等离子体诊断方法

俞昌旋 教授

更新日期：2012 年 12 月 6 日

目录

第三章　电磁波散射

3.1　电磁波从自由电子的散射

3.1.1　加速运动电荷的辐射(电偶极辐射)

当运动电荷的辐射光子能量hf远小于带电粒子的动能W，即：

$$h\nu \ll W \tag{3.1}$$

时，加速运动电荷的辐射过程可用经典辐射理论处理。根据经典辐射理论，加速运动电荷产生的辐射电磁场为：

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{R},t) = \dfrac{q}{4\pi c^2\epsilon_0}\left\{\dfrac{\hat{s}\times[(\hat{s}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{v}}]}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{s})^3 R'}\right\}_{t'} \\ \vec{B}(\vec{R},t) = \dfrac{1}{c}\hat{s}\times\vec{E}(\vec{R},t) \end{cases} \tag{3.2}$$

其中$\vec{\beta} = \vec{v}/c$，散射方向上的单位向量$\hat{s} \equiv \vec{R}'/R'$，当$R \gg r$时，$R \simeq R'$和$\hat{s} \parallel \hat{R}$；$t'$为推迟时间：

$$t' = t - \frac{R'}{c} \tag{3.3}$$

它在观察点P处单位立体角内的辐射功率为：

$$\begin{aligned} \frac{dP(\vec{R},t)}{d\Omega} &= R'^2(\vec{E}\times\vec{H})\cdot\hat{s} = R'^2 c\epsilon_0|\vec{E}(\vec{R},t)|^2 \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\left\{\frac{\hat{s}\times[(\hat{s}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{v}}]}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{s})^3 R'}\right\}^2_{t'} \end{aligned} \tag{3.4}$$

由此可见：

(1) 只有做加速运动的带电粒子才会产生辐射。根据加速度产生机制，辐射可分为两类：一种是外力作用下产生的辐射，如回旋辐射及电磁波散射；另一类是碰撞过程产生的辐射，如轫致辐射等。

(2) 质量小的带电粒子所产生的辐射强。在等离子体中，一般离子的辐射远小于电子的辐射，它是可忽略的。

3.1.2 单个自由电子对电磁波的散射

这里先做两个假定：

(1) 入射光子能量比电子能量小很多，即：$hf_i \ll m_{e0}c^2$；

(2) 入射电磁波对电子运动轨迹的扰动可忽略，即：$eE_{io}/m_e\omega_i \ll v_{ie}$

设入射电磁波是单色平面偏振波：

$$\vec{E}_i(\vec{r},t) = \hat{e}E_{i0}\exp\left[i(\omega_i t - \vec{k}_i\cdot\vec{r})\right]$$
$$\vec{B}_i(\vec{r},t) = \frac{\hat{i}\vec{E}_i(\vec{r},t)}{c}$$

其中$\hat{e} \equiv \vec{E}_{i0}/E_{i0}$，$\hat{i} = \vec{k}_i/k_i$。

电子在该辐射场中的运动方程为：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_{e0}\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = -e[\vec{E}_i + \vec{v}\times\vec{B}_i] \tag{3.5}$$

可以解得电子的加速度为：

$$\dot{\vec{v}} = -\frac{e}{m_{e0}\gamma}[\vec{E}_{i0} + \vec{\beta}\times(\hat{i}\times\vec{E}_{i0}) - \vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{E}_{i0})]\exp[i(\omega_i t - \vec{k}_i\cdot\vec{r})] \tag{3.6}$$

其中$\gamma \equiv \sqrt{(1-\beta^2)}$。带入电偶极辐射公式，得到电子在入射电磁波作用下产生的再辐射电场（即散射电场）为：

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_S(\vec{R},t) =& \frac{r_e}{R'}(1-\beta^2)^{1/2}\frac{\hat{s}\times\left\{(\hat{s}-\vec{\beta})\times[\hat{e}+\vec{\beta}\times(\hat{\imath}\times\hat{e})-\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\hat{e})]\right\}}{(1-\hat{s}\cdot\vec{\beta})^3} \\
&\times E_{i0}\exp\left[\imath(\omega_i t'-\vec{k}_i\cdot\vec{r}(t'))\right]
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

其中

$$
r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_{e0}c^2} \qquad \text{为电子经典半径}
$$

$$
\hat{s} = \frac{\vec{R}'}{R'} \simeq \frac{\vec{R}}{R} \qquad (\text{当}|R| \gg \vec{r}\text{时})
$$

若取散射方向垂直于入射电场方向$\hat{s}\perp\hat{e}$（即$\hat{s}\cdot\hat{e}=0$）和$\hat{t}=\hat{s}\times\hat{e}$，上式就变为：

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_s(\vec{R},t) =& -\frac{r_e}{R'}\frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{(1-\beta_s)^3}\left\{\hat{e}\left[(1-\beta_i)(1-\beta_s)-\beta_e^2(1-\cos\theta_s)\right]+\hat{s}[\beta_e\beta_s(1-\cos\theta_s)]\right. \\
&\left.-\hat{t}\left[\beta_t\beta_e(1-\cos\theta_s)-\beta_e(1-\beta_s)\sin\theta_s)\right]\right\}E_{i0}\exp[i(\omega_i t'-\vec{k}_i\cdot\vec{r}(t'))]
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

其中$\beta_s=\vec{\beta}\cdot\hat{s}$，$\beta_e=\vec{\beta}\cdot\hat{e}$，$\beta_i=\vec{\beta}\cdot\hat{\imath}$，$\beta_t=\vec{\beta}\cdot\hat{t}$，$\hat{s}\cdot\hat{\imath}=\cos\theta_s$。由此可见散射电场在一般情况下不再平行于入射电场。在散射实验中，通常是测量线偏振的散射光，即只选取散射电场平行于$\hat{e}$ 的分量。由此可得：

$$
\hat{e}\cdot\vec{E}_s(\vec{R},t) = -\frac{r_e}{R'}E_{i0}\frac{(1-\beta^2)^{1/2}[(1-\beta_i)(1-\beta_s)-\beta_e^2(1-\cos\theta_s)]}{(1-\beta_s)^3}\exp[i(\omega_i t'-\vec{k}_i\cdot\vec{r}(t'))]
\tag{3.9}
$$

以后没有特别说明，$E_s(\vec{R},t)$都是表示$E_s(\vec{R},t)$在$\vec{e}$方向上的分量。由此可计算散射进$\vec{R}$ 处的单位立体角内的平均功率为:

$$
\frac{dP_s(\vec{R})}{d\Omega} = \epsilon_0 c R'^2|E_{s0}|^2 = p_i r_e^2\frac{(1-\beta^2)(1-\beta_i)^2}{(1-\beta_s)^3}\exp\left[i(\omega_i t'-\vec{k}_i\cdot\vec{r}(t))\right]
\tag{3.10}
$$

其中$p_i\equiv P_i/A_i=c\epsilon_0 E_{i0}^2$为入射电磁波的平均功率密度。

现在我们考虑散射波电场的相角，推迟时间t'为：

$$t' = t - \frac{|\vec{R} - \vec{r}|}{c} \simeq t - \frac{R}{c} + \frac{\hat{s}\cdot\vec{r}(t')}{c} \qquad (\text{当}|\vec{R}| \gg |\vec{r}|\text{时}) \tag{3.11}$$

此外，若不考虑入射电磁波对电子运动轨迹的影响，则有：

$$\vec{r}(t') = \vec{r}(0) + \vec{v}\,t' \tag{3.12}$$

带入上式，得到：

$$t' = \frac{t - \dfrac{R}{c} + \dfrac{\hat{s}\cdot\vec{r}(0)}{c}}{1-\beta_s} \tag{3.13}$$

则散射电场的相角为：

$$\begin{aligned}\phi(t) =& \omega_i t' - \vec{k}\cdot\vec{r}(t') \\ =& \omega_i \frac{1-\beta_i}{1-\beta_s}\left[t - \frac{R}{c} + \frac{\hat{s}\cdot\vec{r}(0)}{c}\right] - \vec{k}_i\cdot\vec{r}(0) \\ =& \omega_s\left(t - \frac{R}{c}\right) + \vec{k}\cdot\vec{r}(0)\end{aligned} \tag{3.14}$$

其中：

$$\begin{cases}\omega_s \equiv \omega_i \dfrac{1-\beta_i}{1-\beta_s} \\ \vec{k} = \vec{k}_s - \vec{k}_i \qquad (\text{散射差失}) \\ k_s = k_i \dfrac{1-\beta_i}{1-\beta_s} \\ k = (k_s^2 + k_i^2 - 2k_i k_s \cos\theta_s)^{1/2}\end{cases}$$

当$\beta \ll 1$时，有：

$$\begin{cases}\omega_s = \omega_i + \vec{k}\cdot\vec{v} \\ \vec{k} = \vec{k}_s - \vec{k}_i \\ k_s \simeq k_i \\ k = 2k_i \sin\dfrac{\theta_s}{2}\end{cases}$$

由此可见：

1. 散射波是受多普勒频移了的电磁波，在β
   1极限下，其频移为：$\Delta\omega = \vec{k}\cdot\vec{v} = kv_k$，它是由电子运动速度在$\vec{k}$方向上的投影分量决定；

2. 散射波的相角主要由电子的初始位置决定。

从量子力学角度看，散射可视为光子和电子的弹性散射，它应满足能量和动量守恒（散射前ω_i，$\vec{k}_i$，$\vec{v}$，散射后ω_s，$\vec{k}_s$，$\vec{v}'$）：

$$\begin{cases} \hbar\omega_i + m_e c^2 = \hbar\omega_s + m_e' c^2 \\ \hbar\vec{k}_i + m_e\vec{v} = \hbar\vec{k}_s + m_e'\vec{v}' \end{cases}$$

其中$m_e \equiv m_{e0}(1-\beta^2)^{-1/2}$，$m_e' \equiv m_{e0}(1-\beta'^2)^{-1/2}$，$\beta \equiv v/c$，$\beta' \equiv v'/c$，由此可解得：

$$\omega_s = \omega_i \frac{1-\beta_i}{1-\beta_s + \dfrac{\hbar\omega_i}{m_e c^2}(1-\cos\theta_s)} \tag{3.15}$$

此为康普顿散射频率。由此可见，当$m_e c^2 \gg \hbar\omega_i$时，就有：

$$\omega_s \simeq \omega_s \frac{1-\beta_i}{1-\beta_s} \tag{3.16}$$

其中$\beta_i = \vec{\beta}\cdot\hat{i}$，$\beta_s = \vec{\beta}\cdot\hat{s}$。因此汤姆逊散射是低能光子极限下的康普顿散射。

3.1.3 非相对论近似：$\beta \ll 1$

在非相对论近似下，有：

$$\vec{E}_s(\vec{R},t) = \frac{r_e}{R'}[\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{e})]E_{i0}\exp[i(\omega_s t + \vec{k}\cdot\vec{r}(0)) - k_s R] \tag{3.17}$$

散射功率为：

$$\frac{dP_s(\vec{R})}{d\Omega} = \epsilon_0 c R'^2 |\vec{E}_{s0}|^2 = p_i r_e^2 |\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{e})|^2 \tag{3.18}$$

微分散射截面为：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP_s}{d\Omega}/p_i = r_e^2|\hat{s} \times (\hat{s} \times \hat{e})|^2 \tag{3.19}$$

当散射方向与入射波电矢量的夹角为φ时，即$|\hat{s} \times (\hat{s} \times \hat{e})| = \sin\varphi$，则有

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \sin^2\varphi \tag{3.20}$$

由此可见，只有当$\hat{s} \perp \hat{e}$时，$\frac{d\sigma}{d\Omega}$才达到最大值。因此，散射实验中，都安排散射平面(由$\hat{i}$和$\hat{s}$决定的平面)垂直于$\hat{e}$。散射总截面为：

$$\sigma_T = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 0.665 \times 10^{-28} m^2 = 0.665\text{靶} \tag{3.21}$$

3.2　低温无磁场等离子体的散射

基本的假设：

1. 电子的运动速度远小于光束，即 $\beta \ll 1$，相对论效应可忽略；
2. $\hbar\omega_i \ll m_{e0}e^2$，即量子效应可忽略；

3.2.1　等离子体对电磁波的散射

3.2.2　散射功率谱

单位立体角内的散射功率为：

$$\frac{dP_s}{d\Omega} = c\epsilon_0 R'^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \left|\vec{E}_s(\vec{R}, t)\right|^2 \tag{3.22}$$

散射电场的傅里叶变换为：

$$\vec{E}_s(\vec{R}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_s(\vec{R}, t) e^{-i\omega_s t} dt \tag{3.23}$$

则根据Parseval定理（时域与频域能量守恒）：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\vec{E}_s(\vec{R}, t)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\vec{E}_s(\vec{R}, \omega_s)\right|^2 d\omega_s \tag{3.24}$$

那么散射功率为：

$$\frac{dP_s}{d\Omega} = c\epsilon_0 R'^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\vec{E}_s(\vec{R},\omega_s)\right|^2 d\omega_s \tag{3.25}$$

将上式对ω_s求导，可得散射功率谱：

$$\begin{aligned}\frac{d^2P_s(\vec{R},\omega_s)}{d\Omega d\omega_s} &= c\epsilon_0 R'^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T} \left|\vec{E}_s(\vec{R},\omega_s)\right|^2 \\ &= c\epsilon_0 R'^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T} \left|\int_{-T/2}^{T/2} \vec{E}_s(\vec{R},t) e^{-i\omega_s t} dt\right|^2\end{aligned} \tag{3.26}$$

又因为等离子体中散射电场为：

$$\vec{E}_s(\vec{R},t) = \frac{r_e}{R'} \hat{s} \times (\hat{s} \times \hat{e}) E_{i0} \int n_e(\vec{r},t') e^{i[\omega_i t' - \vec{k}_i \cdot \vec{r}(t')]} d\vec{r}$$

且$t = t' + \dfrac{R - \hat{s}\cdot\vec{r}(t')}{c}$，那么得到$\vec{E}_s$ 的傅里叶变换为：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_s(\vec{R},t) e^{-i\omega_s t} dt &= \frac{r_e \vec{E}_{i0}}{R'} \int e^{-\omega_s t} dt \int n_e(\vec{r},t') e^{i[\omega_i t' - \vec{k}_i \cdot \vec{r}(t')]} d\vec{r} \\ &= \frac{r_e \vec{E}_{i0}}{R'} n_e(\vec{k},\omega)\end{aligned} \tag{3.27}$$

其中用到了替换 $dt = (1-\beta_s)dt' \simeq dt'$，$\omega \simeq \omega_s - \omega_i$，$\vec{k} = \vec{k}_s - \vec{k}_i$。

故散射功率谱为：

$$\begin{aligned}\frac{d^2P_s(\vec{R},\omega_s)}{d\Omega d\omega_s} &= c\epsilon_0 r_e^2 E_{i0}^2 V_s \lim_{T,V_s\to\infty} \frac{1}{2\pi T V_s} \left|n_e(\vec{k},\omega)\right|^2 \\ &= c\epsilon_0 r_e^2 E_{i0}^2 V_s n_{e0} \lim_{T,V_s\to\infty} \frac{1}{2\pi T V_s} \frac{\left|n_e(\vec{k},\omega)\right|^2}{n_{e0}} \\ &= p_i r_e^2 n_{e0} V_s \frac{S(\vec{k},\omega)}{2\pi}\end{aligned} \tag{3.28}$$

其中$S(\vec{k},\omega)$为散射动力学形状因子，亦称为谱密度函数：

$$S(\vec{k},\omega) = \lim_{T,V_s\to\infty} \frac{1}{T V_s} \frac{\left|n_e(\vec{k},\omega)\right|^2}{n_{e0}} \tag{3.29}$$

其中$p_i = c\epsilon_0 E_{i0}^2$。将散射功率谱对频率积分，得到单位立体角中的散射功率为：

$$\frac{dP_s}{d\Omega} = p_i r_e^2 n_{e0} V_s S(\vec{k}) = p_i r_e^2 N S(\vec{k}) \tag{3.30}$$

$$S(\vec{k}) \equiv \int \frac{d\omega}{2\pi} S(\vec{k}, \omega) \tag{3.31}$$

其中N是粒子数，故其微分散射截面为：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 N S(\vec{k}) \tag{3.32}$$

