力　学

力学的研究对象是机械运动，也就是宏观物体之间或物体内各部分之间相对位置的移动。它是物理学的重要基础。

质点运动学：

研究机械运动的描述，不追究运动发生的原因.

质点动力学：

研究物体的机械运动与其所受作用之间的关系.

主要参考教材：

《力学与理论力学》(上册)杨维宏编　　科学出版社
《力学》　刘斌编　　中科大出版社
《力学》郑永令　贾起民编　　高教出版社
《力学》赵凯华　罗蔚茵　　高教出版社

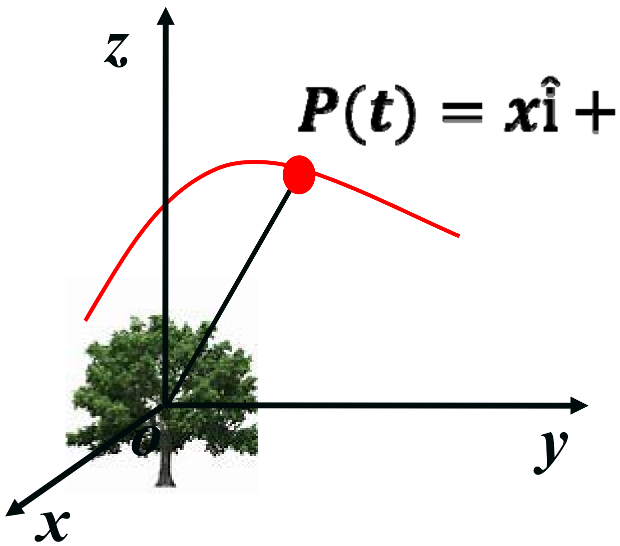
第一章　　质点运动学

目　　录

（一）参考系、时间与空间
（二）描述质点运动的物理量
（三）运动学中的两类问题
（四）自然坐标系中运动的描述
（五）平面极坐标系中运动的描述

（一）参考系、时间与空间

一、参考系



参考物：描述物体运动而选作参考的物体或物体系

严格定义：参考系=参考物+坐标系+时钟

二、时间和空间

① 时间的单位和标准

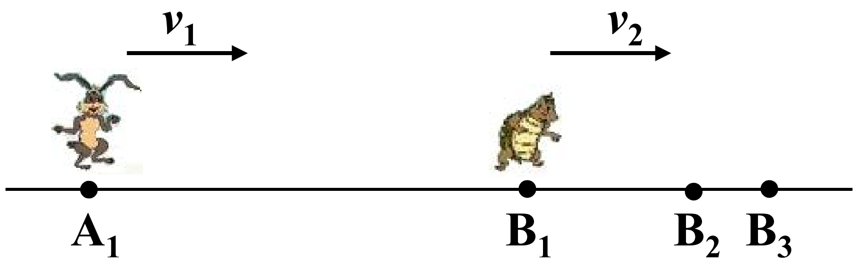
1967年国际计量大会规定，把铯-133原子基态两个精细能级之间跃迁所相应的辐射周期的9 192 631 770倍，定义为1s的时间间隔。称为原子时。

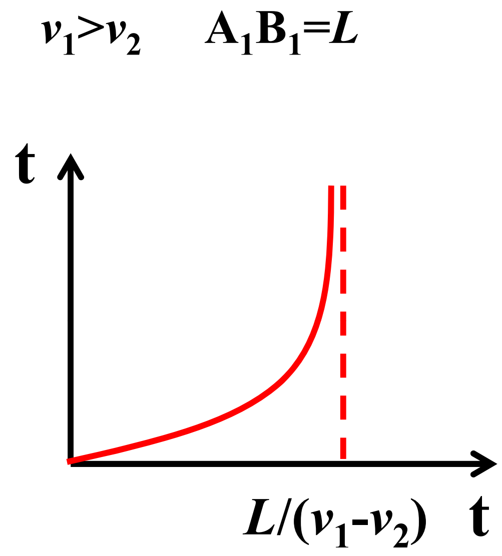
②长度的单位和标准

1983年国际计量大会通过了“m”的新定义：“m是光在真空中1/299 792 458s的时间间隔内所经路径的长度”。

$$c = 299792458\,m \cdot s^{-1}$$

➢龟兔赛跑和芝诺佯谬





芝诺论证：兔子永远追不上乌龟

要点：对时间的量度不同导致结论的不同

解：普通时 t 和芝诺时 t 的对应关系

普通时t: $0,\quad \frac{L}{v_1},\quad \frac{L}{v_1}+\frac{L}{v_1}\cdot\frac{v_2}{v_1},\quad \frac{L}{v_1}+\frac{L}{v_1}\cdot\frac{v_2}{v_1}+\frac{L}{v_1}\cdot(\frac{v_2}{v_1})^2,\quad \dots,\quad \frac{L}{v_1}[1+\frac{v_2}{v_1}+\dots+(\frac{v_2}{v_1})^{n-1}]$

芝诺时τ: $0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \dots,\quad n$

即当 $\tau=n$ 时 $t=\frac{L}{v_1}[1+\frac{v_2}{v_1}+\dots+(\frac{v_2}{v_1})^{n-1}]=\frac{L}{v_1-v_2}[1-(\frac{v_2}{v_1})^n]=\frac{L}{v_1-v_2}[1-(\frac{v_2}{v_1})^\tau]$

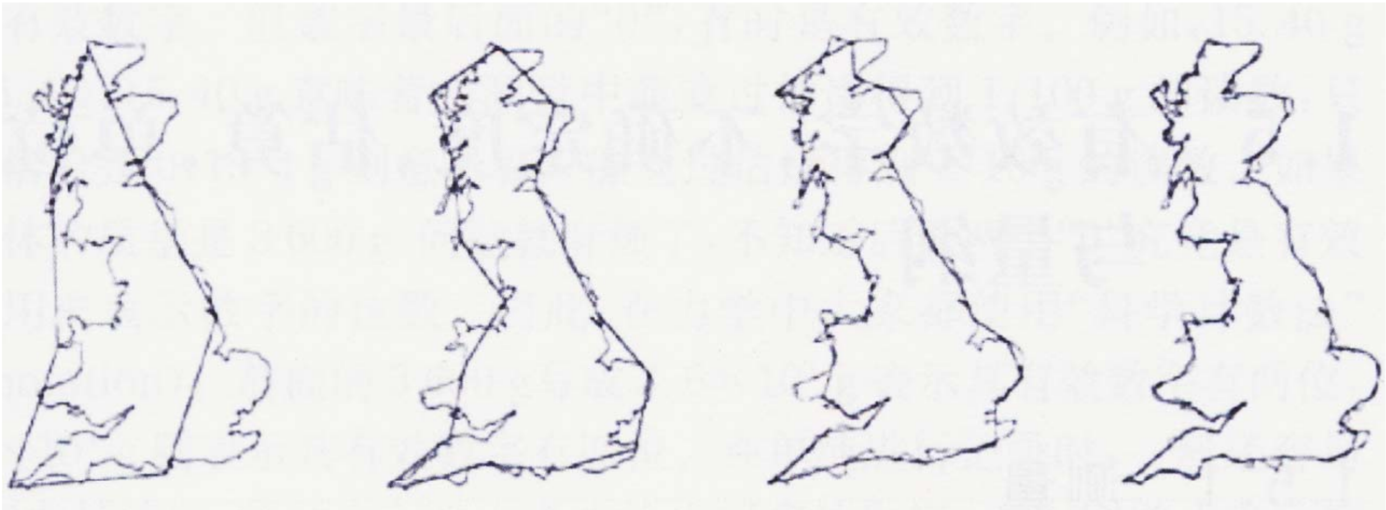
或 $$\tau=\frac{\lg(1-\frac{v_1-v_2}{L}t)}{\lg\frac{v_2}{v_1}}$$

