我们讨论最简单的一种情况，即假定：在截止点附近等离子体介电常数是线性变化的，即：

$$n_e(x) = n_c(\omega) \frac{x}{x_c} \quad (2.161)$$

其中  $x_c$  是截止点的坐标， $n_c(\omega)$  为波频率为  $\omega$  时的临界截止密度。而介电常数为：

$$\epsilon_r(x) = \mu^2(x) = 1 - \frac{n_e(x)}{n_c} = 1 - \frac{x}{x_c} \quad (2.162)$$

在这种情况下，波动方程可改写为：

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{x}{x_c}\right) E = 0 \quad (2.163)$$

为了简化计算，作如下的变量替换：

$$\xi = \left(\frac{\omega^2}{c^2 x_c}\right)^{1/3} (x_c - x) = \left(\frac{\omega}{c} x_c\right)^{2/3} \epsilon_r(x) \quad (2.164)$$

则波动方程变为：

$$\frac{d^2 E}{d\xi^2} + \xi E = 0 \quad (2.165)$$

它是个标准的Airy方程，它的一般解是Airy函数  $A_i(\xi)$  和  $B_i(\xi)$  的线性组合，其待定系数由边界定：(1)  $\xi < 0$  时， $E(\xi) \rightarrow 0$ ；(2)  $E(\xi)$  在  $\xi = 0$  处连续；(3)  $\frac{dE}{d\xi} = 0$  处连续。

从数学手册可以查到Airy方程( $E'' + \xi E = 0$ )的解为:

$$E(\xi) = \begin{cases} \sqrt{x} \left[ A J_{1/3} \left( \frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) + B J_{-1/3} \left( \frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) \right] & \xi > 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{\pi} (-\xi)^{1/2} A K_{1/3} \left[ \frac{2}{3} (-\xi)^{3/2} \right] & \xi < 0 \end{cases}$$

其中 $J$ 和 $K$ 分别是第一类及第二类贝塞尔函数。利用边界条件可以得到 $\xi > 0$ 时候的解为:

$$E(\xi) = A \sqrt{x} \left[ J_{1/3} \left( \frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) + J_{-1/3} \left( \frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) \right] \quad (2.166)$$

由此可见, 由于截止层对入射电磁波的反射, 使得在 $\xi > 0$ 处的波动方程的解是驻波解。当 $\xi \gg 1$ 时, 我们利用贝塞尔函数渐进表达式可以得到:

$$E(\xi) \propto \frac{3}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(x^3/3 - \xi x) dx \simeq \frac{3}{\pi^{1/2} \xi^{1/4}} \times \cos \left( \frac{2}{3} \xi^{3/2} - \frac{1}{4} \pi \right), \quad \xi \gg 1 \quad (2.167)$$

利用 $x_c = \left| \frac{d\epsilon_r}{dx} \right|_{x_c}^{-1}$ , 可以得到上述渐进解的适用条件是:

$$\begin{aligned} \xi &= \left( \frac{\omega}{c} x_c \right)^{2/3} \epsilon_r(x) = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \left| \frac{d\epsilon_r}{dx} \right|^{-1} \right)^{2/3} \epsilon_r \gg 1 \\ &\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\epsilon_r^{3/2}}{\left| \frac{d\epsilon_r}{dx} \right|} \gg 1 \end{aligned} \quad (2.168)$$

这个不等式与几何光学近似成立的条件:

$$\frac{\lambda}{2\pi} \left| \frac{d\mu}{dx} \right| \ll 1 \quad \text{或} \quad \frac{|\nabla k|}{k^2} \ll 1, \quad L_n \gg \lambda$$

是等价的, 因为 $\epsilon_r(x) = \mu^2(x)$ 。这样, 渐进解也具有几何光学解相同的形式, 这是因为相位因子为:

$$\frac{2}{3} \xi^{3/2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2}{3} \frac{\omega}{c} x_c \epsilon_r^{3/2}(x) - \frac{\pi}{4} = \frac{\omega}{c} \int_x^{x_c} \sqrt{1 - \frac{x}{x_c}} dx - \frac{\pi}{4} = \frac{\omega}{c} \int_x^{x_c} \mu(x) dx \quad (2.169)$$