下面可以看到，有一种散射情况（非相干散射）：

$$S(k) = 1 \tag{3.33}$$

则：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 N \tag{3.34}$$

因为单个自由电子的微分散射截面r_e^2是很小的，因此即使$n_{e0} = 10^{25} m^{-3}$时，其散射平均自由程$l_s = (r_e^2 n_{e0})^{-1}$仍可长达10km。因此在实验室等离子体中，入射电磁波发生非相干散射的几率是很小的。

3.3 Thomson散射分类

在$\vec{R}$处单位立体角的平均功率为：

$$\begin{aligned} \frac{dP_s(\vec{R})}{d\Omega} &= c\epsilon_0 R'^2 \overline{\left|\vec{E}_s(\vec{R}, t)\right|^2} = c\epsilon_0 R'^2 \overline{\sum_{j=1}^{N} \vec{E}_{sj} \cdot \sum_{l=1}^{N} \vec{E}_{sl}^*} \\ &= c\epsilon_0 R'^2 \sum_{j=1}^{N} \overline{\left|E_{sj}\right|^2} + c\epsilon_0 R'^2 \sum_{j \neq l} \sum \overline{\vec{E}_{sj} \cdot \vec{E}_{sl}} \\ &= c\epsilon_0 R'^2 N \overline{\left|E_{sj}\right|^2} + c\epsilon_0 R'^2 N(N-1) \overline{(\vec{E}_{sj} \cdot \vec{E}_{sl}^*)_{j \neq l}} \end{aligned} \tag{3.35}$$

这里已假定在散射体积V内每个电子的平均散射电场已近似相等（因为$R \gg V^{1/3}$）。第一项为各个电场彼此独立产生的散射功率之代数和；第二项为各个电子散射电场交叉乘积之和，即干涉项或相干项，它与各散射电场间的相位差有关。对于相同的ω_s，散射电场的相位由电子的初始位置决定，即：

$$\phi(t) = \omega_s(t - \frac{R}{c}) + \vec{k} \cdot \vec{r}_j(0) \tag{3.36}$$

则：

$$\overline{\vec{E}_{sj} \cdot \vec{E}^*_{sl}} = \left(\frac{r_e}{R'}E^*_{i0}\right)^2 \exp[i(\vec{r}_e(0) - \vec{r}_j(0)) \cdot k] \tag{3.37}$$

由此可见，上式第二项反映了不同位置电子间散射电场的相关性对散射功率的贡献。如果电子位置是随机分布的，则第二项的贡献为0。此外，因为等离子体中最短的相关长度为λ_D，如果$k\lambda_d \gg 1$(即$\lambda \ll \lambda_D$)，则各个交叉项的相位差很大，而且随电子间的位置差的不同而变化很大，从而使得第二项的贡献近似为零。在这种情况下，散射功率主要是第一项的贡献，即是每个电子的散射功率的代数和，此时散射称为非相干散射。相反地，当$k\lambda_D \leq 1$时，这是相位差很小，且随位置变化也很小，每个电子的散射电场是部分相关的，使得第二项的贡献不可忽略，这时的散射称为相干散射。因此，汤姆逊散射可按照下述分类：

首先定义散射参数：

$$\alpha \equiv \frac{1}{k\lambda_D} \tag{3.38}$$

(1) $k\lambda_D \gg 1$，或者$\alpha \ll 1$时，为非相干散射

上式第二项（即相干项）可忽略，总散射功率为各个电子散射功率的独立叠加。这时探测的是电子的随机热运动。它可用于诊断T_e，n_e和$f_e(\upsilon)$；

(2) $k\lambda_D \leq 1$，或者$\alpha \geq 1$时，为相干散射

平均功率公式的第二项是不可以忽略的，它探测的是等离子体集体运动，它可分为两类：

(a) 当第一，二项的贡献相当时，即：$N\overline{|E_{sj}|^2} \sim N(N-1)\overline{\vec{E}_{sj}\cdot\vec{E}_{sl}^*}$时，为热相干散射，可以用于诊断$T_i$和杂质成分等。

(b) 第二项的贡献远大于第一项的贡献，即$N\overline{|E_{sj}|^2} \ll N(N-1)\overline{\vec{E}_{sj}\cdot\vec{E}_{sl}^*}$ 时，为超热相干散射，可用于诊断等离子体波，不稳定性和湍流。

3.4 非相干散射理论

从上节我们知道，当散射参数为：

$$\alpha \equiv \frac{1}{k\lambda_D} = 1.07\times 10^{-11}\frac{\lambda_i[\mu m]}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\left(\frac{n_e[m^{-3}]}{T_e[eV]}\right)^{1/2} \ll 1 \tag{3.39}$$

时，等离子体对入射电磁波的散射功率就等于散射体积内各个电子的散射功率的代数和，这类散射称为非相干散射。这类散射的重要特征是：散射功率谱是分布在入射波频率附近的一个频带内，其谱分布是电子运动的多普勒频移的结果。从单电子散射电场的相位：

$$\phi(t) = \omega_s(t-\frac{R}{c}) + \vec{k}\cdot\vec{r}(0) \simeq (\omega_i + \vec{k}\cdot\vec{\upsilon})(t-\frac{R}{c}) + \vec{k}\cdot\vec{r}(0) \tag{3.40}$$

其中$\beta \ll 1$。可知，散射电场相对于入射波的频移与电子速度$\vec{\upsilon}$在散射差矢方向上的投影υ_k成正比。作为一级近似，我们可取$\vec{k}$为常数，则散射波频率为$\omega_s = \omega_i + \omega$的散射功率是与电子速度分量为$\upsilon_k$ 的电子数成正比的，因此散射频谱计算比较简单，无需求解动力学方程。

3.4.1 $\beta \ll 1$，$B_0 = 0$时的非相干散射

单电子的散射电场为：

$$\vec{E}_{sj}(\vec{R},t) = -\frac{r_e}{R'}\hat{e}E_{i0}\exp\left\{i[\omega_s t - k_s R + \vec{k}\cdot\vec{r}_j(0)]\right\} \tag{3.41}$$

其中$\omega_s \equiv \omega_i + \omega = \omega_i + \vec{k}\cdot\upsilon$，$\vec{k} \equiv k_s - \vec{k}_i$。

它在$\vec{R}$处单位立体角内，散射频率为ω_s的单位频率间隔内的散射功率(即散射功率谱)为：

$$\frac{d^2P_s}{d\Omega d\omega_s} = p_i r_e^2 \delta(\omega_s - \omega_i - \vec{k}\cdot\vec{v}) \tag{3.42}$$

若散射体积V_s内有N个电子，其平均密度为$n_{e0} = N/V_s$，且速度分布函数为：

$$F(\vec{v}) = n_{e0} f(\vec{v}) \tag{3.43}$$

其中$f(\vec{v})$为归一化的速度分布函数，则它在$\vec{R}$处单位立体角内的平均散射功率为：

$$\begin{aligned}\frac{d^2P_s(\vec{R},\omega)}{d\Omega d\omega_s} &= p_i r_e^2 \int_{V_s} d\vec{r} \int d\vec{v} F(\vec{v}) \delta(\omega_s - \omega_i - \vec{k}\cdot\vec{v}) \\ &= p_i r_e^2 n_{e0} V_s \int d\upsilon_k\, f(\upsilon_k) \delta(\omega - k\upsilon_k) \\ &= p_i r_e^2 n_{e0} V_s \frac{1}{k} f\left(\frac{\omega}{k}\right)\end{aligned} \tag{3.44}$$

其中$f(\upsilon_k) = \displaystyle\int f(\vec{v}) d\vec{v}_\perp$，$\upsilon_k \equiv \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{k}$。

上述表达式也可用另外一种方法推导：因为在散射频率$\omega_s \to \omega_s + d\omega_s$范围内的散射功率是与散射体积内速度在$\upsilon_k \to \upsilon_k + d\upsilon_k$ 范围内的电子数成正比的，而该电子数为：$N(\upsilon_k)d\upsilon_k = n_{e0}V_s f(\upsilon_k)d\upsilon_k$，故其平均散射功率为：

$$\frac{d^2P_s(\vec{R},\omega)}{d\Omega d\omega_s} = p_i r_e^2 N(\upsilon_k) \frac{d\upsilon_k}{d\omega_s} = p_i r_e^2 n_{e0} V_s \frac{1}{k} f\left(\frac{\omega}{k}\right) \tag{3.45}$$

由此可见，散射功率形状因子为：

$$\frac{S(\vec{k},\omega)}{2\pi} = \frac{1}{k} f\left(\frac{\omega}{k}\right) \tag{3.46}$$

因为f的归一化条件$\displaystyle\int f(\omega/k) d(\omega/k) = 1$，故其散射总功率为：

$$\frac{dP_s(\vec{R})}{d\Omega} = p_i r_e^2 n_{e0} V_s \tag{3.47}$$

由上述的讨论可知，散射功率谱反映了电子在$\vec{k}$方向上的速度分布函数，若电子速度分布函数是各项同性的，由散射功率谱可测得电子速度分布函数。若电子速度分布函数是各向异性的，则原则上讲，只要测出了三个正交的$\vec{k}$方向上的散射功率谱，就可以测得三维的电子速度分布函数。但实际上散射功率很小，很难详细地测量散射功率谱。通常的做法是，假定速度分布函数是麦氏分布，然后把测量结果与一维的麦氏分布做最佳拟合，就可求出电子温度。

若电子速度分布函数是麦氏分布时，

$$f(\vec{v}) = \frac{1}{(\pi a^2)^{3/2}} \exp\left[-\left(\frac{v_k^2 + v_1^2 + v_2^2}{a^2}\right)\right] \tag{3.48}$$

其中$a = (2kT_e/m_e)^{1/2}$。则其相应的散射功率谱为：

$$\frac{d^2 P_s(\vec{R},\omega)}{d\Omega d\omega_s} = p_i r_e^2 n_{e0} V_s \frac{1}{\sqrt{\pi} ka} \exp\left[-\left(\frac{\omega}{ka}\right)^2\right] \tag{3.49}$$

其中$\omega \equiv \omega_s - \omega_i$。此外，散射功率谱也可用散射波的波长移动$\lambda$来表示：

$$\lambda \equiv \lambda_s - \lambda_i, \qquad \omega \equiv -\frac{2\pi c}{\lambda_i^2}\lambda \tag{3.50}$$

那么有：

$$\frac{d^2 P_s(\vec{R},\omega)}{d\Omega d\omega_s} = p_i r_e^2 n_{e0} V_s \frac{c/a}{2\sqrt{\pi}\lambda_i \sin\dfrac{\theta_s}{2}} \exp\left[-\left(\frac{c\lambda}{2a\lambda_i \sin\dfrac{\theta_s}{2}}\right)^2\right] \tag{3.51}$$

或者：

$$\frac{d^2 P_s(\vec{R},\omega)}{d\Omega d\omega_s} = p_i r_e^2 n_{e0} V_s \left(\frac{\mu}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{2\sin\dfrac{\theta_s}{2}} \exp\left(-\frac{\mu\varepsilon^2}{4\sin^2\dfrac{\theta_s}{2}}\right) \tag{3.52}$$

其中$\varepsilon \equiv \lambda/\lambda_i$，$\mu \equiv (c/a)^2$。由此可见，麦氏速度分布函数和用波长移动$\lambda$表示的高斯型散射谱相对应，只要实验上测得了散射谱，将其画

成$\ln\dfrac{d^2P_s}{d\Omega d\omega_s}\sim\lambda^2$ 曲线，其直线斜率为：

$$S=-\frac{c^2}{4a^2\lambda_i^2\sin^2\dfrac{\theta_s}{2}}=-\frac{6.2\times10^3}{\lambda_i^2[\text{Å}]\sin^2\dfrac{\theta_s}{2}}\frac{1}{T_e[eV]}\tag{3.53}$$

就可求出电子温度T_e。

这里要注意，上述结果包含了两个假定：

- 在测量时间T内，分布函数没有显著变化，即是平稳的局域热平衡等离子体；
- 在测量时间T内，始终有N个电子保留在散射体积内，即意味着$\beta\to 0$或者$V_s\to\infty$。

3.4.2 β有限，$B_0=0$ ($\hat{s}\perp\hat{e}$)

单电子散射电场：

$$\vec{E}_s(\vec{R},t)\cdot\hat{e}=-\frac{r_e}{R'}E_{i0}\frac{(1-\beta^2)^{1/2}(1-\beta_i)}{(1-\beta_s)^2}\left[1-\frac{\beta_\theta^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)}\right]\exp\left[i\phi(t)\right]\tag{3.54}$$

$$\phi(t)\equiv\omega_s(t-\frac{R}{c})+\vec{k}\cdot\vec{r}(0),\qquad\omega_s\equiv\omega_i\frac{1-\beta_i}{1-\beta_s}$$

在$\vec{R}$处的单位立体角内的散射功率为：

$$\frac{dP_s(\vec{R})}{d\Omega}=p_ir_e^2\frac{(1-\beta^2)(1-\beta_i)^2}{(1-\beta_s)^4}\left[1-\frac{\beta_\theta^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)}\right]^2\tag{3.55}$$

这里已假定在测量时间T内，电子始终保持在散射体积内。由于β有限，电子在散射方向上飞跃散射体积长度D的时间$\tau\equiv D/v_s$，有可能小于测量时间T，这时需要考虑其渡越时间对散射功率的修正。

这里用图说明如何获得有限散射体积对散射功率的修正。假定电子处于平稳态，即当有一个电子在近边界（距观测点）离开散射体积时，即有

一个电子同时从远边界进入散射体积，以保持散射体积内电子数保持不变。

当电子渡越时间$\tau \equiv D/v_s \gg T$时，在测量时间内，该电子始终在散射体积内，因此在测量时间内散射辐射没有中断，无需修正；而当$\tau' \equiv D'/v_s < T$时，由于散射辐射传播的时间差（即$x=0$处发出的辐射与$x=D'$处辐射到达探测器处的时间差）为：$\Delta t = t_2 - t_2'$。它即为散射辐射（测量到）的中断时间，则探测器测到散射辐射的有效时间份额为：

$$\frac{t_2' - t_1}{t_2 - t_1} = 1 - \frac{\Delta t}{T} = 1 - \frac{D'/c}{D'/v_s} = 1 - \frac{v_s}{c} = 1 - \beta_s \tag{3.56}$$

则考虑有限散射体积修正后，单电子的散射功率为：

$$\frac{dP_s(\vec{R})}{d\Omega} = p_i r_e^2 \frac{(1-\beta^2)(1-\beta_i)^2}{(1-\beta_s)^3}\left[1 - \frac{\beta_\theta^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)}\right]^2 \tag{3.57}$$

同样地，等离子体散射体积内有$N = n_{e0}V_s$个电子，其速度分布为：

$$F(\vec{v}) = n_{e0} f(\vec{v}) \tag{3.58}$$

则$\vec{R}$处单位立体角内的平均散射功率为：

$$\begin{aligned}\frac{d^2P_s(\vec{R},\omega)}{d\Omega d\omega} &= p_i r_e^2 n_{e0} V_s \int d\vec{v} f(\vec{v}) \frac{(1-\beta^2)(1-\beta_i)^2}{(1-\beta_s)^3}\left[1 - \frac{\beta_\theta^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)}\right]^2 \delta(\omega_s - \omega_i\frac{1-\beta_i}{1-\beta_s}) \\ &= p_i r_e^2 n_{e0} V_s \int d\vec{v} f(\vec{v}) \frac{(1-\beta^2)(1-\beta_i)^2}{(1-\beta_s)^2}\left[1 - \frac{\beta_\theta^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)}\right]^2 \delta(\omega - kv_k)\end{aligned} \tag{3.59}$$

这里用到了如下的关系式：

$$\delta(\omega_s - \omega_i\frac{1-\beta_i}{1-\beta_s}) = \delta\left(\frac{\omega - kv_k}{1-\beta_s}\right) = (1-\beta_s)\delta(\omega - kv_k) \tag{3.60}$$