$\therefore$普通时 $t=L/(v_1-v_2)$，芝诺时 $t\to\infty$

- “英国的海岸线有多长？”——分形几何学

1967年法国数学家B.B.Mandelbrot在《Science》提出了的问题

英国示意图



度量尺度	200	100	50	25	英里
线段数	7	16	40	96	
总长度	140	1600	2000	2400	英里

第一章　质点运动学

➢ 时间和空间测量中的局限性

● 时间和空间测量的相对性 —— 狭义相对论

时间测量和长度测量的结果有赖于观察者，即随参考系不同而不同。

● 时间和空间测量的不确定性 —— 量子力学

时间测量和长度测量的精度受到限制：

时间间隔的不确定性：　$\Delta t \sim h/\Delta E$

空间位置的不确定性：　$\Delta x \sim h/\Delta p$

其中h为普朗克常数；ΔE为粒子能量的不确定度；Δp为粒子动量的不确定度

——测不准关系，与物质的波动性有关

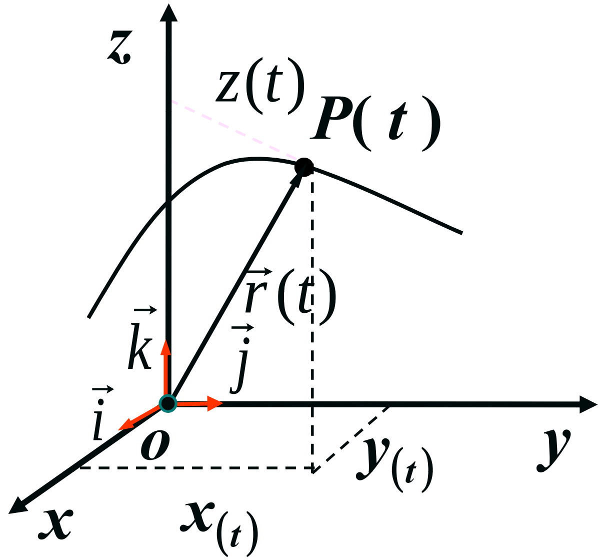
（二）描述质点运动的物理量

一、位置矢量（或位矢）

1. 位矢定义

从坐标原点指向空间点的有向线段，用来确定某时刻质点位置的矢量。

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}(t)}$$



2. 直角坐标系中的数学表示

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

大小：$r = \left|\vec{r}(t)\right| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$

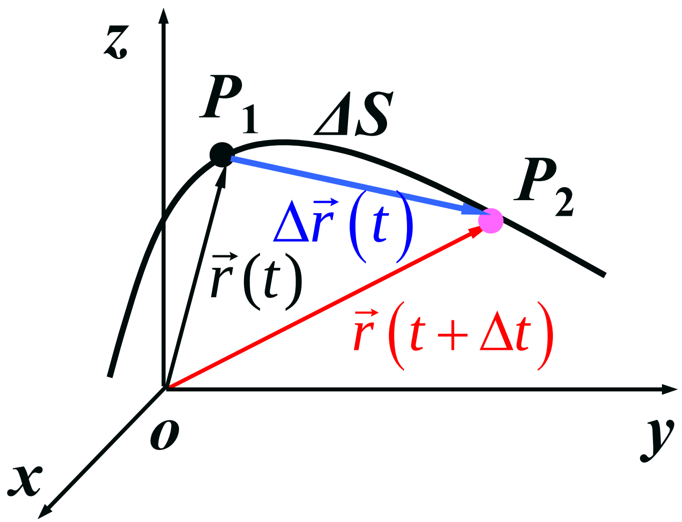
方向：$\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$　　$\cos\beta = \dfrac{y}{r}$　　$\cos\gamma = \dfrac{z}{r}$

二、位移矢量

1. 位移定义

质点在一段时间内位置的改变叫做它在这段时间内的位移。

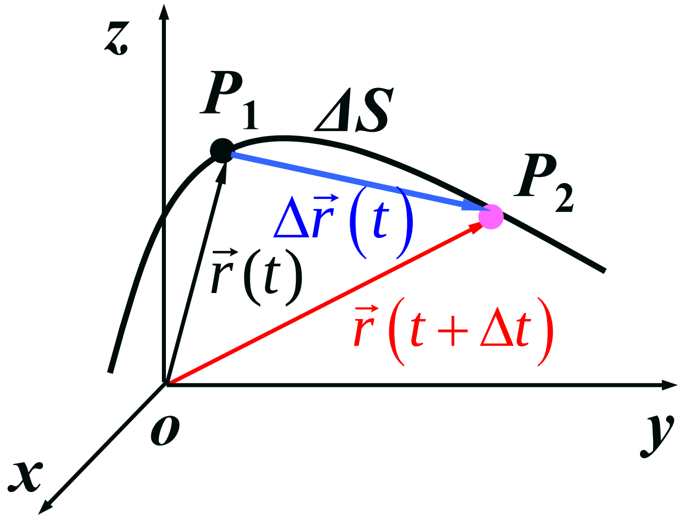
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$



位移是位矢的增量，是时间和时间间隔的函数。

注意：位移不同于位矢；位移也不同于路程。

2. 直角坐标系中的数学表示



$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$
$$= \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

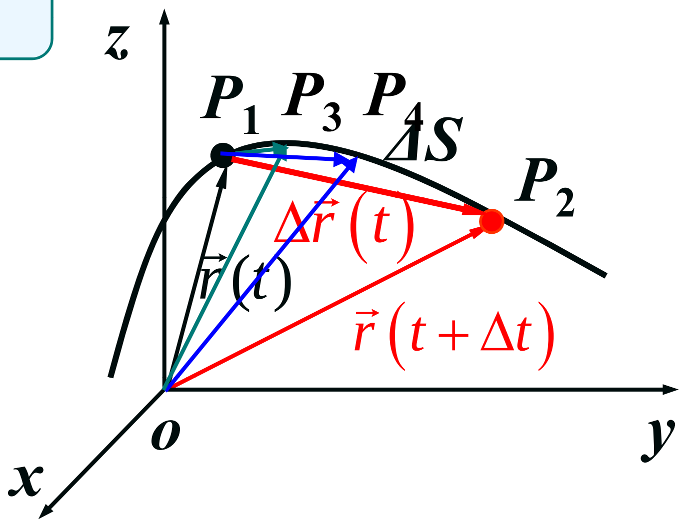
大小： $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$

方向： $\cos\alpha = \dfrac{\Delta x}{|\Delta\vec{r}|}$　$\cos\beta = \dfrac{\Delta y}{|\Delta\vec{r}|}$　$\cos\gamma = \dfrac{\Delta z}{|\Delta\vec{r}|}$

三、速度矢量

不能反映质点在某时刻的运动快慢和方向

1. 速度



平均速度 $$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

平均速率 $$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

瞬时速度 $$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

瞬时速率 $$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = |\vec{v}|$$

2. 直角坐标系中的数学表示

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k} = \bar{v}_x\vec{i} + \bar{v}_y\vec{j} + \bar{v}_z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

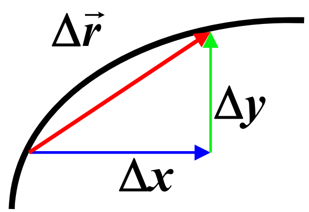
大小： $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2}$

方向： $\cos\alpha = v_x / v \quad \cos\alpha = v_y / v \quad \cos\alpha = v_z / v$

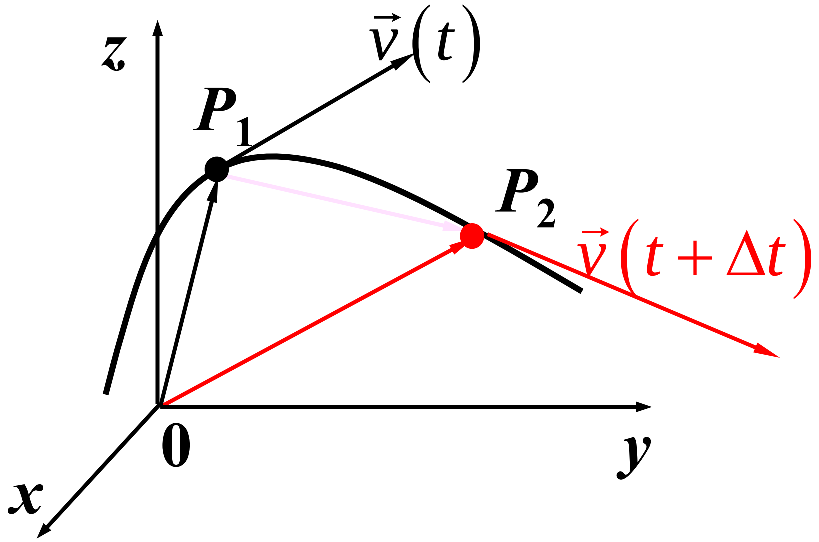
注意：❖ 速度的相对性和瞬时性

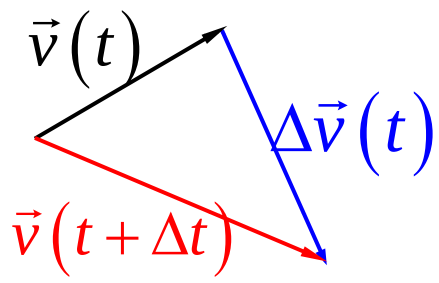
❖ 速度的矢量性（叠加性和分解性）

❖ 速度方向沿轨迹切线



四、加速度矢量





1、平均加速度 $\bar{\vec{a}} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ 与$\Delta\vec{v}$方向相同

