Green定理與應用

林琦焜

"數學沒有物理是瞎子, 物理沒有數學是跛子。"

1. 前言:

學習數學的經驗告訴自己"數學是很容易忘的" 這其中的原因乃是因為我們所學的數學是定義, 定理, 證明, 這種三段式的數學。沒有動機, 缺乏直觀, 如此的數學如果你不會打退堂鼓我還眞的佩服, 在這篇文章我們將以直觀的角度從幾何與物理的觀點來討論 Green 定理。

微積分基本定理可說是微積分最重要的結果之一, 而線積分是一維積分的推廣, 因此我們問對線積分是否有相類似的結果:

> "線積分與雙重積分 (double integral) 之關係爲何?"

其答案是肯定的—Green 定理:

> 沿著封閉曲線C之線積分可化爲C所圍區域 $\mathcal{R}$ 之一般雙重積分 (面積分)。

這個定理最早出現是由英國自我教育的數學物理學家 George Green (1793- 1841) 於 1828 年研究電學 (electricity) 與磁學 (magnetism) 所發現的, 當然後來高斯 (Gauss) 等人也發現這結果, Green 的結果讓我們覺得非常之興奮, 也更體會伽利略所言:

> 數學是瞭解大自然的語言。

學數學若知道一些物理讓妳 (你) 永遠不會感到孤單。

Green 定理是數學分析中最重要的定理之一, 而在三維與更高維空間的推廣—Stokes 定理與散度定理 (Divergence Theorem) 則構成了應用數學的基礎。

2. 微積分基本定理:

微分與積分的關係這是微積分的主要房角石, 實際上這正是牛頓與萊布尼茲對微積分最重要的貢獻, 透過這個重要結果—微積分基本定理 (fundamental theorem of calculus), 我們明白微分與積分實際上是互爲一體兩面, 彼此是互相可逆的 (inverse)。

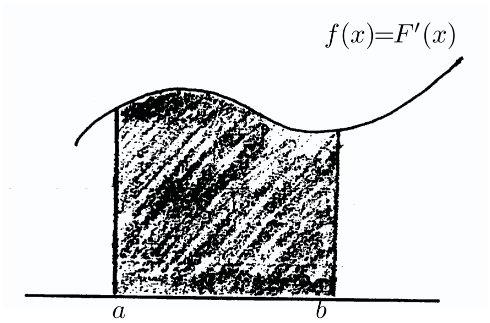
微積分基本定理: $f:[a,b]\to R$ 爲一連續函數且 $F'=f$ 則

$$\int_a^b F'(x)dx=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \tag{1}$$

這定理告訴我們要計算積分值 $\int_a^b f(x)dx$ 僅需求得函數 f 之原函數 (primitive, 或 antiderivative) F 即可。另外也說明了底下之事實:

> "一個函數之微分的積分值等於該函數之邊界值的差。"

換句話說方程式 (1) 把區間的積分與作用於其"零維" (zero dimension) 邊界之上的"積分" (零維的積分是該點之值) 連繫起來, 這零維的邊界是兩個端點 a 與 b。



微積分基本定理之物理意義:

公式 (1) 我們可以比擬如下: 如圖所示, 假設有一根直的管子其截面積等於 A 是固定不變, 有水在管內流動與流速爲$F(x)$, 另外由於管壁非完全封閉因此管壁四周同時也有水滲入 (或滲出), 我們想問的是此滲入率爲多少?(假設水的密度始終等於1) 我們取其中一段 $[x, x+\Delta x]$ 來看, 在單位時間內滲入到這段管子的水量必須等於沿管子方向流出的水量與流進的水量之差

$$(F(x+\Delta x)-F(x))\times A \quad (\text{高} \times \text{底面積}) \tag{2}$$

因此單位管長內水的滲入率爲

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(F(x+\Delta x)-F(x))A}{\Delta x\cdot A}\ \left(\frac{\text{水量}}{\text{體積}}\right)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\\ &= F'(x) \end{aligned} \tag{3}$$

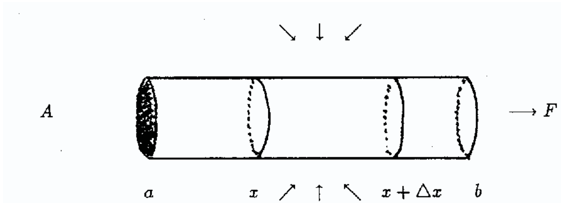
若是整個區間$[a, b]$則全部滲入管內之水量爲

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx$$

故

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(b)-F(a)$$

由以上之分析可知微積分基本定理之物理本質就是守恆律 (conservation law)。



3. 線積分之物理意義:

一質點受一變化的力作用而沿一已知曲線移動, 而求其所作的功 (work), 就自然導致所謂的線積分。

平面上任意向量 $F=(u, v)$, 而其沿著曲線切向量 $(\cos\tau, \sin\tau)$, 法向量 $(\cos\nu, \sin\nu)$ 之分量分別爲

$$\begin{aligned} F_\tau &= F\cdot(\cos\tau, \sin\tau) = u\cos\tau + v\sin\tau\\ F_\nu &= F\cdot(\cos\nu, \sin\nu) = u\cos\nu + v\sin\nu \end{aligned} \tag{4}$$

因爲 τ, ν 爲互餘

$$\cos\tau = -\sin\nu, \qquad \sin\tau = \sin\nu \tag{5}$$

而單位切向量、單位法向量爲

$$(\cos\tau, \sin\tau) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right),$$
$$(\cos\nu, \sin\nu) = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}\right) \tag{6}$$

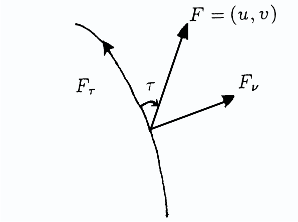
如果將 F 視爲力則線積分

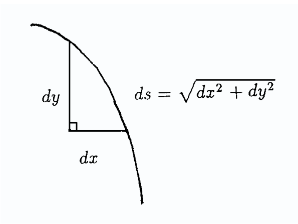
$$\oint_C F_\tau ds = \oint_C udx + vdy \tag{7}$$
(力× 位移=功)

所代表的意義就是功 (work)。其次是若將 F 視爲電流密度 (current density) 或流體速度則線積分

$$\oint_C F_\nu ds = \oint_C udy - vdx \tag{8}$$
(電流 × 位移=電通量)

所代表的意義就是電通量 (flux) 或流體流通過曲線C之通量, 我們在後面還會針對這兩個量作更深入之探討。





4. Green定理

Green 定理基本上是線積分與面積分之關係, 實際上就是微積分基本定理之推廣。

Green 定理: 令C爲平面上一分段平滑的封閉曲線而其所圍區域爲 $\mathcal{R}$, 假設函數 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 爲連續且一次偏導數也連續則等式成立