又因为：$\omega_s/\omega_i = (1-\beta_i)/(1-\beta_s)$，它与$\beta$无关，可以提到积分号外边。若电子速度分布函数是相对论性的麦氏分布函数：

$$f(\vec{\beta}) = \frac{\mu \exp[-2\mu(1-\beta^2)^{-1/2}]}{2\pi K_2(2\mu)(1-\beta^2)^{5/2}} \tag{3.61}$$

其中：$\mu \equiv \left(\frac{c}{a}\right)^2$，$a \equiv \left(\frac{2kT_e}{m_{e0}}\right)^{1/2}$，$K_2$为第二型贝塞尔函数。代入上式后得到：

$$\frac{d^2P_s(\vec{R},\omega)}{d\Omega d\omega} = p_i r_e^2 n_{e0} V_s \left(\frac{\omega_s}{\omega_i}\right)^2 \int d\vec{\beta}_\perp d\beta_k f(\vec{\beta}) \delta(\omega - k\beta_k c)(1-\beta^2) \left[1 - \frac{\beta_\theta^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)}\right]^2 \tag{3.62}$$

上式的积分号内的因子$\left[1 - \frac{\beta_\theta^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)}\right]^2$是表示相对论效应所引起的散射波的退偏振的程度，它总是小于1。上式的积分一般是很复杂的，要用到数值计算才能得到完全相对论的散射功率谱。

在最简单的情况下，取β的一级近似，可得到如下的表达式：

$$\frac{d^2P_s(\vec{R},\omega)}{d\Omega d\omega} = p_i r_e^2 n_{e0} V_s \frac{1}{\sqrt{\pi} ka} \left(1 + \frac{3}{2}\frac{\omega}{\omega_i}\right) \exp\left[-\left(\frac{\omega}{ka}\right)\right] \tag{3.63}$$

$$\frac{d^2P_s(\vec{R},\lambda)}{d\Omega d\lambda} = p_i r_e^2 n_{e0} V_s \frac{c/a}{2\sqrt{\pi}\lambda_i \sin\dfrac{\theta_s}{2}} \left[1 - \frac{7}{2}\frac{\lambda}{\lambda_i} + \frac{c^2\lambda^2}{4a^2\lambda_i^3 \sin^2\dfrac{\theta_s}{2}}\right] \exp\left(-\frac{c^2\lambda^2}{4a^2\lambda_i^2\sin^2\dfrac{\theta_s}{2}}\right) \tag{3.64}$$

$$\frac{d^2P_s(\vec{R},\varepsilon)}{d\Omega d\varepsilon} = p_i r_e^2 n_{e0} V_s \left(\frac{\mu}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{2\sin\dfrac{\theta_s}{2}} \left[1 - \frac{7}{2}\varepsilon + \frac{\mu\varepsilon^3}{4\sin^2\dfrac{\theta_s}{2}}\right] \exp\left(-\frac{\mu\varepsilon^2}{4\sin^2\dfrac{\theta_s}{2}}\right) \tag{3.65}$$

其中$\omega \equiv \omega_s - \omega_i$，$\lambda \equiv \lambda_s - \lambda_i$，$\varepsilon \equiv \frac{\lambda}{\lambda_i}$。上述公式适用于$T_e < 5keV$的情况，当$T_e > 5keV$时要用高阶$\beta$近似公式。

由上可知，当β有限时，辐射谱已不再是相对于入射波长λ_i 对称了，其散射谱的峰值已位于入射波长的的短波侧（即蓝移）。因此，在这种情况下，若仍用$\beta \ll 1$的散射谱公式拟合散射谱（测量值），将会产生较大的误差。

3.4.3 $\beta \ll 1,\ B_0 \neq 0$

我们首先要做一些假定：

1. 电子回旋半径比散射体积尺度小；
2. 电子回旋周期比测量时间T短；
3. 其它假设与前同。

取$\vec{B}_0 \parallel \hat{z}$，则电子的运动轨迹为：

$$\vec{r}(t') = \vec{r}(0) + \vec{v}_{\parallel} t' + \rho_e \cos(\omega_{ce} t' + \varphi_0)\hat{x} + \rho_e \sin(\omega_{ce} t' + \varphi_0)\hat{y} \tag{3.66}$$

其中$\rho_e = v_\perp / \omega_{ce}$为回旋半径，$v_\perp$ 和$v_\parallel$分别是垂直和平行于磁场B_0 的速度分量。而推迟时间为：

$$\begin{aligned} t' &= t - \frac{R}{c} + \frac{\hat{s} \cdot \vec{r}(t)}{c} \\ &= \frac{t - \dfrac{R}{c} + \dfrac{\hat{s} \cdot \vec{r}(0)}{c} + \dfrac{\rho_e}{c}\left[\hat{s} \cdot \hat{x} \cos(\omega_{ce} t + \varphi_0) + \hat{s} \cdot \hat{y} \sin(\omega_{ce} t + \varphi_0)\right]}{1 - \vec{\beta}_{\parallel} \cdot \hat{s}} \end{aligned} \tag{3.67}$$

借助于**Jacobi-Anger** 展开式：

$$\exp(ia \sin\varphi) \equiv \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(a)\ \exp(il\varphi) \tag{3.68}$$

可得（散射电场相角）：

$$\exp\left\{i[\omega_i t' - \vec{k}_i \cdot \vec{r}(t')]\right\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_\perp \rho_e) \exp\left\{i\left[\omega_s t - k_s R + \vec{k} \cdot \vec{r}(0) + l(\varphi_0 + \delta)\right]\right\} \tag{3.69}$$

其中：

$$\omega_s = \omega_i \frac{1 - \hat{i} \cdot \vec{\beta}_{\parallel}}{1 - \hat{s} \cdot \vec{\beta}_{\parallel}} + l\omega_{ce} \simeq \omega_i + \vec{k} \cdot \vec{v}_{\parallel} + l\omega_{ce}$$

$$\vec{k}_s = \frac{\omega_s}{c}\hat{s}, \qquad \vec{k} = \vec{k}_s - \vec{k}_i$$

$$\tan\delta = \frac{\vec{k} \cdot \hat{x}}{\vec{k} \cdot \hat{y}}, \qquad k_\perp = \left[(\vec{k} \cdot \hat{x})^2 + (\vec{k} \cdot \hat{y})^2\right]^{1/2}$$

那么单电子散射电场和散射功率分别为：

$$\vec{E}_s(\vec{R},t) = -\frac{r_e}{R'}\vec{E}_{i0}\sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_\perp\rho_e)\exp\left\{i\left[\omega_s t - k_s R + \vec{k}\cdot\vec{r}(0) + l(\varphi_0+\delta)\right]\right\} \tag{3.70}$$

$$\frac{dP_s(\vec{R})}{d\Omega} = p_i r_e^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_\perp\rho_e) \tag{3.71}$$

则在$\vec{R}$处单位立体角内的散射功率为：

$$\begin{aligned}\frac{d^2P_s(\vec{R},\omega_s)}{d\Omega d\omega_s} &= p_i r_e^2 n_{eo} V_s \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \int_0^{\infty} dv_\perp v_\perp \frac{1}{(\pi a^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{v_\parallel^2+v_\perp^2}{a^2}\right) \\ &\times \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_\perp\rho_e)\delta(\omega_s-\omega_i-l\omega_{ce}-\vec{k}\cdot\vec{v}_\parallel)\end{aligned} \tag{3.72}$$

利用积分等式：

$$\int_0^{\infty} J_l^2(bt)\exp(-p^2t^2)tdt = \frac{1}{2p^2}\exp\left(-\frac{b^2}{2p^2}\right) I_l\left(\frac{b^2}{2p^2}\right)$$

$$J_{-l}(x) = (-1)^l J_l(x), \qquad I_{-l}(x) = I_l(x)$$

完成上述积分得到：

$$\begin{aligned}\frac{d^2P_s(\vec{R},\omega_s)}{d\Omega d\omega_s} &= p_i r_e^2 n_{eo} V_s \exp\left(-\frac{k_\perp^2 a^2}{2\omega_{ce}^2}\right)\sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l\left(\frac{k_\perp^2 a^2}{2\omega_{ce}^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}k_\parallel a} \\ &\times \exp\left[-\left(\frac{\omega_s-\omega_i-l\omega_{ce}}{k_\parallel a}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{3.73}$$

由此可见：

1. 散射谱是由一系列线谱组成的调制谱，每条线谱都是高斯型，其中心频率为：

   $$\omega_s = \omega_i + l\omega_{ce} \qquad l = 0, \pm1, \pm2, ... \tag{3.74}$$

   其e^{-1}线谱宽为：$\Delta\omega_{e^{-1}} = 2k_\parallel a = 2ka\cos\theta_B$，$\theta_B$为$\vec{k}$ 与$\vec{B}_0$的夹角。

幅度与$\exp\left(-\frac{k_\perp^2 a^2}{2\omega_{ce}^2}\right) I_l\left(\frac{k_\perp^2 a^2}{2\omega_{ce}^2}\right)$成正比。

只有当$u \equiv \left(\frac{k_\perp a}{\omega_{ce}}\right)^2 \ll 1$时，线谱才不会重叠。

2. 当$p \equiv \frac{k_\perp^2 a^2}{2\omega_{ce}^2} \ll 1$ 时（相当于$k_\perp \to 0$），有：

$$I_l(p) \simeq \frac{\left(\frac{p}{2}\right)^l}{l!}$$

$$\lim_{p\to 0} e^{-p} I_l(p) = \begin{cases} 1 & \text{当} l = 0 \\ 0 & \text{当} l \neq 0 \end{cases}$$

则当$k_\perp \to 0$时，散射谱退化为：

$$\frac{d^2 P_s(\vec{R},\omega)}{d\Omega d\omega} = p_i r_e^2 n_{eo} V_s \frac{1}{\sqrt{\pi} k_\parallel a} \exp\left\{-\left(\frac{\omega}{k_\parallel a}\right)^2\right\} \tag{3.75}$$

这就是$B_0 = 0$的非相干散射谱，这是因为当$\vec{k} \parallel \vec{B}_0$时，散射观测的是电子在平行于$\vec{B}_0$方向上的随机热运动状态，这时$B_0 \neq 0$对散射谱的观察没有影响。

3. 当$p \gg 1$时（一般情况下都是这种情况，除非$\theta_B \to 0$），有：

$$e^{-p} I_l(p) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi p}} \exp\left(-\frac{l^2}{2p}\right) \tag{3.76}$$

则散射功率谱为：

$$\frac{d^2 P_s(\vec{R},\omega)}{d\Omega d\omega} = p_i r_e^2 n_{eo} V_s \frac{\omega_{ce}}{\pi k_\perp k_\parallel a^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\omega - l\omega_{ce}}{k_\parallel a}\right)^2\right] \exp\left[-\left(\frac{l\omega_{ce}}{k_\perp a}\right)^2\right] \tag{3.77}$$

由此可见，当$\omega = l\omega_{ce}$时，谱出现分立的峰值，其峰值幅度的包络线与$\exp\left[-\left(\frac{l\omega_{ce}}{k_\perp a}\right)^2\right]$成正比，该包络线下的线谱共有$2\sqrt{2p}$ 条，是高斯型谱。

该调制谱的调制度由参数：

$$u \equiv \left(\frac{k_{\parallel}a}{\omega_{ce}}\right)^2 \tag{3.78}$$

决定，u越小，其调制峰越尖锐，当$u \to 1$时，由于相邻调制峰重叠，是调制谱变得平滑而不可分辨。一般要求$u \leq 0.4$，才能观测到分立调制谱，即要求：

$$u = \left(\frac{ka\cos\theta_B}{\omega_{ce}}\right)^2 = 2\left(\frac{\omega_{pe}\cos\theta_B}{\alpha\omega_{ce}}\right)^2 \leq 0.4 \tag{3.79}$$

由此得到：

$$\cos\theta_B \leq 0.45\alpha\frac{\omega_{ce}}{\omega_{pe}} = 140\alpha\frac{B_0[G]}{\sqrt{n_e[cm^{-3}]}} \tag{3.80}$$

其中散射参数$\alpha \equiv 1/k\lambda_D = \sqrt{2}\omega_{pe}/ka$。上面这个条件是很苛刻的，举个例子：

托卡马克等离子体中非相干散射：$n_e = 10^{13}cm^{-3}$，$T_e = 1keV$，使用红宝石激光$\lambda_i = 6943\text{Å}$，磁场$B_T = 10^4G$，传播方向与磁场垂直$\theta_s = 90^\circ$，由此得到$\alpha = 0.001$，则要观测到调制谱就要求：

$$\cos\theta_B \leq 4.7\times10^{-4} \quad \Rightarrow \quad 89.97^\circ \leq \theta_B \leq 90^\circ$$

利用这一特性可以用于测量等离子体中磁场：

(a) 当观测到尖锐的调制谱时，有$\vec{k} \perp \vec{B}_0$，确定$\vec{B}_0$的方向；

(b) 从调制峰的间距ω_{ce}，可测定B_0的幅值。

此外，在一般的散射实验中，$\vec{k} \perp \vec{B}_0$的条件一般不易满足，因此在一般情况下磁场对散射谱（非相干）没有影响，可以比较放心的忽略B_0对散射谱的影响。

3.5　相干散射

当$\alpha \geq 1$时，散射电子间的相关效应不可以忽略，这时理论上的处理比较复杂，必须用动力论方法处理。

从前面章节我们知道等离子体散射功率谱可表示为：

$$\frac{d^2 P_s(\vec{R},\omega)}{d\Omega d\omega} = p_i r_e^2 n_{e0} V_s [\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{e})]^2 \frac{S(\vec{k},\omega)}{2\pi} \tag{3.81}$$

其中：

$$S(\vec{k},\omega) = \lim_{T,V_s\to\infty} \frac{1}{TV_s}\left\langle \frac{n_e(\vec{k},\omega) n_e^*(\vec{k},\omega)}{n_{e0}} \right\rangle$$
$$\vec{k} \equiv \vec{k}_s - \vec{k}_i, \qquad \omega \equiv \omega_s - \omega_i$$
$$n_e(\vec{k},\omega) \equiv \iint_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}dt\, n_e(\vec{r},t)\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

上述表达式是普遍的散射谱表达式，它在$\beta \ll 1, B_0 = 0$时是普遍成立的，无论是热涨落，还是由等离子体波和不稳定性引起的超热涨落，它都成立。这个关系式把求散射功率谱的问题归结为求等离子体密度涨落的自功率谱密度的问题。这里，$\langle\cdot\rangle$是表示对系综取平均。一般我们都假定：被测的等离子体系统在测量时间间隔T内是平稳、各态历经的，则系综平均就可以用时间平均近似之。

求$S(k,\omega)$的基本出发点是动力学方程，在碰撞可忽略的情况下，其基本方程是Vlasov方程：

$$\frac{\partial F_g}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial F_g}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{m_g}\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{v}} = 0 \qquad g = e, i \tag{3.82}$$

其中：

$$F_g(\vec{R},\vec{v},t) \equiv \sum_{j=1}^{N_g} \delta[\vec{r} - \vec{r}_j(t)]\delta[\vec{v} - \vec{v}_j(t)] \tag{3.83}$$

假定系统变化的特征时间比微观涨落时间慢很多，则速度分布函数可近似表示为：

$$F_g = F_{g0} + F_{g1} \tag{3.84}$$

其中F_{g0}是表示系综平均的分布函数即系统的平均态；F_{g1}是表示系统在平均态附近的局部微观涨落。

- 对于电子：$g=-e$，$m_g=m_e$，$N_g=N$，$F_{e0}=n_{e0}f_{e0}(\vec{v})$。
- 对于离子：$g=Ze$，$m_g=m_i$，$N_g=N/Z$，$F_{i0}=n_{i0}f_{i0}(\vec{v})$，$n_{i0}=n_{e0}/Z$。

那么粒子密度为：

$$n_g(\vec{r},t)=\int d\vec{v}\,F_g(\vec{r},\vec{v},t)=\sum_{j=1}^{N}\delta[\vec{r}-\vec{r}_j(t)]$$

$$n_g(\vec{r},t)=n_{g0}+n_{g1}(\vec{r},t)$$

对于稳定的均匀等离子体，线性化的方程组为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_{g1}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\dfrac{\partial F_{g1}}{\partial \vec{R}}+\dfrac{q}{m_g}\vec{E}_1\cdot\dfrac{\partial F_{g0}}{\partial \vec{v}}=0\\ \nabla\cdot\vec{E}_1=\displaystyle\sum_g\frac{g}{\epsilon_0}\int d\vec{v}\,F_{g1}(\vec{r},\vec{v},t)\end{cases}$$