瞬时加速度 当$\Delta t \to 0$时，$|\Delta\vec{v}| \to \mathrm{d}\vec{v}$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

2. 直角坐标系中的数学表示

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}$$

$$=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

大小

$$a=|\vec{a}|=\left|\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}\,t}\right|\neq\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z{}^2}$$

方向

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{a},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{a},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{a}$$

注意：
- 加速度的相对性和瞬时性
- 加速度的矢量性（叠加性和分解性）
- 加速度的方向为速度变化的方向

五、运动方程

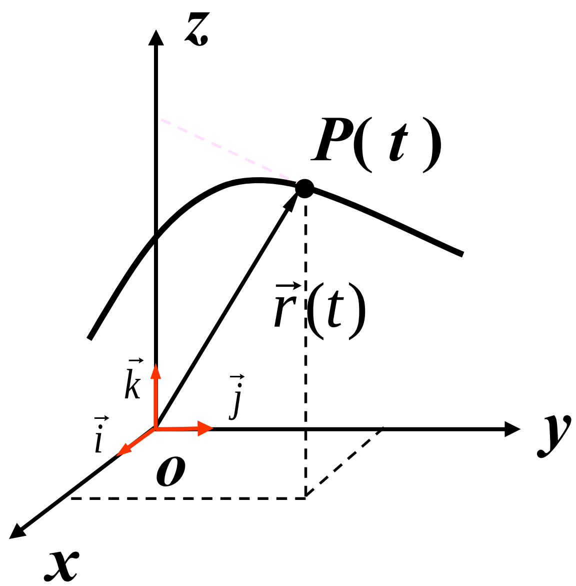
轨迹：质点在运动中所经过的各点在空间中连成的一条曲线

$$F(x, y, z) = 0$$

运动方程: 质点位置坐标和时间的函数关系.

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

$$\text{或}\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$



运动方程中包含了质点运动的全部信息。

轨迹方程: 运动方程消去时间t得到的位置坐标间的函数关系

讨论几种特殊的运动对应的运动方程：

a) 匀速直线运动方程 $x = v_0 t$

b) 变速直线运动方程 $\because v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

$$\boxed{x = x_0 + \int_0^t v\mathrm{d}t}$$

c) 匀加速运动（加速度为常矢量）

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}\vec{v} = \vec{a}\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} \mathrm{d}\vec{v} = \vec{a}\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_0 + \vec{a}t}$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}_0+\vec{a}t \qquad\qquad d\vec{r}=\vec{v}_0dt+\vec{a}tdt$$

$$\therefore\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\mathrm{d}\vec{r}=\vec{v}_0\int_0^t\mathrm{d}t+\vec{a}\int_0^t t\mathrm{d}t$$

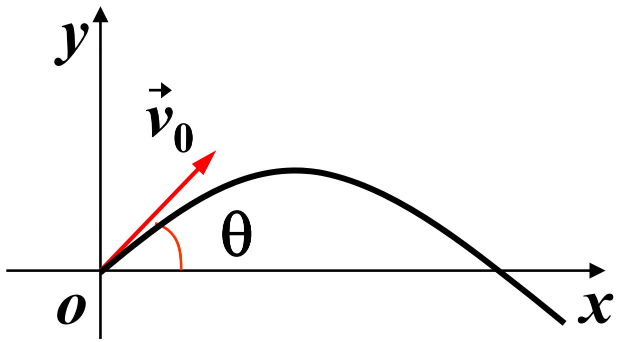
$$\boxed{\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2}$$

特例: 匀加速直线运动, 如自由落体 $\vec{a}$ 为常矢量， 和 $\vec{v}_0$ 在一条直线上， 由以上两式可得

$$\begin{cases} v^2=v_0^2+2a(x-x_0) \\ x=x_0+v_0t+\dfrac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

❖ 实际有些自由落体受空气阻力很大, 如雨点, 最终运动是匀速运动， 此时速率称<u>收尾速率</u>（~10m/s）

d) 抛体运动



典型的匀加速运动，　$\vec{a} = \vec{g}$

运动平面在　$(\vec{v}_0, \vec{g})$ 内

已知：　$x_0 = y_0 = 0 \qquad a_x = 0 \qquad a_y = -g$

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \qquad v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

原理：运动的独立性和叠加性（实验证明）

位置　$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \dfrac{1}{2}\vec{a}t^2 \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 t\cos\theta \\ y = v_0 t\sin\theta - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

速度　$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0\cos\theta, \\ v_y = v_0\sin\theta - gt \end{cases}$$

轨迹方程

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0\cos^2\theta}$$

例1.1:跳水运动员自h高跳台自由下落，入水后重力与水的浮力相互抵消，因而仅受水的阻碍而减速，自水面向下取坐标轴Oy，其加速度为$-kv_y^2$，其中v_y入水后的速度，k为常量。求（1）入水后运动员速度随时间的变化情况；（2）入水后运动员速度随入水深度变化的情况。

解：（1）设运动员以初速度零起跳，至水面时其速度为

$$v_0=\sqrt{2gh}$$

在水中的加速度为

$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-kv_y^2 \qquad (1)$$

（1）式整理可得

$$-\frac{\mathrm{d}v_y}{v_y^2}=k\mathrm{d}t$$

两边积分，并利用初始条件t=0时，v_y=v_0，可得

$$\frac{1}{v_y}-\frac{1}{v_0}=kt \qquad \text{即} \qquad v_y=\frac{v_0}{kv_0t+1}$$

（2）设入水后其速度v_y为y的函数，即$v_y=v_y(y)$，则

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}y}v_y$$

代入（1）式可得

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}y}v_y=-kv_y^2 \qquad 即\ \frac{\mathrm{d}v_y}{v_y}=-k\mathrm{d}y$$

两边积分，并利用初始条件$y=0$时，$v_y=v_0$，可得

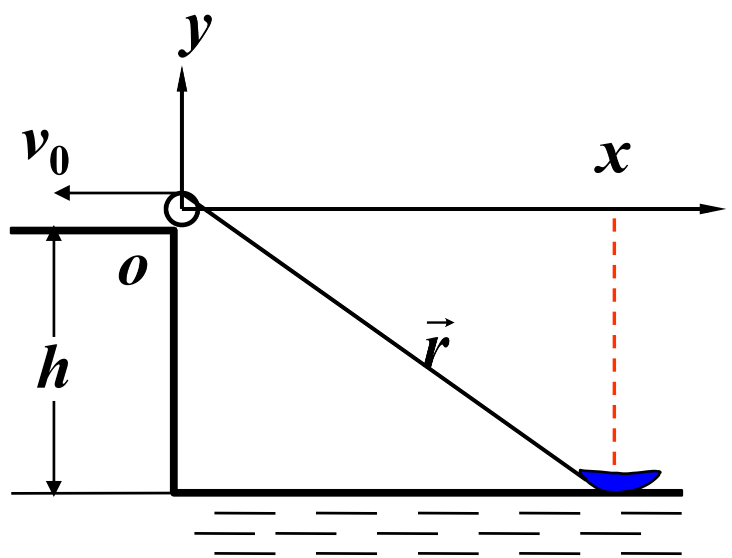
$$v_y=v_0\mathrm{e}^{-ky}$$

例1.2: 离水平面高为h 的岸边，有人用绳以恒定速率v_0拉船靠岸。试求: 船靠岸的速度和加速度随船至岸边距离变化的关系式？

解：在如图所示的坐标系中，船的位矢为：

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} - h\vec{j}$$

对时间求导得到速度和加速度：



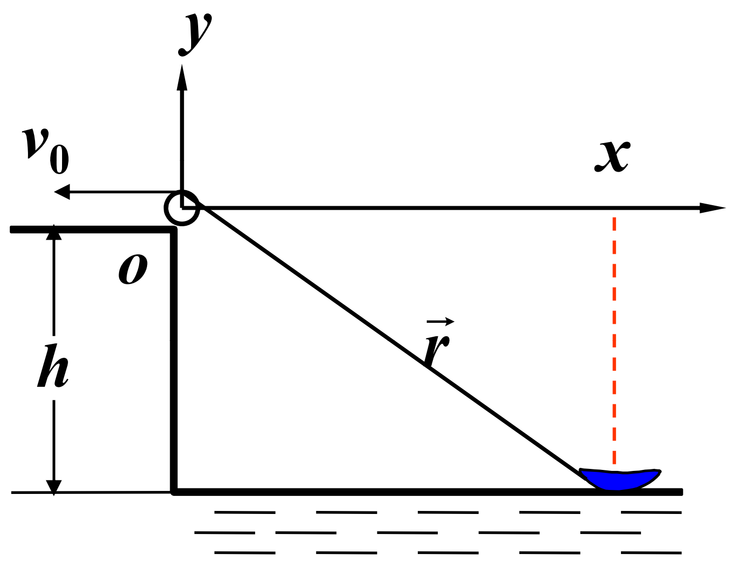
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} \qquad (1)$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i} \qquad (2)$$