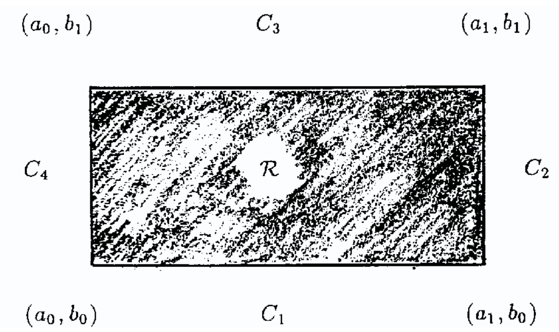
$$\oint_C Pdx+Qdy = \iint\limits_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$
$$= \iint\limits_R \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dA \tag{9}$$

數學的角度:

由於曲線 C 的變化可大可小一般而言並沒有明顯的參數式, 因此無法直接求線積分, 然而我們可利用逼近 (approximation) 的概念來處理, 這正是數學尤其是分析 (analysis) 的主要技巧。

長方形 $\Longrightarrow$ 多邊形 $\Longrightarrow$ $\mathcal{R}$

I. $\mathcal{R}$爲一長方形



$\mathcal{R}$之邊界 $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$

$$C_1: \quad a_0 \le x \le a_1, y = b_0$$
$$C_2: \quad x = a_1, b_0 \le y \le b_1$$
$$C_3: \quad a_0 \le x \le a_1, y = b_1$$
$$C_4: \quad x = a_0, b_0 \le y \le b_1$$

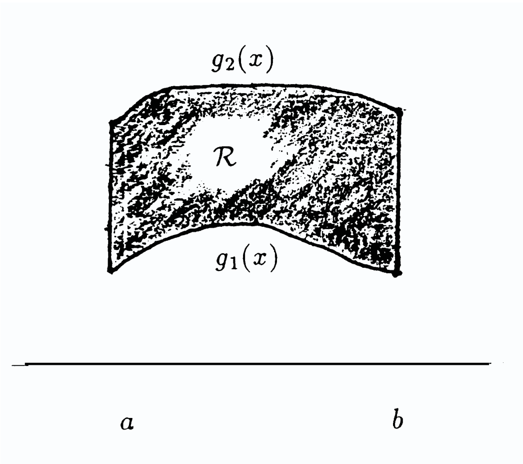
因此利用微積分基本定理可得

$$\oint_C F \cdot d\vec{r} = \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{a_0}^{a_1} P(x,b_0)dx + \int_{b_0}^{b_1} Q(a,y)dy \\
&\quad + \int_{a_1}^{a_0} P(x,b_1)dx + \int_{b_1}^{b_0} Q(a_0,y)dy \\
&= \int_{b_0}^{b_1} [Q(a,y) - Q(a_0,y)]dy \\
&\quad + \int_{a_0}^{a_1} [P(x,b_0) - P(x,b_1)]dx \\
&= \int_{b_0}^{b_1}\int_{a_0}^{a_1} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\,dy - \int_{a_0}^{a_1}\int_{b_0}^{b_1} \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy \\
&= \int_{a_0}^{a_1}\int_{b_0}^{b_1} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx\,dy
\end{aligned}
$$

II.假設 $\mathcal{R}$ 可表爲

$$\mathcal{R} = \{(x,y) | a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}, \qquad C = \partial\mathcal{R}$$



我們分別處理 $P(x,y)$, $Q(x,y)$

$$
\begin{aligned}
&\oint_C P(x,y)dx \\
&= \oint_{C_1} P(x,y)dx + \oint_{C_2} P(x,y)dx \\
&\quad + \oint_{C_3} P(x,y)dx + \oint_{C_4} P(x,y)dx \\
&= \int_a^b P(x,g_1(x))dx + \int_a^b P(x,g_2(x))dx \\
&= -\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy\,dx
\end{aligned}
$$

同理可得

$$\oint_C Q(x,y)dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial Q}{\partial x} dy\,dx$$

兩者合併

$$
\begin{aligned}
\oint_C Pdx + Qdy &= \iint_{\mathcal{R}} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dA \\
&= \iint_{\mathcal{R}} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dA
\end{aligned}
$$

這就是 Green 定理, 提供了我們關於線積分與面積分之關係, 但這個逼近方法有個限制就是曲線C必須是有長度曲線 (rectifiable curve), 而且還要用到一致收斂 (uniformly convergent) 的概念對於更一般的區域 Green 定理仍然是對的, 但已經超過微積分的範圍, 讀者有興趣可參考微分幾何方面的書。

例題 1: 利用 Green 定理計算線積分

$$\oint_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$$

其中曲線 C 是由拋物線 $y = x^2$ 與直線 $y = x$ 所圍區域之邊界。

解: 要直接計算線積分勢必要將 C 化爲參數式, 然而利用 Green 定理取

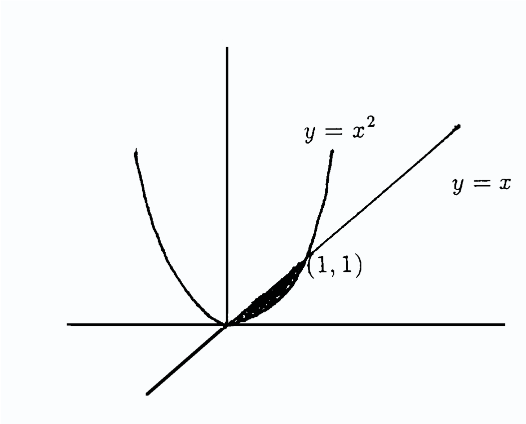
$$P(x,y) = 2xy - x^2, \quad Q(x,y) = x + y^2$$

則

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 2x$$

因此

$$
\begin{aligned}
\text{原線積分} &= \iint_{\mathcal{R}} (1 - 2x)dA \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (1 - 2x)dy\,dx = \frac{1}{30}
\end{aligned}
$$



Green 定理說明一封閉曲線C之線積分與C所圍區域之面積分 (雙重積分) 之關係, 因此在特殊情形之下, 線積分之幾何意義爲“面積”: 例如取

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$$

則由 Green 定理知

$$\oint_C Pdx+Qdy=\iint_{\mathcal{R}} 1\,dA=|\mathcal{R}|$$

通常可取P, Q 如下:

$$\begin{aligned} P&=0, & Q&=x\\ P&=-y, & Q&=0\\ P&=-\tfrac{1}{2}y, & Q&=\tfrac{1}{2}x \end{aligned}$$

