相对论的意义

A Einstein

By Tsungp Lee

Welcome to coonect with me by Feynman_landau@sohu.com

目　录

中译本再版说明 …………………………………… i

第五版说明 …………………………………… iii

第一章　相对论前物理学中的空间与时间 ………………… 1

第二章　狭义相对论 …………………………………… 16

第三章　广义相对论 …………………………………… 36

第四章　广义相对论(续) ………………………………… 51

附录一　论“宇宙学问题” ………………………………… 71

附录二　非对称场的相对论性理论 ……………………… 87

索引 ……………………………………………………110

第一章　相对論前物理学中的空間与时間

相对論和空間与时間的理論有密切的联系．因此我要在开始的时候先簡单扼要地考究一下我們的空間与时間概念的起源，虽然我知道这样做是在提出一个引起爭論的問題．一切科学，不論自然科学还是心理学，其目的都在于使我們的經驗互相协調并将它們納入邏輯体系．我們习慣上的空間与时間概念和我們經驗的特性又是怎样联系着的呢？

我們看来，个人的經驗是排成了序列的事件；我們所記得的各个事件在这个序列里看来是按照“早”和“迟”的标准排列的，而对于这个标准則不能再作进一步的分析了．所以，对于个人来說，就存在着“我”的时間，也就是主观的时間，其本身是不可测度的．其实我可以用数去和事件如此联系起来，使較迟的事件和較早的事件相比，对应于較大的数；然而这种联系的性質却可以是十分随意的．将一只时計所指出的事件順序和既定事件序列的順序相比較，我就能用这只时計来确定这种联系的意义．我們将时計理解为供給一联串可以計数的事件的东西，它并且还具有一些我們以后会說到的其他性質．

各人在一定的程度上能用語言来比較彼此的經驗．于是就出現各个人的某些感覚是彼此一致的，而对于另一些感覚，却不能建立起这样的一致性．我們慣于把各人共同的因而多少是非个人特有的感覚当作眞实的感覚．自然科学，特别是其中最基本的物理学，就是研究这样的感覚．物理物体的概念，尤其是刚体的概念，便是这类感覚的一种相对恆定的复合．在同样的意义下，一个时計也是一个物体或体系，它还具有一个附加的性質，就是它所計数的一联串事件是由都可以当作相等的元素构成的．

我們的概念和概念体系所以能得到承認，其唯一理由就是它

們是适合于表示我們的經驗的复合;除此以外,它們并无别的关于理性的根据. 我深信哲学家[1] 曾对科学思想的进展起过一种有害的影响,在于他們把某些基本概念从經驗論的領域里(在那里它們是受人們制約的)取出来,提到先验论的不可捉摸的頂峯. 因为即使看起来观念世界不能借助于邏輯方法从經驗推导出来,但就一定的意义而言,却是人类理智的創造,沒有人类的理智便无科学可言; 尽管如此,这个观念世界之依賴于我們經驗的性質,就象衣裳之依賴于人体的形状一样. 这对于我們的时間与空間的概念是特别确实的;迫于事实,为了整理这些概念并使它們适于合用的条件,物理学家只好使它們从先验论的奥林帕斯山(Olympus)[2]降落到人间的实地上来.

現在談談我們对于空間的概念和判断. 这里主要的也在于密切注意經驗对于概念的关系. 在我看来,彭加莱(Poincaré) 在他的"科学与假設"(La Science et l'Hypothese) 一书中所作的論述是訊識了眞理的. 在我們所能感覺到的一切刚体变化中間,那些能被我們身体任意的运动抵消的变化是以其簡单性为标志的; 彭加莱称之为位置的变化. 凭簡单的位置变化能使两个物体相接触. 在几何学里有根本意义的全等定理便和处理这类位置变化的定律有关. 下面的討論看来对于空間概念是重要的. 将物体 B, C, ··· 附加到物体 A 上能够形成新的物体; 就說我們延伸物体 A. 我們能延伸物体 A, 使之与任何其他物体 X 相接触. 物体 A 的所有延伸的总体可称为"物体 A 的空間". 于是,說一切物体都在"(随意选择的)物体 A 的空間"里, 是正确的. 在这个意义下我們不能抽象地談論空間,而只能說"属于物体 A 的空間". 在日常生活中确定物体相对位置时,地壳处在如此主要的地位,由此而形成的抽象的空間概念, 当然是无可置护的. 为了使我們自己免于这項极严重的錯誤, 我們将只提到"参照物体"或"参照空間". 以后会看

1) 这里所說的哲学家应指唯心主义哲学家. ——中文譯本編者註.

2) 希腊神話传說奥林帕斯山是神所居之处; 这里就是指天上而言. ——中文譯本編者註.

到，只是由于广义相对論才使得这些概念的精細推究成为必要.

我不打算詳細考究参照空間的某些性質，这些性質导致我們将点設想为空間的元素，将空間設想为連續区域．我也不企图进一步分析一些表明連續点列或綫的概念为合理的空間性質．如果假定了这些概念以及它們和經驗的固体的关系，那就容易說出空間的三維性是指什么而言；对于每个点，可以使它与三个数 x_1，x_2，x_3（坐标）相联系，办法是要使这种联系成为唯一地相互的，而且当这个点描画一个連續的点系列（一条綫）时，它們就作連續的变化.

在相对論前的物理学里，假定理想刚体位形的定律是符合于欧几里得几何学的．这个意义可以表示如下：标志在刚体上的两点构成一个間隔．这样的間隔可取多种方向和我們的参照空間处于相对的静止．如果現在能用坐标 x_1，x_2，x_3 表示这个空間里的点，使得間隔两端的坐标差 Δx_1，Δx_2，Δx_3，对于間隔所取的每种方向，都有相同的平方和：

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2, \tag{1}$$

則这样的参照空間称为欧几里得空間，而这样的坐标便称为笛卡儿坐标[1]．其实，就以把間隔推到无限小的极限而論，作这样的假定就够了．还有些不很特殊的假設包含在这个假設里；由于这些假設具有根本的意义，必須喚起注意．首先，假設了可以随意移动理想刚体．其次，假設了理想刚体对于取向所表現的行为与物体的材料以及其位置的改变无关，这意味着只要能使两个間隔重合，則随时随处都能使它們重合．对于几何学，特别是对于物理量度有根本重要性的这两个假設，自然是由經驗得来的；在广义相对論里，須假定这两个假設只对于那些和天文的尺度相比是无限小的物体与参照空間才是有效的.

量 s 称为間隔的长度．为了能唯一地确定这样的量，需要随意地規定一个指定間隔的长度；例如，令它等于1（长度单位）．于是就可以确定所有其他間隔的长度．如果使 x_ν 綫性地依賴于参

1）这关系必須对于任意选擇的原点和間隔方向（比率 $\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3$）都能成立.

量λ,

$$x_\nu = a_\nu + \lambda b_\nu,$$

便得到一条綫，它具有欧几里得几何学里直綫的一切性質. 具体地说,容易推知,将間隔 s 沿直綫相继平放 n 次,就获得长度为 $n \cdot s$ 的間隔. 所以长度所指的是使用单位量杆沿直綫量度的結果. 下面会看出:它就象直綫一样,具有和坐标系无关的意义.

現在考虑这样一种思路，它在狹义相对論和在广义相对論里处在相类似的地位. 我們提出問題：除掉曾經用过的笛卡儿坐标之外，是否还有其他等效的坐标？間隔具有和坐标选择无关的物理意义;于是从我們的参照空間里任一点作出相等的間隔,则所有間隔端点的軌跡为一球面，这个球面也同样具有和坐标选择无关的物理意义. 如果 x_ν 和 x'_ν (ν 从 1 到 3) 都是参照空間的笛卡儿坐标,则按两个坐标系表示球面的方程将为

$$\sum \Delta x_\nu^2 = \text{恒量}, \tag{2}$$

$$\sum \Delta x_\nu'^2 = \text{恒量}. \tag{2a}$$

必須怎样用 x_ν 表示 x'_ν 才能使方程(2)与(2a)彼此等效呢？关于将 x'_ν 表作 x_ν 的函数,根据泰勒 (Taylor) 定理,对于微小的 Δx_ν 的值,可以写出

$$\Delta x'_\nu = \sum_\alpha \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\alpha} \Delta x_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'_\nu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \Delta x_\alpha \Delta x_\beta + \cdots.$$

如果将 (2a) 代入这个方程并和 (1) 比較，便看出 x'_ν 必須是 x_ν 的綫性函数. 因此,如果令

$$x'_\nu = a_\nu + \sum_\alpha b_{\nu\alpha} x_\alpha, \tag{3}$$

而

$$\Delta x'_\nu = \sum_\alpha b_{\nu\alpha} \Delta x_\alpha, \tag{3a}$$

则方程(2)与(2a)的等效性可表示成下列形式:

$$\sum \Delta x_\nu'^2 = \lambda \sum \Delta x_\nu^2 \ (\lambda \text{ 和 } \Delta x_\nu \text{ 无关}). \tag{2b}$$

所以由此知道 λ 必定是常数. 如果令 $\lambda = 1$,(2b) 与 (3a) 便供給条件

$$\sum_{\nu} b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

其中按照 $\alpha = \beta$ 或 $\alpha \neq \beta$ 有 $\delta_{\alpha\beta} = 1$ 或 $\delta_{\alpha\beta} = 0$. 条件(4)称为正交条件,而变换(3),(4)称为綫性正交变换. 如果要求 $s^2 = \sum \Delta x_\nu^2$ 在每个坐标系里都等于长度的平方，并且总用同一单位标尺来量度，則 λ 須等于 1. 因此綫性正交变换是我們能用来从参照空間里一个笛卡儿坐标系变到另一个的唯一的变换. 我們看到，在应用这样的变换时,直綫方程仍化为直綫方程. 将方程(3a)两边乘以 $b_{\nu\beta}$ 并对于所有的 ν 求和,便逆演而得

$$\sum b_{\nu\beta} \Delta x'_\nu = \sum_{\nu\alpha} b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta} \Delta x_\alpha = \sum_{\alpha} \delta_{\alpha\beta} \Delta x_\alpha = \Delta x_\beta. \tag{5}$$

同样的系数 b 也决定着 Δx_ν 的反代换. 在几何意义上，$b_{\nu\alpha}$ 是 x'_ν 軸与 x_α 軸間夹角的余弦.

总之,可以說在欧几里得几何学里(在既定的参照空間里)存在优先使用的坐标系,即笛卡儿系,它們彼此用綫性正交变换来作变换. 参照空間里两点間用量杆測得的距离 s,以这种坐标来表示就特别簡单. 全部几何学可以建立在这个距离概念的基础上. 在目前的論述里,几何学和实在的东西(刚体)有联系,它的定理是关于这些东西的行为的陈述，可以証明这类陈述是正确的还是錯誤的.

人們寻常习惯于离开几何概念与經驗間的任何关系来研究几何学. 将純粹邏輯性的而且与在原則上不完全的經驗无关的东西分离出来是有好处的. 这样能使純粹的数学家滿意. 如果他能从公理正确地即沒有邏輯錯誤地推导出他的定理,他就滿足了. 至于欧几里得几何学究竟是否眞确的問題,他是不关心的.但是按我們的目的,就必須将几何学的基本概念和自然对象联系起来;沒有这样的联系，几何学对于物理学家是沒有价值的. 物理学家关心几何学定理究竟是否眞确的問題. 从下述簡单的考虑可以看出:根据这个观点,欧几里得几何学肯定了某些东西,这些东西不仅是从定义按邏輯推导来的結論.

空間里 n 个点之間有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个距离 $s_{\mu\nu}$；在这些距离和 $3n$ 个坐标之間有关系式

$$s_{\mu\nu}^2 = (x_{1(\mu)} - x_{1(\nu)})^2 + (x_{2(\mu)} - x_{2(\nu)})^2 + \cdots.$$

从这 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个方程里可以消去 $3n$ 个坐标，由这样的消去法，至少会获得 $\frac{n(n-1)}{2} - 3n$ 个有关 $s_{\mu\nu}$ 的方程[1]. 因为 $s_{\mu\nu}$ 是可测度的量，而根据定义，它們是彼此无关的，所以 $s_{\mu\nu}$ 之間的这些关系并非本来是必要的.