由题意知： $$v_0 = -\frac{dr}{dt} \qquad (3)$$

由几何关系：

$$r^2 = x^2 + h^2$$



对时间t求导：

$$2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{x}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

代入(1) 式得:

$$v_x = -v_0\frac{r}{x} = -v_0\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x} \qquad (4)$$

根据加速度定义

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v_0\frac{h^2}{x^2\sqrt{x^2+h^2}}\frac{dx}{dt}=-\frac{v_0^2h^2}{x^3}$$

故得:

$$\vec{v}=-v_0\sqrt{1+\left(\frac{h}{x}\right)^2}\,\vec{i}$$

$$\vec{a}=-\frac{v_0^2h^2}{x^3}\vec{i}$$

分析船的运动特点:

虽然收绳速率是均匀的,但船的前进方向并不是绳子的方向,故其运动是变速的,加速度也是变化的,且船速大于收绳的速度(?)。

（三）运动学的两类问题

一、运动学中的两类问题

第一类：运动方程 $\Rightarrow$ 速度和加速度（整体 $\longrightarrow$ 局部）；

第二类：速度、加速度 $\Rightarrow$ 运动方程（局部 $\longrightarrow$ 整体）。

二、两类问题的处理

第一类：对时间求导　　$\vec{r}(t) \xrightarrow{\text{求导}} \vec{v}, \vec{a}$

第二类：对时间积分　　$\vec{a}(t) \xrightarrow{\text{积分}} \vec{v}(t), \vec{r}(t)$

1. 求速度 $\vec{v}$

1) 已知 $\vec{a}=\vec{a}(t)$　　$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}$　　$d\vec{v}=\vec{a}dt$

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v}=\int_0^t \vec{a}dt \;\longrightarrow\; \vec{v}-\vec{v}_0=\int_0^t \vec{a}dt$$

2) 已知 $a=a(v)$

$$a(v)=\frac{dv}{dt} \qquad \frac{dv}{a(v)}=dt$$

两端积分得：$\displaystyle\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{a(v)}=\int_0^t dt$

3) 已知 $a=a(x)$

$$a(x)=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx} \qquad a(x)dx=vdv$$

两端积分得：$v^2-v_0^{\ 2}=2\displaystyle\int_{x_0}^{x}a(x)dx$

2. 求位矢 $\vec{r}$

1）已知 $v = v(t)$ ，如何求$x(t)$.

由 $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ $d\vec{r} = \vec{v}dt$

两边积分 $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^t \vec{v}\mathrm{d}t \Longrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_o^t \vec{v}dt$

2）已知 $v = v(x)$ ，如何求$x(t)$.

曲线运动中两类问题的处理方法:

- 用运动的叠加原理将运动沿坐标轴分解;
- 用直线运动规律对各分量运算;
- 结果叠加。

例1.3: 已知 $\vec{a}=3\vec{i}+2t\vec{j},\ x_0=0,\ v_0=0$ 求: $\vec{v},\vec{r}$

解: a 是 t 的函数, 由公式得

$$v_x=v_{0x}+\int_0^t a_x\mathrm{d}t=\int_0^t 3\mathrm{d}t=3t$$

$$v_y=v_{0y}+\int_0^t a_y\mathrm{d}t=\int_0^t 2t\mathrm{d}t=t^2$$

得 $\vec{v}=3t\vec{i}+t^2\vec{j}$

根据积分公式, 得

$$x=x_0+\int_0^t v_x\mathrm{d}t=\int_0^t 3t\mathrm{d}t=\frac{3}{2}t^2$$

$$y=y_0+\int_0^t v_y\mathrm{d}t=\int_0^t t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^2$$

位置矢量为: $\vec{r}=\frac{3}{2}t^2\vec{i}+\frac{1}{3}t^2\vec{j}$ 即该质点的运动方程

（四）自然坐标系中运动的描述

一、自然坐标系表示法

问题：加速度是如何影响速度的？

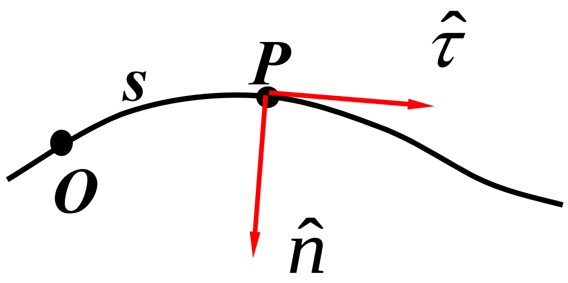
在已知的质点运动轨迹上，选定任意一点O为原点，用轨迹的长度s来描写质点的坐标。为描写质点的运动，规定两个依赖于质点位置的单位矢量：

$\hat{\tau}$：切向单位矢量，指向自然坐标增大方向

$\hat{n}$：法向单位矢量，指向轨道凹侧

$\hat{\tau}$和$\hat{n}$不是常矢量

这种顺着已知的质点运动轨迹建立起来的坐标系称为自然坐标系（内禀坐标系、本性坐标系或路径坐标系）。

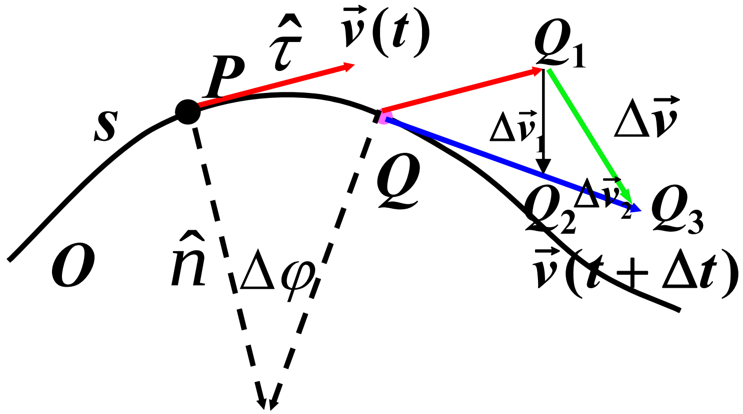


运动方程　　$s = s(t)$

速度　　$\vec{v} = v_\tau \hat{\tau} + v_n \hat{n} = v_\tau \hat{\tau} = v\hat{\tau}$

在自然坐标系中，质点运动的速度只有切向分量，没有法向分量。

二、切向加速度和法向加速度



如图，质点沿曲线从 P点运动Q点

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}$$

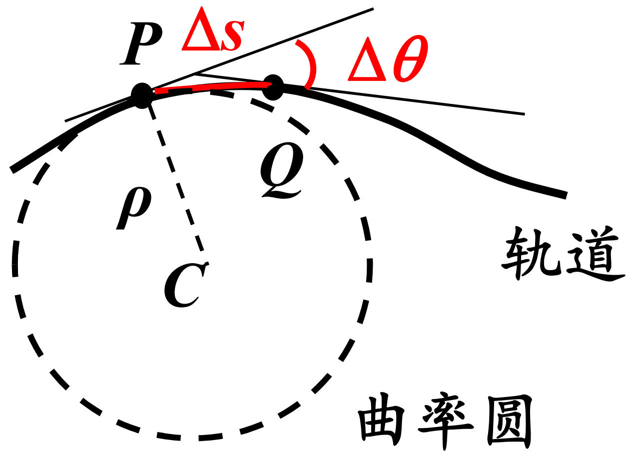
$$=\frac{v(t+\Delta t)\hat{\tau}(t+\Delta t)-v(t)\hat{\tau}(t)}{\Delta t}$$

$$=\frac{1}{\Delta t}\{\boxed{v(t)[\hat{\tau}(t+\Delta t)}-\hat{\tau}(t)]+[v(t+\Delta t)-\boxed{v(t)]\hat{\tau}(t+\Delta t)}\}$$

$$=\frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t}+\frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t}$$