这里已经假定等离子体宏观电场$\vec{E}_0=0$，且电磁波的电磁场对带电粒子的运动不造成影响。与等离子体波的动力论方法类似，对$F_{g1}(\vec{r},\vec{v},t)$取空间的傅里叶变换，时间的Laplace变换，带入线性化的方程组中，求解$F_{g1}(\vec{k},\vec{v},\omega-i\gamma)$，由下式：

$$n_{g1}(\vec{k},\omega-i\gamma)=\int d\vec{v}\,F_{g1}(\vec{k},\vec{v},\omega-i\gamma) \tag{3.85}$$

其中γ是Laplace变换中的中间变量。在这里Laplace定义为：

$$f(\omega)=\int_0^\infty dt\,f(t)e^{-(i\omega+\gamma)t} \tag{3.86}$$

其中$\gamma > 0$。因子$e^{-\gamma t}$的出现是为了保证$f(t)e^{-\gamma t}$的傅里叶变换能够收敛，这样即使$f(t)$ 的傅里叶积分不存在，也能够给出相应的变换。那么有

$$
\begin{aligned}
\left\langle n(\vec{k},\omega)\cdot n^*(\vec{k},\omega)\right\rangle_{LP} &= \int_0^\infty dt\, e^{-(i\omega+\gamma)t}\int_0^\infty dt' e^{+(i\omega-\gamma)t}\left\langle n(\vec{k},t)\cdot n^*(\vec{k},t)\right\rangle \\
&\overset{t'=t+\tau}{=} \int_0^\infty dt\, e^{-2\gamma t}\left[\int_0^\infty d\tau\, e^{(i\omega-\gamma)\tau} + \int_{-t}^0 d\tau\, e^{-(i\omega+\gamma)\tau}\right] \\
&\quad \times \left\langle n(\vec{k},t)\cdot n^*(\vec{k},t)\right\rangle
\end{aligned}
$$

等式两边乘上2γ然后取极限得到：

$$
\lim_{\gamma\to 0} 2\gamma \left\langle n(\vec{k},\omega)\cdot n^*(\vec{k},\omega)\right\rangle_{LP} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{+i\omega\tau}\left\langle n(\vec{k},t)\cdot n^*(\vec{k},t+\tau)\right\rangle \quad (3.87)
$$

等式右边为时域的卷积，那么可以知道时域的卷积等于频域的乘积，那么求得$n_{g1}(\vec{k},\omega-i\gamma)$，代入动力学形状因子的表达式并求系综平均：

$$
S(\vec{k},\omega) = \lim_{\substack{\gamma\to 0\\ V_s\to\infty}} \frac{2\gamma}{V_s}\left\langle \frac{\left|n_{e1}(\vec{k},\omega-i\gamma)\right|^2}{n_{e0}}\right\rangle \quad (3.88)
$$

由此就可得到动力学形状因子的表达式。

$$
S(\vec{k},\omega) = \frac{2\pi}{k}\left|\frac{1+G_i(\vec{k},\omega)}{G}\right|^2 f_{e0}\left(\frac{\omega}{k}\right) + \frac{2\pi Z}{k}\left|\frac{G_e(\vec{k},\omega)}{G}\right|^2 f_{i0}\left(\frac{\omega}{k}\right) \quad (3.89)
$$

其中纵向等离子体介电函数$G(\vec{k},\omega)$为：

$$
G(\vec{k},\omega) = 1 + G_e(\vec{k},\omega) + G_i(\vec{k},\omega) \quad (3.90)
$$

$$
G_q(\vec{k},\omega) = \frac{\omega_{pq}^2}{k^2}\int d\vec{v}\,\frac{\vec{k}\cdot\partial f_{q0}/\partial\vec{v}}{\omega-\vec{k}\cdot\vec{v}-i\gamma} \qquad q=e,i \quad (3.91)
$$

当$f_{e0}(\vec{v})$和$f_{i0}(\vec{v})$是麦氏分布时，即：

$$
f_{e0}(v_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}a}e^{-v_k^2/a^2} \qquad a \equiv \left(\frac{2kT_e}{m_e}\right)^{1/2}
$$

$$
f_{i0}(v_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}b}e^{-v_k^2/b^2} \qquad b \equiv \left(\frac{2kT_i}{m_i}\right)^{1/2}
$$

其中垂直于k的分量已经积分掉，即$f_{q0}(\upsilon_k) = \int f_{q0}(\vec{\upsilon})d\vec{\upsilon}_\perp$。则动力学形状因子可表示为：

$$S(\vec{k},\omega) = \frac{2\sqrt{\pi}}{ka}\left(\frac{A_e}{|G|^2} + \frac{A_i}{|G|^2}\right) = S_e(\vec{k},\omega) + S_i(\vec{k},\omega) \tag{3.92}$$

其中：

$$A_e = e^{-\chi_e^2}\left\{\left[1 + \alpha^2\frac{ZT_e}{T_i}Rw(\chi_i)\right]^2 + \left[\alpha^2\frac{ZT_e}{T_i}Iw(\chi_i)\right]^2\right\} \tag{3.93}$$

$$A_i = Z\left(\frac{m_iT_e}{m_eT_i}\right)^{1/2} e^{-\chi_i^2}\left\{\left[\alpha^2 Rw(\chi_e)\right]^2 + \left[\alpha^2 Iw(\chi_e)\right]^2\right\} \tag{3.94}$$

$$|G|^2 = \left[1 + \alpha^2 Rw(\chi_e) + \alpha^2\frac{ZT_e}{T_i}Rw(\chi_i)\right]^2 + \left[\alpha^2 Iw(\chi_e) + \alpha\frac{ZT_e}{T_i}Iw(\chi_i)\right]^2 \tag{3.95}$$

$$\chi_e \equiv \frac{\omega}{ka}, \qquad a \equiv \left(\frac{2\kappa T_e}{m_e}\right)^{1/2} \tag{3.96}$$

$$\chi_i \equiv \frac{\omega}{kb}, \qquad b \equiv \left(\frac{2\kappa T_i}{m_i}\right)^{1/2} \tag{3.97}$$

$$Rw(x) = 1 - 2x\,e^{-x^2}\int_0^x dp\,e^{p^2} \tag{3.98}$$

$$Iw(x) = \sqrt{\pi}x\,e^{-x^2} \tag{3.99}$$

$$w(x) = Rw(x) - i\,Iw(x) \tag{3.100}$$

当$x \gg 1$时$RW(x)$可以展开为：

$$RW(x) \simeq -\frac{1}{2x^2}\left(1 + \frac{3}{2x^2} + \frac{15}{4x^4} + \cdots\right) \tag{3.101}$$

当$x < 1$时，$RW(x)$可以展开为：

$$RW(x) \simeq 1 - 2x^2\left(1 - \frac{2x^2}{3} + \frac{4x^4}{15} - \cdots\right) \tag{3.102}$$

根据上面的理论，可以有以下的几种情况：

1. 当$\alpha \ll 1$时，有

$$\lim_{\alpha\to 0} A_e = e^{-\chi_e^2} \quad \lim_{\alpha\to 0} A_i = 0 \quad \lim_{\alpha\to 0} |G|^2 = 1$$

那么可以得到：

$$\frac{S(\vec{k},\omega)}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}ka}\exp\left[-\left(\frac{\omega}{ka}\right)^2\right]$$
$$\frac{d^2P_s(\vec{R},\omega)}{d\Omega d\omega} = p_i r_e^2 N \frac{S(\vec{k},\omega)}{2\pi} = p_i r_e^2 N \frac{1}{\sqrt{\pi}ka}\exp\left[-\left(\frac{\omega}{ka}\right)^2\right]$$

它就是$\beta \ll 1$，$B_0 = 0$时的非相干散射谱。所以非相干散射谱是相干散射谱在$\alpha \ll 1$时的极限。

2. 一般的散射谱情况

中间高而窄的部分是$S_i(\vec{k},\omega)$的贡献，其特征谱宽为kb，它是屏蔽离子的电子云对散射的贡献，它反映了电子随着离子做集体运动的特征。而旁边低而宽的主要部分是$S_e(\vec{k},\omega)$的贡献，它是电子及其得拜屏蔽对散射的贡献。每个电子的得拜屏蔽实际上是通过排斥电子和吸收离子而实现的，因而包含了因子$\frac{ZT_e}{T_i}\alpha^2 Rw(\chi_i)$和$\frac{ZT_e}{T_i}\alpha^2 Iw(\chi_i)$。然而在高频时候$\chi_e \simeq 1$，$\chi_i \gg 1$，这时候$Rw(\chi_i), Iw(\chi_i) \to 0$，这是因为离子不能响应电子的快运动，因而其屏蔽效应可忽略，这时电子的得拜屏蔽主要是通过排斥电子而实现的。

3. 高频共振情况$\chi_e \simeq 1$，$\chi_i \gg 1$

这时候有：

$$\lim_{\chi_i\to\infty} A_e = e^{-\chi_e^2} \quad \lim_{\chi_i\to\infty} A_i = 0 \quad \lim_{\chi_i\to\infty} |G|^2 = |1+\alpha^2 w(\chi_e)|^2$$

故：

$$S(\vec{k},\omega) = \frac{2\sqrt{\pi}}{ka}\left|\frac{1}{1+\alpha^2 w(\chi_e)}\right|^2 \exp(-\chi_e^2) \tag{3.103}$$

$S(\vec{k},\omega)$达到共振（即极大）的条件是：$|1+\alpha^2 w(\chi_e)|^2$ 达极小，因为$Iw(\chi_e)>0$，$Rw(\chi_e)$由正变负，故共振条件近似为：

$$1+\alpha^2 Rw(\chi_e)=0 \tag{3.104}$$

即$Rw(\chi_e)=-\alpha^2$。

因$Rw(x)$在$x=1.5$处有一极小值$Rw(x)|_{\min}=-0.29$，因而有：

(a) 当$\alpha<\dfrac{1}{\sqrt{Rw(x)|_{\min}}}=1.86$ 时，不发生共振；

(b) 当$\alpha=1.86$时，$Rw(x)$有一实根，这时$Iw(\chi_e)$ 较大，共振较弱；

(c) 当$\alpha>1.86$时，$Rw(x)$有两实根，大根$x>1.5$，随α增大而增大。若大根$\chi_{e0}\gg 1$（相当于$\alpha\gg 1$），则$Iw(\chi_{e0})\to 0$，这相当于波的相速度远大于电子的平均热运动速度，电子朗道阻尼效应很小，因而有很强的共振。

4. 低频共振情况 $\chi_i\simeq 1$，$\chi_e\ll 1$

这种情况下有：

$$\lim_{\chi_e\to 0} A_e=\left[1+\alpha^2\frac{ZT_e}{T_i}Rw(\chi_i)\right]^2+\left[\alpha^2 Iw(\chi_i)\frac{ZT_e}{T_i}\right]^2 \tag{3.105}$$

$$\lim_{\chi_e\to 0} A_i=Z\left(\frac{m_iT_e}{m_eT_i}\right)^{1/2} e^{-\chi_i^2}\alpha^2 \tag{3.106}$$

$$\lim_{\chi_e\to 0} |G|^2=\left[1+\alpha^2+\alpha^2\frac{ZT_e}{T_i}Rw(\chi_i)\right]^2+\left[\alpha^2 Iw(\chi_i)\frac{ZT_e}{T_i}\right]^2 \tag{3.107}$$

类似地，$S(\vec{k},\omega)$发生共振的条件是：

$$1+\alpha^2+\alpha^2\frac{ZT_e}{T_i}Rw(\chi_i)=0 \tag{3.108}$$

或者：

$$1+\beta^2 Rw(\chi_i)=0 \qquad \beta^2\equiv\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\frac{ZT_e}{T_i} \tag{3.109}$$

当$\beta^2 \gg 1$时，有强共振解(此时$\chi_{i0} \gg 1$)，其共振点位置为：

$$\chi_{i0}^2 = \frac{1}{2}(\beta^2 + 3) \tag{3.110}$$

即：

$$\omega^2 = k^2 \left(\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} \frac{Z\kappa T_e}{m_i} + \frac{3\kappa T_i}{m_i} \right) \simeq k^2 \left(\frac{Z\kappa T_e + 3\kappa T_i}{m_i} \right) \tag{3.111}$$

这就是$\lambda \gg \lambda_D$时离子声波的色散关系。

电子项和离子项的相对贡献由$A_e > A_i$或$A_e < A_i$定。当$ZT_e/T_i \lesssim 1$时，主要贡献是离子项；当$ZT_e/T_i \gg 1$ 时，主要贡献是电子项。

5. 总截面

当$ZT_e \simeq T_i$时，总截面近似地有：

$$S_T(\vec{k}) = \frac{1}{1+\alpha^2} + \frac{Z\alpha^4}{(1+\alpha^2)\left(1+\alpha^2+\alpha^2\dfrac{ZT_e}{T_i}\right)} \tag{3.112}$$

其中第一项为电子项，第二项为离子项。

由此可见：

- 当$\alpha \ll 1$时，总截面$S_T(\vec{k}) \simeq S_e(\vec{k}) \simeq 1$
- 当$\alpha \gg 1$时，总截面为$S_T(\vec{k}) \simeq S_i(\vec{k}) = \dfrac{Z}{1+ZT_e/T_i}$

6. 当离子和电子相对于实验室坐标系有漂移运动

这时候$\chi_i \equiv \dfrac{\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}_{di}}{k_b}$ 和$\chi_e \equiv \dfrac{\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}_{de}}{k_a}$

7. 高温无磁场的情况

8. 杂质的影响

3.6 相干散射辐射的相干探测

由前所述，所谓超热涨落，是由于等离子体的集体运动(即等离子体静电波和静电不稳定性) 所引起的密度涨落，其涨落幅度可远远超过热涨落水平($\sqrt{(N/V_s)}$)。而通过相干散射测量，我们可以获得散射谱密度函数$S(\vec{k},\omega) = \lim_{V,T\to\infty} \dfrac{1}{VT} \dfrac{\left\langle |n_e(\vec{k},\omega)|^2 \right\rangle}{n_{eo}}$，由此进而可以获得电子密度涨落谱 $n_e(\vec{k},\omega)$。由于被测得波数是由散射几何决定的，即 $k = [k_s^2 + k_i^2 - 2k_s k_i \cos\theta_s]^{1/2}$，当$k_i \simeq k_s$时，$k = 2k_i \sin\frac{\theta_s}{2}$，由散射角的扫描，可获得不同波数下的涨落谱 $n_e(\vec{k},\omega)$。这样，通过相干散射测量，可以获得有关波和不稳定性的大部分或全部信息。因而，超热相干散射是研究等离子体静电波和静电不稳定性的重要工具。

由于超热相干散射所研究的对象是等离子体波和不稳定性，而非相干散射所研究的是小尺度范围内的热密度涨落，这就使得超热相干散射理论和实验处理上与非相干散射有一定的差别，因而我们要进一步考虑超热相干散射理论和实验中需要考虑的若干问题。

(1) 散射体积有限，且需要考虑入射波电场在横截面上的分布

我们知道，由于非相干散射所研究的涨落波长很短，$\lambda \ll \lambda_D$，它与散射体积的线度相比是十分小的。例如，红宝石激光90°散射，所测得涨落波长为$\lambda = \dfrac{\lambda_i}{2\sin\theta_s/2} = 0.49\mu m$，很显然，它与入射波的光斑半径(1mm量级)相比是很小的，是可以认为散射体积的线度是无限大的。因而，在非相干散射理论中，可以把散射体积认为是无限大的，且可以无需考虑入射波电场在横截面上的分布。然而，在超热相干散射中，主要的研究对象是等离子体中长波的集体效应，即 $\lambda \gtrsim \lambda_D$，这时其波长可与入射电磁波的横向尺寸相比较。因而在超热相干散射理论中，必须考虑有限散射体积效应和入射波电场在其横截面上的非均匀分布情况。这时，我们可把入射波电场表示为：

$$\vec{E}_i(\vec{r},t) = \hat{e}\ E_{i0} U_i(\vec{r}) \exp[i(\omega_i t - \vec{k}\cdot\vec{r})] \tag{3.113}$$