从前面显然知道，变换方程(3)、(4)在欧几里得几何学里具有根本的意义，在于这些方程决定着由一个笛卡儿坐标系到另一个的变换 在笛卡儿坐标系里，两点間可测度的距离 s 是用方程

$$s^2 = \sum \Delta x_\nu^2$$

表示的，这个性质表示着笛卡儿坐标系的特性.

如果 $K_{(x_\nu)}$ 与 $K'_{(x_\nu)}$ 是两个笛卡儿坐标系，則

$$\sum \Delta x_\nu^2 = \sum \Delta x_\nu'^2.$$

右边由于綫性正交变换的方程而恆等于左边，右边和左边的区别只在于 x_ν 换成了 x'_ν. 这可以用这样的陈述来表示：$\sum \Delta x_\nu^2$ 对于綫性正交变换是不变量. 在欧几里得几何学里，显然只有能用对于綫性正交变换的不变量表示的量才具有客观意义，而和笛卡儿坐标的特殊选择无关，并且所有这样的量都是如此. 这就是有关处理不变量形式的定律的不变量理論对于解析几何学十分重要的理由.

考虑体积，作为几何不变量的第二个例子. 这是用

$$V = \iiint dx_1 dx_2 dx_3$$

表示的. 根据雅可俾定理，可以写出

$$\iiint dx'_1 dx'_2 dx'_3 = \iiint \frac{\partial(x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3,$$

---

1) 其实有 $\frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6$ 个方程.

其中最后积分里的被积函数是 x'_ν 对 x_ν 的函数行列式，而由(3)，这就等于代换系数 $b_{\nu\alpha}$ 的行列式 $|b_{\mu\nu}|$. 如果由方程(4)組成 $\delta_{\mu\alpha}$ 的行列式，則根据行列式的乘法定理，有

$$1 = |\delta_{\alpha\beta}| = \left|\sum_\nu b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta}\right| = |b_{\mu\nu}|^2; \ |b_{\mu\nu}| = \pm 1. \tag{6}$$

如果只限于具有行列式 $+1$ 的变换[1](只有这类变换是由坐标系的連續变化而来的)，則 V 是不变量.

然而不变量并非是表示和笛卡儿系的特殊选择无关的唯一形式. 矢量与张量是其他的表示形式. 让我們表示这样的事实：具有流动坐标 x_ν 的点位于一条直綫上. 于是有

$$x_\nu - A_\nu = \lambda B_\nu \ (\nu \text{ 由 } 1 \text{ 到 } 3).$$

可以令

$$\sum B_\nu^2 = 1,$$

而并不限制普遍性.

如果将方程乘以 $b_{\beta\nu}$ (比較(3a)与(5))并对于所有的 ν 求和，便得到

$$x'_\beta - A'_\beta = \lambda B'_\beta,$$

其中

$$B'_\beta = \sum_\nu b_{\beta\nu} B_\nu; \ A'_\beta = \sum_\nu b_{\beta\nu} A_\nu.$$

这些是参照第二个笛卡儿坐标系 K' 的直綫方程. 它們和参照原来坐标系的方程有相同的形式. 因此显然直綫具有和坐标系无关的意义. 就形式而論，这有賴于一个事实，即 $(x_\nu - A_\nu) - \lambda B$ 这些量变换得和間隔的分量 Δx_ν 一样. 設对于每个笛卡儿坐标系所确定的三个量象間隔的分量一样变换，这三个量的总合便称为矢量. 如果矢量对于某一笛卡儿坐标系的三个分量都等于零，則对于所有的坐标系的分量都会等于零，因为变换方程是齐次性的. 于是可以不須倚靠几何表示法而获得矢量概念的意义. 直綫方程的这种性质可以这样表示：直綫方程对于綫性正交变换是协变的.

---

1) 这样說来，有两种笛卡儿系，称为"右手"与"左手"系. 每个物理学家和工程师都熟悉两者之間的区别. 不能按几何学来規定这两种坐标系，而只能作两者之間的对比，注意到这一点是有意味的.

現在要簡略地指出有些几何对象导致张量的概念. 設 P_0 为二次曲面的中心, P 为曲面上的任意点, 而 ξ_ν 为間隔 P_0P 在坐标軸上的投影. 于是曲面方程是

$$\sum a_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu = 1.$$

在这里以及类似的情况下,我們要略去累加号,并且了解求和是按出現两次的指标进行的. 这样就将曲面方程写成

$$a_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu = 1.$$

对于既定的中心位置和选定的笛卡儿坐标系, $a_{\mu\nu}$ 这些量完全决定曲面. 由 ξ_ν 对于綫性正交变换的已知变换律(3a), 容易求得 $a_{\mu\nu}$ 的变换律[1]:

$$a'_{\sigma\tau} = b_{\sigma\mu}b_{\tau\nu}a_{\mu\nu}.$$

这个变换对于 $a_{\mu\nu}$ 是齐次的,而且是一次的. 由于这样的变换, 这些 $a_{\mu\nu}$ 便称为二秩张量的分量(因为有两个指标,所以說是二秩的). 如果张量对于任何一个笛卡儿坐标系的所有分量 $a_{\mu\nu}$ 等于零, 則对于其他任何笛卡儿系的所有分量也都等于零. 二次曲面的形状和位置是以 (a) 这个张量描述的.

可以定出高秩(指标个数較多的)张量的解析定义. 将矢量当作一秩张量, 并将不变量(标量)当作零秩张量, 这是可能和有益的. 在这一点上,可以这样提出不变量理論的問題:按照什么規律可从給定的张量組成新张量? 为了以后能够应用, 現在考慮这些規律. 首先只就同一参照空間里用綫性正交变换从一个笛卡儿系变换到另一个的情况来討論张量的性質. 由于这些規律完全和維数无关,我們先不确定維数 n.

定义 設对象对于 n 維参照空間里的每个笛卡儿坐标系是用 n^α 个数 $A_{\mu\nu\rho\cdots}$(α = 指标的个数)規定的,如果变换律是

$$A'_{\mu'\nu'\rho'\cdots} = b_{\mu'\mu}b_{\nu'\nu}b_{\rho'\rho}\cdots A_{\mu\nu\rho\cdots}, \tag{7}$$

則这些数就是 α 秩的张量的分量.

---

1) 根据(5), 方程 $a'_{\sigma\tau}\xi'_\sigma\xi'_\tau = 1$ 可以换成 $a'_{\sigma\tau}b_{\mu\sigma}b_{\nu\tau}\xi_\sigma\xi_\tau = 1$, 于是立即有上述結果.

附識 只要(B),(C),$(D)\cdots$是矢量,则由这个定义可知

$$A_{\mu\nu\rho\cdots}B_\mu C_\nu D_\rho\cdots \tag{8}$$

是不变量. 反之,如果知道对于任意选择的(B),(C)等矢量,(8)式总能导致不变量,则可推断(A)的张量特性.

加法与减法 将同秩的张量的相应分量相加和相减,便得等秩的张量:

$$A_{\mu\nu\rho\cdots}\pm B_{\mu\nu\rho\cdots}=C_{\mu\nu\rho\cdots}. \tag{9}$$

由上述张量的定义可得到証明.

乘法 将第一个张量的所有分量乘以第二个张量的所有分量,就能从秩数为α的张量和秩数为β的张量得到秩数为$\alpha+\beta$的张量:

$$T_{\mu\nu\rho\cdots\alpha\beta\gamma\cdots}=A_{\mu\nu\rho\cdots}B_{\alpha\beta\gamma\cdots}. \tag{10}$$

降秩 令两个确定的指标彼此相等,然后按这个单独的指标求和,可从秩数为α的张量得到秩数为$\alpha-2$的张量:

$$T_{\rho\cdots}=A_{\mu\mu\rho\cdots}\left(=\sum_\mu A_{\mu\mu\rho\cdots}\right). \tag{11}$$

証明是

$$A'_{\mu\mu\rho\cdots}=b_{\mu\alpha}b_{\mu\beta}b_{\rho\gamma}\cdots A_{\alpha\beta\gamma\cdots}=\delta_{\alpha\beta}b_{\rho\gamma}\cdots A_{\alpha\beta\gamma\cdots}=$$
$$=b_{\rho\gamma}\cdots A_{\alpha\alpha\gamma\cdots}.$$

除了这些初等的运算规则,还有用微分法的张量形成法(扩充):

$$T_{\mu\nu\rho\cdots\alpha}=\frac{\partial A_{\mu\nu\rho\cdots}}{\partial x_\alpha}. \tag{12}$$

对于綫性正交变换,可以按照这些运算规则由张量构成新的张量.

张量的对称性质 如果从互换张量的指标μ与ν所得到的两个分量彼此相等或相等而反号,则这样的张量便称为对于这两个指标的对称或反称张量.

对称条件: $A_{\mu\nu\rho}=A_{\nu\mu\rho}$.

反称条件: $A_{\mu\nu\rho}=-A_{\nu\mu\rho}$.

定理 对称或反称特性的存在和坐标的选择无关，其重要性就在于此．由张量的定义方程可得到証明.

特殊张量.

I. 量 $\delta_{\rho\sigma}$(4)是张量的分量(基本张量).

証明 如果在变换方程 $A'_{\mu\nu}=b_{\mu\alpha}b_{\nu\beta}A_{\alpha\beta}$ 的右边用量 $\delta_{\alpha\beta}$(它按 $\alpha=\beta$ 或 $\alpha\neq\beta$ 而等于 1 或0)代替 $A_{\alpha\beta}$, 便得

$$A'_{\mu\nu}=b_{\mu\alpha}b_{\nu\alpha}=\delta_{\mu\nu}.$$

如果将(4)用于反代换(5),就显然会有最后等号的証明.

II. 有一个对于所有各对指标都是反称的张量($\delta_{\mu\nu\rho\cdots}$), 其秩数等于維数 n, 而其分量按照 $\mu\nu\rho\cdots$ 是 123… 的偶排列或奇排列而等于 +1 或 −1.

証明可借助于前面証明过的定理 $|b_{\rho\sigma}|=1$.

这些少数的簡单定理构成了从不变量理論建立相对論前物理学和狭义相对論的方程的工具.

我們看到: 在相对論前的物理学里,为了确定空間关系,需要参照物体或参照空間;此外,还需要笛卡儿坐标系. 設想笛卡儿坐标系是单位长的杆子所构成的立方构架，就能将这两个概念融为一体. 这个构架的格子交点的坐标是整数. 由基本关系

$$s^2=\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\Delta x_3^2, \tag{13}$$

可知这种空間格子的构杆都是单位长度. 为了确定时間关系，还需要一只标准时計,例如放在笛卡儿坐标系或参照构架的原点上. 如果在任何地点发生一个事件，我們立即就能給它指定三个坐标 x_ν 和一个时間 t, 只要确定了在原点上的时計和該事件同时的时刻. 因此我們对于隔开事件的同时性就（假設地）給出了客观意义，而先前只涉及个人对于两个經驗的同时性. 这样确定的时間在一切情况下和坐标系在参照空間中的位置无关，所以它是对于变换(3)的不变量.

我們假設表示相对論前物理学定律的方程組，和欧儿里得几何学的关系式一样,对于变换(3)是协变的. 空間的各向同性与均

匀性就是这样表示的[1]. 現在按这个观点来考虑几个較重要的物理方程.

質点的运动方程是

$$m\frac{d^2x_\nu}{dt^2}=X_\nu, \tag{14}$$

(dx_ν)是矢量; dt 是不变量,所以 $\frac{1}{dt}$ 也是不变量; 因此 $\left(\frac{dx_\nu}{dt}\right)$ 是矢量;同样可以証明 $\left(\frac{d^2x_\nu}{dt^2}\right)$ 是矢量. 一般地說,对时間取微商的运算不改变张量的特性. 因为 m 是不变量(零秩张量), 所以 $\left(m\frac{d^2x_\nu}{dt^2}\right)$ 是矢量,或一秩张量(根据张量的乘法定理). 如果力 (X_ν) 具有矢量特性, 則差 $\left(m\frac{d^2x_\nu}{dt^2}-X_\nu\right)$ 也是矢量. 因此这些运动方程在参照空間的每个其他笛卡儿坐标系里也有效. 在保守力的情况下,能够容易認識(X_ν)的矢量性質. 因为存在势能 Φ 只依賴于質点的相互距离, 所以它是不变量. 于是力 $X_\nu=-\frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu}$的矢量特性便从关于零秩张量的导数的普遍定理得到証明.