（如图，$\overrightarrow{Q_1Q_2}=\Delta\vec{v}_1$， $\overrightarrow{Q_2Q_3}=\Delta\vec{v}_2$）

分析加速度之前，引入曲率和曲率半径



轨道的曲率

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$$

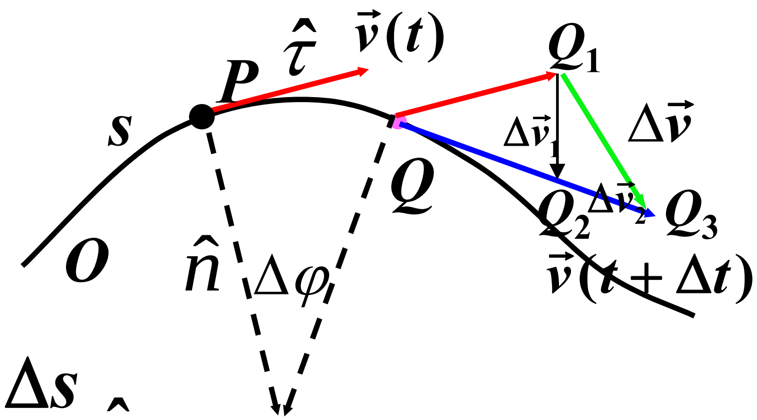
表示曲线在某点弯曲的程度。

若某一圆的曲率与轨道在该点的曲率相等，则此圆与轨道在该点相切，称之为该点的曲率圆，其圆心 C 和半径ρ称为轨道在该点的曲率中心和曲率半径

半径为ρ的圆弧，任一点的曲率

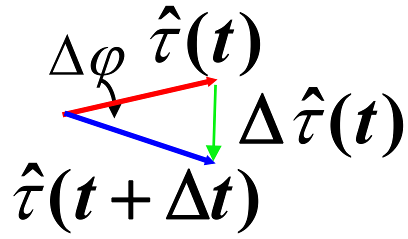
$$K = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^{-1} = \rho^{-1}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，Q 接近 P 点



$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t}=v(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\hat{\tau}(t+\Delta t)-\hat{\tau}(t)}{\Delta t}$$

$$=v(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\hat{n}=v(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\rho}\frac{\Delta s}{\Delta t}\hat{n}$$



$$=\frac{v^2(t)}{\rho}\hat{n}$$

（其中ρ为曲率半径）

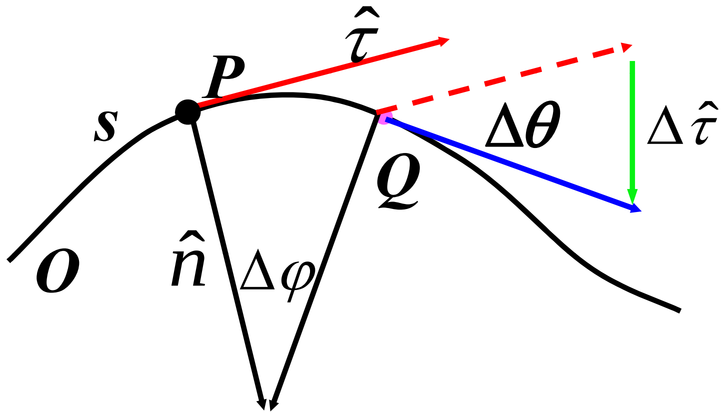
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\hat{\tau}(t+\Delta t)=\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}(t)$$

$$\therefore\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\hat{n}=a_\tau\hat{\tau}+a_n\hat{n}$$

切向加速度:质点速度大小变化快慢

法向加速度:质点速度方向变化快慢

➢方法二：矢量微商法



对一段曲线 PQ，如图，其曲率为：

$$k=\frac{1}{\rho}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$$

当 $\Delta t\to 0$时，

$\Delta\boldsymbol{\tau}$：方向与$\hat{\mathbf{n}}$的方向一致；

大小$|\Delta\boldsymbol{\tau}|=\Delta\theta\times|\hat{\boldsymbol{\tau}}|=\Delta\theta$

即 $$\mathrm{d}\hat{\tau}=\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\varphi=\hat{\boldsymbol{n}}\frac{\mathrm{d}s}{\rho}$$

故

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(v\hat{\tau})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}+v\frac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}+v\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{n}}$$

$$=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{n}}=a_\tau\hat{\tau}+a_n\hat{\boldsymbol{n}}$$

用自然坐标系描述质点运动的优点：

- 速度只有切向分量，没有法向分量；
- 曲线“直线化”（见教材P19-例1.2）；
- 可用于三维空间，需引入两个法向单位矢量

运动情况的讨论1:

在讨论圆周运动的加速度时，使用自然坐标系比用直角坐标系更方便。

例如，已知圆周运动的轨道方程为 $x^2 + y^2 = R^2$，半径为R，任一时候的速率为 $v = R\omega$，则有

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0 \qquad a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

加速度大小为$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\omega^2$， 加速度方向为法线方向。

运动情况的讨论2:

(1) $\begin{cases} \vec{a}_\tau = 0 \\ \vec{a}_n = 0 \end{cases}$ 质点作匀速直线运动

(2) $\begin{cases} \vec{a}_\tau \neq 0 \\ \vec{a}_n = 0 \end{cases}$ 质点作变速直线运动

(3) $\begin{cases} \vec{a}_\tau = 0 \\ \vec{a}_n \neq 0 \end{cases}$ 质点作匀速率平面曲线运动

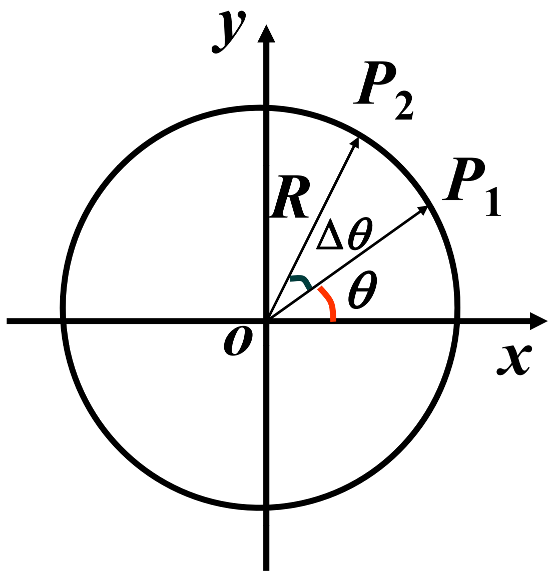
(4) $\begin{cases} \vec{a}_\tau \neq 0 \\ \vec{a}_n \neq 0 \end{cases}$ 质点作变速率平面曲线运动

三、圆周运动的角量描述

1. 角位置θ和角位移$\Delta\theta$

2. 运动方程 $\theta = \theta(t)$

3. 角速度和角加速度



$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\begin{cases} \theta - \mathrm{rad} \\ \omega - \mathrm{rad.s^{-1}} \\ \beta - \mathrm{rad.s^{-2}} \end{cases}$$

● 例.对于匀加速圆周运动的运动学公式：

$$\omega(t)=\omega_0+\beta t$$

$$\Delta\theta=\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2$$

$$\omega(t)^2-\omega_0{}^2=2\beta\Delta\theta$$

因此用角量可以完全描述质点的圆周运动

4. 线量与角量之间的关系

$$\begin{cases} v=R\omega \\ a_\tau=R\beta,\ a_n=R\omega^2 \end{cases}$$

圆周运动只有两个转动方向，逆时针转动为正；反之，为负方向。

5.圆周运动的矢量描述法

角速度矢量 $\vec{\omega}$ 的大小为 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$，方向按右手系指向平行于转轴的方向.