其中$U(\vec{r})$为入射波电场的空间分布函数。一般我们假设它为高斯分布函数，即：

$$U_i(\vec{r}) = \frac{W_{io}}{W_i(r_\parallel)} \exp\left\{-\frac{r_\perp^2}{W_i^2(r_\parallel)}\right\} \tag{3.114}$$

其中W_{i0}为入射波的束腰半径（我们假定束腰位于散射体积中心）:

$$r_\perp = \frac{|\vec{r} \times \vec{k}_i|}{k_i}, \qquad r_\parallel = \frac{\vec{r} \cdot \vec{k}_i}{k_i} \tag{3.115}$$

此外，为了计算简单起见，我们还假定束的发散是足够弱的，即:

$$\frac{\lambda_i l_s}{\pi W_{i0}^2} \ll 1 \tag{3.116}$$

其中l_s是散射体积沿入射波方向上的特征长度。因而，可以近似地认为在散射体积内，入射波的波阵面近似为平面，且$W_i(r_\parallel) \simeq W_{i0}$，故其空间分布函数可近似地表示为：

$$U_i(\vec{r}) \simeq \exp\left\{-\frac{r_\perp^2}{W_{i0}^2}\right\} \tag{3.117}$$

之所以用高斯分布来表示 $U_i(\vec{r})$，这是因为对于大多数的散射实验，都是用激光束或微波束做探测束。对于激光束来讲，若激光器是工作于单纵模、单横模（最低阶横模，即TEM_{00} 模），它的输出光束是高斯分布的。此外，对于用天线发射和接收的微波来说，通过适当的变换，也可使其波束的横向分布是高斯分布。此外，由于高斯分布的傅里叶变换也是高斯分布，而且在所有的分布函数中，高斯分布的半宽度和它的傅里叶变换函数的半宽度的乘积是最小的，因此用高斯光束做入射波束，可使我们的散射实验在实空间和波数空间的分辨率的乘积$\Delta\vec{r} \cdot \Delta\vec{k}$是最佳的。

(2) 需要考虑散射测量的波数分辨

因为超热相干散射所研究的是等离子体波和不稳定性，为了较精确地获得 $n_e(\vec{k}, \omega)$或单色波的色散关系 $k = k(\omega)$，要求散射测量具有较好的波数分辨能力。因为在超热相干散射实验中，不能视散射体积为

无限大，即V_s是有限的。根据测不准原理，其波数分辨也必定是有限的(即$\Delta\vec{r}\cdot\Delta\vec{k}\geqslant$常数)。因而在相干散射实验中必须考虑波数分辨，及其与散射体积的关系、和它们对波数谱的影响。

(3) 采用光混频的探测方法

因为等离子体波和不稳定性的频率范围比非相干的热涨落谱的频率范围窄很多，因而散射谱相对于入射频率的频移是很小的，用常规的谱分析方法难以分辨这么小的频移，如等离子体波的最高频率约在1GHz量级，若用相干散射测定该波时，其散射谱相对于入射波的频移为 $\Delta f = 1\times 10^9 Hz$，若入射波的波长为 $\lambda_i = 1\mu m$，则相应的波长移动为 $\Delta\lambda = \lambda = \left|\lambda_i^2 \dfrac{\Delta f}{C}\right| \simeq 3\times 10^{-6}\mu m$，一般光谱仪都难以分辨这么微小的波长移动。因而，大多数的相干散射实验都用所谓的光混频的方法检测散射谱。因为光混频检测方法可把光频范围内的散射谱频移到射频范围内，这样就可以用电子学的处理方法获得好的频率分辨能力。此外，光混频检测方法比视频检测方法有更大的优越性：即杂散光对谱的测量没有太大影响，因而允许做小角散射实验；而且混频灵敏度比食品检测灵敏度高，因为它有混频增益。

现在让我们重新考虑散射理论，以便把超热相干散射实验中需要考虑的上述问题包括在散射理论中。

3.6.1 从单自由电子的散射

设入射电场为：

$$\vec{E}_i(\vec{r},t) = \hat{e}E_{i0}U_i(\vec{r})e^{i\omega_i t - i\vec{k}_i\cdot\vec{r}} = \hat{e}E_i(\vec{r})e^{i\omega_i t} \tag{3.118}$$

则t'时刻在r处的电子在$\vec{R}$所产生的散射波电场为：

$$\vec{E}_s(\vec{R},t) = -\hat{e}r_e E_{i0}U_i(\vec{r})\frac{\exp[i(\omega_i t' - \vec{k}\cdot\vec{r})]}{|\vec{R}-\vec{r}|} \tag{3.119}$$

这里，我们已假定$|\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{e}))| = 1$，且$U_i(\vec{r})$是入射波在横截面上的分布。

当用光混频的方法检测散射谱时，散射波电场于本振电场$\vec{E}_{LO}(\vec{R},t)$在探测器表面上相叠加，其输出电流为：

$$i(t)=\frac{e}{\hbar\omega_s}\iint_A c\epsilon_0|\vec{E}_s(\vec{R},t)+\vec{E}_{LO}(\vec{R},t)|^2\eta(\vec{R}_\perp)\ d\vec{R}_\perp \tag{3.120}$$

这是对探测器截面的积分，其中 $\eta(\vec{R})$ 为探测器截面上探测效率的分布。为简单起见，我们令 $\eta(\vec{R})$ 在整个探测器截面上的分布为常数，则

$$i(t)=\frac{e\eta\epsilon_0 c}{\hbar\omega_s}\iint_A |\vec{E}_s(\vec{R},t)+\vec{E}_{LO}(\vec{R},t)|^2\ d\vec{R}_\perp \tag{3.121}$$

由此可见，它是由本振强度$I_{LO}=\epsilon_0 c|E_{LO}|^2$、散射波强度$I_s(\ll I_{LO})$和它们的干涉项组成。因前项只贡献直流项，故我们可只考虑其干涉项：

$$i_{if}(t)=\frac{e\eta\epsilon_0 c}{\hbar\omega_s}\iint_A E_s(\vec{R},t)E^*_{LO}(\vec{R},t)d\vec{R}_\perp+E^*_sE_l \tag{3.122}$$

这里，我们假定 $\vec{E}_{LO}\parallel\vec{E}_s\parallel\vec{E}_{i0}$。它可进一步表示为：

$$i_{if}(t)=\frac{e\eta\epsilon_0 c}{\hbar\omega_s}r_eE_{i0}U_i(\vec{r})e^{i[\omega_s t-\vec{k}_i\cdot\vec{r}]}\iint_A E^*_{LO}(\vec{r},t)\frac{e^{-ik_s|\vec{R}-\vec{r}|}}{|\vec{R}-\vec{r}|}d\vec{R}_\perp \tag{3.123}$$

利用衍射积分，我们可定义一个虚的电场分布：

$$E_{LO}(\vec{r},t)=-\frac{i}{\lambda_s}\iint_A E_{LO}(\vec{R},t)\frac{e^{ik_s|\vec{R}-\vec{r}|}}{|\vec{R}-\vec{r}|}d\vec{R}_\perp \tag{3.124}$$

即：

$$i\lambda_sE_{LO}(\vec{r},t)=\iint_A E_{LO}(\vec{R},t)\frac{e^{ik_s|\vec{R}-\vec{r}|}}{|\vec{R}-\vec{r}|}d\vec{R}_\perp \tag{3.125}$$

该衍射积分定义了一个虚的本振束，它是探测器表面的场分布沿着散射束的原光路向散射体积传播的电磁辐射，它是光混频接收机的天线束等效的场分布。这样，混频器和输出的中频电流 $i_{if}(t)$ 就可以用散射体积内的电场分布来表示，即：

$$i_{if}(t)=\frac{e\eta\epsilon_0 c r_e\lambda_s}{\hbar\omega_s}\left[E'_i(\vec{r},t)E^*_{LO}(\vec{r},t)+E'^*_i(\vec{r},t)E_{LO}(\vec{r},t)\right] \tag{3.126}$$

其中:

$$E_i'(\vec{r},t) = E_{i0}U_i(\vec{r})e^{i[\omega_s t-\vec{k}_i\cdot\vec{r}]} \tag{3.127}$$

可以证明：若本振束的电场分布是高斯分布，则上述衍射积分所定义的天线束在散射体积内的场分布也是高斯分布，故可令：

$$E_{LO}(\vec{r},t) = E_{LO}U_{LO}(\vec{r})e^{i[\omega_{LO}t-\vec{k}_{LO}\cdot\vec{r}+\phi_{LO}]} \tag{3.128}$$

这样，混频器输出的中频电流为：

$$i_{if}(t) = \frac{e\eta\epsilon_0 c r_e\lambda_s}{\hbar\omega_s}E_{i0}E_{LO}U(\vec{r})e^{i(\omega_\Delta t+\vec{k}_\Delta\cdot\vec{r}_\Delta+\Delta\phi)} \tag{3.129}$$

其中：

$$\omega_\Delta = \omega_s-\omega_l, \quad \vec{k}_\Delta = \vec{k}_l-\vec{k}_i \simeq \vec{k}_s-\vec{k}_i, \quad \Delta\phi = \phi_{LO}-\phi_i \tag{3.130}$$

这里我们已将幅度中的虚数i因子归结到相位因子 $i = e^{i\pi/2}$ 中，同样地不失一般性，相位因子 $e^{i\Delta\phi}$ 也可略去，故有：

$$i_{if}(t) = \frac{e\eta\epsilon_0 c r_e\lambda_s}{\hbar\omega_s}E_{i0}E_{LO}U(\vec{r})\left[e^{i(\omega_\Delta t+\vec{k}_\Delta\cdot\vec{r})}+e^{-i(\omega_\Delta t+\vec{k}_\Delta\cdot\vec{r})}\right] \tag{3.131}$$

其中：$U(\vec{r}) \equiv U_i(\vec{r})U_{LO}(\vec{r})$。这样，我们可把它看成是由散射电场为

$$E_s(\vec{R},t) = \frac{r_e}{R}E_{i0}U(\vec{r})e^{i[\omega_s t+\vec{k}_\Delta\cdot\vec{r}-k_{LO}R]} \tag{3.132}$$

与本振电场

$$E_{LO}(\vec{R},t) = E_{LO}\exp\left[i(\omega_{LO}t-k_{LO}R)\right] \tag{3.133}$$

在混频器上所产生的中频输出电流。由于天线束是沿散射束方向上传播的，且我们考虑的是小频率的情况，即 $\omega_\Delta = \omega_s-\omega_{LO} \ll \omega_i$ ，则

$$k_{LO} \simeq k_s \simeq k_i, \qquad \vec{k}_{LO} \doteq \vec{k}_s \tag{3.134}$$

故有：

$$E_s(\vec{r},t) = \frac{r_e}{R}E_{i0}U(\vec{r})\exp\left\{i[\omega_s t+(\vec{k}_s-\vec{k}_i)\cdot\vec{r}-k_sR]\right\} \tag{3.135}$$

这样，除了散射电场中多了空间分布函数 $U(\vec{r}) \equiv U_i(\vec{r})U_{LO}(\vec{r})$ 之外，其它均与非相干散射的情况相同。因此，这样做的结果，即在超热相干散射理论中考虑了有限散射体积效应和入射波电场的横截面分布，又使理论的处理大大简化。

3.6.2 从单色等离子体波的散射

下面我们先研究最简单的情况，即电磁波从相干的单色平面波的散射。设有一单色的等离子体静电波沿 x 轴方向传播，其所产生的密度涨落为：

$$\tilde{n}_e(\vec{r},t) = \tilde{n}_{e0}\exp[i(\omega_w t - k_w x)] \tag{3.136}$$

取如图所示的坐标系，入射束波矢与 z 轴的夹角为$\theta_s/2$，则：

$$U_i(\vec{r}) = \exp\left[-\frac{y^2 + (x\cos\frac{\theta_s}{2} + z\sin\frac{\theta_s}{2})^2}{W_{i0}^2}\right] \tag{3.137}$$

其散射束波矢与 z 轴的夹角也为$\theta_s/2$，它也是高斯光束，故其空间分布函数为：

$$U_s(\vec{r}) = \exp\left[-\frac{y^2 + (x\cos\frac{\theta_s}{2} + z\sin\frac{\theta_s}{2})^2}{W_{s0}^2}\right] \tag{3.138}$$

为了简单起见，我们假定$W_{i0} = W_{s0}$，故在 $\vec{R}$ 处的散射电场为：

$$\begin{aligned}\vec{E}_s(\vec{R},t) &= -\frac{E_{i0}r_e}{R'}\hat{e}\int d\vec{r}\tilde{n}_e(\vec{r},t')U(\vec{r})\exp\left\{i(\omega_i t' - \vec{k}_i\cdot\vec{r})\right\}\\ &= -\frac{r_e E_{i0}\tilde{n}_{e0}}{R'}\hat{e}\int d\vec{r}U(\vec{r})\exp[i(\omega_w t' - k_w x)]\exp[i(\omega_s t' - \vec{k}_s\cdot\vec{r})]\end{aligned} \tag{3.139}$$

其中

$$U(\vec{r}) \equiv U_i(\vec{r})U_s(\vec{r}) = \exp\left\{-\frac{2x^2\cos^2\frac{\theta_s}{2} + 2y^2 + 2z^2\sin^2\frac{\theta_s}{2}}{W_{i0}^2}\right\} \tag{3.140}$$

这里已做假定 $\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{e}) = -\hat{e}$。将推迟时间的关系式代入上式，可以

得到：

$$\vec{E}_s(\vec{R},t) = -\frac{r_e}{R'}E_{i0}\tilde{n}_{e0}\hat{e}\int d\vec{r}\exp\left\{-\frac{2x^2\cos^2\dfrac{\theta_s}{2}+2y^2+2z^2\sin^2\dfrac{\theta_s}{2}}{w_{i0}^2}\right\}$$
$$\times\exp\left\{i[\omega_s(t-\frac{R}{c})-k_w x+\vec{k}\cdot\vec{r}]\right\} \tag{3.141}$$

其中 $\omega_s = \omega_i + \omega_w$， $\vec{k} = \vec{k}_s - \vec{k}_i$。利用定积分公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2x^2}\exp(ipx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{8}\exp\left(-\frac{p^2}{4q^2}\right) \tag{3.142}$$

上式的积分可简化为：

$$\vec{E}_s(\vec{R},t) = -\frac{r_e}{R'}E_{i0}\tilde{n}_{e0}\,V_s\,\hat{e}\exp\left\{-\frac{w_{i0}^2(k_x-k_w)^2}{8\cos^2\dfrac{\theta_s}{2}}-\frac{w_{i0}^2k_y^2}{8}-\frac{w_{i0}^2k_z^2}{8\sin^2\dfrac{\theta_s}{2}}\right\}\exp[i\omega_s(t-\frac{R}{c})] \tag{3.143}$$

其中

$$V_s \equiv \int d\vec{r}\,U(\vec{r}) = \frac{(\sqrt{\pi}w_{i0})^3}{\sqrt{2}\sin\theta_s} \tag{3.144}$$

则在$\vec{R}$处探测器所接收到的平均散射功率为：

$$\begin{aligned} P_s(\vec{R},t) =& c\epsilon_0\left\langle|\vec{E}_r(\vec{R},t)|^2\right\rangle\ A_r \\ =& \frac{P_i}{A_i}r_e^2\tilde{n}_{e0}^2\ V_s^2\frac{A_r}{R'^2}F(\vec{k},k_w) \end{aligned} \tag{3.145}$$

其中 $F(\vec{k},k_w)$为：

$$F(\vec{k},k_w) = \exp\left\{-\frac{w_{i0}^2(k_x-k_w)^2}{4\cos^2\dfrac{\theta_s}{2}}-\frac{w_{i0}^2k_y^2}{4}-\frac{w_{i0}^2k_z^2}{4\sin^2\dfrac{\theta_s}{2}}\right\} \tag{3.146}$$