由此可见，与几何光学解的相位因子相比较，它只是多了常数的相移 $(-\frac{\pi}{4})$ 。这样，如果入射波是在 $x = 0$ 处射入等离子体，那么在该处反射波与入射波之间的相位移为：

$$\phi = 2\frac{\omega}{c} \int_0^{x_c} \mu(x)dx - \frac{\pi}{2} \quad (2.170)$$

它与几何光学解给出的相位移只差了 $\pi/2$ 。因为在通常条件下，有：

$$2\frac{\omega}{c} \int_0^{x_c} \mu(x)dx \gg \frac{\pi}{2} \quad (2.171)$$

所以其相位修正是很小的。

当截止层附近电子密度不是线性函数时（即任意函数），我们可以在该截止点附近，对分布函数做泰勒展开，只要下述条件满足：

$$\frac{d^2 n_e(x)}{dx^2} \delta x \ll \frac{dn_e(x)}{dx} \quad (2.172)$$

则截止层附近的电子密度分布仍可用线性函数近似，这样，上述渐进解仍适用。因此，渐进解适用的条件是：

### 1. 几何光学近似成立

$$\xi = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \left| \frac{d\epsilon_r}{dx} \right|_{x_c}^{-1} \right)^{2/3} \epsilon_r = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \left| \frac{d\epsilon_r}{dx} \right|_{x_c}^{-1} \right)^{2/3} \left| \frac{\epsilon_r}{dx} \right|_{x_c} (x_c - x) \gg 1 \quad (2.173)$$

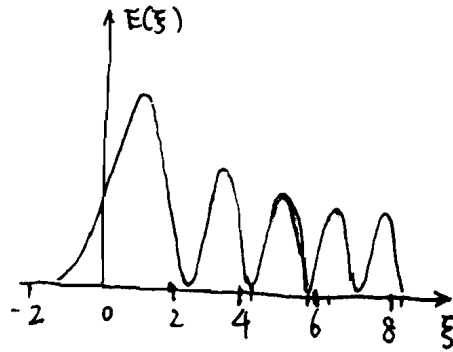
实际上，只要取 $\xi = 5$ ，渐进解的误差就可以小于1%。这样，上述要求可根据实际情况改写为：

$$\delta x \equiv |x_c - x| \geq 5 \left[ \frac{\lambda_0}{2\pi} \left| \frac{d\epsilon_r}{dx} \right|_{x_c}^{-1/2} \right]^{2/3} = 5 \left[ \frac{\lambda_0 L_n^{1/2}}{2\pi} \right]^{2/3} \quad (2.174)$$

### 2. $\epsilon_r(x)$ 的线性近似成立

$$\left| \frac{d^2 \epsilon_r}{dx^2} \right|_{x_c} \delta x \ll \left| \frac{d\epsilon_r}{dx} \right|_{x_c} \quad (2.175)$$



图 2.30:  $\epsilon_r$ 线性近似下的精确解。

将  $\delta x$  的表达式代入上式，得到：

$$\left| \frac{d^2 \epsilon_r}{dx^2} \right|_{x_c} \ll \left| \frac{d\epsilon_r}{dx} \right|_{x_c}^{4/3} k_0^{2/3} / 5 \simeq \left| \frac{d\epsilon_r}{dx} \right|_{x_c}^{4/3} \lambda_0^{-2/3} \quad (2.176)$$

该波动方程在  $\epsilon_r$  线性近似下的精确解如图所示，在  $\xi > 0$  处是个驻波解；而在  $\xi < 0$  处（即  $x > x_c$ ）， $E(\xi)$  近似为指数衰减，因此波是在有限厚度范围内反射的。由贝塞尔函数的渐进表达式：

$$K_\nu(|z|) \propto e^{-|z|}, \quad |z| > 1 \quad (2.177)$$

可以求得  $E(\xi)$  衰减到峰值的  $e^{-1}$  时的特征长度，即为反射层的有效厚度，它是反射计的空间取样厚度：

$$|Z| = 1 \Rightarrow \frac{2}{3} |\xi|^{3/2} = 1 \quad (2.178)$$

即：

$$\Delta x \doteq \left( \frac{c^2}{\omega^2} x_c \right)^{1/3} = \left( \frac{\lambda_0^2 L_n}{4\pi^2} \right)^{1/3} \quad (2.179)$$