系: 區域$\mathcal{R}$ 由分段平滑的封閉曲線 C 所圍成, 其面積爲:

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}|&=\frac{1}{2}\oint_C -y\,dx+x\,dy\\ &=-\oint_C y\,dx=\oint_C x\,dy \end{aligned} \tag{10}$$

例題 2: 試求橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之面積。

解: 將橢圓表爲參數式

$$x=a\cos\theta,\qquad y=b\sin\theta,$$
$$0\le\theta\le 2\pi\text{。}$$

利用系之結果得

$$\begin{aligned} A&=\oint_C x\,dy\\ &=\int_0^{2\pi}(a\cos\theta)(b\cos\theta\,d\theta)\\ &=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\pi ab \end{aligned}$$

爲著更深入探討 Green 定理, 我們再計算一個例題並從其中得到靈感。

例題 3: 已知 C 爲任意封閉平滑曲線, 試求線積分

$$\oint_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}\qquad (0,0)\notin C\text{。}$$

解: 首先假設 $(0,0)$ 並不包含在 C 之內部, 則

$$P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}\qquad Q=\frac{x}{x^2+y^2}$$
$$\Longrightarrow\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$$

因此由 Green 定理知

$$\oint_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\iint_{\mathcal{R}} 0\,dA=0\text{。}$$

其次, 若 $(0,0)$ 在 C 之內部, 此時 $(0,0)$ 爲一奇異點 (singularity), 克服這點的方法就是 “避開它”, 作一個半徑爲ρ, 以 $(0,0)$ 爲圓心的圓 B_ρ 考慮區域

$$\mathcal{R}'=\mathcal{R}-B_\rho,\qquad \partial\mathcal{R}'=C+\partial B_\rho$$

由於$\mathcal{R}'$並不包含 $(0,0)$, 因此利用前面的推論;

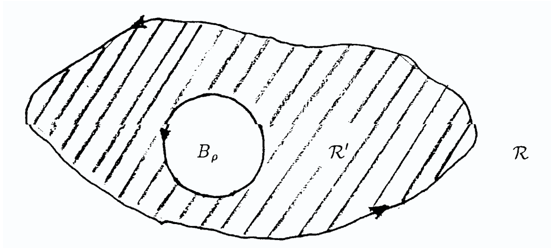
$$\oint_{\partial\mathcal{R}'}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=0$$

但 $\partial\mathcal{R}' = C + \partial B_\rho$, 故

$$\oint_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = \oint_{\partial B_\rho} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-\rho\sin\theta)(-\rho\sin\theta d\theta+(\rho\cos\theta)(\rho\cos\theta d\theta)}{(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\pi$$



註1: 此處積分值爲2π表示曲線C 繞了奇異點 $(0,0)$ 一圈, 而積分值等於0則是沒有繞到 $(0,0)$, 這所對應的便是複變函數理論的繞數 (winding number), 在流體力學則是環流 (circulation)。

註2: 證明的過程中我們發現沿著曲線 C 之線積分等於沿著圓周 ∂B_ρ 之線積分, 這裡面的數學本質就是同倫理論 (homotopy theory), 因此 Green 定理可推廣到單連通區域 (simply connected region), 而這正是複變函數論研究的一重要主題, 同時也說明複雜的曲線之線積分可化爲簡單的曲線之線積分 (例如圓周的線積分), 這就是數學的精神——將複雜的問題化爲簡單的問題。

註3: 若 C_1, C_2 爲任二條不相交的分段平滑封閉曲線而且都繞過原點$(0,0)$, 則

$$\oint_{C_1} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = \oint_{C_2} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

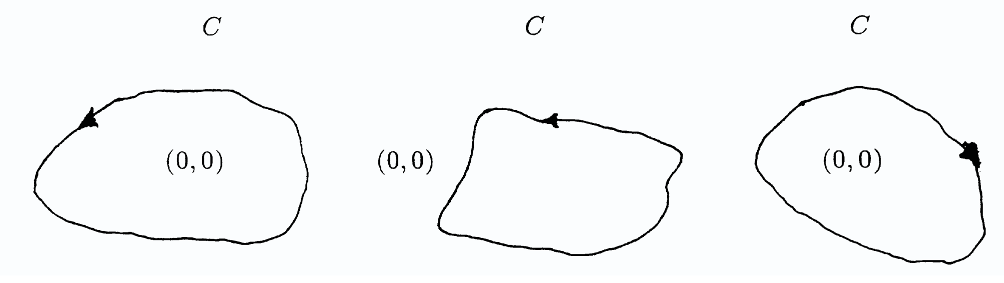
這除了同倫理論之外, 直接的意義就是該線積分對於形變 (deformation) 是一不變量。另外我們可透過極座標 (polar coordinate) 來看; 令

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

則被積分函數 (integrand) 成爲

$$d\theta = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

因此這個線積分實際上就是在測量沿著曲線C(逆時針方向) 角度之變化量, 當然若是繞了一圈則其變化量爲 2π, 若是順時針方向繞了一圈則其變化量爲 -2π, 這個概念就是前面所說的繞數 (winding number)。



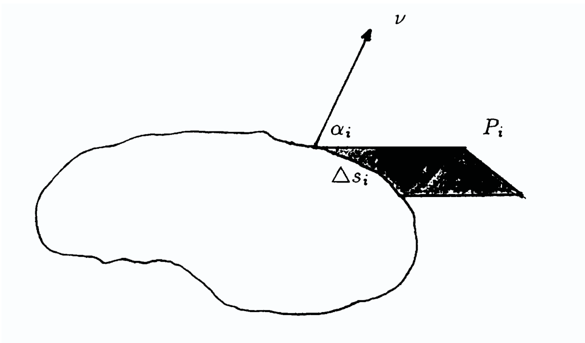
繞數$=1$ 繞數$=0$ 繞數$=-1$

物理的角度:

Green 定理也可透過物理的角度來認識, 令$\mathcal{R}$為平面上的平滑曲線 C 所圍之單連通區域, 設 C可表爲$x=x(t), y=y(t)$ 之參數式, 而向量

$$F(x,y)=(P(x,y),Q(x,y)) \tag{11}$$

表示流體的速度, 我們想計算流體經過邊界C之通量 (flux), 仿照線積分將曲線 C 分爲若干小段而看其中一段, 首先是 x 分量通過 $\triangle s_i$ 之通量 (斜線部分之面積) 爲