乘以速度,它是一秩张量,得到张量方程

$$\left(m\frac{d^2x_\nu}{dt^2}-X_\nu\right)\frac{dx_\nu}{dt}=0.$$

降秩并乘以标量 dt,我們获得动能方程

$$d\left(\frac{mq^2}{2}\right)=X_\nu dx_\nu.$$

如果 ξ_ν 表示質点和空間固定点的坐标之差, 則 ξ_ν 具有矢量

---

1) 即使在空間有优越方向的情况下, 也能将物理学的定律表示成对于变换 (3) 是协变的; 但是这样的式子在这种情况下就不适宜了. 如果在空間有优越的方向, 則以一定方式按这个方向取坐标系的方向, 会簡化对自然現象的描述. 然而另一方面, 如果在空間沒有唯一的方向, 則确定自然界定律的表示式而在方式上隐藏了取向不同的坐标系的等效性, 是不合邏輯的. 在狹义和广义相对論里,我們还要遇到这样的观点.

特性. 显然有 $\frac{d^2x_\nu}{dt^2}=\frac{d^2\xi_\nu}{dt^2}$, 所以质点的运动方程可以写成

$$m\frac{d^2\xi_\nu}{dt^2}-X_\nu=0.$$

将这个方程乘以 ξ_ν, 得到张量方程

$$\left(m\frac{d^2\xi_\nu}{dt^2}-X_\nu\right)\xi_\nu=0.$$

将左边的张量降秩并取对于时間的平均值,就得到維里定理,这里便不往下討論了. 互換指标, 然后相減, 作簡单的变換,便有矩定理:

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(\xi_\mu\frac{d\xi_\nu}{dt}-\xi_\nu\frac{d\xi_\mu}{dt}\right)\right]=\xi_\mu X_\nu-\xi_\nu X_\mu. \tag{15}$$

这样看来, 显然矢量的矩不是矢量而是张量. 由于其反称的特性,这个方程組并沒有九个独立的方程,而只有三个. 在三維空間里以矢量代替二秩反称张量的可能性依賴于矢量

$$A_\mu=\frac{1}{2}A_{\sigma\tau}\delta_{\sigma\tau\mu}$$

的构成.

如果将二秩反称张量乘以前面引入的特殊反称张量 δ, 降秩两次,便获得矢量,其分量在数值上等于张量的分量. 这类矢量就是所謂軸矢量, 由右手系变換到左手系时, 他們和 Δx_ν 变換得不同. 在三維空間里将二秩反称张量当作矢量具有形象化的好处;可是按表示相应的量的确切性質而論,便不及将它当作张量了.

其次, 考虑連續媒質的运动方程. 設 ρ 是密度, u_ν 是速度分量,作为坐标与时間的函数, X_ν 是每单位質量的彻体力,而 $p_{\nu\sigma}$ 是垂直于 σ 軸的平面上沿 x_ν 增加方向的胁強. 于是根据牛頓定律,运动方程是

$$\rho\frac{du_\nu}{dt}=-\frac{\partial p_{\nu\sigma}}{\partial x_\sigma}+\rho X_\nu,$$

其中 $\frac{du_\nu}{dt}$ 是在时刻 t 具有坐标 x_ν 的質点的加速度. 如果用偏导

数表示这个加速度，除以 ρ 之后，得到

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial t}+\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\sigma}u_\sigma=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{\nu\sigma}}{\partial x_\sigma}+X_\nu. \tag{16}$$

必須証明这个方程的有效性和笛卡儿坐标系的特殊选择无关. (u_ν)是矢量，所以 $\frac{\partial u_\nu}{\partial t}$ 也是矢量. $\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\sigma}$ 是二秩张量，$\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\sigma}u_\tau$ 是三秩张量. 左边第二項是按指标 σ,τ 降秩的結果. 右边第二項的矢量特性是显然的. 为了要求右边第一項也是矢量，$p_{\nu\sigma}$ 必須是张量. 于是由微分与降秩得到 $\frac{\partial p_{\nu\sigma}}{\partial x_\sigma}$，所以它是矢量，乘以标量的倒数 $\frac{1}{\rho}$ 后仍然是矢量. 至于 $p_{\nu\sigma}$ 是张量，因而按照方程

$$p'_{\mu\nu}=b_{\mu\alpha}b_{\nu\beta}p_{\alpha\beta}$$

变换，这在力学里将这个方程就无穷小的四面体取积分就可得到証明. 在力学里，将矩定理应用于无穷小的平行六面体，还証明了 $p_{\nu\sigma}=p_{\sigma\nu}$. 因此也就是証明了胁強张量是对称张量. 从以上所說就可知道：借助于前面給出的規則，方程对于空間的正交变换(旋轉变换)是协变的；并且为了使方程具有协变性，方程里各个量在变换时所必須遵照的規則也明显了. 根据前面所述，連續性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_\nu)}{\partial x_\nu}=0 \tag{17}$$

的协变性便无須特別討論.

还要对于表示胁強分量如何依賴于物質性質的方程检查协变性，并借助于协变条件，对于可压縮的粘滞流体建立这种方程. 如果忽略粘滞性，則压強 p 将是标量，并将只和流体的密度与溫度有关. 于是对于胁強张量的貢献显然是

$$p\delta_{\mu\nu},$$

其中 $\delta_{\mu\nu}$ 是特殊的对称张量. 在粘滞流体的情况下，这一項还是有的. 不过在这个情况下，还会有一些依賴于 u_ν 的空間导数的压強項. 假定这种依賴关系是綫性的，因为这几項必須是对称张

量，所以会出現的只是

$$\alpha\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}+\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}\right)+\beta\delta_{\mu\nu}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

$\left(因为\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}\ 是标量\right)$. 由于物理上的理由(沒有滑动)，对于在所有方向的对称膨胀，即当

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3};\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2},\ 等等=0,$$

假設沒有摩擦力，因此有 $\beta=-\frac{2}{3}\alpha$. 如果只有 $\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$ 不等于零，令 $p_{31}=-\eta\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$, 这样就确定了 α. 于是获得全部胁強张量

$$p_{\mu\nu}=p\delta_{\mu\nu}-\eta\left[\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}+\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\delta_{\mu\nu}\right]. \tag{18}$$

从这个例子显然看出由空間各向同性(所有方向的等效性)产生的不变量理論在認識上的启发价值.

最后討論作为洛伦兹电子論基础的麦克斯韦方程的形式:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial h_3}{\partial x_2}-\frac{\partial h_2}{\partial x_3}=\frac{1}{c}\frac{\partial e_1}{\partial t}+\frac{1}{c}i_1\\&\frac{\partial h_1}{\partial x_3}-\frac{\partial h_3}{\partial x_1}=\frac{1}{c}\frac{\partial e_2}{\partial t}+\frac{1}{c}i_2\\&\cdots\ \cdots\cdots\ \cdots\cdots\cdots\\&\frac{\partial e_1}{\partial x_1}+\frac{\partial e_2}{\partial x_2}+\frac{\partial e_3}{\partial x_3}=\rho\end{aligned}\right\}, \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial e_3}{\partial x_2}-\frac{\partial e_2}{\partial x_3}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_1}{\partial t}\\&\frac{\partial e_1}{\partial x_3}-\frac{\partial e_3}{\partial x_1}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_2}{\partial t}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\frac{\partial h_1}{\partial x_1}+\frac{\partial h_2}{\partial x_2}+\frac{\partial h_3}{\partial x_3}=0\end{aligned}\right\}. \tag{20}$$

$\mathbf{i}$ 是矢量，因为电流密度的定义是电荷密度乘上电荷的矢速度．按照前三个方程，$\mathbf{e}$ 显然也是当作矢量的．于是 $\mathbf{h}$ 就不能当作矢量了[1]．可是如果将 $\mathbf{h}$ 当作二秩反称张量，这些方程就容易解释．于是分别写 h_{23}，h_{31}，h_{12} 以代替 h_1，h_2，h_3．注意到 $h_{\mu\nu}$ 的反称性，(19)与(20)的前三个方程就可写成如下的形式：

$$\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{1}{c}\frac{\partial e_\mu}{\partial t}+\frac{1}{c}i_\mu, \tag{19a}$$

$$\frac{\partial e_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial e_\nu}{\partial x_\mu}=+\frac{1}{c}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t}. \tag{20a}$$

和 $\mathbf{e}$ 对比，$\mathbf{h}$ 看来是和角速度具有同样对称类型的量．于是散度方程取下列形式：

$$\frac{\partial e_\nu}{\partial x_\nu}=\rho, \tag{19b}$$

$$\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\rho}+\frac{\partial h_{\nu\rho}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x_\nu}=0. \tag{20b}$$

后一个方程是三秩反称张量的方程(如果注意到 $h_{\mu\nu}$ 的反称性，就容易証明左边对于每对指标的反称性)．这种写法比较通常的写法要更自然些，因为和后者对比，它适用于笛卡儿左手系，就象适用于右手系一样，不用变号．

---

1) 这些討論可使讀者熟悉张量运算而免除了处理四維問題的特殊困难；这样遇到狹义相对論里的相应討論(閔可斯基关于場的解释)就会感到較少的困难．

第二章　狭义相对論

前面关于刚体位形的討論，所根据的基础是不管欧几里得几何的有效性的假定，而假設空間中的一切方向，或笛卡儿坐标系的所有位形，在物理上是等效的．这可以說是“关于方向的相对性原理”；幷曾經指出：按照这个原理，借助于张算如何可以来寻求方程（自然界定律）．現在要問：参照空間的运动状态是否有相对性；換句話說，相对运动着的参照空間在物理上是否是等效的．根据力学的观点，等效的参照空間看来确是存在的．因为我們正以每秒30千米左右的速度繞日运动，而在地球上的实驗絲毫沒有說明这个事实．另一方面，这种物理上的等效性，看来幷不是对任意运动的参照空間都成立；因为在顚簸运行的火車里和在作勻速运动的火車里，力学效应看来幷不遵从同样的定律；在写下相对于地球的运动方程时，必須考虑地球的轉动．所以好象存在着一些笛卡儿坐标系，所謂慣性系，参照这类坐标系便可将力学定律（更普遍地說是物理定律）表示成最簡单的形式．我們可以推测下列命题的有效性：如果K是慣性系，则相对于K作勻速运动而无轉动的其他坐标系K'也是慣性系；自然界定律对于所有慣性系都是一致的．我們将这个陈述称为“狭义相对性原理”．就象对于方向的相对性所曾經做的那样，我們要由这个“平动的相对性”的原理推出一些結論．

为了能够这样做，必須首先解决下列問題．如果給定一个事件相对于慣性系K的笛卡儿坐标x_ν与时刻t，而慣性系K'相对于K作勻速平动，如何計算同一事件相对于K'的坐标x'_ν与时刻t'？在相对論前的物理学里解决这个問題时不自觉地作了两个假設：

1. 时間是絕对的；一个事件相对于K'的时刻t'和相对于K的时刻相同．如果瞬时的訊号能送往远处，并且如果知道时計的运

动状态对它的快慢没有影响，则这个假定在物理上是适用的．因为这样就可以在 K 与 K' 两系遍布彼此同样并且校准得一样的时計，相对于K或K'保持静止，而它們指示的时間会和系的运动状态无关；于是一个事件的时刻就能由其邻近的时計指出．

2. 长度是絕对的；如果相对于K为静止的間隔具有长度s，而K'相对于K是运动的，则它相对于 K' 也有同样的长度 s．

如果K与 K' 的軸彼此平行，则基于这两个假設的簡单計算給出变换方程

$$\left.\begin{aligned} x'_\nu &= x_\nu - a_\nu - b_\nu t \\ t' &= t - b \end{aligned}\right\}. \tag{21}$$

这个变换称为“伽利略变换”．对时間取微商两次，得

$$\frac{d^2x'_\nu}{dt^2} = \frac{d^2x_\nu}{dt^2}.$$

此外，对于两个同时的事件，还有

$$x'^{(1)}_\nu - x'^{(2)}_\nu = x^{(1)}_\nu - x^{(2)}_\nu.$$

平方并相加，結果就得到两点間距离的不变性．由此容易获得牛頓运动方程对于伽利略变换(21)的协变性．因此如果作了关于尺度与时計的两个假設，则經典力学是符合狭义相对性原理的．

然而应用于电磁现象时，这种将平动的相对性建立在伽利略变换上的企图就失败了．麦克斯韦、洛伦兹电磁方程对于伽利略变换并不是协变的．特别是，我们注意到：根据(21)，对于K有速度 c 的一道光綫对于 K' 就有不同的速度，有赖于它的方向．因此就其物理性质而論，K的参照空間和相对于它（静止的以太）作运动的所有参照空間便有区别．但是所有的实驗都証实：相对于作为参照物体的地球，电磁与光的現象并不受地球平动速度的影响．这类实驗当中最重要的是假定大家都知道的迈克耳孙与莫雷的实驗．因此狭义相对性原理也适用于电磁現象就难于怀疑了．

另一方面，麦克斯韦、洛伦兹方程对于处理运动物体里光学問題的适用性已获得証实．沒有别的理論曾經滿意地解释光行差的

事实、光在运动物体中的传播（斐索）和双星中观察到的现象（德·西特）. 麦克斯韦、洛伦兹方程的一个推論是：至少对于一个确定的慣性系 K，光以速度 c 在眞空中传播；于是必須認为这个推論是証实了的. 按照狹义相对性原理，还須假定这个原理对于每个其他慣性系的眞实性.