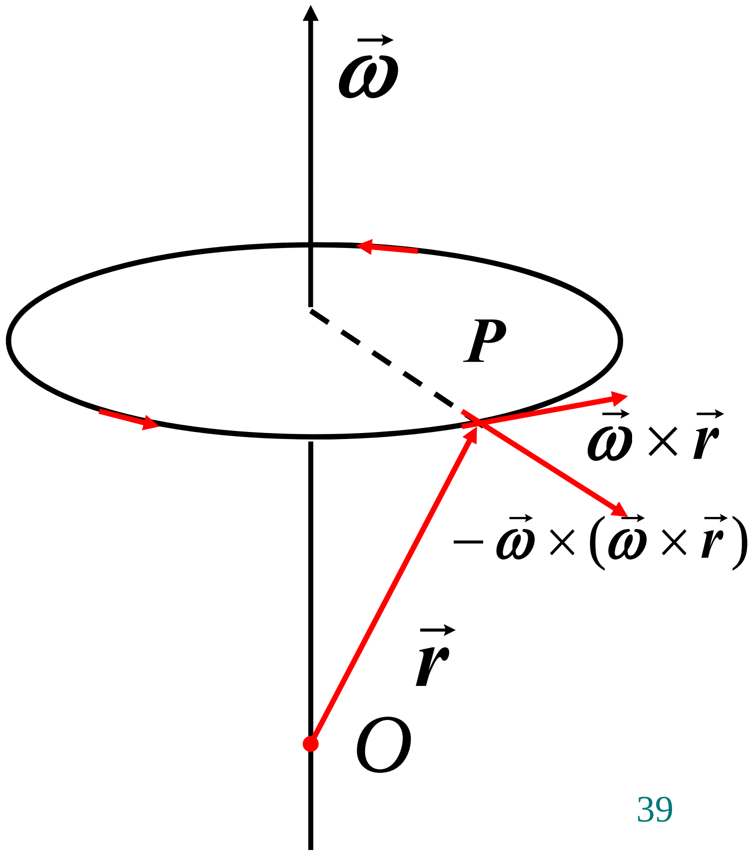
如图所示，当坐标原点选在转轴上时，有

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\overset{?}{=}\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

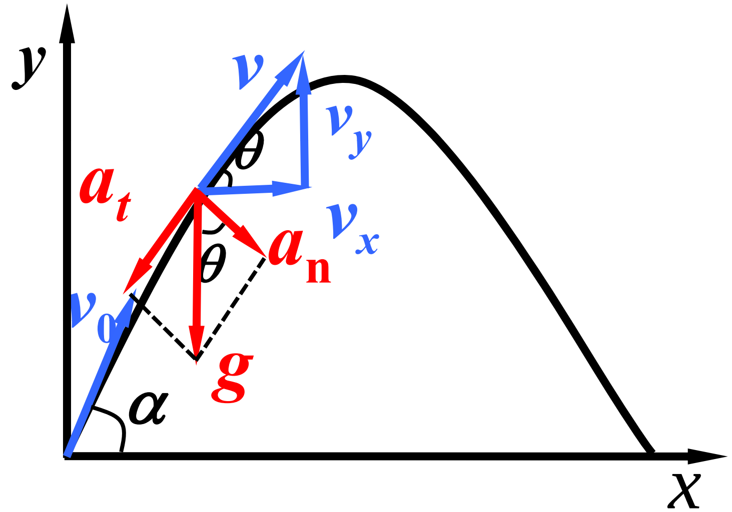
$$\because\quad \vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\therefore\quad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$



例1.4 求斜抛体在任一时刻的法向加速度 a_n、切向加速度 a_t 和轨道曲率半径ρ(设初速为v_0, 仰角为α)。

解：设坐标x、y沿水平和竖直两个方向，如图示。总加速度g是已知的;所以a_n、a_t只是重力加速度g沿轨道法向和切向的分量,由图可得：



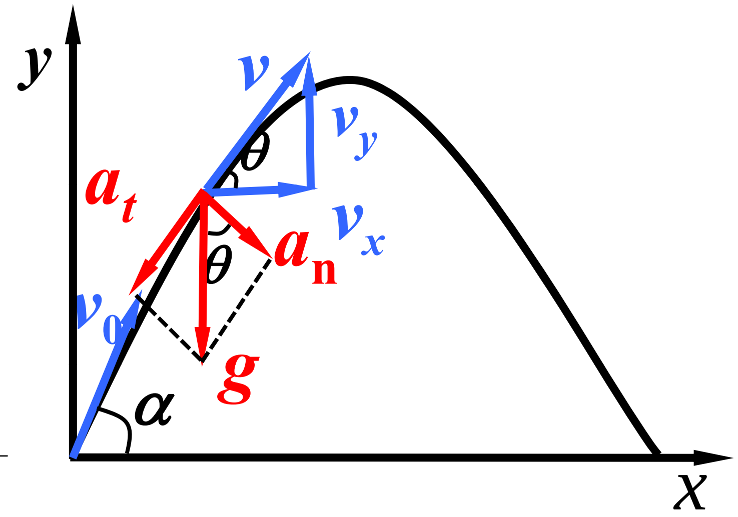
$$v_x = v_o \cos\alpha,\quad v_y = v_o \sin\alpha - gt,\quad v = \sqrt{v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2}}$$

$$a_n = g\cos\theta = g\frac{v_x}{v} = \frac{gv_0\cos\alpha}{\sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2}}$$

$$a_\tau = -g\sin\theta = -g\frac{v_y}{v}$$

$$= \frac{-g(v_0\sin\alpha - gt)}{\sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2}}$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(\sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2})^3}{g v_0\cos\alpha}$$



讨论：

(1) 在轨道的最高点，显然$\theta=0$，$v_y=0$

故该点：$a_n=g$, $a_\tau=0$,　　$\rho = \dfrac{(v_0\cos\alpha)^2}{g}$

(2) 因速率v可由已知公式直接写出，于是此题也可先求：

$a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$，再由　$g=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}$　求出a_n，最后由 $\rho = \dfrac{v^2}{a_n}$ 求出 ρ.

（五）平面极坐标系中运动的描述

一、平面极坐标系

在所研究的平面内，取固定于参考物的一点O为原点（极点），从它出发引出一条有刻度的射线为极轴，即建立起平面极坐标系。用r,θ两个坐标表示质点的位置。其单位矢量分别记为 $\hat{r}$、$\hat{\theta}$ 。