$P_i(x,y)\triangle s_i \cos\alpha_i$ 其中 α_i 爲朝外法向量 ν 與 x 軸之夾角, 再將各部份全部加起來並利用 Riemann 和知 x 軸部分之分量爲

$$\oint_C P(x,y)\cos(\nu,x)\,ds \tag{12}$$

同理y軸之分量爲

$$\oint_C Q(x,y)\cos(\nu,y)\,ds \tag{13}$$

因此全部之通量爲

$$\oint_C [P(x,y)\cos(\nu,x)+Q(x,y)\cos(\nu,y)]ds$$

$$\begin{aligned} &= \oint_C [P(x,y)\frac{dy}{ds}-Q(x,y)\frac{dx}{ds}]\,ds \\ &= \oint_C P(x,y)\,dy-Q(x,y)\,dx \qquad (14) \\ &= \oint_C F\cdot\nu ds, \quad \nu=\left(\frac{dy}{ds},-\frac{dx}{ds}\right) \end{aligned}$$

另一方面我們看小矩形, 由於由這矩形左側垂直邊上的流速爲 $P(x,y)$, 因此單位時間內有 $P(x,y)\triangle y$ 的水流入, 而同一時間則約有 $P(x+\triangle x,y)\triangle y$ 的水流出, 所以沿x 軸方向之單位淨流量爲

$$\frac{[P(x+\Delta x,y)-P(x,y)]\Delta y}{\Delta x\Delta y}$$

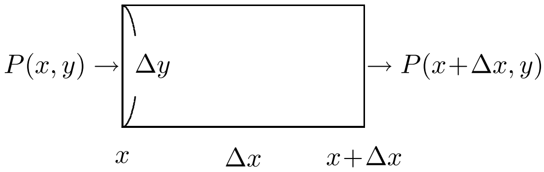
令 $\Delta x\to 0$, 得極限 $\partial P/\partial x$ 同理沿 y 軸之單位淨流量爲 $\partial Q/\partial y$ 因此單位淨流量 爲 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$ 而 通過整個區域 $\mathcal{R}$ 之全部通量爲

$$\iint_{\mathcal{R}}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy \tag{15}$$

因爲水是不可壓縮 (假設的), 同一時間的水量必須從邊界C 流出去 (質量守恆), 故

$$\begin{aligned} &\oint_C P\,dy-Qdx \\ &=\iint_{\mathcal{R}}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy \qquad (16) \end{aligned}$$

這再次說明 Green 定理之物理意義爲 “守恆律”。



5. 向量形式之 Green 定理

由 (9) 與 (16) 兩式, 我們自然而然引進向量的概念:

$$F(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))=P\vec{i}+Q\vec{j}$$
(向量場)

$$\tau=\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds}\right) \tag{17}$$
(單位切向量)
$$\nu=\left(\frac{dy}{ds},-\frac{dx}{ds}\right)$$
(單位朝外法向量)

另外向量場 F 的旋度 (curl) 爲

$$\mathrm{curl}F=\nabla\times F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & 0\end{vmatrix}$$
$$=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \tag{18}$$

散度 (divergence) 則爲

$$\mathrm{div}F=\nabla\cdot F=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y} \tag{19}$$

所以 Green 定理 ((9), (16)) 可改寫爲

$$\oint_C F\cdot d\vec{r}=\oint_C F\cdot\tau ds=\iint_{\mathcal{R}}\nabla\times F\cdot\vec{k}dA \tag{20}$$
$$\oint_C F\cdot\nu\, ds=\iint_{\mathcal{R}}\nabla\cdot F\, dA \tag{21}$$

分別表示切向量與法向量形式的 Green 定理, 而其物理則分別是“功” (work) 與“通量” (flux), (20), (21) 兩式可推廣至更高維數空間, 就是通稱的 Stokes 定理與散度定理 (Divergence Theorem)。

爲何 curl$F$, ∇F 會被稱爲旋度與散度呢? 我們考慮特殊的區域 $\mathcal{R}$ 是以 (x_0,y_0) 爲圓心, 半徑是 r 的圓, 則由連續性知

$$\nabla\times F(x_0,y_0)\cdot\vec{k}=\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\oint_C F\cdot\tau ds$$
$$\nabla F(x_0,y_0)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\oint_C F\cdot\nu ds \tag{22}$$

所以旋度是單位面積內之最大環流 (circulation), 而散度則是單位面積內之通量 (流量之變化), 這個形式最大的好處不受座標的影響, 如 (18), (19) 兩式, 而且透過 (22) 式 (即利用 Green 定理) 我們可證明旋度和散度是與座標無關。

註1: 如果 $F=\nabla\phi=(\phi_x,\phi_y)$, 向量 (vector) F 爲純量 (scalar) ϕ 之梯度 (gradient) 則 (21) 式可改寫爲

$$\oint_C\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\,ds=\oint_C\nabla\phi\cdot\nu\,ds$$
$$=\iint_{\mathcal{R}}\nabla\nabla\phi\,dA=\iint_{\mathcal{R}}\Delta\phi\,dA \tag{23}$$

函數ϕ稱爲 位能函數 (potential function) 而

$$\Delta=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{24}$$

則是出名的 Laplace 算子, 這是偏微分方程中最重要的算子。

註2: 若取$F=u\nabla v$, 則由向量之計算得

$$\nabla\cdot F=\nabla\cdot(u\nabla v)=u(\nabla\cdot\nabla v)+\nabla v\cdot\nabla u$$

因此 (21) 式成爲 Green 第一等式

$$\oint_C u\frac{\partial v}{\partial\nu}\,ds$$
$$=\iint_{\mathcal{R}}\left[u\Delta v+\nabla u\cdot\nabla v\right]dA \tag{25}$$

若 u, v 互換, 後兩式相減則可得 Green 第二等式

$$\oint_C \begin{vmatrix} u & v \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} & \frac{\partial v}{\partial \nu} \end{vmatrix} ds = \iint_{\mathcal{R}} \begin{vmatrix} u & v \\ \Delta u & \Delta v \end{vmatrix} dA \tag{26}$$

這些等式在偏微分方程中扮演著非常重要的角色。

註3: Green 定理的最好處理手法是利用微分形式 (differencial forms), 我們簡單說明如下: 線積分

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy$$

之被積函數 (integrand) 爲一階微分形式 (first order differential form)

$$L = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{27}$$

L之全微分 (total differential) 爲

$$\begin{aligned} dL &= dPdx + dQdy \\ &= (P_x dx + P_y dy)dx \\ &\quad + (Q_x dx + Q_y dy)dy \\ &= (Q_x - P_y)dxdy \end{aligned} \tag{28}$$