从这两个原理作出任何結論之前，必須首先重新考察"时間"与"速度"概念的物理意义. 由前面知道：对于慣性系的坐标是借助于用刚体作測度和結构来下物理上的定义的. 为了測定时間，曾經假定在某处有时計 U，相对于 K 保持靜止. 然而如果事件到时計的距离不应忽略，就不能用这只时計来确定事件的时刻；因为不存在能用来比較事件时刻和时計时刻的"即时訊号". 为了完成时間的定义，可以使用眞空中光速恆定的原理. 假定在 K 系各处放置同样的时計，相对于 K 保持靜止，并按下列安排校准. 当某一时計 U_m 指着时刻 t_m 时，从这只时計发出光綫，在眞空中通过距离 r_{mn} 到时計 U_n；当光綫遇着时計 U_n 的时刻，使时計 U_n 对准到时刻 $t_n = t_m + \frac{r_{mn}}{c}$[1]. 光速恆定原理于是断定这样校准时計不会引起矛盾. 用这样校准好的时計就能指出发生在任何时計近旁的事件的时刻. 重要的是注意到这个时間的定义只关系到慣性系 K，因为我們曾經使用一組相对于 K 为靜止的时計. 从这个定义絲毫得不出相对論前物理学所作的关于时間的絕对特性（即时間和慣性系的选择无关的性質）的假設.

相对論常遭指責，說它未加論証就把光的传播放在中心理論的地位，以光的传播定律作为时間概念的基础. 然而情形大致如下. 为了付予时間概念以物理意义，需要某种能建立不同地点之間的关系的过程. 为这样的时間定义究竟选择哪一种过程是无关重要的. 可是为了理論只选用那种已有某些肯定了解的过程是有

1) 严格地說，先作出大致如下的定义就更正确些：如果从区間 AB 的中点 M 观察，发生在 K 系的 A 与 B 两点的事件看起来是在同一时刻的，則这两个是同时的事件. 于是定义时間为同样时計的指示的总合，这些时計相对于 K 保持靜止，并同时記录相同的时間.

好处的．由于麦克斯韦与 H．A．洛伦兹的研究之赐，和任何其他考虑的过程相比，我們对于光在眞空中的传播是了解得更清楚的．

根据所有这些討論，空間与时間的数据所具有的不仅仅是想象上的意义，而是物理上眞实的意义；特别是对于所有含有坐标与时間的关系式，如就关系式(21)而論，这句話是适用的．因此詢問那些方程是否眞确，以及詢問用来从一个慣性系K到另一对它作相对运动的慣性系K'的眞实变换方程为何，是有意义的．可以証明：这将借光速恆定原理与狹义相对性原理而唯一确定．

为达此目的，我們設想，按已經指出的途径，对于K与K'两个慣性系，空間与时間已从物理上得到定义．此外，設一道光綫从K中一点P_1穿过眞空通往另一点P_2．如果r是两点間測得的距离，則光的传播必須滿足方程

$$r = c\Delta t.$$

如果取方程两边的平方，用坐标差Δx_ν表示r^2，則可写出

$$\sum(\Delta x_\nu)^2 - c^2\Delta t^2 = 0 \qquad (22)$$

以代替原来的方程．这个方程将光速恆定原理表示成相对于K的公式．不論发射光綫的光源怎样运动，这个公式必須成立．

相对于K'也可考虑光的相同的传播問題，光速恆定原理在这个情况下也必須滿足．因此对于K'，有方程

$$\sum(\Delta x'_\nu)^2 - c^2\Delta t'^2 = 0. \qquad (22a)$$

对于从K到K'的变换，方程(22a)与(22)必須彼此互相一致．体現这一点的变换将称为“洛伦兹变换”．

在詳細考虑这些变换之前，我們还要对于空間与时間略作一般的討論．在相对論前的物理学里，空間与时間是不相关联的事物．时間的确定和参照空間的选择无关．牛頓力学对于参照空間是具有相对性的，所以例如象两个不同时的事件发生在同一地点的陈述便沒有客观意义(就是和参照空間无关)．但是这种相对性在建立理論时沒有用处．說到空間的点，就象說到时間的时刻一样，就好象它們是絕对的实在．那时不曾看到确定时空的眞正元素是

用 x_1, x_2, x_3, t 四个数所确定的事件．某事发生的概念总是四維連續区域的概念；然而对这一点的認識却被相对論前时間的絕对特性蒙蔽住了．放弃了时間的，特别是同时性的絕对性假設，时空概念的四維性就立即被認識到了．既不是某事发生的空間地点，也不是它发生时間的时刻，而只有事件本身具有物理上的眞实性．后面将会看到：两个事件間沒有空間的絕对（和参照空間无关的）关系，也沒有时間的絕对关系，但是有空間与时間的絕对（和参照空間无关的）关系．并不存在将四維連續区域分成三維空間与一維时間連續区域的在客观上合理的区分，这个情况說明如果将自然界定律表示成四維时空連續区域里的定律，則所采取的形式是邏輯上最滿意的．相对論在方法上巨大的进展有賴于此，这种进展应归功于閔可斯基．从这个观点来考虑，必須将 x_1, x_2, x_3, t 当作事件在四維連續区域里的四个坐标．我們自己对于这种四維連續区域里种种关系的想象，在成就上远逊于对三維欧几里得連續区域里諸关系的想象；然而必須着重指出：即使在欧几里得三維几何学里，其概念与关系也只是在我們心目中具有抽象性質的，和我們目睹以及通过触觉所获得的印象全然不是等同的．但是事件的四維連續区域的不可分割性絲毫沒有空間坐标和时間坐标等效的含义．相反地，必須記着从物理上定义时間坐标是和定义空間坐标完全不同的．使(22)与(22a)两关系式相等便定义了洛伦茲变換．这两个关系式又指出时間坐标和空間坐标地位的不同；因为 Δt^2 一項和 Δx_1^2, Δx_2^2, Δx_3^2 等空間項的符号相反．

在継續分析为洛伦茲变換下定义的条件之前，为了使今后推演的公式里不致明显地含恆量 c，将引用光时間 $l = ct$ 以代替时間 t．于是規定洛伦茲变換，首先要求它能使方程

$$\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 - \Delta l^2 = 0 \tag{22b}$$

成为协变方程，就是說，如果方程对于两个旣定事件(光綫的发射与接收)所参照的慣性系能滿足，則它对于每个慣性系都能滿足．最后，做閔可斯基，引用虛値的时間坐标

$$x_4 = il = ict(\sqrt{-1} = i)$$

以代替实值的时間坐标 $l = ct$. 于是确定光的传播的方程便成了

$$\sum_{(4)} \Delta x_\nu^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2 = 0. \tag{22c}$$

这个方程必須对于洛伦兹变换是协变的. 如果

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2 \tag{23}$$

对于变换是不变量这个更普遍的条件能满足, 則上述条件就总能满足了[1]. 要满足这个条件,只有用綫性变换,即形式为

$$x'_\mu = a_\mu + b_{\mu\alpha} x_\alpha \tag{24}$$

的变换,其中要遍历 α 求和,即要从 $\alpha = 1$ 到 $\alpha = 4$ 求和. 看一下方程(23)与(24)就知道:如果不論維数以及实性关系,則这样确定的洛伦兹变换和欧几里得几何学的平动与轉动变换是一样的. 也能推断:系数 $b_{\mu\alpha}$ 必須满足条件

$$b_{\mu\alpha} b_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu} = b_{\alpha\mu} b_{\alpha\nu}. \tag{25}$$

因为諸 x_ν 的比值是实数,所以除掉 a_4, b_{41}, b_{42}, b_{43}, b_{14}, b_{24}, 与 b_{34} 具有純虛值之外,所有其余的 a_μ 与 $b_{\mu\alpha}$ 都具有实值.

特殊洛伦兹变换 如果只变换两个坐标, 并令所有只确定新原点的 a_μ 都等于零,便得到(24)与(25)类型里最簡单的变换. 于是由关系式(25)所供給的三个独立条件求得

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos\phi - x_2 \sin\phi \\ x'_2 &= x_1 \sin\phi + x_2 \cos\phi \\ x'_3 &= x_3 \\ x'_4 &= x_4 \end{aligned}\right\}. \tag{26}$$

这是 (空間) 坐标系在空間繞 x_3 軸的簡单轉动. 我們看到前面研究过的空間轉动变換(沒有时間变换)是作为特殊情况包括在洛伦兹变换里的. 类此,对于指标 1 与4,有

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos\psi - x_4 \sin\psi \\ x'_4 &= x_1 \sin\psi + x_4 \cos\psi \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \end{aligned}\right\}. \tag{26a}$$

---

1) 以后将明白这样的特殊化在于这种情况的性质.

由于实性关系，对于ψ須取虛值．为了从物理上解释这些方程，引用实值的光时間l与K'相对于K的速度v以代替虛值的ψ角．首先有

$$x_1' = x_1\cos\psi - il\sin\psi,$$
$$l' = -ix_1\sin\psi + l\cos\psi.$$

因为对于K'的原点，即对于$x_1' = 0$，必須有$x_1 = vl$，所以由第一个方程有

$$v = i\tan\psi, \tag{27}$$

还有

$$\left.\begin{aligned} \sin\psi &= \frac{-iv}{\sqrt{1-v^2}} \\ \cos\psi &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned}\right\}, \tag{28}$$

于是得到

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \frac{x_1 - vl}{\sqrt{1-v^2}} \\ l' &= \frac{l - vx_1}{\sqrt{1-v^2}} \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \end{aligned}\right\}. \tag{29}$$

这些方程形成众所周知的特殊洛伦兹变换；在普遍的理論里，这种变换表示四維坐标系按虛值轉角所作的轉动．如果引用通常的时間t来代替光时間l，则必須在(29)里将l换成ct，将v换成$\frac{v}{c}$.

現在必須补填一个漏洞．根据光速恆定原理，方程

$$\sum\Delta x_v^2 = 0$$

具有和慣性系的选择无关的特征；但絲毫不应由此推断$\sum\Delta x_v^2$这个量的不变性．这个量在变换中可能还带有一个因子，因为(29)的右边可能乘上可以倚賴于v的因子λ．然而現在要証明相对性原理不容許这个因子不等于1．假設有一个圓柱形的刚体沿其

軸綫方向运动．如果在静止时用单位长的量杆測得其半径等于 R_0，則运动时，其半径 R 可能不等于 R_0，因为相对論并沒有假定对于某一参照空間，物体的形状和它們相对于这个参照空間的运动无关．然而空間所有的方向必須彼此等效．所以 R 可能依賴于速度的大小 q，但与其方向无关；因此 R 必須是 q 的偶函数．設圓柱相对于 K' 为静止，則其側表面方程是

$$x'^2 + y'^2 = R_0^2.$$

如果将(29)的最后两个方程更普遍地写成

$$x_2' = \lambda x_2,$$

$$x_3' = \lambda x_3,$$

則对于 K，圓柱側表面滿足方程

$$x^2 + y^2 = \frac{R_0^2}{\lambda^2}.$$

所以因子 λ 測度圓柱的横向收縮，因此根据前面，只能是 v 的偶函数．

如果引入第三个坐标系 K''，以速度 v 沿 K 的負 x 軸方向而相对于 K' 运动，两次应用(29)，便得到

$$x_1'' = \lambda(v)\lambda(-v)x_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l'' = \lambda(v)\lambda(-v)l.$$

現在因为 $\lambda(v)$ 必須等于 $\lambda(-v)$，且假定在所有的系里用同样的量杆，所以 K'' 到 K 的变換一定是恆等变換（因为无須考慮 $\lambda = -1$ 的可能性）．在这些討論中有必要假定量杆的性質和其以前运动的历史无关．

运动的量杆与时計　在确定的 K 时間，$l = 0$，以整数值 $x_1' = n$ 給定各点的位置，而对于 K，是以 $x_1 = n\sqrt{1 - v^2}$ 給定的；这是由(29)的第一个方程得来的，并且表示洛伦兹收縮．在 K 的原点 $x_1 = 0$ 保持静止而以 $l = n$ 表示拍数的时計，由 K' 观察时，具有以

$$l' = \frac{n}{\sqrt{1-v^2}}$$

表示的拍数;这是由(29)的第二个方程得来的,并且表示时計比較它相对于 K' 为静止时要走得慢些. 这两个結論,看情形加以适当的修改,适用于每个参照系;它們构成了洛伦兹变換摆脫了积习的物理內容.