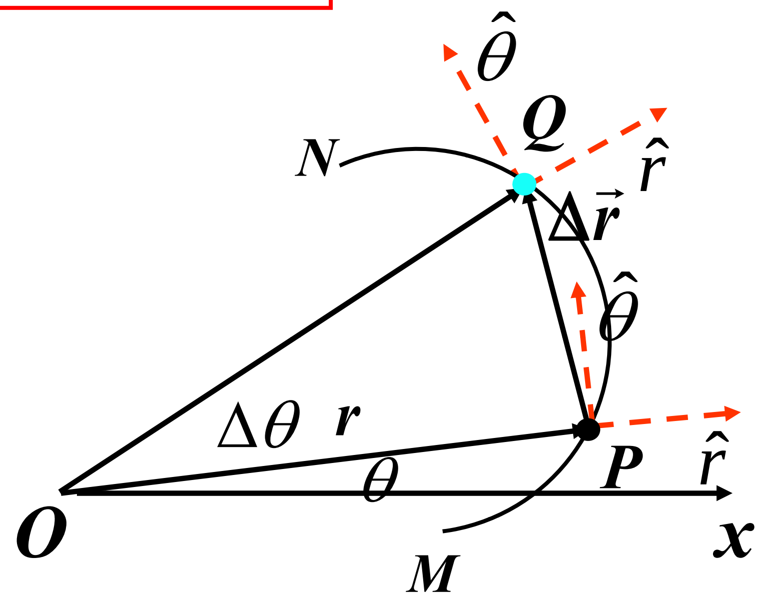
$\hat{r}$、$\hat{\theta}$ 不是常矢量。

质点的运动方程

$$r = r(t) \qquad \theta = \theta(t)$$

质点的轨道方程

$$f(r,\theta) = 0$$



二、位矢、速度、加速度的极坐标表示

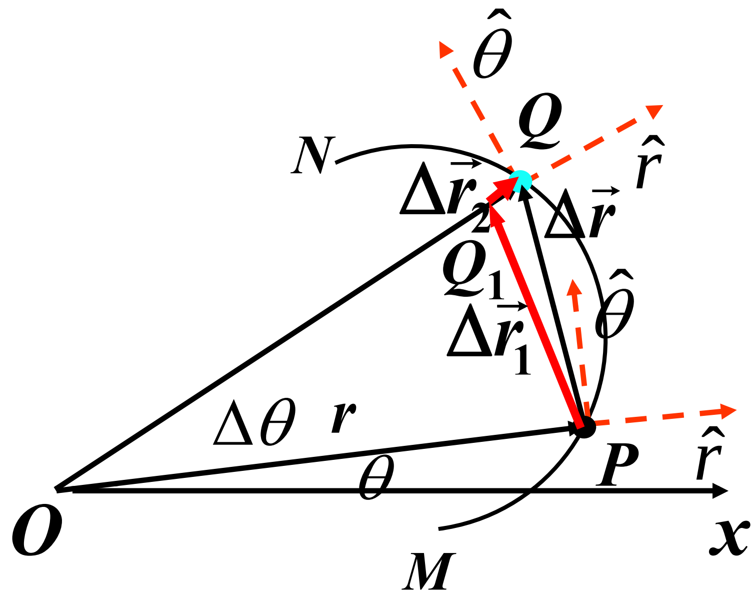
位矢： $\boxed{\vec{r} = r\hat{r}}$

速度：如图，在 Δt 时间间隔内质点的位移可表示为

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t}$$



$$OQ_1 = \left|\vec{OP}\right| = \left|\vec{r}(t)\right|$$

当$\Delta t \to 0$时　　$\Delta \vec{r}_2 \to dr\hat{r}$　　$\Delta \vec{r}_1 \to rd\theta\hat{\theta}$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}} = \underbrace{v_r}_{\text{径向速度}}\hat{r} + \underbrace{v_\theta}_{\text{横向速度}}\hat{\theta}$$

加速度：直接利用矢量求导法得

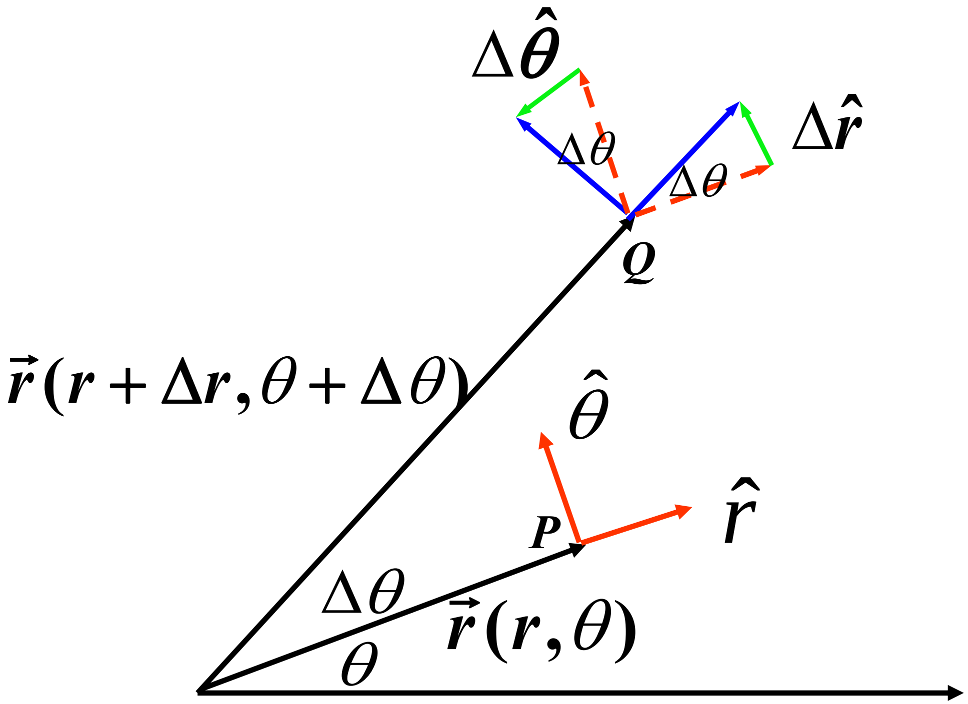
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}\right)$$

$$= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

利用矢量图可得

$$\frac{d\hat{r}}{dt}=\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt}=-\dot{\theta}\hat{r}$$



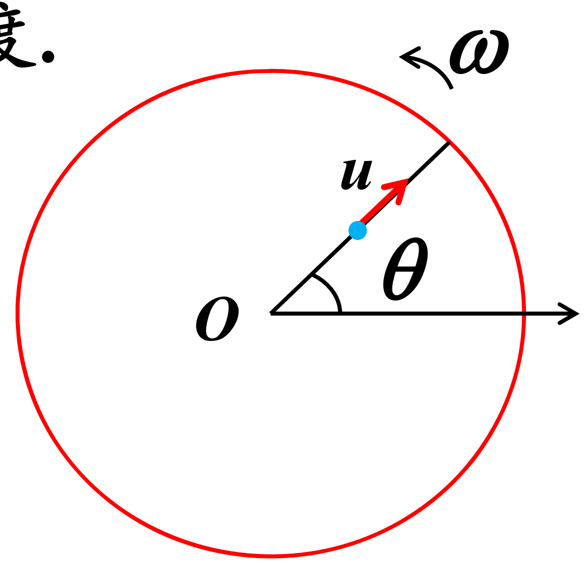
代入后整理得

$$\boxed{\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{r}+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}}=a_r\hat{r}+a_\theta\hat{\theta}$$

径向加速度　　横向加速度

在平面极坐标的基础上，如果再设定一个垂直于极坐标平面的z轴，就构成了柱面坐标系。

例1.5：设质点在匀速转动（角速度为 ω）的水平转盘上，从t=0开始，从中心出发以恒定的速率u沿半径运动，求质点的轨迹、速度和加速度.

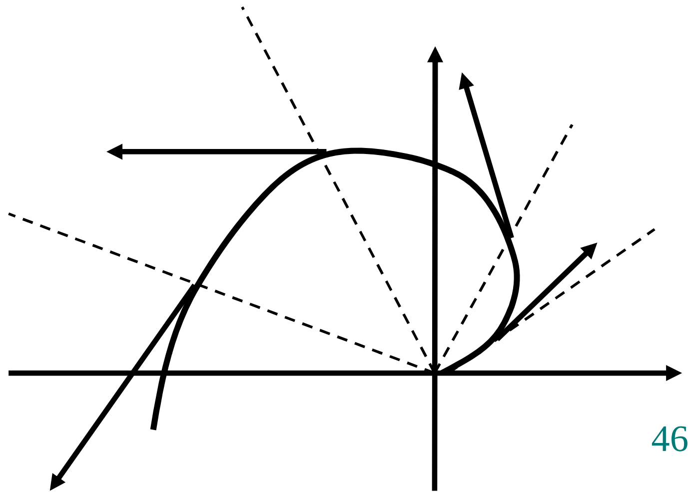


解：取极坐标，极点取在盘心，取质点运动所沿的半径在t=0时的位置为极轴，则质点的运动方程为

$$\begin{cases} r = ut \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

消去t，则由运动方程得轨迹方程

$$\boxed{r = \frac{u}{\omega}\theta}$$



故质点轨迹为阿基米德螺线

而径向速度为： $v_r = \dfrac{dr}{dt} = u$

横向速度为： $v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} = r\omega$

在极坐标中，其速度为

$$\vec{v} = u\hat{r} + r\omega\hat{\theta}$$

其加速度为

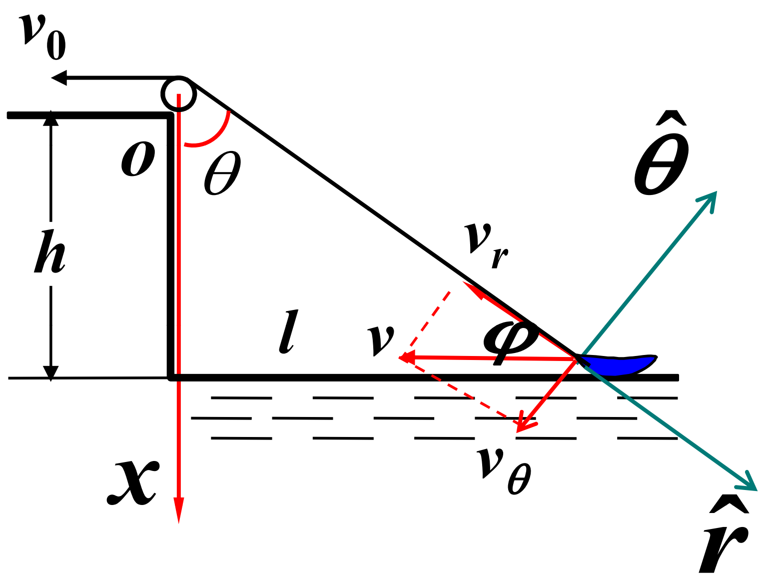
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

$$= -r\omega^2\hat{r} + 2u\omega\hat{\theta}$$

例1.6: 离水平面高为h的岸边，有人用绳以恒定速率v_0拉船靠岸。试求：船靠岸的速度和加速度随船至岸边距离变化的关系式？

解：如图，用平面极坐标系求解，将小船离岸距离为 l 时的速度分解到径向和横向方向，即

$$\begin{cases} v_r = -v\cos\varphi = -v_0 \\ v_\theta = -v\sin\varphi \end{cases}$$