A_r 为探测器的有效探测面积，可以按下式计算：

$$A_r = \int_0^{\infty} 2\pi r e^{-\dfrac{2r^2}{w_s^2}}dr = \frac{1}{2}\pi w_s^2 \tag{3.147}$$

又根据高斯光束公式：

$$w_s^2 = w_{s0}^2\left[1+\frac{\lambda_s^2 R^2}{\pi^2 w_{s0}^4}\right] \approx \frac{\lambda_s^2 R^2}{\pi^2 w_{s0}^2} \simeq \frac{\lambda_s^2 R^2}{\pi^2 w_{i0}^2} \quad \text{(远场近似条件)} \tag{3.148}$$

因而探测器的接收立体角为：

$$\Delta\Omega_r \equiv \frac{A_r}{R^2} = \frac{\pi w_s^2}{2R^2} = \frac{\lambda_s^2}{2\pi w_{i0}^2} \tag{3.149}$$

同理，入射束的有效截面为 $A_i = \dfrac{1}{2}\pi w_{i0}^2$。此外，定义

$$V_s \equiv A_i l_s \tag{3.150}$$

l_s是散射体积沿入射方向上的特征长度，故散射功率最后就可以简化为：

$$P_s(\vec{R},t) = \frac{1}{4}P_i r_e^2 \tilde{n}_{e0}^2\ l_s^2 \lambda_s^2 F(\vec{k},k_w) \tag{3.151}$$

由上式我们可以得到以下的几个结论：

1) 当$k_x = k_w$，$k_{y0} = 0$，$k_{z0} = 0$时，$F(\vec{k},\vec{k}_w) = 1$。散射功率达到最大值，这就是散射的匹配条件，相当于晶格衍射的布拉格条件。

2) 当$k_{y0} = k_{z0} = 1$，及$w_{i0}^2(k_x - k_w)^2/4\cos^2\theta_s/2 = 1$ 时，散射功率下降到峰值功率的 e^{-1} ，我们定义这是的波数与匹配时的波数之差，即 $\Delta k = |k_x - k_w|$，为系统在x轴方向上的波数分辨率，即

$$\Delta k_x = \frac{2\cos\dfrac{\theta_s}{2}}{w_{i0}} \tag{3.152}$$

类似地，当$k_{x0} = k_w$，$k_{z0} = 0$及$k_y^2 w_{i0}^2/4 = 1$ 时，散射功率下降到峰值功率的 e^{-1}，这时

$$\Delta k_y = \frac{2}{w_{i0}} \tag{3.153}$$

是散射系统在 y 轴方向上的波数分辨率。同理，散射系统在 z 轴方向上的波数分辨率为：

$$\Delta k_z = \frac{2\sin\dfrac{\theta_s}{2}}{w_{i0}} \tag{3.154}$$

实际上，我们可以证明：散射系统在x, y方向上的波数分辨率就是由高斯光束的自然发散角决定的。由高斯光束的特性知，其自然发散角为：

$$\theta_d = \frac{\lambda_i}{\pi w_{i0}} \tag{3.155}$$

而 $k = \dfrac{4\pi}{\lambda_i}\sin\dfrac{\theta_s}{2}$ 。所以有：

$$\Delta k = \frac{2\pi}{\lambda_i}\cos\frac{\theta_s}{2}\Delta\theta_s = \frac{2\pi}{\lambda_i}\cos\frac{\theta_s}{2}\Delta\theta_d = \frac{2\cos\dfrac{\theta_s}{2}}{w_{i0}} \tag{3.156}$$

它与入射光束的束腰半径有关，而 z 方向的波数分辨率是由散射体积在入射束方向上的特征长度 l_s 决定的，这可证明如下：

$$\begin{aligned} \because \quad & V_s = A_i l_s, \quad A_i = \frac{1}{2}\pi w_{i0}^2 \\ \therefore \quad & k_s = \sqrt{2\pi}\frac{w_{i0}}{\sin\theta_s} \simeq \frac{2w_{i0}}{\theta_s} \quad \text{(小角散射时)} \end{aligned}$$

而

$$\Delta k_z = \frac{2\sin\dfrac{\theta_s}{2}}{w_{i0}} \simeq \frac{\theta_s}{w_{i0}} = \frac{2}{l_s} \tag{3.157}$$

由此可见，散射系统的波数分辨是由入射光束的束腰半径以及散射体积的特征长度 l_s 决定的，且与这些特征长度成反比。

3) $P_s \propto \lambda_s^2$ (这是因为相干立体角与波长的平方成正比)

由于在许多情况下，可得到的相干辐射源的功率P_i和探测器的灵敏度都是有限的。由三叔的比例关系可知，当入射的功率和探测器的灵敏度相同时，只要许可，可以适当地选择长的入射束波长 λ_i ，可使散射功率提高，从而可改善信噪比。

此外，由于系统的波数分辨是由入射束的横向尺寸决定的，即

$$\Delta k_x = \Delta k_y \simeq \frac{2}{w_{i0}} \tag{3.158}$$

它与入射波长无关，而系统的纵向空间分辨能力与散射角有关，即：

$$l_s \simeq \frac{2w_{i0}}{\sin\theta_s} \tag{3.159}$$

对于给定的波数 k，入射波长越长，散射角越大($\because k = \frac{4\pi}{\lambda_i}\sin\frac{\theta_s}{2}$)。因而入射波长越长，系统的纵向空间分辨能力越好。故适当地选择波长较长的入射波，可以改善系统的纵向空间分辨能力。

4) $P_s \propto \tilde{n}_{e0}^2$

即等离子体中密度涨落幅度越大，散射功率也越大（当其它条件相同时）。由此可见，超热相干散射的一大特点是：对于给定的探测器功率，它的散射功率可比热涨落的散射功率大很多，从而可用功率较小的连续波激光器或者微波源做超热相干散射实验。

例如：用于测量离子温度的热涨落相干散射实验，用FIR激光器做辐射源，如光泵的中水远红外激光器波长 $\lambda_i = 385\mu m$ ，当等离子体密度为 $10^{13}cm^{-3}$量级时，源功率至少为 1MW量级。若用相同的源和相干探测方法进行超热相干散射实验（设 $\tilde{n}_{e0} = 10^{-3}n_{e0}$)。在信噪比与热涨落相干散射实验相同的情况下，源功率要大很多

热涨落：$P_{i1} = 1MW$，$P_s \propto P_{i1}\tilde{n}_{e0}^2 = 10^{13}P_{i1}$。

超热涨落 $P_{i2} = ?$，$P_s \propto P_{i2}\tilde{n}_{e0}^2 = 10^{20}P_{i2}$。

$\therefore P_{i2} = 10^{-7}P_{i1} = 100mW$

由此可见，用于超热涨落相干散射实验的相干源，用低功率连续波激光器或微波源就可以了，这就是超热相干散射实验能较早地用于研究托卡马克等离子体波和微湍流的重要原因之一。

5) 可测得等离子体波波长范围

当研究等离子体波和不稳定性时，我们希望散射系统可测得波长范围尽可能地大。但在实际实验中，可测的波长范围要受到各种条件的限制：首先，散射系统可测的最大波长是由最小散射小θ_{sm} 决定的；而

最小散射角θ_{sm}要受到系统的分辨率的限制，它不能小于入射波的发散角 θ_d，即

$$\theta_{sm} \geq 2\theta_d = \frac{2\lambda_i}{\pi w_{i0}} \tag{3.160}$$

故

$$\lambda_M \simeq \frac{\lambda_i}{\theta_{sm}} = \frac{\pi w_{i0}}{2} \tag{3.161}$$

其次，系统的最大散射角是由 $\alpha \geq 1$条件或者装置的最大散射通道决定，即

$$\lambda_m = \frac{\lambda_i}{2\sin\dfrac{\theta_{sm}}{2}} \tag{3.162}$$

故散射系统可测的波长范围为：

$$\frac{\lambda_i}{2\sin\dfrac{\theta_{sm}}{2}} \leq \lambda \leq \pi w_{i0}/2 \tag{3.163}$$

6) 散射矢量图

$\because \quad \omega_s = \omega_i \pm \omega_w$, $\vec{k}_s = \vec{k}_i \pm \vec{k}_w$，$k_s = k_i \dfrac{1-\beta_i}{1-\beta_s}$

在等离子体波频率远小于入射波频率情况下，有 $k_s \simeq k_i$ ，故入射散射波矢量是位于以 $|\vec{k}_i|$ 为半径的圆周上，如图所示。由此可见，散射角宽度 θ_s 是由入射波叫宽度和等离子体角宽度 $\Delta\theta_w$ 决定的，即

$$\Delta\theta_s = \min(\Delta\theta_i, \Delta\theta_w) \tag{3.164}$$

3.6.3 从等离子体湍流的散射

设等离子体密度涨落为：

$$\tilde{n}_e(\vec{r},t) = \iint \frac{d\omega}{2\pi}\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} n_e(\vec{k},\omega)\exp[i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})] \tag{3.165}$$

若入射波电场为：

$$\vec{E}_i(\vec{r},t) = \hat{e}E_{i0}U_i(\vec{r})\exp[i(\omega_i t - \vec{k}_i\cdot\vec{r})] \tag{3.166}$$

则等离子体散射电场为：

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_s(\vec{R},t) =& -\hat{e}\frac{r_e}{R'}E_{i0}\int d\vec{r}U(\vec{r})\tilde{n}_e(\vec{r},t')\exp[i(\omega_i t' - \vec{k}_i\cdot\vec{r})] \\
=& -\hat{e}\frac{r_e}{R'}E_{i0}\iiint \frac{d\omega}{2\pi}\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}d\vec{r}U(\vec{r})n_e(\vec{k},\omega)\exp\left\{i[\omega_s(t-\frac{R}{c}) - (\vec{k}-\vec{k}_s+\vec{k}_i)\cdot\vec{r}]\right\} \\
=& -\hat{e}\frac{r_e}{R'}E_{i0}\iint \frac{d\omega}{2\pi}\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}n_e(\vec{k},\omega)\exp[i\omega_s(t-\frac{R}{c})]\int d\vec{r}\,U(\vec{r})\exp[-i(\vec{k}-\vec{k}_+)\cdot\vec{r}]
\end{aligned}
\tag{3.167}
$$

其中 $\omega_s \equiv \omega_i + \omega$，$\vec{k}_+ = \vec{k}_s - \vec{k}_i$，$k_s = \omega_s/c$。

令

$$I(\vec{k}-\vec{k}_+) \equiv \int d\vec{r}\,U(\vec{r})\exp[-i(\vec{k}-\vec{k}_+)\cdot\vec{r}] \tag{3.168}$$

$$\hat{n}_e(\vec{k}_+,\omega) \equiv \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\,n_e(\vec{k},\omega)I(\vec{k}-\vec{k}_+) \tag{3.169}$$

则

$$\vec{E}_s(\vec{R},t) = -\hat{e}\frac{r_e}{R'}E_{i0}\int\frac{d\omega}{2\pi}\hat{e}_e(\vec{k},\omega)\exp[i\omega_s(t-\frac{R}{c})] \tag{3.170}$$

散射到 $\vec{R}$ 处，面积为 A_r 上的平均散射功率为：

$$
\begin{aligned}
P_s(\vec{R}) =& A_r c\epsilon_0 \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|\vec{E}_s(\vec{R},t)|^2 dt \\
=& \frac{P_i}{A_i}r_e^2 n_{e0}V_s\hat{S}(\vec{k}_+)\Delta\Omega_r
\end{aligned}
\tag{3.171}
$$

其中 $\Delta\Omega_r \equiv \dfrac{A_r}{R'^2}$ 为接收立体角。

$$\hat{S}(\vec{k}_+) = \int\frac{d\omega}{2\pi}\hat{S}(\vec{k}_+,\omega) \tag{3.172}$$

$$\hat{S}(\vec{k}_+,\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\frac{|\hat{n}_e|(\vec{k}_+,\omega)}{n_{eo}V_s} = \frac{\left\langle|\hat{n}_e(\vec{k}_+,\omega)|^2\right\rangle_T}{n_{e0}V_s} \tag{3.173}$$

▲ $I(\vec{k}-\vec{k}_+)$的物理意义:

1) 若$V_s \to \infty$且 $U(\vec{r})=1$ (均匀分布)

$$I(\vec{k}-\vec{k}_+)=\int d\vec{r}\exp[-i(\vec{k}-\vec{k}_+)\cdot\vec{r}]=(2\pi)^3\delta(\vec{k}-\vec{k}_+) \tag{3.174}$$

故 $I(\vec{k}-\vec{k}_+)$ 可视为 $\vec{k}$ 空间的滤波器（中心波矢为 $\vec{k}_+$，带宽为$\Delta\vec{k}_+$）。

2) 若V_s有限（假设为长方形），且 $U(\vec{r})=1$

$$I(\vec{k}-\vec{k}_+)=\int d\vec{r}\exp[-i(\vec{k}-\vec{k}_+)\cdot\vec{r}]=V_S\prod_{j=1}^{3}\frac{\sin[\frac{1}{2}(\vec{k}-\vec{k}_+)_jL_j]}{\frac{1}{2}(\vec{k}-\vec{k}_+)_jL_j}\quad j=x,y,z \tag{3.175}$$

又因为：

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{\sin\omega}{\omega}=\pi \tag{3.176}$$

那么可以得到

$$I(\vec{k}-\vec{k}_+)=\begin{cases}V_s & \text{当}-\frac{\pi}{L_i}\le(\vec{k}-\vec{k}_+)_i\le\frac{\pi}{L_i}, i=x,y,z\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

3) 对于单一波矢 $\vec{k}$

$$\lim_{\vec{k}\to\vec{k}_+}I(\vec{k}-\vec{k}_+)=\int d\vec{r}U(\vec{r})=V_s \tag{3.177}$$

由此可见：$I(\vec{k}-\vec{k}_+)$是 $\vec{k}$ 空间滤波器，其中心波矢为 $\vec{k}_+\equiv\vec{k}_s-\vec{k}_i$，其带宽为 $\Delta\vec{k}$，它由散射体积决定，即：

$$\frac{|\Delta\vec{k}|}{(2\pi)^3}V_s=1 \tag{3.178}$$

这是因为：

$$\begin{aligned}\int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} I(\vec{k}-\vec{k}_+) =& \int \frac{\vec{k}}{(2\pi)^3} \int d\vec{r} U(\vec{r}) \exp[-i(\vec{k}-\vec{k}_+)\cdot\vec{r}] \\ =& \int d\vec{r} U(\vec{r})\delta(\vec{r})) \\ =& ((0)\end{aligned} \tag{3.179}$$

当 $U(0)=1$ 时，则有：

$$\int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} I(\vec{k}-\vec{k}_+) = 1 \tag{3.180}$$

综上所述 $I(\vec{k}-\vec{k}_+)$ 可视为 $\vec{k}$ 空间滤波器的单位带宽传递函数。这样有：

$$\hat{n}_e(\vec{k}_+,\omega) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} n_e(\vec{k},\omega) I(\vec{k}-\vec{k}_+) \tag{3.181}$$

可见为电子密度涨落谱 $n_e(\vec{k},\omega)$ 通过滤波器 $I(\vec{k}-\vec{k}_+)$ 选择后其波矢为 $\vec{k}_+$ 在有限带宽 $\Delta\vec{k}_+$ 内的平均值。

这样我们可将 $\hat{S}(\vec{k}_+)$ 进一步化简：

$$\begin{aligned}\hat{S}(\vec{k}_+) =& \frac{\left\langle |\hat{n}_e(\vec{k}_+)|^2 \right\rangle_T}{n_{e0}V_s} \\ =& \frac{V_s}{n_{e0}} \left\langle \left| \hat{n}_e(\vec{k}_+) \frac{\Delta\vec{k}_+}{(2\pi)^3} \right|^2 \right\rangle_T\end{aligned} \tag{3.182}$$

其中 $|\hat{n}_e(\vec{k}_+)|^2 \equiv \int \frac{d\omega}{2\pi} |\hat{n}_e(\vec{k}_+,\omega)|^2$ 为 $|\hat{n}_e(\vec{k}_+,\omega)|^2$ 在 $\vec{k}_+ \to \vec{k}_+ \pm \frac{1}{2}\Delta\vec{k}_+$ 带宽内谱权重平均的单位带宽功率谱。