这里：

$$x_c = \left| \frac{d\epsilon}{dx} \right|_{x_c}^{-1} = \left| \frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dx} \right|_{x_c}^{-1} = L_n \quad (2.180)$$

总之，由上述分析可知，当电磁波在等离子体中传播达到截止层时，在等离子体边界处，反射波与入射波的相位差可用渐进表达式表示：

$$\phi(f) = \frac{4\pi f}{c} \int_0^{x_c(f)} \left[ 1 - \frac{f_{pe}^2(x)}{f^2} \right] dx - \frac{\pi}{2} \quad (2.181)$$

由此可见，单一频率反射波的相位测量，不能直接得到平均密度，因为截止点的位置是未知的，这是反射计的不足之处（与干涉法相比）。但是，如果入射波的频率是扫描的，则从不同频率下的相位延迟测量就可以推导出反射光路上的电子密度分布。

从相位延迟表达式，我们可以计算群延迟时间：

$$\tau(f) \equiv \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(f)}{df} = \frac{2}{c} \int_0^{x_c(f)} \frac{f}{\sqrt{f^2 - f_{pe}^2(x)}} dx \quad (2.182)$$

做变量替换：

$$u(x) \equiv f_{pe}^2(x), \quad v \equiv f^2$$

代入前式得到：

$$v^{1/2} \tau(\sqrt{v}) = \frac{2}{c} \int_0^{x_c(\sqrt{v})} \frac{dx}{\sqrt{v - u(x)}} \quad (2.183)$$

等式两边同乘以  $\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{w - v}}$ ，并对  $v$  从 0 积分到  $w$ ，得到：

$$\frac{1}{\pi} \int_0^w \frac{v^{-1/2} \tau(\sqrt{v})}{\sqrt{w - v}} dv = \frac{2}{\pi c} \int_0^w dv \int_0^{x_c(\sqrt{v})} \frac{dx}{\sqrt{w - v} \sqrt{v - u(x)}} \quad (2.184)$$

改变上式右边的积分顺序，得到：

$$\frac{2}{\pi c} \int_0^w dv \int_0^{x_c(\sqrt{v})} \frac{dx}{\sqrt{w - v} \sqrt{v - u(x)}} = \frac{2}{\pi c} \int_0^{x_c(\sqrt{w})} dx \int_u^w \frac{dv}{\sqrt{w - v} \sqrt{v - u(x)}} \quad (2.185)$$

再做变量替换：

$$v = w \cos^2 \theta + u \sin^2 \theta \quad (2.186)$$

上式的积分可得到:

$$\frac{2}{\pi c} \int_0^{x_c(\sqrt{w})} dx \int_u^w \frac{dv}{\sqrt{w-v}\sqrt{v-u(x)}} = \frac{2}{c} x_c(\sqrt{w}) \quad (2.187)$$

故有:

$$x_c(\sqrt{w}) = \frac{c}{2\pi} \int_0^w \frac{v^{-1/2} \tau(\sqrt{v})}{\sqrt{w-v}} dv = \frac{c}{\pi} \int_0^{f_{pe}} \frac{\tau(f)}{\sqrt{f_{pe}^2 - f^2}} df \quad (2.188)$$

把 $\tau(f)$ 表达式带入上式:

$$x_c(f_{pe}) = \frac{c}{2\pi^2} \int_0^{f_{pe}} \frac{d\phi(f)}{df} \frac{df}{\sqrt{f_{pe}^2 - f^2}} \quad (2.189)$$

它就是相位延迟表达式的阿贝尔变换。由此可知,为了求出与截止频率 $f_{pe}$ 相对应的截止点的位置,必须使入射频率从0到 $f_{pe}$ 扫描。并测量每个频率下的 $d\phi/df$ 值。实际上,入射波频率不可能从 $f=0$ 开始扫描,而是从某一最低频率 $f_1$ 开始扫描。因此, $f < f_1$ 的相位信息丢失了。它可以从假定的密度分布或者用其它方法测量的密度分布计算这部分边界密度分布对积分的贡献。但实际上这部分的贡献是可以忽略的,这是因为对足够低的频率,入射波实际上是在边界附近反射的, $d\phi/df$ 很小,它对阿贝尔积分的共享很小,可忽略。