速度的加法定理 如果将具有相对速度 v_1 与 v_2 的两个特殊洛伦兹变换合并起来,则按照(27),代替这两个变换的一个洛伦兹变換內所含的速度是

$$v_{12} = i\tan(\psi_1+\psi_2) = i\,\frac{\tan\psi_1+\tan\psi_2}{1-\tan\psi_1\tan\psi_2} = \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2}. \tag{30}$$

关于洛伦兹变換及其不变量理論的一般叙述 狹义相对論里不变量的全部理論有賴于(23)里的不变量 s^2. 形式上,它在四維时空連續区域里的地位就和不变量 $\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\Delta x_3^2$ 在欧几里得几何学与相对論前物理学里的地位一样. 后面这个量对于所有的洛伦兹变換并非不变量;(23)式里的量 s^2 才取得这样的不变量的地位. 对于任意的慣性系,s^2 可由量度来确定;采用旣定的量度单位,则和任意的两个事件相联系的 s^2 是一个完全确定的量.

不論維数,不变量 s^2 和欧几里得几何学里相应的不变量有以下几点区别. 在欧几里得几何学里,s^2 必然是正的;只有当所涉及的两点重合时,它才化为零. 另一方面,根据

$$s^2 = \sum \Delta x_\nu^2 = \Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\Delta x_3^2-\Delta l^2$$

化为零并不能断定两个时空点的重合;s^2 这个量化为零是两个时空点可以在眞空里用光訊号联系起来的不变性条件. 如果 P 是在 x_1, x_2, x_3, l 的四維空間里所表示的一点(事件),则可用光訊号和 P 联系起来的所有各"点"都在錐面 $s^2=0$ 上(参看图1,图上沒显示出 x_3 这一維). "上"半个錐面可以包含能把光訊号由 P 送达的各"点";于是"下"半个錐面便会包含能把光訊号送达 P 的各"点". 包在錐面內的点 P' 与 P 构成負值的 s^2;于是按照閔可斯基的說法,PP' 以及 $P'P$ 是类时間隔. 这种間隔表示运动的可能路綫的

元素，速度小于光速[1]. 在这个情况下，适当地选择惯性系的运动状态就可以沿 PP' 的方向画出 l 轴。如果 P' 在“光錐”之外，則 PP' 是类空間隔；在这个情况下，适当地选择惯性系可以使 Δl 化为零。

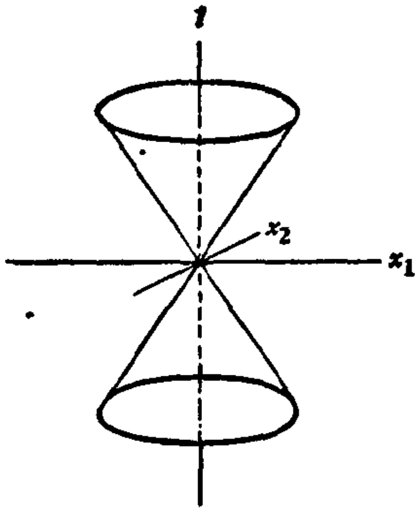


图 1.

閔可斯基由于引入虛値的时間变量 $x_4 = il$，便使得物理現象中四維連續区域的不变量理論完全类似于欧几里得空間里三維連續区域的不变量理論. 因此狭义相对論里四維张量的理論和三維空間里张量理論之間只在維数与实性关系上有所区别.

如果在 x_1, x_2, x_3, x_4 的任意惯性系里有四个量 A_ν，在实性关系与变换性质上和 Δx_ν 相当，則用这四个量指明出来的物理量称为具有分量 A_ν 的四元矢量；它可以是类空的或类时的. 如果十六个量 $A_{\mu\nu}$ 按法則

$$A'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta} A_{\alpha\beta}$$

作变换，則构成了二秩张量的分量. 由此可知在变换性质与实性性质上，$A_{\mu\nu}$ 和两个四元矢量(U)与(V)的分量 U_μ 与 V_ν 的乘积是一样的. 其中除掉只含一个指标 4 的分量有純虛値之外，其余所有的分量都具有实值. 用类似办法可以为三秩和更高秩的张量下定义. 这些张量的加法、減法、乘法、降秩与取微商运算，完全类似于三維空間里张量的相应的运算.

在把张量理論应用到四維时空連續区域之前，我們还要特别研究反称张量. 二秩张量一般有 16＝4·4 个分量. 在反称的情况下，具有两个相等指标的分量等于零，具有不等指标的分量則成对地相等而符号相反. 所以就象电磁場的情况一样，只存在六个独

---

1) 根据特殊洛伦兹变换(29)里根式 $\sqrt{1-v^2}$ 的出現，可以推知超过光速的物质速度是不可能的.

立的分量．事实上只要把电磁場当作反称张量，在考虑到麦克斯韦方程时就会証明：可以将这些方程看成张量方程．还有，三秩反称的（对于所有各对指标都是反称的）张量显然只有四个独立的分量，因为三个不同的指标只有四种組合．

現在談到麦克斯韦方程（19a），（19b），（20a），（20b），引用写法[1]：

$$\left.\begin{matrix} \phi_{23} & \phi_{31} & \phi_{12} & \phi_{14} & \phi_{24} & \phi_{34} \\ h_{23} & h_{31} & h_{12} & -ie_x & -ie_y & -ie_z \end{matrix}\right\}, \tag{30a}$$

$$\left.\begin{matrix} \mathfrak{J}_1 & \mathfrak{J}_2 & \mathfrak{J}_3 & \mathfrak{J}_4 \\ \dfrac{1}{c}i_x & \dfrac{1}{c}i_y & \dfrac{1}{c}i_z & i\rho \end{matrix}\right\}, \tag{31}$$

并約定 $\phi_{\mu\nu}$ 要等于 $-\phi_{\mu\nu}$，于是将（30a）与（31）代入麦克斯韦方程，便容易証明这些方程可以合并成以下形式：

$$\frac{\partial\phi_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mathfrak{J}_\mu, \tag{32}$$

$$\frac{\partial\phi_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial\phi_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial\phi_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{33}$$

如果如我們假定的，$\phi_{\mu\nu}$ 与 $\mathfrak{J}_\mu$ 具有张量性質，則方程（32）与（33）具有张量性質，因而对于洛伦兹变换是协变的．結果是，将这些量由一个可容許的（慣性）坐标系变换到另一个所遵循的規律是唯一决定的．电动力学里归功于狹义相对論的那种方法上的进步主要在于減少了独立假設的个数．例如，倘若象在前面曾經进行过的那样，只从方向相对性的观点考察方程（19a），我們看到它們有三个邏輯上独立的項．电場強度怎样参与这些方程看来是和磁場強度怎样参与这些方程完全无关的；假使以 $\dfrac{\partial^2 e_\mu}{\partial l^2}$ 代替 $\dfrac{\partial e_\mu}{\partial l}$，或者假使沒有 $\dfrac{\partial e_\mu}{\partial l}$ 这一項，好象也无足惊奇．另一方面，在方程（32）里只

1）今后为了避免混淆，将用三維空間指标 x, y, z 代替 1，2，3，并将为四維时空連續区域保留数字指标 1、2、3，4．

出现了两个独立的項．电磁場出現为一个形式上的单元；电場怎样参与这个方程决定于磁場是怎样参与的．除了电磁場，只有电流密度出現为独立的事物．这种方法上的进步是由于通过运动的相对性，使电場和磁場失去了它們不相联属的存在．由某个系来判断，一个場純粹表現为电場；但由另一个慣性系来判断，这个場却还有磁場分量．将普遍的变换律应用于电磁場，则对于特殊洛伦兹变换这样的特殊情况就提供方程

$$\left.\begin{aligned} e_x' &= e_x & h_x' &= h_x \\ e_y' &= \frac{e_y - vh_z}{\sqrt{1-v^2}} & h_y' &= \frac{h_y + ve_z}{\sqrt{1-v^2}} \\ e_z' &= \frac{e_z + vh_y}{\sqrt{1-v^2}} & h_z' &= \frac{h_z - ve_y}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

如果对于 K 只存在磁場 $\mathbf{h}$，而沒有电場 $\mathbf{e}$，则对于 K' 却还存在电場 $\mathbf{e}'$，它会作用到相对于 K' 为静止的带电质点上．相对于 K 为静止的观察者会称这个力为毕奥、薩伐尔力或洛伦兹电动势．所以好象这个电动势是和电場強度融合为一了．

为了从形式上观察这个关系，让我們考虑作用于单位体积电荷上的力的表示：

$$\mathbf{k} = \rho\mathbf{e} + \mathbf{i} \times \mathbf{h}, \qquad (35)$$

其中 $\mathbf{i}$ 是电荷的矢速度，以光速为单位．如果按照（30a）与（31）引用 $\mathfrak{J}_\mu$ 与 $\phi_{\mu\nu}$，则对于第一个分量便有表示式

$$\phi_{12}\mathfrak{J}_2 + \phi_{13}\mathfrak{J}_3 + \phi_{14}\mathfrak{J}_4.$$

注意到由于张量(ϕ)的反称性，可知 ϕ_{11} 化为零，于是四維矢量

$$K_\mu = \phi_{\mu\nu}\mathfrak{J}_\nu \qquad (36)$$

的前三个分量就是 $\mathbf{k}$ 的分量，而第四个分量就是

$$K_4 = \phi_{41}\mathfrak{J}_1 + \phi_{42}\mathfrak{J}_2 + \phi_{43}\mathfrak{J}_3 = i(e_x i_x + e_y i_y + e_z i_z) = i\lambda. \qquad (37)$$

所以有单位体积上的力的一个四維矢量，其前三个分量 k_1, k_2 与 k_3 是单位体积上的有质动力的分量．而其第四个分量是单位体积的場的功率乘以 $\sqrt{-1}$．

比较（36）与（35）就看出相对論在形式上将电場的有质动力

ρe 和毕奥、薩伐尔力或洛伦兹力 $\mathbf{i}\times\mathbf{h}$ 連合起来了.

質量与能量 从四元矢量 K_μ 的存在与含义可以获致一項重要的結論. 設想电磁場在某个物体上作用了一段时間. 象征图(图 2)上的 Ox_1 是指 x_1 軸,同时也就代替着三条空間軸 Ox_1, Ox_2, Ox_3; Ol 是指实值的时間軸.在这个图上,綫段 AB 表示在确定时間 l 的一个具有有限大小的物体;这个物体的整个时空的存在则以带形表示,带形的边界处处和 l 軸有小于 45° 的傾斜. 带形的一部分描了阴影,这部分在时間截口 $l=l_1$ 与 $l=l_2$ 之間,但沒有伸达截口. 在它所表示的这部分时空流形里,有电磁場作用于这个物体,或是作用于其所含的电荷而这种作用又传到了物体上. 現在考慮物体的动量与能量由于这种作用的結果所起的变化.