因此 Green 定理可重新寫爲微分形式 (differential form)

$$\begin{aligned} &\oint_C P\,dx + Q\,dy \\ &\quad = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \\ \Leftrightarrow \quad &\oint_C L = \iint_{\mathcal{R}} dL \end{aligned} \tag{29}$$

這個公式同時也說明在區域$\mathcal{R}$之積分及其邊界之積分兩者之關係, 而實際上就是微積分基本定理之推廣, 當然其精神則是 — 分部積分 (integration by part)。

6. 線積分的微積分基本定理

在第五節我們引進了位能函數 (potential function)$F = \nabla\phi$之概念, 實際上可經由全微分 (total differential) 來理解

$$\begin{cases} F \cdot d\vec{r} = Pdx + Qdy \\ d\phi = \phi_x dx + \phi_y dy \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad F \cdot d\vec{r} = \nabla\phi \cdot d\vec{r} = d\phi \tag{30}$$

因此

$$P = \phi_x \qquad Q = \phi_y, \quad \Rightarrow \quad P_y = Q_x$$

換爲微分方程的語言則是 “正合 (exact) ”。

線積分的微積分基本定理: 假設 ϕ 爲一可微分函數, 且其梯度 $\nabla\phi$ 爲連續, $\vec{r}$ 爲連接 $\vec{a}, \vec{b}$ 兩點之任意曲線, 則

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a}) \tag{31}$$

這定理的物理意義 (電學的角度): 沿著電場上兩點間任一曲線電場所作的功爲兩點的電位差, 由 Green 定理可知若 $F = \nabla\phi$, C_1, C_2 爲連接 $\vec{a}, \vec{b}$ 之任意兩條曲線則

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot d\vec{r} &= \int_{C_1} F \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} F \cdot d\vec{r} \\ &= \iint_{\mathcal{R}} \nabla \times (\nabla\phi) \cdot \vec{k}\, dxdy = 0 \end{aligned}$$

因此

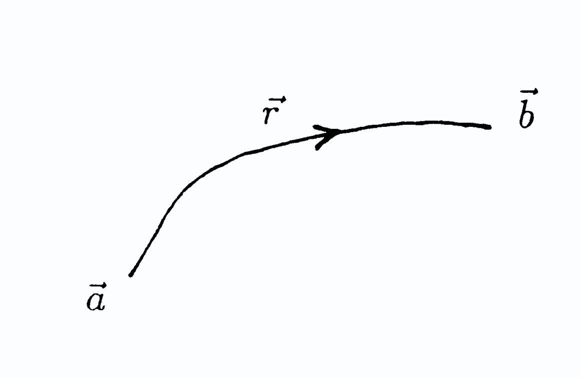
$$\int_{C_1} F \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} F \cdot d\vec{r}$$

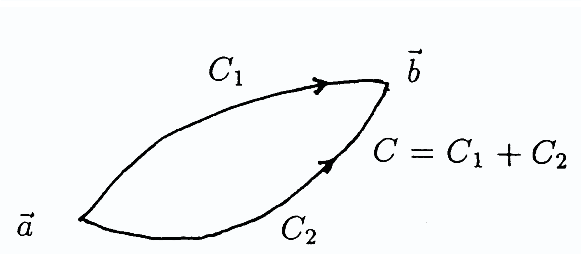
即線積分與路徑無關 (path-independent), 換句話說, 將一物體 (或質點) 由位置 $\vec{a}$ 移

至位置 $\vec{b}$ 力對物體(質點) 所作的功, 僅和物體(質點) 起點位置及終點位置有關, 而與其運動所遵循的運動路徑無關, 此時我們稱向量場 F 為保守的 (conservative), 而ϕ則稱為F之位能函數, 這定理也告訴我們

$$\phi(\vec{x})-\phi(\vec{a})=\int_{\vec{a}}^{\vec{x}}\nabla\phi\cdot d\vec{r}=\int_{\vec{a}}^{\vec{x}}F\cdot d\vec{r} \tag{32}$$

即位能函數可藉由保守力的線積分而得。





動能定理:

$\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$ 可視為位置向量函數, 則速度與加速度分別是:

$$\begin{aligned}\vec{v}(t)&=\frac{d\vec{r}}{dt}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)\\ \vec{a}(t)&=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2}\right)\end{aligned} \tag{33}$$

設物體的質量為 m, 其所受外力的合力為 F 則由牛頓定律知

$$F=m\vec{a}=m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{34}$$

則對 F 而言從 $\vec{r}(t_1)$ 至 $\vec{r}(t_2)$ 所作的功為

$$\begin{aligned}W&=\int_{\vec{r}(t_1)}^{\vec{r}(t_2)}F\cdot d\vec{r}\\ &=\int_{t_1}^{t_2}F\left(\vec{r}(t)\right)\cdot\frac{d\vec{r}(t)}{dt}dt\\ &=\int_{t_1}^{t_2}m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}(t)dt\\ &=\frac{1}{2}m\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(|\vec{v}(t)|^2\right)dt\\ &=\frac{1}{2}m\left|\vec{v}(t_2)\right|^2-\frac{1}{2}m\left|\vec{v}(t_1)\right|^2\end{aligned} \tag{35}$$

其中 $\frac{1}{2}m|\vec{v}(t)|^2$ 為動能 (kinetic energy), 因此 (35) 式就是“動能定理”, 其物理意義:

合力對物體所作的功等於動能的改變量

如果 F 為一保守力場, $F=-\nabla\phi$, 則由線積分的微積分基本定理知:

$$W=-\phi(t_2)+\phi(t_1) \tag{36}$$

則 (32) 式改寫為

$$\begin{aligned}&\phi(t_1)+\frac{1}{2}m|\vec{v}(t_1)|^2\\ &=\phi(t_2)+\frac{1}{2}m|\vec{v}(t_2)|^2\end{aligned} \tag{37}$$

其中 ϕ 為位能 (potential energy), 因此 (37) 式就是能量守恆定律 (conservation of energy)。

散度之物理意義:

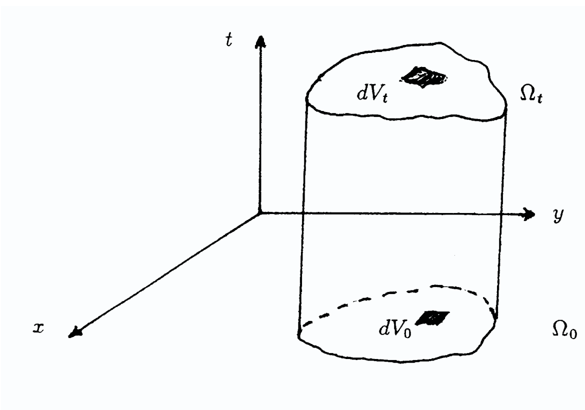
有了速度的概念之後, 我們覺得這是很好的時機來闡釋散度 (divergence) 的物理意義, 我們可以這麼想像: 假設正在喝咖啡將奶精倒入杯內, 最初形成的圖形為 Ω_0, 而後經由攪拌或其他因素使得 Ω_0 變化, 其位置向量為 $(x(t),y(t))=(\xi,\eta)$, 速度則為