## 2.5.2 反射计

### 1. 简单反射计

它是零拍探测的反射计。接收的信号为:

$$S(t) = a(t) \cos[\omega_0 t + \phi(t)] \quad (2.190)$$

其中 $a(t)$ (幅度)和 $\phi(t)$ (相角)是随时间变化的函数(在 $f_0^{-1}$ 的时间尺度内)。频率 $\omega_r = d\phi/dt$ 可以认为是反射波的瞬时多普勒频移。在没有密度涨落的情况下, $a(t) \simeq$ 常数,则相位延迟就携带反射层的信

息。在有密度涨落的情况下， $a(t)$ 和 $\phi(t)$ 就携带涨落的统计性质的信息。在如图所示的零拍探测的条件下，低通滤波器(LPF)的截止频率，要保证 $\omega_c > |\omega_r|$ 。这种探测方法的缺点是失去了相位变化的符号。其次，它的动态范围( $\phi$ 的动态范围)受源的AM噪声和混频器的 $f^{-1}$ 噪声的限制。

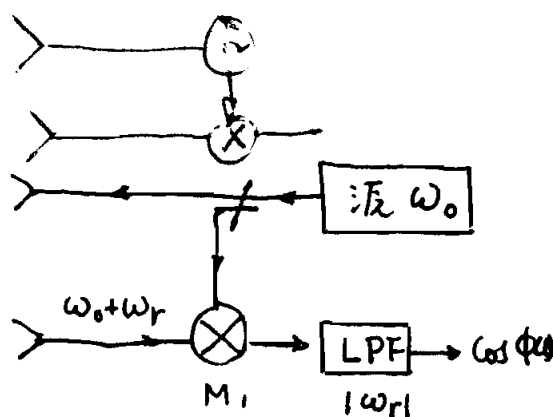


图 2.31: 简单反射计。

## 2. 外差探测反射计

为了避免这些缺点，可采用外差探测的方法。如图所示用另一个微波源做本振，其频率为 $\omega_1 (\simeq \omega_0)$ ，其中频频率约为 $|f_0 - f_1| \simeq 500\text{MHz}$ 。通过两个信号的相位比较，可以获得 $\omega_r$ (即 $\phi(t)$ )的信息。

在这种方案中，为了补偿微波源的频率跳变和漂移，可以进一步采取稳频措施，如图所示，可在前面原理图的基础上加以稳定的中频级。O2是晶体控制的稳定的振荡器，其频率为 $\omega_2$ ，它满足：

$$|\omega_r| \ll \omega_2 < |\omega_0 - \omega_1| \quad (2.191)$$

从 $M_4$ 输出的单边带信号 $\omega_0 - \omega_1 + \omega_2$ 通过带通滤波器后，在 $M_3$ 与上图中的信号混频后，获得频率为 $\omega_2 - \omega_r$ 的信号。