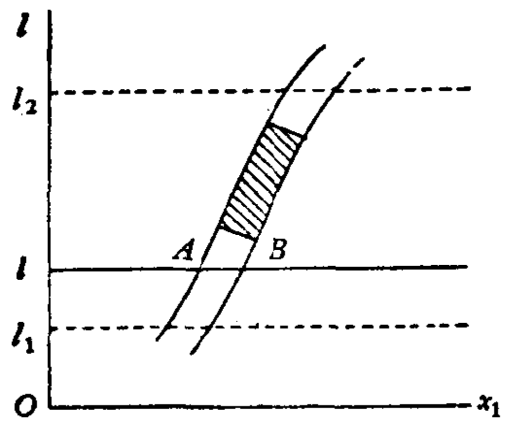


图 2.

假定动量与能量原理对于这个物体是适用的. 于是动量的变化 ΔI_x, ΔI_y, ΔI_z 与能量的变化 ΔE 可用下列式子表示:

$$\Delta I_x=\int_{l_1}^{l_2}dl\int k_x dxdydz=\frac{1}{i}\int K_1dx_1dx_2dx_3dx_4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta E=\int_{l_1}^{l_2}dl\int\lambda dxdydz=\frac{1}{i}\int\frac{1}{i}K_4dx_1dx_2dx_3dx_4.$$

因为四維体素是不变量,而 (K_1, K_2, K_3, K_4) 形成四元矢量,所以遍及阴影部分的四維积分应按四元矢量变换; l_1 与 l_2 两限間的积分也应如此,因为区域里未描阴影的部分对于积分是沒有貢献的. 因此 ΔI_x, ΔI_y, ΔI_z, $i\Delta E$ 形成四元矢量. 因为可以設定各个量的本身变换起来和它們的增量一样,所以推断四个量

$$I_x,\ I_y,\ I_z,\ iE$$

的集体本身具有矢量特性;这些量所指的是物体的即时状态(例如在时刻 $l = l_1$).

将这个物体当作质点，则这个四元矢量也可以用它的质量 m 与速度来表示. 为了形成这样的表示式,首先注意到

$$-ds^2 = d\tau^2 = -(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - dx_4^2 = \\ = dl^2(1 - q^2) \tag{38}$$

是不变量,它涉及表示质点运动的四维曲綫的一个无限短的部分. 容易給出不变量 $d\tau$ 的物理意义. 如果选择时間軸,使它具有考虑中的綫微分的方向,或者换句話說,如果将質点变换成靜止,就会有 $d\tau = dl$; 因此就可用和質点在同一地点,相对于質点为靜止的光秒时計来测定. 所以称 τ 为質点的原时. 可見 $d\tau$ 和 dl 不同,它是不变量. 对于速度远低于光速的运动，它实际上等于 dl. 因此知道

$$u_\sigma = \frac{dx_\sigma}{d\tau} \tag{39}$$

正如 dx_ν 一样,具有矢量的特性; (u_σ) 将称为速度的四維矢量(簡称四元矢). 根据(38),其分量满足条件

$$\sum u_\sigma^2 = -1. \tag{40}$$

在三維里,質点的速度分量是以

$$q_x = \frac{dx}{dl},\quad q_y = \frac{dy}{dl},\quad q_z = \frac{dz}{dl}$$

为定义的;于是按通常的写法,速度的四元矢量的分量是

$$\frac{q_x}{\sqrt{1-q^2}},\quad \frac{q_y}{\sqrt{1-q^2}},\quad \frac{q_z}{\sqrt{1-q^2}},\quad \frac{i}{\sqrt{1-q^2}}. \tag{41}$$

我們知道: 速度的四元矢量是可能由三維里質点速度分量形成的唯一的四元矢量. 所以又知道

$$\left(m\frac{dx_\mu}{d\tau}\right) \tag{42}$$

必然就是应当和动量与能量的四元矢量相等的四元矢量，而动量与能量的四元矢量的存在性是上面証明了的. 使对应的分量相等并用三維的写法,便得到

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \frac{mq_x}{\sqrt{1-q^2}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E &= \frac{m}{\sqrt{1-q^2}} \end{aligned}\right\}. \tag{43}$$

事实上可以認識：对于远低于光速的速度，这些动量的分量和經典力学里的相符．对于高速度，动量的增长比較随速度的綫性增长要快，以致在接近光速时趋于无限大．

如果将(43)里最后的方程应用于静止質点($q=0$)，便知道静止物体的能量 E_0 等于其質量．如果取秒为时間的单位，就会得到

$$E_0 = mc^2. \tag{44}$$

所以質量与能量实質上是相象的；它們只是同一事物[1]的不同表示．物体的質量不是恆量；它随着物体能量的改变而改变[2]．由(43)里末一个方程可知，当 q 趋于 1，即趋近光速时，E 将无限增大．如果按 q^2 的冪展开 E，便得到

$$E = m + \frac{m}{2}q^2 + \frac{3}{8}mq^4 + \cdots. \tag{45}$$

这个表示式的第二項相当于經典力学里質点的动能．

質点的运动方程　由(43)，对于时間 t 求微商，并利用动量原理，则采用三維矢量的写法，就得到

$$\mathbf{K} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{q}}{\sqrt{1-q^2}}\right). \tag{46}$$

从前这个方程曾被 H. A. 洛伦兹用之于电子的运动．β 射綫的实驗以高度准确性証明了这个方程的真实．

---

1) 这里把質量和能量說成是同一事物，是不合于辯証唯物主义观点的．——中文譯本編者註．

2) 放射过程中能量的发射显然和原子量不是整数的事实有关系．近年来在許多事例中証实了方程(44)所表示的靜質量与靜能量間的相当性．放射分解中所得質量之和总是少于在分解中的原子的質量．其差以产出粒子的动能形式和释放的輻射能形式出現．

电磁場的能张量 在相对論創立前，已經知道电磁場的能量与动量的原理能够以微分形式表示. 这些原理的四維表述引入了重要的能張量概念，这个概念对于相对論的进一步发展是重要的.

如果使用方程(32)，在单位体积上的力的四元矢量表示式

$$K_\mu = \phi_{\mu\nu}\mathfrak{J}_\nu$$

里以場的強度 $\phi_{\mu\nu}$ 表示 $\mathfrak{J}_\nu$，则經过一些变换和場方程(32)与(33)的重复运用之后，求得表示式

$$K_\mu = -\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}, \tag{47}$$

其中曾令[1)]

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\phi_{\alpha\beta}^2\delta_{\mu\nu} + \phi_{\mu\alpha}\phi_{\nu\alpha}. \tag{48}$$

如果使用新的写法，将方程(47)改成

$$\left.\begin{aligned} k_x &= -\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial(ib_x)}{\partial(il)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ i\lambda &= -\frac{\partial(is_x)}{\partial x} - \frac{\partial(is_y)}{\partial y} - \frac{\partial(is_z)}{\partial z} - \frac{\partial(-\eta)}{\partial(il)} \end{aligned}\right\} \tag{47a}$$

或消去虚数单位

$$\left.\begin{aligned} k_x &= -\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial b_x}{\partial l} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda &= -\frac{\partial s_x}{\partial x} - \frac{\partial s_y}{\partial y} - \frac{\partial s_z}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial l} \end{aligned}\right\} \tag{47b}$$

则方程(47)的物理意义就明显了.

表示成后面这种形式时，便知道前三个方程所表述的是动量原理；p_{xx}, $\cdots$, p_{zz} 是电磁場里的麦克斯韦脅強，而(b_x, b_y, b_z)是

1) 按指标 α 与 β 求和.

場的单位体积的矢动量. (47b)里最后的方程所表示的是能量原理; $\mathfrak{s}$ 是能量的矢通量, 而 η 是場的单位体积的能量. 事实上, 引用場強度的实値分量,可由(48)获得下列电动力学里熟悉的式子:

$$\left.\begin{array}{l} p_{xx} = -h_x h_x + \frac{1}{2}(h_x^2 + h_y^2 + h_z^2) - \\ \qquad - e_x e_x + \frac{1}{2}(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) \\ p_{xy} = -h_x h_y - e_x e_y \\ p_{xz} = -h_x h_z - e_x e_z \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_x = s_x = e_y h_z - e_z h_y \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta = +\frac{1}{2}(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2) \end{array}\right\} \quad (48a)$$

由(48)可見电磁場的能張量是对称的; 这联系到单位体积的动量和能量通量彼此相等的事实(能量与慣量間的关系).

于是由这些討論断定单位体积的能量具有張量的特性. 这只是对于电磁場才直接証明过,然而可以主张它具有普遍的适用性. 已知电荷与电流的分布时, 麦克斯韦方程可以确定电磁場. 但是我們不知道控制电流与电荷的定律. 我們的确知道电是由基本粒子(电子,阳原子核)构成的, 然而从理論的观点来看, 我們对此还不能通曉. 在大小与电荷都已确定的粒子里, 我們不知道决定电分布的能量因素, 而且在这个方向上完成理論的一切企图都失敗了. 那么如果稍为有可能在麦克斯韦方程的基础上来建立理論的話,则只知道带电粒子外面的电磁場能張量[1]. 只有在带电粒子外

---

1) 曾經企图将带电粒子当作眞奇异点来补救这項知識的不足. 但是我認为这意味着放弃对于物质結构的眞正了解. 我看与其滿足于仅仅是表面上的解答,还不如承認我們目前的无能要好得多.

面的区域里，我們才能相信我們拥有能张量的完全表示式；在这些区域里，根据(47)，有

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=0. \tag{47c}$$

守恒原理的普遍表示式 我們几乎不能避免假設在所有其他的情况下，能量的空間分布也是由一个对称张量 $T_{\mu\nu}$ 来給定，并且这个完全的能张量处处滿足式子(47c). 无論怎样，会看到由这个假設能获得能量原理积分形式的正确表示式.

設想一个空間有界的閉合系，可以从四維的观点表为带形，在它外面的 $T_{\mu\nu}$ 化为零(图 3). 在某一空間截口上求方程(47c)的积分. 因为由于在积分限上 $T_{\mu\nu}$ 等于零，$\frac{\partial T_{\mu 1}}{\partial x_1}$，$\frac{\partial T_{\mu 2}}{\partial x_2}$ 与 $\frac{\partial T_{\mu 3}}{\partial x_3}$ 的积分都等于零，所以得到

$$\frac{\partial}{\partial l}\left\{\int T_{\mu 4}dx_1dx_2dx_3\right\}=0. \tag{49}$$

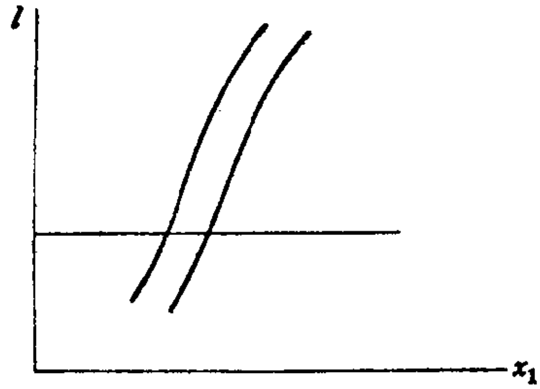


图 3.

括弧里的式子表示整个系的动量乘 i，以及系的負能量，因此(49)表示了守恆原理的积分形式. 由下面的討論就会看到它所給的是能量和守恆原理的正确概念.

物質的能张量的唯象表示

流体动力学方程 我們知道物质是带电粒子构成的，但是不知道控制这些粒子构造的定律. 因此在处理力学問題时不得不利用相当于經典力学里那样不精确的物质描述. 这样的描述是以物质密度 σ 与流体动力压强这些基本概念为基础的.