$\vec{v}(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (u, v)$, 經過 t 時間之後 Ω_0 轉換為 Ω_t, 我們有興趣的問題是 Ω_0 與 Ω_t, 兩者之面積變化為何? (實際上牛頓力學本身就是一種座標變換) 我們看其中一小塊 $(dV_0 \to dV_t)$ 兩者關係為

$$\begin{aligned} dV_0 = dxdy &= \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} d\xi d\eta \\ &= J(t) d\xi d\eta = J(t) dV_t \end{aligned} \tag{38}$$

其中 $J(t)$ 就是 Jacobian

$$J(t) = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{dV_0}{dV_t} \tag{39}$$



因此 $\Omega_0 \to \Omega_t$ 之變化情形, 等於是探討 $J(t)$ 的變化, 我們假設 $J, J^{-1} \neq 0$, 即沒有退化的情形 (可設 $0 < J < \infty$): 由全微分 (total differential) 知

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) &= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{dx}{dt}\right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \end{aligned}$$

同理可得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$J(t)$ 對 t 微分並利用行列式之性質可得

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \begin{vmatrix} \frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} + \frac{\partial v}{\partial y}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) J(t) = \nabla \cdot \vec{v} J(t) \end{aligned}$$

所以 $J(t)$ 滿足一階微分方程;

Euler展開公式:

$$\frac{dJ}{dt} = (\nabla \cdot \vec{v}) J \iff \frac{d \ln J}{dt} = \nabla \cdot \vec{v} \tag{40}$$

這個公式稱為 Euler 展開公式 (Euler expansion formula), 由微分方程知

$$J(t) = e^{t(\nabla \cdot \vec{v})} J(0) \tag{41}$$

由此式顯然可得

$\nabla \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow J(t) > J(0) \Leftrightarrow$ 面積變大

$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow J(t) = J(0) \Leftrightarrow$ 面積不變

$\nabla \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow J(t) < J(0) \Leftrightarrow$ 面積變小

因此我們稱一流體為不可壓縮 (incompressible) 其真實意義：

流體經過任何的變換其形狀雖然改變了, 但其面積 (或體積) 卻始終保持不變。

旋度之物理意義:

由例題3的經驗知線積分

$$\oint_C F\cdot d\vec{r} = \oint_C udx+vdy = \iint_{\mathcal{R}} (v_x-u_y)dA$$

爲向量場 $F=(u,v)$ 環繞封閉曲線 C 之環流, 利用等式

$$v_x-u_y = \text{curl}F\cdot\vec{k} = \nabla\times F\cdot\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & 0 \end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

我們可將前一式表爲

$$\oint_C F\cdot d\vec{r} = \iint_{\mathcal{R}} (v_x-u_y)dA$$

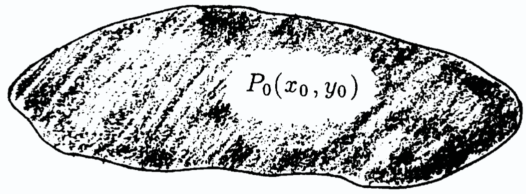
假設$\mathcal{R}$爲包含 $P_0(x_0,y_0)$ 之區域, 則

$$\frac{1}{|\mathcal{R}|}\oint_C F\cdot d\vec{r}$$

表示單化面積之環流, 因此

$$\begin{aligned}\text{curl}F\cdot\vec{k} &= \nabla\times F\cdot\vec{k} \\ &= \lim_{\mathcal{R}\to P_0}\frac{1}{|\mathcal{R}|}\oint_C F\cdot d\vec{r} \\ &= \lim_{\mathcal{R}\to P_0}\frac{1}{|\mathcal{R}|}\iint_{\mathcal{R}}(\nabla\times F\cdot\vec{k})dA\end{aligned}$$

所以向量場 F 之旋度 $\nabla\times F$ (在 (x_0,y_0) 之旋度) 就是單位面積產生最大環流的量且其方向垂直於 $\mathcal{R}$。



7. Green定理在複變函數論之應用:

應用一:

Cauchy 定理: $\mathcal{R}$ 爲複數平面上之單連通區域 (simply connected domain), f 爲定義在 $\mathcal{R}$上之單值 (single value) 連續可微且解析的函數, 則

$$\oint_C f(z)dz = 0 \tag{42}$$

其中 C 爲包含在 $\mathcal{R}$ 內任意分段平滑之 Jordan 曲線。

解: 假設$f=u+iv, z=x+iy$ 則複變積分 (實際上就是線積分) 爲

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= \oint_C (u+iv)d(x+iy) \\ &= \oint_C udx-vdy+i\oint_C vdx+udy\end{aligned}$$

但 f 可微且

$$\begin{aligned}f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{\partial v}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}$$

因爲 u,v 之偏導數爲連續, 因此可利用 Green 定理分別作用到實部與虛部得

$$\oint_C (udx-vdy) = \iint_{\mathcal{R}}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$\oint_C (vdx+udy) = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy$$

由 Cauchy-Riemann 方程 (f 爲解析函數)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}。$$

知上面兩個積分爲零, 故可結論

$$\oint_C f(z)dz = 0。$$

複變積分的物理意義可由第三節的討論而得, 仿 Cauchy 定理之證明:

$$\begin{aligned} &\oint_C \bar{f}(z)dz \\ &= \oint_C (u - iv)d(x + iy) \\ &= \oint_C udx + vdy + i \oint_C -vdx + udy \\ &= \text{功(work)} + i\text{通量(flux)} \end{aligned} \tag{43}$$

當然可以利用 Green 定理將之化爲二重積分 (比較 (9),(16))

$$\begin{aligned} &\oint_C \bar{f}(z)\, dz \\ &= \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dA \\ &\quad + i \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dA \\ &= \iint_{\mathcal{R}} (\text{curl}F + i\nabla \cdot F) dA\, (F = (u, v)) \end{aligned} \tag{44}$$