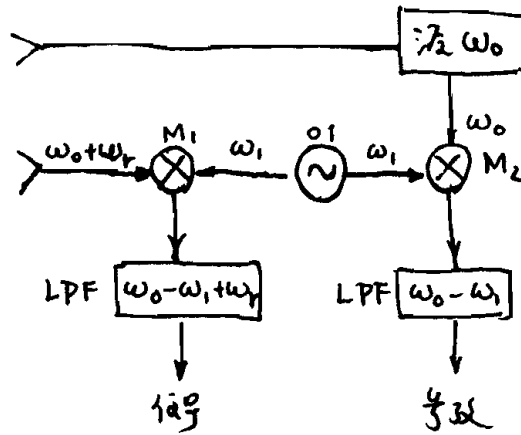


图 2.32: 外差反射计。

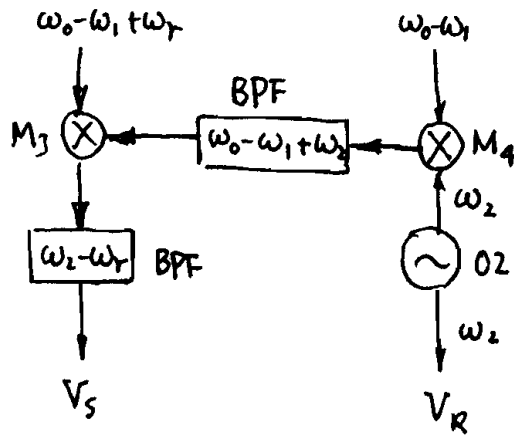


图 2.33: 稳频后的外差反射计。

此外，上述输出信号还可进一步用正交相位检测方法(IQ鉴相器)处理。

### 3. 反射计的应用

#### (a) 测量密度分布 $n_e(r)$

宽带扫频反射计和多道窄带扫频反射计。

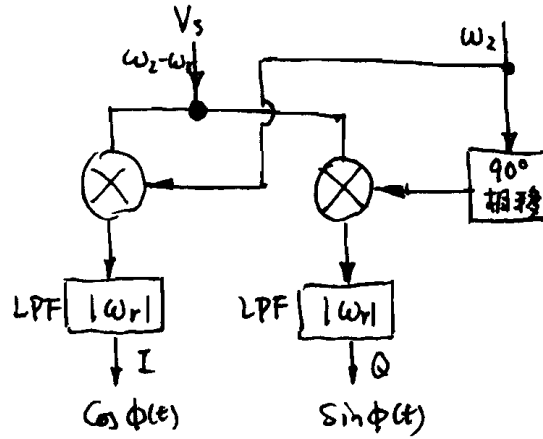


图 2.34: 正交相位检测。

(b) 测量密度涨落  $\tilde{n}_e$ 

使用的是固定频率反射计

反射计对密度的响应如下: (对于中品输出信号)

$$S_{IF}(t) = (E e^{i\phi}) (E_{l0} e^{i\phi_0})^* \quad (2.192)$$

其中  $E = E_0 + \tilde{E}$ ,  $\phi = \phi_0 + \tilde{\phi}$ 。

当  $\tilde{\phi} < 1$  时, 可近似得到:

$$S_{IF}(t) = \left[ E_0 \left( 1 + \frac{\tilde{E}}{E_0} + i\tilde{\phi} \right) \right] E_{l0} \quad (2.193)$$

由此可见,  $S_{IF}$  涨落两  $\tilde{S}_{IF}$  含有  $\tilde{E}$  和  $\tilde{\phi}$  的信息, 对零拍探测的反射计,  $\tilde{E}$  和  $\tilde{\phi}$  对  $\tilde{S}_{IF}$  的贡献是不可区分的。只有外差探测和正交探测才能把  $\tilde{\phi}$  和  $\tilde{E}$  区分开来。

此外, 根据反射计的相位移公式:

$$\phi = 2 \frac{\omega}{c} \int_0^{x_c} \mu dx = 2 \frac{\omega}{c} \int_0^{x_c} \sqrt{\epsilon} dx \quad (2.194)$$

若  $\epsilon = \epsilon_0 + \tilde{\epsilon}$ ,  $\sqrt{\epsilon} = \sqrt{\epsilon_0} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_0} \right)$ ,  $\phi = \phi_0 + \tilde{\phi}$ , 则有

$$\tilde{\phi} = \frac{\omega}{c} \int_0^{x_c} \frac{\tilde{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon_0}} dx \quad (2.195)$$

若在截止点附近密度的梯度是常数，则  $\epsilon_0 = 1 - \frac{x}{x_c}$ 。

由上式积分，可得：

$$\tilde{\phi} = 2 \frac{\omega}{c} x_c \tilde{\epsilon} = 2 \frac{\omega}{c} x_c \frac{\tilde{n}_e}{n_c} \quad (2.196)$$

它与  $\tilde{n}_e$  成正比。因为反射层有一定的厚度  $\Delta x = \left( \frac{c^2}{\omega^2} x_c \right)^{1/3} = (k_0 x_c)^{1/3} / k_0$ ，因此它只对长波涨落灵敏，即  $|k| < k_G = \frac{\phi}{\Delta x}$ 。理论研究表明：反射计的相位响应对临界点附近最灵敏，而此处WKB近似不适用，上式只是粗略的估计。