設 σ_0 为物质在某一地点的密度，是参照着随物质运动的坐标系来估量的. 那么靜密度 σ_0 是不变量. 如果設想物质在作任意的运动，并且不計压强(眞空里的尘埃微粒，不計其大小与温度)，

则能张量将只和速度分量 u_ν 与 σ_0 有关．令

$$T_{\mu\nu} = \sigma_0 u_\mu u_\nu, \tag{50}$$

使 $T_{\mu\nu}$ 取得张量特性，式中 u_μ，作三維表示，是由(41)給定的．事实上，由(50)可知 $q = 0$ 时，$T_{44} = -\sigma_0$(等于单位体积的負能量)，有如根据質能相当性原理，并按照前面关于能张量的物理解說，所应得的結果．如果有外力(四維矢量 K_μ)作用于物质，由动量与能量的原理，方程

$$K_\mu = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$$

必須成立．現在証明这个方程会导致同样的曾經获得的质点运动定律．設想物質在空間中的范围是无限小的，就是設想一条四維的綫；于是对于空間坐标 x_1, x_2, x_3, 遍历整条綫取积分，便得

$$\int K_1 dx_1 dx_2 dx_3 = \int \frac{\partial T_{14}}{\partial x_4} dx_1 dx_2 dx_3 =$$
$$= -i \frac{d}{dl} \left\{ \int \sigma_0 \frac{dx_1}{d\tau} \frac{dx_4}{d\tau} dx_1 dx_2 dx_3 \right\}.$$

$\int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ 是不变量，于是 $\int \sigma_0 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ 也是不变量．对于不同的坐标系来計算这个积分，首先是剛才选定的慣性系，然后是物質相对于它具有零速度的一个系．遍历那条綫的一根纖維求积分，对于这样的纖維，可以認为 σ_0 在整个截口上是一样的．設纖維对于这两个系的空間体积分别是 dV 与 dV_0，则有

$$\int \sigma_0 dV dl = \int \sigma_0 dV_0 d\tau.$$

所以还有

$$\int \sigma_0 dV = \int \sigma_0 dV_0 \frac{d\tau}{dl} = \int dm\, i \frac{d\tau}{dx_4}.$$

如果在前面的积分里，用这里的右边来代替左边，将 $\frac{dx_1}{d\tau}$ 放在积分号外面，便得

$$K_x = \frac{d}{dl}\left(m \frac{dx_1}{d\tau}\right) = \frac{d}{dl}\left(\frac{mq_x}{\sqrt{1-q^2}}\right).$$

因此可見推广了的能张量概念符合于前面的結果．

理想流体的欧拉方程 为了更接近于真实物质的性質，必須在能张量里加上相当于压強的一項．最簡单的就是理想流体的情况，这里压強决定于标量 p． 因为在这种情况下，p_{xy} 等切向胁強化为零，能张量的貢献应具有 $p\delta_{\mu\nu}$ 的形式．所以須令

$$T_{\mu\nu} = \sigma u_\mu u_\nu + p\delta_{\mu\nu}. \tag{51}$$

在这种情况下，静止时物質的密度，或单位体积的能量，不是 σ 而是 $\sigma - p$． 因为

$$-T_{44} = -\sigma \frac{dx_4}{d\tau}\frac{dx_4}{d\tau} - p\delta_{44} = \sigma - p.$$

沒有任何力的时候，有

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \sigma u_\nu \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + u_\mu \frac{\partial(\sigma u_\nu)}{\partial x_\nu} + \frac{\partial p}{\partial x_\mu} = 0.$$

如果将这个方程乘以 $u_\mu\left(= \frac{dx_\mu}{d\tau}\right)$ 并按 μ 求和，則利用(40)，就得

$$-\frac{\partial(\sigma u_\nu)}{\partial x_\nu} + \frac{dp}{d\tau} = 0, \tag{52}$$

其中已經使 $\frac{\partial p}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{dp}{d\tau}$． 这就是連續性方程，它和經典力学里的連續性方程相差 $\frac{dp}{d\tau}$ 一項，这一項实际上小得趋近于零．按照(52)，就知守恆原理具有形式

$$\sigma \frac{du_\mu}{d\tau} + u_\mu \frac{dp}{d\tau} + \frac{\partial p}{\partial x_\mu} = 0. \tag{53}$$

关于前三个指标的方程显然相当于欧拉方程．方程(52)与(53)在初級近似上相当于經典力学里的流体动力学方程，这事实进一步証实推广的能量原理．物質的（或能量的）密度具有张量特性（說得明确些，它构成对称张量）．

第三章　广义相对論

所有前面的考虑都基于如下的假設：所有慣性系对于描述物理現象都是等效的，而且为了規定自然界的定律，則宁愿选取这类的系而不用处于别的运动状态下的参照空間．按照我們前面的考虑，不論就可覺察的物体或是在运动的概念上，都想不到为什么要偏爱一定类型的运动状态而不取所有别的运动状态的原因；相反地，必須認为这是时空連續区域的一种独立的性質．特别是慣性原理，它好象迫使我們将物理上的客观性質归之于时空連續区域，就象 tempus est absolutum（时間是絕对的）与 spatium est absolutum（空間是絕对的）这两个說法，在牛頓的观点上是一致的一样，我們从狭义相对論的观点就必須說 continuum spatii et temporis est absolutum（时空連續区域是絕对的）．后面这句話里的 absolutum（絕对的）不仅意味着"物理上眞实的"，并且还意味着"在其物理性質上是独立的，具有物理效应，但本身不受物理条件的影响"．

只要将慣性原理当作物理学的奠基石，这种观点当然是唯一被認为合理的观点．然而对于通常的概念有两項严重的指摘．第一，設想一件本身起作用而不能承受作用的事物（时空連續区域）是违反科学上的思考方式的．这就是使得 E. 馬赫試图在力学体系里排除以空間为主动原因的理由．按照他的說法，質点不是相对于空間，而是相对于宇宙間所有其他質量的中心作无加速的运动；这样便使力学現象的一系列原因封閉起来，和牛頓与伽利略的力学是不同的．为了在媒递作用的現代理論范围內发展这个观念，必須把决定慣性的时空連續区域的性質当作空間的場的性質，有些类似于电磁場．經典力学的概念无从提供作这种表示的方法．因此馬赫解决这个問題的企图一时是失敗了．今后我們还要回到这个論点．第二，經典力学暴露了一个缺点，它并不直接要求将

相对性原理推广到互相不作匀速运动的参照空間．力学里两个物体的质量之比有两种彼此根本不同的定义方式；第一种，作为同一推力给它們的加速度的反比（慣性質量），第二种，作为同一引力場里作用在它們上面的力的比（引力質量）．定义下得这样不同的两种質量的相等是經过高度准确的实驗（厄缶的实驗）所肯定了的事实，而經典力学对于这种相等沒有提供解释．但是显然只有在将这个数值上的相等化为这两种概念在眞实性质上的相等之后，才能在科学上充分証实我們規定这样数值上的相等是合理的．

根据以下的考虑可以知道推广相对性原理可能实际上达到这个目的．稍加思考就会表明慣性質量和引力質量相等的定律相当于引力場給物体的加速度和物体的性質无关的說法．因为将引力場里的牛頓运动方程用文字全写出来，就是

（慣性質量）·（加速度）＝（引力場強度）·（引力質量）．

只有当慣性質量和引力質量数值上相等时，加速度才与物体的性質无关．現在設 K 为慣性系．于是对于 K，彼此間足够遙远并和其他物体足够遙远的質量是沒有加速度的．再就对于 K 有匀加速度的坐标系 K' 来考究这些質量．相对于 K'，所有的质量都有相等而平行的加速度；它們对于 K' 的行动就好象存在着引力場而 K' 沒有加速度一样．暫且不管这种引力場的"原因"問題，把它放在以后来研究，那么就沒有什么阻止我們設想这个引力場是眞实的，就是說，我們可以認为 K'"静止"而引力場存在的观念和只有 K 是"可容許的"坐标系而引力場不存在的观念是等效的．坐标系 K 和 K' 在物理上完全等效的假設称为"等效原理"；这个原理与慣性質量和引力質量之間的相等定律显然有着密切联系，它意味着将相对性原理推广到彼此相对作非匀速运动的坐标系．事实上我們通过这个观点，使慣性与万有引力的性質归于統一．因为按照我們的看法，同样的一些質量可以表現为仅仅在慣性作用之下（对于 K），又可以表現为在慣性和万有引力的双重作用之下（对于 K'）．利用了慣性和万有引力两者性質的統一，便使得它們在数值上相等的解释成为可能，我深信这种可能性使广义相对論具有远超过

經典力学概念的优越性;要是和这个进步相比較,就必須認为一切遭遇到的困难都是微小的.

根据实驗，慣性系駕乎所有其他坐标系之上的优越地位象是肯定地建立了的，我們有什么理由取消这种优越地位呢？慣性原理的弱点在于它含有循环的論証：如果一个质量离其他物体足够遙远,它就作沒有加速度的运动;而我們却又只根据它运动时沒有加速度的事实才知道它离其他物体足够遙远．对于时空連續区域里非常广大的部分，乃至对于整个宇宙，究竟有沒有任何慣性系呢？只要忽略太阳与行星所引起的擾动，则可以在很高的近似程度上認为慣性原理对于太阳系的空間是成立的． 說得更确切些,存在着有限的区域,在这些区域里,质点对于适当选取的参照空間会自由地作沒有加速度的运动，并且前面获得的狭义相对論里的定律,在这些区域里的成立都是异常准确的．这样的区域称为“伽利略区域”．让我們从把这种区域作为具有已知性质的特殊情况出发来进行研究.

等效原理要求在涉及伽利略区域时,同样可以利用非慣性系,即相对于慣性系来說，免不了有加速度和转动的系．如果要进一步完全避免关于某些坐标系具有优越地位的客观理由的麻煩問題，则必須容許采用任意运动的坐标系．只要認真作这方面的嘗試，就立刻会和由狭义相对論所导致的空間与时間的物理解說发生冲突．因为設有坐标系 K', 其 z' 軸和 K 的 z 軸相重合，并以勻角速度繞 z 軸轉动．相对于 K' 为静止的刚体的形状是否符合欧几里得几何学的定律呢？由于 K' 不是慣性系,所以对于 K', 我們并不能直接知道刚体形状的定律和普遍的自然界定律．可是我們对于慣性系 K 却知道这些定律，所以还能推断出它們对于 K' 的形状．設想在 K' 的 $x'y'$ 平面內以原点为心作一个圓和这个圓的一条直径．再設想給了許多彼此相等的刚杆．假設将它們一連串地放在圓周和直径上,相对于 K' 为静止．設 U 是沿圓周的杆子数目，D 是沿直径的数目,那么,如果 K' 相对于 K 不作轉动，就会有

$$\frac{U}{D}=\pi.$$

但是如果 K' 作轉动,就会得到不同的結果. 設在K的一个确定时刻 t, 測定所有各杆的端点. 对于 K, 所有圓周上的杆子有洛伦兹收縮, 然而直径上的杆子(沿着它們的长度!)却沒有这种收縮[1]. 所以推知

$$\frac{U}{D}>\pi.$$

因此推断对于 K', 刚体位形的定律并不符合遵守欧几里得几何学的刚体位形定律. 再进一步, 如果有两只同样的时計(随 K' 轉动),一只放在圓周上,另一只放在圓心, 則从K作判断, 圓周上的时計要比圓心上的时計走得慢些. 如果不用一种全然不自然的办法来对于 K' 下时間的定义(就是說, 如此下定义, 使得对于 K' 的定律明显地依賴于时間), 則按 K' 判断, 必然发生同样的事情. 所以不能象在狹义相对論里对于慣性系那样对于 K' 下空間与时間的定义. 但是按照等效原理, 可以将 K' 当作静止的系, 对于这个系有引力場(离心力与科里奥利力的場). 因此得到这样的結果: 引力場影响乃至决定时空連續区域的度規定律. 如果要将理想刚体的位形定律作几何表示,則当引力場存在时,几何学就不是欧几里得几何学.

我們所考虑的情况类似于曲面的二維描述中存在的情况. 在后面这种情况下也不可能在曲面(例如椭球面)上引用具有簡单度規意义的坐标,而在平面上,笛卡儿坐标 x_1, x_2 直接表示用单位量杆测得的长度. 在高斯的曲面論里, 他引用曲綫坐标来克服这个困难. 这种坐标除了滿足連續性条件之外,是完全任意的;只有在后来才将这种坐标和曲面的度規性質联系起来. 我們将以类似的办法在广义相对論里引用任意坐标 x_1, x_2, x_3, x_4. 这些坐标会将各个时空点标以唯一的一組数, 使相邻事件和相邻的坐标值相联

---

1) 这些考虑假定了杆子与时計的性質只依賴于速度, 而和加速度无关, 或至少加速度的影响并不抵消速度的影响.