消去v可求得

$$v_\theta = -v_0\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = -v_0\mathrm{tg}\varphi$$

则

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = -\frac{v_0}{\cos\varphi} = -\frac{v_0\sqrt{h^2+l^2}}{l}$$

方向水平向左

利用

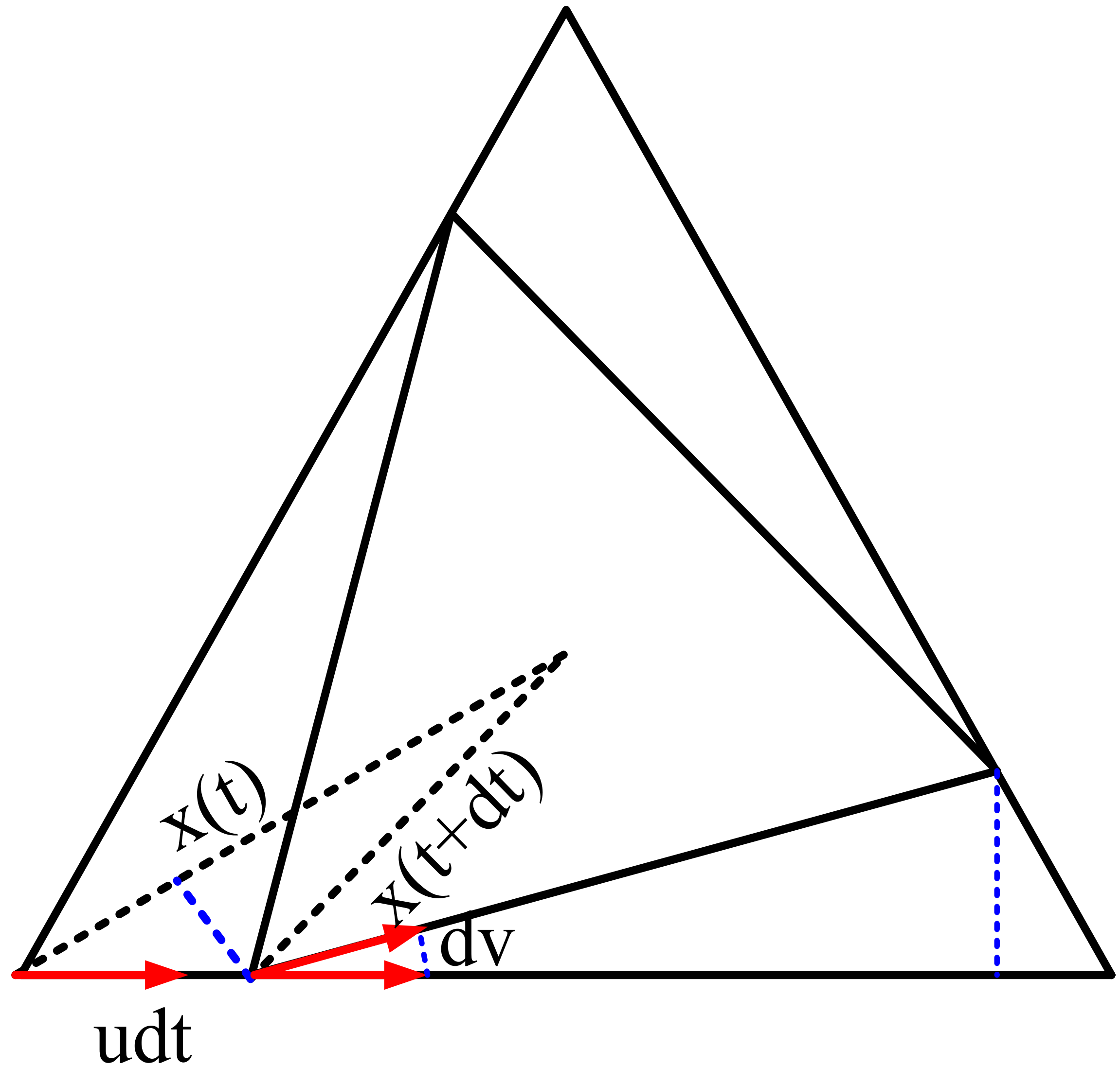
$$\begin{cases} v = \dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{v_0\sqrt{h^2+l^2}}{l} \\ a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\dfrac{v_0\sqrt{h^2+l^2}}{l}\right) \end{cases}$$

可得

$$a = -\frac{v_0^2 h^2}{l^3}$$

方向水平向左

例：三质点A、B、C各边长于边长为l的等边三角形的三顶点，今三质点各以恒定速率u向着其又邻（即A向B、B向C、C向A）运动。求（1）三质点经过多长时间后相遇？（2）在开始时每个质点的加速度。



$$dx = x(t+dt) - x(t) = -udt \bullet \cos 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}udt$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = -\int_0^t \frac{\sqrt{3}}{2}udt \quad \Rightarrow x = x_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}ut = \frac{L}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}ut$$

$$when \quad x = 0 \Rightarrow t = \frac{2L}{3u}$$

$$dv = u \bullet \left. \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}udt}{\sqrt{3} \bullet \left(\frac{L}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}ut \right)} \right|_{t=0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}u^2 dt}{L}$$

$$a = \frac{\sqrt{3}u^2}{2L}$$

总结一

质点运动学概要

（1）先后引入若干运动学量，用以描述质点位置的变动及其各种状态。
（2）确立这些运动学量之间的关系。
（3）研究质点运动轨道—描述运动轨道，分析轨道特征。
（4）给出一个运动学量或一条轨道的若干表达方式或解析表示。

由此可见，质点运动学本质上系几何学。凭借笛卡儿几何学和微积分学，便形成了一个定量的解析的质点运动学。

总结二

具体计算时坐标系的选择

直角坐标系：质点加速度为常数，如重力加速度；

自然坐标系：质点运动轨迹固定或已知，如限定在某曲线轨迹上的滑动；

平面极坐标系：平面运动时质点加速度总是指向空间某一固定点，有心力情形。

附表：常见匀变速运动规律的描述

		匀变速直线运动	匀变速圆周运动
状态参量	位置,位移	$\vec{r}$ $\Delta\vec{r}$	θ $\Delta\theta$
	速 度	$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$	$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$ 右手螺旋定则
	加速度	$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d^2r}{dt^2}$	$\beta=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$
运动规律的描述	匀速运动	$s=s_0+vt$ $v=const$	$\theta=\theta_0+\omega t$ $\omega=const$
	匀变速运动	$s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}vt^2$ $v_t{}^2-v_0{}^2=2a(s-s_0)$ $v_t=v_0+at$ $\overline{v}=\dfrac{v_0+v_t}{2}$ $a=const$	$\theta=\theta_0+\omega_0t+\frac{1}{2}\beta t^2$ $\omega_t{}^2-\omega_0{}^2=2\beta(\theta-\theta_0)$ $\omega_t=\omega_0+\beta t$ $\overline{\omega}=\dfrac{\omega_0+\omega_t}{2}$ $\beta=const$

本章基本要求

1、理解参考系、坐标系的物理意义及质点的应用范围；

2、应用矢量和微积分概念，掌握描述运动的四个物理量位矢、位移、速度、加速度的意义以及它们的相互关系；

3、掌握用微积分方法解决运动学两类问题；

4、掌握自然坐标系中运动物理量的表示方法，理解切向加速度和法向加速度的概念；

5、掌握平面极坐标中速度、加速度的表示方法。