$\bar{f}$ 之複變積分轉化爲向量場 $F = (u, v)$ 之旋度與散度的二重積分, 換句話說, 透過對向量場 $F = (u, v)$ 的旋度與散度的研究可幫助我們對函數 $\bar{f}$ 或 f 的認識, 實際上 Cauchy - Riemann 方程就是散度與旋度的組合:

$$\begin{cases} u_x = (-v)_y \\ u_y = -(-v)_x \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \nabla \cdot F = u_x + v_y = 0 \\ \text{curl}F = v_x - u_y = 0 \end{cases} \tag{45}$$

在近代分析中極負盛名的 *補償緊緻法* (compensated compactness method) 之精神便是如果向量場之散度與旋度有很好的性質, 則原向量場可以得到更好的緊緻性 (就是所謂的 *散度旋度引理* (div-curl lemma))。

應用二:

(40) 式可視爲複數形式的 Green 定理: 我們先看看座標變換: $(x, y) \longmapsto (z, \bar{z})$

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \end{cases} \tag{46}$$

由全微分或連鎖律 (chain rule) 可得

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \end{cases} \\ \Longrightarrow &\begin{cases} \partial \equiv \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \bar{\partial} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \end{cases} \end{aligned} \tag{47}$$

因此 Laplace 算子可表爲

$$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} = 4\partial\bar{\partial}$$

現在考慮可微分函數 (differentiable function), $\bar{f} = u - iv$, 則

$$\begin{aligned} 2i\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} &= 2i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u - iv) \\ &= (v_x - u_y) + i(u_x + v_y) \\ &= \text{curl}F + i\nabla \cdot F \ (F = (u, v)) \end{aligned} \tag{48}$$

另一方面利用微分型式 (differential form) 之公式可得

$$d[fdz] = \frac{\partial f}{\partial z}dz \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z} \wedge dz$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$$
$$= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (dx - idy) \wedge (dx + idy)$$
$$= 2i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dxdy \tag{49}$$

複數形式的Green定理: $f = f(z, \bar{z})$ 爲連續且其偏導數亦爲連續則

$$\oint_C \bar{f}(z)dz = 2i \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} dx\, dy$$
$$= \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz \tag{50}$$
$$\oint_C f(z)dz = 2i \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx\, dy$$
$$= \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz \tag{51}$$

其中 $C = \partial \mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ 滿足 Green 定理之要求。

如果 f 爲解析函數 (analytic function) 則

$$2i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = (-v_x - u_y) + i(u_x - v_y) = 0$$

分別取實部與虛部等於零, 這就是著名的 Cauchy - Riemann 方程式:

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x \tag{52}$$

再一次得到 Cauchy 定理

$$\oint_C f(z)dz = 2i \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx\, dy$$
$$= 2i \iint_{\mathcal{R}} \bar{\partial} f dx\, dy = 0$$

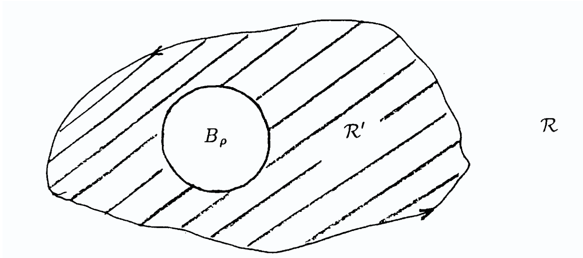
因此我們可以說: Green 定理就是 Cauchy 定理的推廣。

應用三:

Cauchy 積分公式: 假設 $f \in C^1(\bar{\mathcal{R}})$, 則

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{R}} \frac{f(z)}{z - \xi} dz$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial f / \partial \bar{z}}{z - \xi} dz \wedge d\bar{z} \tag{53}$$

這個公式顯然是在一般大學部複變函數理論之 Cauchy 積分公式之推廣。



證明: 我們仿前面之例題3計算線積分之方法考慮區域

$$\mathcal{R}_\rho = \mathcal{R} - B_\rho(\xi)$$
$$\partial \mathcal{R}_\rho = \partial \mathcal{R} - \partial B_\rho = C - \partial B_\rho$$

並且取函數

$$F(z) = \frac{f(z)}{z - \xi}$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z - \xi}$$

則由 Green 定理 (50) 知

$$\oint_{\partial \mathcal{R}_\rho} F(z)dz = \iint_{\mathcal{R}_\rho} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$$

因此

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - \xi} dz - \oint_{\partial B_\rho} \frac{f(z)}{z - \xi} dz$$
$$= \iint_{\mathcal{R}_\rho} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z - \xi} d\bar{z} \wedge dz \tag{54}$$

令 $\rho \to 0$ 且由連續性之特質可得

$$\oint_{\partial B_\rho} \frac{f(z)}{z - \xi} dz \to 2\pi i f(\xi) \tag{55}$$

另一方面由極座標知

$$\begin{aligned} d\bar{z}\wedge dz &= 2idx\,dy = 2ir dr\,d\theta \\ \frac{1}{|z-\xi|}d\bar{z}\wedge dz &= 2idr\,d\theta \end{aligned} \tag{56}$$

所以 (55) 成爲 Cauchy 積分公式 (令$\rho\to 0$)

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-\xi}dz \\ &\quad +\frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial f/\partial\bar{z}}{z-\xi}dz\wedge d\bar{z} \end{aligned}$$

註1: Caucly 積分公式是個古老且優美的結果, 通常我們極容易就認定, 這就是其終極形式, 然而這個“神話”卻於1978年代由 Kerzman 與 Stein 在研究多複變函數 (Several Complex Variables) 所打破, 這個結果, 我們稱爲 Kerzman-Stein 公式, 有興趣之讀者可參閱相關資料。

註2: 如果f爲解析函數 (analytic function), $\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=0$, 則該公式就回到傳統的 Caucly 積分公式, 它告訴我們, 對$\mathcal{R}$內任一點 $\xi\in\Omega$, 函數值$f(\xi)$, 可由表爲邊界 $C=\partial\mathcal{R}$ 之路徑積分, 而這個表現定理 (representation theorem) 也提供了 Cauchy-Riemann 方程 $\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=0$ 解的公式。

應用四:

如果考慮微分方程 ($\bar{\partial}$問題)

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{z}} = h \tag{57}$$

Cauchy 積分公式 (53) 告訴我們右邊第一式可視爲齊次解 (homogeneous solution), 而第二式可視爲非齊次解 (nonhomogeneous solution), 因此 Cauchy 積分公式 (53) 同時提議$\bar{\partial}$問題 (58) 之解爲

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{R}} \frac{f(z)}{z-\xi}dz \\ &\quad +\frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathcal{R}} \frac{h}{z-\xi}dz\wedge d\bar{z} \end{aligned} \tag{58}$$

$\bar{\partial}$-問題: 假設 $f\in C^\infty(\bar{\mathcal{R}})$, 則非齊次 Cauchy-Riemann 微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial\bar{z}} = f(z,\bar{z})$$