现在令：

$$\left\langle \left| \hat{n}_{\vec{k}_+} \right|^2 \right\rangle_T \equiv \left\langle \left| \hat{n}_e(\vec{k}_+) \frac{\Delta\vec{k}_+}{(2\pi)^3} \right|^2 \right\rangle_T \tag{3.183}$$

故有：

$$\hat{S}(\vec{k}_+) = \frac{V_s}{n_{e0}} \left\langle \left| \hat{n}_{\vec{k}_+} \right|^2 \right\rangle_T \tag{3.184}$$

$$P_s(\vec{R}) = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 V_s^2 \left\langle \left| \hat{n}_{\vec{k}_+} \right|^2 \right\rangle_T \Delta\Omega_r \tag{3.185}$$
$$= P_i r_e^2 l_s^2 \left\langle \left| \hat{n}_{\vec{k}_+} \right|^2 \right\rangle_T A_i \Delta\Omega_r \tag{3.186}$$

对于相干探测，有天线定理：

$$A_i \Delta\Omega_r = A_r \Delta\Omega_e = \alpha \lambda_s^2 \tag{3.187}$$

其中：

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \text{高斯光束} \\ \dfrac{\pi^2}{16} & \text{微波天线束} \end{cases}$$

那么

$$P_s(\vec{R}) = \frac{1}{4} P_i r_e^2 l_s^2 \lambda_s^2 \left\langle \left| \hat{n}_{\vec{k}_+} \right|^2 \right\rangle_T \tag{3.188}$$

3.7 非相干散射实验中的若干问题

非相干散射条件要求：

$$\alpha \equiv \frac{1}{k\lambda_D} = 1.07 \times 10^{-11} \frac{\lambda_i[\mu m]}{\sin\dfrac{\theta_s}{2}} \left(\frac{n_e[m^{-3}]}{T_e[eV]} \right)^{1/2} \ll 1 \tag{3.189}$$

一般等离子体参数范围(n_e，T_e)知道了，而散射角 θ_s 尽可能选用接近90°以使空间分辨最佳，这样由上式就可以决定所用的探测束波长 λ_i。

其次，我们可以估计一下散射功率。由前述知谱积分的散射功率为：

$$\frac{dP_s}{d\Omega} = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{e0} V_s = P_i r_e^2 n_{e0} l_s \tag{3.190}$$

或者

$$P_s = P_i r_e^2 n_{e0} \Delta\Omega_r l_s \tag{3.191}$$

若典型的低密度等离子体参数为：$n_{e0} = 10^{20}m^{-3}$，$l_s = 1cm$，$\Delta\Omega_r = 10^{-2}Sr$，由此可得：

$$\frac{P_s}{P_i} = 7.95 \times 10^{-14} \tag{3.192}$$

那么，只有入射功率的$\sim 10^{-13}$被散射收集光路接收，这是非常小的份额，这是非相干散射的最大困难：即为了获得可测的散射信号，要求探测束的功率要足够强，这就是一般都是使用脉冲激光器做非相干散射实验探针束的主要原因。对于脉冲激光器做探针束，其能量为 J_i ，脉宽为 Δt_l ，则平均脉冲功率为 $P_i \equiv J_i/\Delta t_l$。收集光路探测的散射光子数与 J_i 成正比，而与散射光子同时被收集光路探测的背景（噪声）辐射是与脉宽 Δt_l 成正比的。因此，一般要求探针束的能量大（ J_i 大），也要求其功率很大（ $P_i \equiv J_i/\Delta t_l$ ，Δt_l 短）。

用散射光子数表示的散射功率为：

$$N_s = \frac{J_i}{\hbar\omega_i} r_e^2 n_{e0} l_s \Delta\Omega_r \tag{3.193}$$

若 $n_{e0} = 1 \times 10^{20}m^{-3}$ ，$l_s = 1cm$，$\Delta\Omega_r = 1 \times 10^{-2}S_r$，$\lambda_i = 0.6945\mu m$，$J_i = 10$焦耳，则散射光子数为 $N_s = 2.78 \times 10^6$ 。而散射谱的 e^{-1} 全宽度为：

$$\Delta\lambda_i = 4\frac{a}{c}\lambda_i \sin\frac{\theta_s}{2} = 7.9 \times 10^{-3}\lambda_i[\mathring{A}] \sin\frac{\theta_s}{2}(T_e[eV])^{1/2} \quad [\mathring{A}] \tag{3.194}$$

对于红宝石激光器 $\lambda_i = 6945\mathring{A}$ ，$\theta_s = 90^\circ$，则

$$\Delta\lambda_s = 38.8\sqrt{T_e[eV]} \quad [\mathring{A}] \tag{3.195}$$

$$\Delta f_s = -\frac{c\Delta\lambda_s}{\lambda_i^2(1 + \frac{\Delta\lambda_s}{\lambda_i})} = \frac{2.41 \times 10^{12}\sqrt{T_e[eV]}}{1 + 5.59 \times 10^{-3}\sqrt{T_e[eV]}} \quad [Hz] \tag{3.196}$$

若 $T_e = 1keV$ ，则 $\Delta\lambda_s = 1227\mathring{A}$ ，每单位波长间隔的平均散射光子数为 2.3×10^3 ，该信号是很弱的。

下面具体谈一下非相干散射实验中需要关注的几个问题。

3.7.1 信噪比

散射实验中主要的噪声干扰源有：

1. 量子统计噪声

   这是光子随机到达探测器所产生的噪声，大小为 $\sqrt{N_s}$

2. 等离子体本底辐射噪声

   等离子体本底辐射光子数 N_p

3. 探测器及其后的电子学噪声

   (a) 散射噪声

   这是辐射与探测器相互作用时，光电子的产生和发射的随机性造成的：

   $$\overline{i_N^2} = 2eI_0B \tag{3.197}$$

   其中 I_0 是有入射辐射时光阴极或探测器输出的平均光电流； B 是探测器的带宽。

   (b) 热噪声

   它是热激发的载流子所产生的噪声

   $$\overline{i_N^2} = \frac{4k_BTB}{R} \tag{3.198}$$

   它是来之输出电阻 R 的噪声。至于阴极表面（或光电探测器）的热噪声，可归结为散粒噪声中，即在光电流中加上一暗电流项，即：

   $$\overline{i_N^2} = 2e(i_0 + I_d)B \tag{3.199}$$

   (c) 电子学噪声

4. 周围环境的热辐射噪声

   由于在室温下环境热辐射的功率主要在 $\lambda > 1\mu m$ 的波段，对于 $\lambda_i < 1\mu m$ 的散射实验，这类噪声可忽略。

在散射实验中，通常都是使用低噪声的探测器和电子学系统，则探测器及其后的电子学系统的热噪声及其它电子学噪声都可忽略。这样，散射实验中的主要噪声源是：量子统计噪声（包括探测器的散粒噪声）和等离子体本底辐射。然而，在实际的散射实验中，等离子体本底辐射光子是可以通过有、无激光脉冲的两次车辆而加以扣除的。如图所示，设n_s，n_p分别为散射辐射和等离子体本地敷设在探测器所产生的光电子数，则在有激光脉冲时，探测器输出的广电子数为 $n_s + n_p$ ，而在无激光脉冲时，探测器输出的光电子数为 n_p ，两次测量的光电子数相减，就可得到散射光子数 n_s 的测量值。然而，这两次测量的量子统计噪声是不能扣除的，其总的量子噪声是 $\sqrt{n_s + 2n_p}$ ，其中 n_p 前的因子2是考虑了在扣除等离子体本底辐射的两次测量中都包含了本底辐射涨落之间而引入的，故散射测量的信噪比为：

$$\frac{S}{N} \equiv \frac{n_s}{\sqrt{n_s + 2n_p}} \tag{3.200}$$

若在散射测量中是采用偏振测量，由于等离子体辐射是自然光，这时信噪比变为：

$$\frac{S}{N} \equiv \frac{n_s}{n_s + n_p} = \begin{cases} \sqrt{n_s} & \text{当} n_s \gg n_p \text{时} \\ n_s/\sqrt{n_p} & \text{当} n_s \ll n_p \text{时} \end{cases} \tag{3.201}$$

现在，我们进一步分析它与那些因素有关。典型的非相干散射的实验安排如图所示。散射光经集光透镜组聚焦自成像在光谱仪的入射狭缝上，狭缝的宽高分别为w、h。然后经过光栅分光后，在出射狭缝上分成M个谱道，最后通过各道探测器探测和记录。设整个手机光路和分光系统的传输效率为 $T(\lambda)$ ，探测器的量子效率为$\eta(\lambda)$，手机光路的接收立体角为 $\Delta\Omega_r$ ，各谱道测量的散射光波波长为 $\lambda_{sj} \pm \frac{1}{2}\Delta\lambda_{sj}$ $(j = 1, 2, ..., M)$ ，则各谱道收集

的散射光子数为：

$$
\begin{aligned}
N_{sj} =&\frac{J_i}{hf_i}r_e^2 n_{e0} l_s \frac{c}{\sqrt{\pi}\times 2a\lambda_i \sin\dfrac{\theta_s}{2}} \exp\left\{-\frac{c^2\lambda_j^2}{4a^2\lambda_i^2\sin^2\dfrac{\theta_s}{2}}\right\}\Delta\Omega_r\Delta\lambda_s T_j \\
=&c_{sj}J_j n_{e0} l_s \Delta\Omega_r T_j \Delta\lambda_j
\end{aligned} \tag{3.202}
$$

$$
c_{sj} =\frac{r_e^2}{hf_i}\frac{c}{2\sqrt{\pi}\times a\lambda_i \sin\dfrac{\theta_s}{2}} \exp\left\{-\frac{c^2\lambda_j^2}{4a^2\lambda_i^2\sin^2\dfrac{\theta_s}{2}}\right\} \tag{3.203}
$$

则各探测道输出的光电子数为：

$$
n_{sj} = c_{sj}J_i n_{e0} l_s \Delta\Omega_r T_j \eta_j \Delta\lambda_j = N_{sj}\eta_j \tag{3.204}
$$

等离子体辐射：包括韧致辐射，复合辐射和线辐射，为简单记，这里只考虑韧致辐射，忽略复合辐射和线辐射，即这里只考虑本地辐射的下限，由此得到的信噪比是实际信噪比的上限。

韧致辐射的体辐射率为：

$$
j(\omega) = 8.0\times 10^{-55}\frac{n_e^2 Z_{eff}}{\sqrt{T_e[eV]}}\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T_e}\right) \quad [w\cdot m^{-3}\cdot Sr^{-1}\cdot s] \tag{3.205}
$$

用辐射波长表示，则体辐射率为：

$$
\begin{aligned}
j(\lambda_s) =&j(\omega_s)\left|\frac{d\omega_s}{d\lambda_s}\right| = j(\omega_s)\frac{2\pi c}{\lambda_s^2} \\
=&1.5\times 10^{-35}\frac{Z_{eff}n_e^2[m^{-3}]}{\lambda_s^2[\mathring{A}]\sqrt{T_e[eV]}}\exp\left[-\frac{1235}{\lambda_s[\mathring{A}]T_e[eV]}\right] \quad [w\cdot m^{-3}\cdot Sr^{-1}\cdot \mathring{A}^{-1}]
\end{aligned} \tag{3.206}
$$

到达各道探测器的韧致辐射光子数为弦积分，它可表示为：

$$
N_{pj} = \int_0^L dr\frac{j(\lambda_{sj})}{h\, f_{sj}} l_s d\Delta\Omega_r T_j \Delta\lambda_{sj}\Delta t_g \tag{3.207}
$$

其中 $l\alpha$ 为光谱仪入射狭缝在散射体积中的象（宽高分别为w、h），Δt_g 为测量的开门时间（一般 $\Delta t_g \geq \Delta t_l$ 以保证 Δt_l 落在测量时间 Δt_g 内）。$j(\lambda_{sj})$

表达式中的指数项，当 $T_e > 10eV$ ，$\lambda_s \simeq 7000\mathring{A}$时是可忽略的，在这里我们忽略指数项因子。此外假定电子密度、温度分布分别为：

$$n_e(r) = n_{e0}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right], \quad T_e(r) = T_{e0}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \tag{3.208}$$

完成对上式的积分后，可得中心弦线上的本底辐射的光子数表达式为：

$$N_{pj} = 5.0\times10^{-21} Z_{eff} n_{e0}^2 (T_{e0}[eV])^{-1/2} L\ d\ l_s \overline{\Delta\Omega_r} T_j \frac{\Delta\lambda_j}{\lambda_{sj}} \Delta t_g \tag{3.209}$$

其中 $L \equiv 2a$，$\overline{\Delta\Omega_r}$为平均接收立体角。上式中除了$T_{e0}[eV]$、$\lambda_{sj}[\mathring{A}]$和$\Delta\lambda[\mathring{A}]$外，其它均为常用单位制。探测器输出的总电子数为：

$$n_{pj} = c_{pj} n_{e0}^2 L l_s d \overline{\Delta\Omega_r} \Delta t_g T_j \eta_j \Delta\lambda_j \tag{3.210}$$

其中：

$$c_{pj} \equiv 5.0\times10^{-21} \frac{Z_{eff}}{\sqrt{T_e[eV]}} \frac{1}{\lambda_i, j} \tag{3.211}$$

为了使 n_{pj} 尽可能小，一般要求 d 与探针束在散射体积中的直径相当，故可调整光谱仪狭缝的高度使其在散射体积中的象等于束直径，故 d 取束在散射体积中心的直径。此外，光谱仪的集光本领定义为：

$$E \equiv wh\frac{A_G}{f^2} = l_s d\Delta\Omega_r \tag{3.212}$$

其中 A_G 为光栅面积，f 为光谱仪聚焦透镜的焦距，则 n_{sj} 和 n_{ej}可表示为：

$$n_{sj} \equiv J_i n_{e0}\frac{E}{d}(c_{sj}T_j\eta_j\Delta\lambda_j) \tag{3.213}$$

$$n_{pj} \equiv LE\Delta t_g n_{e0}^2(c_{sj}T_j\eta_j\Delta\lambda_j) \tag{3.214}$$

$$\frac{S}{N} = \begin{cases} \sqrt{n_{sj}} = \left[J_i n_{e0}\dfrac{E}{d}(c_{sj}T_j\eta_j\Delta\lambda_j)\right]^{1/2} & n_{sj} \gg n_{pj} \\ n_{sj}/\sqrt{n_{pj}} = \dfrac{J_i c_{sj}(ET_j\eta_j\Delta\lambda_j)^{1/2}}{d\sqrt{L\, c_{pj}\Delta t_g}} & n_{sj} \ll n_{pj} \end{cases} \tag{3.215}$$

有上述表达式，我们可得到如下的结论：

1. $n_{sj} \propto J_i n_{e0}$ 或者当 $n_{sj} \gg n_{pj}$ 时，$S/N \propto (J_i n_{e0})^{1/2}$；当 $n_{sj} \ll n_{pj}$ 时，$S/N \propto J_i$

   由此可见，对于给定的等离子体 n_{e0}，散射信号与 J_i 成正比，为了使散射信号足够大，要求激光脉冲有足够大的能量。对于托卡马克等离子体，$n_{e0} = (10^{19} \sim 10^{20})m^{-3}$，一般要求 $J_i = 4 \sim 10J$。当 n_{e0} 较低时，对 J_i 的要求还要大。

2. 当 $n_{sj} \ll n_{pj}$ 时（远离入射波长的探测道）：$S/N \propto J_i/\sqrt{\Delta t_g}$

   由此可见，为了使散射信号具有足够大的信噪比，要求测量的门宽度越窄越好，相应地也要求 Δt_g越窄越好。但是 Δt_g 越窄，获得相同的 J_i 越困难，一般 $\Delta t_g = 10 \sim 50ns$技术上比较成熟，这相应的探针束平均功率约为 $100MW$。

3. $S/N \propto d^{-1/2}$（当$n_{sj} \gg n_{pj}$时）或者d^{-1}（当 $n_{sj} \ll n_{pj}$ 时）