(c) 反射计的基本限制

- i. 中心区：在等离子体中心区， $dn_e/dr$  近于零。对于O波传播，可使  $\epsilon_r$  是非线性变化。同时  $L_n$  很大，使波的衰减长度很长，从而使得它在还没有完全衰减之前又达到传播区，使反射信息的分辨比较困难。对于X波反射，因为  $\epsilon_r$  与  $\omega_{ce}$  有关，该限制可避免。
- ii. 极边缘区：在边缘区密度梯度通常比较大，对O波反射计，相应的波长也比较长，使得几何光学近似不适用。而且，如果梯度足够陡，从密度梯度的反射也是可能的。
- iii. 电子回旋吸收区：当波频率接近于  $\omega_{ce}$  时(或其谐波频率时)，辐射吸收是可能发生的。如果波在达到反射层之前通过吸收区，则反射测量就变得不可行了。

(d) 波模的选择

O波—它只能测量到最高密度的97%处；

X波—它可以测量整个剖面的分布。

4. 与干涉仪的比较

- (a) 反射计是局域的，因相位测量是积分到  $\mu \rightarrow 0$  处；干涉仪是测量到  $\mu$  的微小变化，它的测量不是局域的。

- (b) 反射计是测量临界密度层相对于固定点的位置，因此它可以测量等离子体的整体运动（即使密度分布形状和幅度不变）。干涉仪测量的是密度分布的变化，对等离子体整体运动不灵敏。
- (c) 反射计为获得局域的密度分布，不需要柱对称的假定；而干涉仪需要柱对称的假定。

### ▲ 用于激光等离子体密度测量的干涉仪

激光等离子体特点：密度高，梯度大

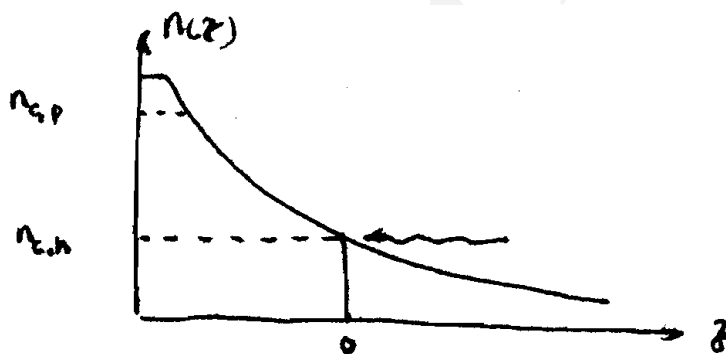


图 2.35: 激光等离子体密度剖面。

密度剖面分布可近似为：

$$n_e(z) = n_{c,h} \exp\left(-\frac{8r^2}{L^2}\right) \exp\left(-\frac{z}{l}\right) \quad (2.197)$$

其中：

$L$ : 为横向密度衰减到峰值的 $e^{-2}$ 的半径,  $L \sim 100\mu\text{m}$ 量级

$l$ : 为轴向密度衰减的特征长度,  $l \sim 10\mu\text{m}$

1. 折射偏转角  $\psi = \tan^{-1} \left[ 0.313 \frac{L}{l} \left( \frac{\lambda_p}{\lambda_h} \right)^2 \right]$



当 $\lambda_p \simeq \frac{1}{2}\lambda_h$ 时,  $\psi \simeq 40^\circ$ ;  $\lambda_p \simeq \frac{1}{4}\lambda_h$ 时,  $\psi \simeq 11^\circ$   
 折射效应是比较严重的, 可以应用短 $\lambda_p$ 做探针束。

## 2. 临界密度区附近条纹间距-分辨率

$$(\Delta z)_{\text{条纹间距}} \simeq \frac{l\lambda_h^2}{L\lambda_p} \quad (2.198)$$

当 $\lambda_h = 1.06\mu m$ ,  $\lambda_p = 0.265\mu m$ ,  $l = 10\mu m$ ,  $L = 100\mu m$ 时, 条纹间距为:

$$(\Delta z)_{\text{条纹间距}} \simeq 2\mu m \quad (2.199)$$

## 3. 探针束脉宽

$$\Delta\tau \leq \frac{(\Delta z)_{\text{条纹间距}}}{4v_c} \quad (2.200)$$

当 $v = 2.5 \times 10^4 m/s$ 时,  $\Delta\tau \sim 20ps$