之解可表爲

$$u(\xi) = v(\xi) + \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathcal{R}} \frac{f(z,\bar{z})}{\xi-z}dz\wedge d\bar{z} \tag{59}$$

$v(\xi)$ 爲任意的解析函數 (analytic function)

解: 這問題是解決可由複變函數之理論而來, 但我們比較喜歡用偏微分方程的技巧, 由 Cauchy 積分方式, 直觀而言, 我們需要處理的是

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\frac{1}{z-z_0} = ?$$

顯然可知

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\frac{1}{z-z_0} = 0 \qquad \forall z\neq z_0$$

因此我們可以假設

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\frac{1}{z-z_0} &= c\delta(z-z_0)\delta(\bar{z}-\bar{z}_0) \\ &= c\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) \end{aligned}$$

c 爲一待求之常數, 不失一般性可 $z_0=0$ 則

$$\frac{1}{z} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\bar{z}}{z\bar{z}+\varepsilon^2}, \quad \varepsilon>0$$

直接微分得

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\frac{\bar{z}}{z\bar{z}+\varepsilon^2}) = \frac{1}{|z|^2+\varepsilon^2} - \frac{|z|^2}{(|z|^2+\varepsilon^2)^2}$$
$$= \frac{\varepsilon^2}{(|z|^2+\varepsilon^2)^2}$$

因此

$$\begin{aligned} c &= \iint_{\mathbf{R}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big(\frac{1}{z}\Big) dz \wedge d\bar{z} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{\mathbf{R}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big(\frac{\bar{z}}{z\bar{z}+\varepsilon^2}\Big) dz \wedge d\bar{z} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{\mathbf{R}^2} \frac{\varepsilon^2}{(|z|^2+\varepsilon^2)^2} dz \wedge d\bar{z} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} 2i \iint_{\mathbf{R}^2} \frac{\varepsilon^2}{(|z|^2+\varepsilon^2)^2} dxdy \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} 2\pi i \int_0^\infty \frac{2rdr}{(r^2+1)^2} = 2\pi i \end{aligned}$$

換句話說

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z-z_0} = 2\pi i \delta(z-z_0)\delta(\bar{z}-\bar{z}_0)$$

所以 $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-z_0}$ 故一基本解(fundamental solution) 故 $\bar{\partial}$ 問題之解爲

$$u(\xi) = v(\xi) + \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathcal{R}} \frac{f(z,\bar{z})}{\xi - z} dz \wedge d\bar{z}$$
$$= (\text{齊次解}) + (\text{非齊次解})$$

應用五:

在複變函數論的發展歷史中, 是與流體力學有非常密切之關係, 特別是二維穩定, 不可壓縮, 無旋度, 不具黏性的流體 (steady two-dimensional flow of an incompressible, irrotational, inviscid fluid) 其中最著名的是 Bernoulli 定律, 這定律說明了飛機飛行的原理, 是航空史第一個最重要的定律:

Bernoulli定律:

$$P + \frac{1}{2}\rho|w|^2 = \text{constant}$$
$$(\text{壓力+ 動能=常數}) \qquad (60)$$

假設 Ω 爲 xy -平面上的一個單連通區域 (simply connected domain) 而曲線

$$C = \{z = z(s) = x(s) + iy(s),\ 0 \le s \le L\}$$

則代表 Ω 中一條有長度分段平滑的封閉區線, 因此曲線 C 上任一點之單位切向量與單位朝外法向量爲

$$\tau = z'(s) = \frac{dx}{ds} + i\frac{dy}{ds} \equiv e^{i\theta(s)}$$
$$\nu = \frac{dy}{ds} - i\frac{dx}{ds} = -ie^{i\theta(s)} \qquad (61)$$

另外假設流體的速度爲

$$w = u + iv \qquad (62)$$

則由 (43) 式可知

$$\begin{aligned} &\oint_C \bar{w} dz \\ &= \oint_C udx + vdy + i\oint_C -vdx + udy \\ &= \oint_C w\cdot\tau ds + i\oint_C w\cdot\nu ds \\ &= \text{環流(circulation)} \\ &\qquad + i\text{擴張(expansion)} \qquad (63) \end{aligned}$$

實部表示沿曲線 C 之環流, 虛部則表示在曲線內面積之變化率, 由於我們所考慮的是特殊的流體 (穩定, 不可壓縮, 無旋度, 不具黏度性) 這個假設告訴我們在曲線 C 內唯一作用到流體的力是流體本身的壓力 (法向量方向) 必須等於通過C之動量通量 (momentun flux), 因此

$$\int_C [P\nu + \rho w(w\cdot\nu)] ds = 0 \qquad (64)$$

ρ 表示流體之密度, P爲其壓力, 利用關係式

$$dz = e^{i\theta} ds, \quad i\nu = e^{i\theta},$$

$$iw \cdot \nu = \frac{1}{2}(\bar{w}e^{i\theta} + we^{-i\theta})$$

可以將 (65) 改寫爲

$$\oint_C (P + \frac{1}{2}\rho|w|^2) dz + \frac{1}{2}\oint_C \rho w^2 d\bar{z} = 0 \quad (65)$$

最後我們假設流體是均匀的 (homogeneous) 因此ρ =常數, 因爲 $\bar{w}$ 是解析函數, 所以 $\bar{w}^2$ 也是解析函數, 故由 Cauchy 定理可知

$$\int_C \bar{w}^2 dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_C w^2 d\bar{z} = 0$$

所以 (66) 式化簡爲

$$\oint_C (P + \frac{1}{2}\rho|w|^2) dz = 0 \qquad (66)$$

由 Morera 定理可結論被積分函數$P + \frac{1}{2}\rho|w|^2$爲解析函數, 但由 Green 定理 (51) 式, 可知唯一可能的實値解析函數 (real-valued analytic function) 是常數函數, 因此可結論

$$P + \frac{1}{2}\rho|w|^2 = \text{常數。}$$

参考資料

1. 數學之內容方法及意義 (I, II, III); 徐氏基金會出版 (1970)。
2. The Cauchy Transform, Potential Theory and Conformal Mapping; Steven R. Bell; CRC PRESS (1992).
3. Introduction to Calculus and Analysis(I, II); R. Courant and F. John; Springer-Verlag (1989)。
4. Complex Variables; G. Polya and G. Latta; John Wiley & Sons, Inc. (1974)。
5. Vector and Tensor Analysis; 2nd ed., E. C. Young; Marcel Dekker, Inc. (1993)。

—本文作者任教國立成功大學數學研究所—