   由此可见，在散射体积内探针束的直径越小越好，但光束的最小焦斑受衍射的限制，即束的发射角的限制。一般要求束的发散角θ_d越小越好，一般最小的发散角在 $mrad$ 量级。而且 d 也与激光棒的大小有关，它又与 J_i 有关，当 J_i 大时，d也相应地要大些（当 θ_d 给定时）。

4. $S/N \propto (ET\eta)^{1/2}$

   由此可见，为了使散射信号的信噪比足够大，要求光谱仪的聚光本领 E，聚光系统的传输效率 T 和探测器的量子效率 η 越大越好。

3.7.2 散射系统的相对标定和T_e的测定

由前述知各散射谱道的光电子数表达式为：

$$n_{sj} = J_i n_{e0} l_s \Delta\Omega_r c_{sj} T_j \eta_j G_j \Delta\lambda_j \quad (G_j\text{为探测器增益}) \tag{3.216}$$

其中

$$c_{sj} = \frac{r_e^2}{h\,f_i}\frac{c}{2\sqrt{pi}a\lambda_i\sin\dfrac{\theta_s}{2}}\exp\left\{-\frac{c^2\lambda_j^2}{4a^2\lambda_i^2\sin^2\dfrac{\theta_s}{2}}\right\} \tag{3.217}$$

或者

$$c_{sj} = \frac{r_e^2}{h\,f_i}\frac{c}{2\sqrt{pi}a\lambda_i\sin\dfrac{\theta_s}{2}}\left(1-2.5\frac{\lambda_j}{\lambda_i}+\frac{c^2\lambda_j^3}{4a^2\lambda_i^3\sin^2\dfrac{\theta_s}{2}}\right)\exp\left\{-\frac{c^2\lambda_j^2}{4a^2\lambda_i^2\sin^2\dfrac{\theta_s}{2}}\right\} \tag{3.218}$$

这是因为$(T\eta G\Delta t)_j$是与散射谱的测量仪器有关的因子，它在不同的探测道中的数值是不同的，令：

$$R_j \equiv T_j\eta_jG_j\delta\lambda_j \tag{3.219}$$

为各探测道的相对测量灵敏度。因 n_{sj} 表达式中其它因子（如 J_i 、n_{e0}、l_s和$\Delta\Omega_r$）均为常数，因此只要测量了各探测道的相对灵敏度R_j，再用于对探测器的光电子数进行修正，就可获得精确的散射谱分布：

$$\frac{n_{sj}}{R_j} = J_in_{e0}l_s\Delta\Omega_rc_{sj} \propto c_{sj} \tag{3.220}$$

一般是利用标准光源（如钨带灯）进行系统的相对标定：

$$n_{wj} = \frac{P_{wj}}{h\,f_j}\Delta t_gR_j \tag{3.221}$$

其中标准光源的功率$P_{wj} = P_w(\lambda_j)$是已知的，则：

$$R_j = \frac{n_{wj}}{\dfrac{P_{wj}}{h\,f_j}\Delta t_g} \tag{3.222}$$

那么可以有：

$$\frac{n_{sj}}{R_j} = \frac{J_in_{e0}l_s\Delta\Omega_rr_e^2}{2\sqrt{\pi}ah\sin\dfrac{\theta_s}{2}}\left(1-2.5\frac{\lambda_j}{\lambda_i}+\frac{c^2\lambda_j^3}{4a^2\lambda_i^3\sin^2\dfrac{\theta_s}{2}}\right)\exp\left\{-\frac{c^2\lambda_j^2}{4a^2\lambda_i^2\sin^2\dfrac{\theta_s}{2}}\right\} \tag{3.223}$$

进行相对论修正后的：

$$S_j \equiv \frac{j_i n_{e0} l_r \Delta\Omega_r c_{sj}}{\left(1 - 2.5\dfrac{\lambda_j}{\lambda_i} + \dfrac{c^2\lambda_j^3}{4a^2\lambda_i^3 \sin^2\dfrac{\theta_s}{2}}\right)} = \frac{J_i n_{e0} l_s \Delta\Omega_r r_e^2}{2\sqrt{\pi} a h \sin\dfrac{\theta_s}{2}} \exp\left\{-\frac{c^2\lambda_j^2}{4a^2\lambda_i^2 \sin^2\dfrac{\theta_s}{2}}\right\} \tag{3.224}$$

从 $\ln S_j \sim \lambda_j^2$曲线的直线拟合斜率可以测量电子温度 T_e。此外，将直线外推到 $\lambda_j = 0$ 处（即 $\lambda_s = \lambda_i$ ），从而得到；

$$S_0 \equiv \frac{J_i l_s \Delta\Omega_r r_e^2}{2\sqrt{\pi} a h \sin\dfrac{\theta_s}{2}} n_{e0} \tag{3.225}$$

3.7.3 散射功率的绝对标定和n_{e0}的测定

常用的绝对标定方法是利用气体分子的瑞利散射，该标定可在原位置进行，可提高标定精度。

瑞利散射的散射中心是气体分子，其散射频率与入射频率相同，但改变了传播方向，散射波是线偏振的，其散射截面与气体折射率有关，当入射波电矢量垂直于散射平面时，其散射截面为：

$$\sigma_R = \frac{4\pi^2(\mu - 1)^2}{n_{R_0}^2 \lambda_0^4} \tag{3.226}$$

n_{R_0}是标准状态下气体分子密度。瑞利散射光电子数为：

$$n_s^R = \frac{J_i \sigma_R n_R l_s \Delta\Omega_r}{h\, f_i} T_0 \eta_0 \qquad (n_R\text{是气体分子密度}) \tag{3.227}$$

汤姆逊散射中心道的散射光子数为：

$$n_{s0}^T = \frac{J_i r_e^2 n_{e0} l_s \Delta\Omega_r}{2\sqrt{\pi} a h \sin\dfrac{\theta_s}{2}} R_0 \tag{3.228}$$

两信号之比为：

$$\frac{n_{s0}^T}{n_s^R} = \frac{n_{e0}}{n_R} \cdot \frac{r_e^2}{\sigma_R} \cdot \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_i} \cdot \frac{c}{2\sqrt{\pi} a h \sin\dfrac{\theta_s}{2}} \tag{3.229}$$

3.7.4 应用

1. 磁约束等离子体

   $n_e = 10^{18} \sim 10^{21} m^{-3}$，$T_e \geq 100eV$

   使用红宝石激光器发出激光作为探测束：$\lambda = 6943\mathring{A}$，$\Delta\theta_d < 1mrad$，$J_i = 5 \sim 10J$，$\Delta t_l = 10 \sim 50ns$，使用光电倍增管和CCD象增强器。

   使用铷玻璃激光器，倍频：$\lambda_i = 5300\mathring{A}$。

   使用铷玻璃激光器，基频：$\lambda_i = 1.06\mu m$。

   使用Nd:YAG 背散射

2. 低温等离子提

   $n_e \geq 5 \times 10^{15} m^{-3}$，$T_e \gtrsim 1eV$。

   钇铷石榴石(YAG)-倍频：$\lambda_i = 5300\mathring{A}$，$J_i = 0.5J$，重复频率 $10Hz$，$\Delta t_l \simeq 10ns$，多次重复测量结果：5000次。

   光子技术方法探测[1]。

3. 空间等离子体

   微博散射雷达，背散射，飞行时间确定散射位置

$$\alpha = 1.0 \times 10^{-11} \frac{\lambda_i[\mu m]}{\sin\dfrac{\theta_s}{2}} \left(\frac{n_e[m^{-3}]}{T_e[eV]}\right)^{1/2} \tag{3.230}$$

$$P_s = \frac{1}{4} P_i r_e^2 \lambda^2 l_s^2 \tilde{n}_e^2 \tag{3.231}$$

[1] Spectrochimica Acta Part B 57, 201∼241 (2002)

4. 激光等离子体

$$n_c = 1.11 \times 10^{27} (\lambda[\mu m])^{-2} \quad m^{-3} \tag{3.232}$$

$$\alpha = 1.0 \times 10^{-11} \frac{\lambda_i[\mu m]}{\sin \frac{\theta_s}{2}} \left(\frac{n_e[m^{-3}]}{T_e[eV]} \right)^{1/2} \tag{3.233}$$

对于铷玻璃三倍频激光 $n_c = 9 \times 10^{27} m^{-3}$

当用4倍频激光作为探针束时 $\lambda_i = 0.265\mu m$，$n_e = 1 \times 10^{26} m^{-3}$，$T_e = 1keV$，那么

$$\alpha = 1.27 \tag{3.234}$$

只有当 $\lambda_i = 10\mathring{A}$ 时，α 才达到 4.7×10^{-3}，形成非相干散射。

3.8 ▲相干散射实验中的若干问题

3.8.1 热相干散射

1. 谱的特征宽度和 α 选择

$$\Delta\omega_s = kb = \frac{b}{\alpha\lambda_d} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}\frac{b}{a}\omega_{pe} \tag{3.235}$$

$$\Delta f_s = 0.296 \frac{\sqrt{n_{e0}[m^{-3}]}}{\alpha} \left(\frac{T_i}{A T_e} \right)^{1/2} \tag{3.236}$$

2. 外差探测信噪比

3.8.2 超热相干散射

1. 探测波长的选择：

λ长，θ_s大，空间分辨就好，只要束直径相同，波数分辨也相同。

2. 传播方向的测量–外差

设散射电场为 $E_s(t)$，噪声辐射电场为 $E_n(t)$，本振电场为 $E_l(t)=E_{l0}\exp[i\omega_l t]$，且$|E_l|\gg|E_s|,|E_n|$，则它们各自在外差探测器上产生的光电流分别为：

$$\langle i_s\rangle=\frac{e\eta}{hf}A_r c\epsilon_0\left\langle E_s^*(t)E_s(t)\right\rangle=e\sigma\left\langle|E_s|^2\right\rangle \tag{3.237}$$

$$\langle i_n\rangle=e\sigma\left\langle|E_n|^2\right\rangle \tag{3.238}$$

$$\langle i_l\rangle=e\sigma\left\langle|E_s|^2\right\rangle=e\sigma E_{l0}^2=i_{l0} \tag{3.239}$$

其中

$$\sigma\equiv\frac{\eta}{hf}c\epsilon_0 A_r \tag{3.240}$$

当它们同时入射到探测器表面上时，其总电流为：

$$\langle i\rangle=\frac{e\eta}{hf}A_r c\epsilon_0\left\langle E^*(t)E(t)\right\rangle=e\,w^{(1)}(t) \tag{3.241}$$

其中 $w^{(1)}(t)\equiv\sigma\left\langle E^*(t)E(t)\right\rangle$ 为单位时间发射光电子的数目，$E(t)=E_l+E_s+E_n$。

其自相关函数为：

$$c(\tau)=\langle i(t)i(t+\tau)\rangle=e^2\delta(\tau)\left\langle w^{(1)}(t)\right\rangle+e^2\left\langle w^{(1)}(t)w^{(1)}(t+\tau)\right\rangle \tag{3.242}$$

第一项是在 t 和 $t+\tau$ 时刻发射的光电子是相同的，即 $\delta(\tau)w^{(1)}(t)$；

第二项是在 t 和 $t+\tau$ 时刻发射的光电子是不同的，即 $w^{(1)}(t)w^{(1)}(t+\tau)=w^{(2)}(t,t+\tau)$

将 i_{l0}，$\langle i_s\rangle$ 和 $\langle i_n\rangle$ 表达式带入，得到：

$$\begin{aligned}c(\tau)=&\;e\,i_{l0}\delta(\tau)+2i_{l0}\langle i_s\rangle+2i_{l0}\langle i_n\rangle+i_{l0}^2\\&+i_{l0}e\sigma\left\langle E_s^*(t)E_s(t+\tau)\right\rangle e^{-i\omega_l\tau}+i_{l0}e\sigma\left\langle E_s^*(t)E_s(t+\tau)\right\rangle e^{i\omega_l\tau}\\&+i_{l0}e\sigma\left\langle E_n^*(t)E_n(t+\tau)\right\rangle e^{-i\omega_l\tau}+i_{l0}e\sigma\left\langle E_n^*(t)E_n(t+\tau)\right\rangle e^{i\omega_l\tau}\end{aligned} \tag{3.243}$$

取 $c(\tau)$ 的傅里叶变换为：

$$P(f_s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau c(\tau) e^{i\omega_s \tau} \tag{3.244}$$

由上式可得：

$$\begin{aligned}P(f_s) =& e\, i_{l0} + 2\pi\delta(f_s) i_{l0}^2 + 2\pi\delta(f_s) \times 2i_{l0}(\langle i_s\rangle + \langle i_n\rangle) \\ &+ i_{l0} e\sigma \int d\tau \left\{\langle E_s^*(t)E_s(t+\tau)\rangle e^{i(\omega_s-\omega_l)\tau} + \langle E_s^*(t)E_s(t+\tau)\rangle e^{i(\omega_s+\omega_l)\tau}\right\} \\ &+ i_{l0} e\sigma \int d\tau \left\{\langle E_n^*(t)E_n(t+\tau)\rangle e^{i(\omega_s-\omega_l)\tau} + \langle E_n^*(t)E_n(t+\tau)\rangle e^{i(\omega_s+\omega_l)\tau}\right\}\end{aligned} \tag{3.245}$$

又因为：

$$\begin{aligned}&e\sigma \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \ \langle E_s^*(t)E_s(t+\tau)\rangle e^{i(\omega_s-\omega_l)\tau} \\ &\qquad = \frac{e\eta}{hf_s} c\epsilon_0 A_r \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle E_s^*(t)E_s(t+\tau)\rangle e^{i(\omega_s-\omega_l)\tau} \\ &\qquad = \frac{e\eta}{hf_s} P_\alpha(f_s - f_l) \qquad \alpha = s,\ n\end{aligned} \tag{3.246}$$

那么有：

$$\begin{aligned}P(f_s) =& e\, i_{l0} + 2\pi\delta(f_s)\left\{i_{l0}^2 + 2i_{l0}\langle i_s\rangle + 2i_{l0}\langle i_n\rangle\right\} \\ &+ i_{l0}\frac{e\eta}{hf_s}[P_s(f_s - f_l) + P_s(f_s + f_l)] \\ &+ i_{l0}\frac{e\eta}{hf_s}[P_n(f_s - f_l) + P_n(f_s + f_l)]\end{aligned} \tag{3.247}$$

上式中各项的物理意义：

第一项： ei_{l0}，它是外差探测器产生的散粒噪声功率谱，它是白噪声，与频率无关；

第二项： $2\pi\delta(f_s)i_{l0}^2$，为本振源在外差探测器上产生的直流电流的贡献，它只有当$f_s=0$时，才不为零；

第三项： $i_{l0}\dfrac{e\eta}{hf_s}P_s(f_s-f_l)$，是散射信号与本振源混频后所产生的功率谱，它是相对于f_l 频移了的谱；

第四项： $i_{l0}\dfrac{e\eta}{hf_s}P_n(f_s-f_l)$，是混频后的噪声辐射的功率谱。

由此可见：外差探测器所得到的中频信号功率与所测信号功率成正比，而且当本振源是相干的单色电磁波，且没有相位涨落时，其输出的中频功率谱是待测信号的功率谱的重现，所不同的只是有一固定频移 f_s-f_l。

外差探测器的输出端的信噪比为：

$$\frac{S}{N}=\frac{i_{l0}\dfrac{e\eta}{hf_s}P_s(f_s-f_l)}{ei_{l0}+i_{l0}\dfrac{e\eta}{hf_s}P_n(f_s-f_l)}=\frac{P_s(f_s-f_l)}{\dfrac{hf_s}{\eta}+P_n(f_s-f_l)} \tag{3.248}$$

由此可见：当没有噪声辐射时，为了使外差探测器输出的中频信号的信噪比为1，所需要的最小信号功率为$\dfrac{hf_s}{\eta}$，它就是外差探测器的等效噪声功率NEP(Noise Equivalent Power)，它是由探测器的量子效率 η 决定的：

$$s\equiv\frac{S}{N}\equiv\frac{P_s(f_s-f_l)}{NEP+P_n(f_s-f_l)} \tag{3.249}$$

定义为外差探测器输出端的信噪比。