系；在别的方面，坐标是随意选择的．如果给予定律以一种形式，使得这些定律在每个这样的四維坐标系里都能适用，就是說，如果表示定律的方程对于任意变换是协变的，则我们就在最广泛的意义上忠实于相对性原理了．

高斯的曲面論与广义相对論間最重要的接触点就在于度規性质，这些性质是建立两种理論的概念的主要基础．在曲面論里，高斯有如下的論点．无限接近的两点間的距离 ds 的概念可以作为平面几何学的基础．这个距离概念是有物理意义的，因为这个距离可以用刚性量杆直接量度．适当地选择笛卡儿坐标就可用公式 $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$ 表示这个距离．根据这个量可以得到作为短程綫（$\delta\int ds = 0$）的直线、间隔、圆、角等欧几里得平面几何学所由建立的这些概念．如果顾到在相对无限小量的程度上，另一連續曲面的一个无限小部分可以当作平面，则在这样的曲面上可以建立一种几何学．在曲面的这样微小的部分上有笛卡儿坐标 X_1, X_2，而

$$ds^2 = dX_1^2 + dX_2^2$$

給定两点間用量杆測定的距离．如果在曲面上引用任意的曲綫坐标 x_1, x_2，则可用 dx_1, dx_2 綫性地表示 dX_1, dX_2．于是曲面上各处都有

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2,$$

其中 g_{11}, g_{12}, g_{22} 决定于曲面的性质与坐标的选择；如果知道这些量，就也知道可以怎样在曲面上布置刚杆的网絡．換句話說，曲面几何学可用 ds^2 的这个表示式为基础，正象平面几何学以相应的表示式为基础一样．

在物理学的四維时空連續区域里有类似的关系．設观察者在引力場中自由降落，则他的貼近邻域里不存在引力場．因此总能够将时空連續区域的一个无限小区域当作伽利略区域．对于这样的无限小区域，会存在一个慣性系（有空間坐标 X_1, X_2, X_3 与时間坐标 X_4）；相对于这个慣性系，我們認为狭义相对論的定律是有效的．如同我们把所用量杆放在一道迭合起来便彼此相等，所用

的时計放在一处便走得快慢一样，則对于两个邻近的事件(四維連續区域里的点)，可以用单位量杆与时計直接测定的量

$$dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 - dX_4^2$$

或其負値

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 \qquad (54)$$

便是唯一确定的不变量．在此有一个物理假設是主要的，就是两根量杆的相对长度和两只时計的相对快慢在原則上和它們以往的經历无关．但是这个假設当然肯定是由經驗所保証了的．如果这个假設不成立，就不会有明晰的光譜綫；因为同一元素的各个原子当然不会有相同的經历，并且因为——根据各个原子因經历不同而相异的假設——要設想这些原子的質量或原頻率总彼此相等将是荒謬的．

有限范围的时空区域一般不是伽利略区域，因而在有限区域里无論怎样选择坐标都不能除去引力場．所以沒有坐标的选择使狭义相对論的度規关系能在有限区域里成立．但是对于連續区域的两个邻近点(事件)，不变量 ds 总是存在的．这个不变量 ds 可以用任意坐标表示．如果顧到局部的 dX_ν 可以綫性地用坐标微分 dx_ν 表示，ds^2 就可表示成形式

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu. \qquad (55)$$

对于随意选择的坐标系，函数 $g_{\mu\nu}$ 描述着时空連續区域的度規关系以及引力場．象在狭义相对論里一样，应当区别四維連續区域里的类时綫素与类空綫素；由于引入了符号的改变，类时綫素具有实值的 ds，类空綫素具有虛值的 ds．用适当选取的时計能直接量度类时的 ds．

如上所述，規定广义相对論的表示式显然需要推广不变量論与张量理論；提出的問題是什么形式的方程对于任意的点变换是协变的．数学家远在相对論之前就已发展了推广的张算．里曼首先将高斯的思路扩展到任何維数的連續区域；他預見到欧几里得几何学的这种推广的物理意义．接着，特别是里契与利威·契韦塔，以张算的形式在理論上有所发展．在这里对于这种张算最重

要的数学概念与运算作一简单的陈述，正是适当的地方.

設对于每个坐标系，有四个定义为 x_ν 的函数的量，如果它們在改变坐标时象坐标微分 dx_ν 一样作变换，便称为一个反变矢量的分量 A^ν. 因此有

$$A^{\mu\prime} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} A^\nu. \tag{56}$$

除了这些反变矢量之外，还有协变矢量. 如果 B_ν 是一个协变矢量的分量，这类矢量就按规则

$$B'_\mu = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} B_\nu \tag{57}$$

变换. 协变矢量定义的选择使得协变矢量与反变矢量合起来按公式

$$\phi = B_\nu A^\nu \quad (\text{对 } \nu \text{ 求和})$$

形成标量. 因为有

$$B'_\mu A^{\mu\prime} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\beta} B_\alpha A^\beta = B_\sigma A^\sigma.$$

举一个特例，标量 ϕ 的导数 $\dfrac{\partial \phi}{\partial x_\alpha}$ 是协变矢量的分量，它們和坐标微分一道形成标量 $\dfrac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} dx_\alpha$；从这个例子可以看出协变矢量的定义多么自然.

还有任何秩数的张量，它們对于每个指标可以有协变或反变特性；和矢量一样，这种特性是由指标的位置来指明的. 例如 A_μ^ν 表示二秩张量，它对于指标 μ 是协变的，对于指标 ν 是反变的. 这样的张量特性表明变换方程是

$$A_\mu^{\nu\prime} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} A_\alpha^\beta. \tag{58}$$

秩数与特性相同的张量相加减可以形成张量，就象在正交綫性代換的不变量理論里一样；例如

$$A_\mu^\nu + B_\mu^\nu = C_\mu^\nu. \tag{59}$$

C_μ^ν 的张量特性可由(58)得到証明.

可用乘法形成张量，保持指标的特性，正象在綫性正交变换的不变量理論里一样；例如

$$A_{\mu}^{\nu} B_{\sigma\tau} = C_{\mu\sigma\tau}^{\nu}, \tag{60}$$

由变换规则可直接获得証明.

对于特性不同的两个指标进行降秩，可以形成张量，例如

$$A_{\mu\sigma\tau}^{\mu} = B_{\sigma\tau}. \tag{61}$$

$A_{\mu\sigma\tau}^{\mu}$ 的张量特性决定了 $B_{\sigma\tau}$ 的张量特性. 証明:

$$A_{\mu\sigma\tau}^{\mu'} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_s}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_t}{\partial x'_\tau} A_{\alpha st}^{\beta} = \frac{\partial x_s}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_t}{\partial x'_\tau} A_{\alpha st}^{\alpha}.$$

张量对于两个特性相同的指标的对称与反称性质有着和狭义相对論里同样的意义.

到此，关于张量的代数性质的一切基本內容都叙述过了.

基本张量 根据 ds^2 对于 dx_ν 的随意选择的不变性并联系到符合(55)的对称条件，可知 $g_{\mu\nu}$ 是对称协变张量（基本张量）的分量. 形成 $g_{\mu\nu}$ 的行列式 g; 再形成相应于各个 $g_{\mu\nu}$ 的余因子，除以 g. 以 $g^{\mu\nu}$ 表示这些余因子除以 g 所得的商; 不过暂且还不知道它們的变换特性. 于是有

$$g_{\mu\alpha} g^{\mu\beta} = \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1, \text{ 如果 } \alpha = \beta, \\ 0, \text{ 如果 } \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{62}$$

如果形成无限小量(协变矢量)

$$d\xi_\mu = g_{\mu\alpha} dx_\alpha, \tag{63}$$

乘以 $g^{\mu\beta}$ 并按 μ 求和，利用(62)，得到

$$dx_\beta = g^{\beta\mu} d\xi_\mu. \tag{64}$$

因为这些 $d\xi_\mu$ 之比是任意的，而 dx_β 以及 $d\xi_\mu$ 都是矢量的分量，就推知 $g^{\mu\nu}$ 是反变张量（反变基本张量）的分量[1]. 于是由(62)得到

1) 如果将(64)乘以$\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}$，按 β 求和，并由轉到有撇号坐标系的变换来代替 $d\xi_\mu$，便得到

$$dx'_\alpha = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta} g^{\mu\beta} d\xi'_\sigma.$$

由此获得上面的陈述，因为由(64)，必須还有 $dx'_\alpha = g^{\sigma\alpha'} d\xi'_\sigma$，而两个方程对于 $d\xi'_\sigma$ 的每个选择都必須成立.

δ_α^β（混合基本张量）的张量特性. 用基本张量以代替具有协变指标特性的张量，就能引入具有反变指标特性的张量，反之亦然. 例如

$$A^\mu = g^{\mu\alpha} A_\alpha,$$
$$A_\mu = g_{\mu\alpha} A^\alpha,$$
$$T_\mu^\sigma = g^{\sigma\nu} T_{\mu\nu}.$$

体积不变量 体积元素

$$\int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = dx$$

不是不变量. 因为根据雅可俾定理，

$$dx' = \left|\frac{dx'_\mu}{dx_\nu}\right| dx. \tag{65}$$

但是能将 dx 加以补充，使它成为不变量. 如果形成量

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} g_{\alpha\beta}$$

的行列式，两次应用行列式的乘法定理，便有

$$g' = |g'_{\mu\nu}| = \left|\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\right|^2 \cdot |g_{\mu\nu}| = \left|\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\right|^{-2} g.$$

因此获得不变量

$$\sqrt{g'}\, dx' = \sqrt{g}\, dx. \tag{66}$$

由微分法形成张量 虽然曾經証明由代数运算形成张量就象在对于綫性正交变换的不变性的特殊情况下一样簡单，可是不幸在普遍的情况下，不变的微分运算却要复杂得多. 其理由如下. 設 A^μ 是反变矢量，只有在变换是綫性变换的情况下，它的变换系数 $\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}$ 才和位置无关. 那么在邻近点的矢量分量 $A^\mu + \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\alpha} dx_\alpha$ 变换得和 A^μ 一样，从而推断出矢量微分的矢量特性与 $\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\alpha}$ 的张量特性. 但是如果 $\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}$ 是变化的，这一論点就不再成立了.

可是通过利威·契韦塔与卫尔提出的下述途径，可以充分滿意地認識到对于张量的不变微分运算在普遍情况下是存在的. 設

(A^μ)是反变矢量,給定它对于坐标系 x_ν 的分量. 設 P_1 与 P_2 是連續区域内相距无限小的两点. 按照我們考虑問題的途径, 对于围繞 P_1 的无限小区域, 存在有坐标系 X_ν(含有虛值的 X_4 坐标);对于这个坐标系, 連續区域是欧几里得連續区域. 設 $A^\mu_{(1)}$ 是矢量在 P_1 点的坐标. 設想采用 X_ν 的局部坐标系,在 P_2 点作一具有同样坐标的矢量(通过 P_2 的平行矢量), 則这个平行矢量为在 P_1 的矢量与位移所唯一决定. 这个操作称为矢量(A^μ)从 P_1 到相距无限接近的点 P_2 的平行位移,其唯一性将見諸下文. 如果形成在 P_2 点的矢量(A^μ)和从 P_1 到 P_2 作平行位移所获得的矢量的矢量差,便得到一个矢量,这个矢量可以当作矢量(A^μ)对于既定位移(dx_ν)的微分.

自然也能对于坐标系 x_ν 来考虑这个矢量位移. 設 A^ν 是矢量在 P_1 的坐标, $A^\nu + \delta A^\nu$ 是矢量沿間隔(dx_ν)移动到 P_2 的坐标,于是在这个情况下, δA^ν 便不化为零. 对于这些沒有矢量特性的量, 我們知道它們必定綫性且齐性地依賴于 dx_ν 与 A^ν. 因此令

$$\delta A^\nu = -\Gamma^\nu_{\alpha\beta} A^\alpha dx_\beta. \tag{67}$$

此外, 可以說 $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ 对于指标 α 与 β 必定是对称的. 因为根据借助于欧几里得局部坐标系的表示,可以假定元素 $d^{(1)}x_\nu$ 沿另一元素 $d^{(2)}x_\nu$ 的位移和 $d^{(2)}x_\nu$ 沿 $d^{(1)}x_\nu$ 的位移会画出同一平行四边形. 所以必須有

$$\begin{aligned} d^{(2)}x_\nu + (d^{(1)}x_\nu - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} d^{(1)}x_\alpha d^{(2)}x_\beta) = \\ = d^{(1)}x_\nu + (d^{(2)}x_\nu - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} d^{(2)}x_\alpha d^{(1)}x_\beta). \end{aligned}$$

互换右边的求和指标 α 与 β 之后,便由此推得上面所作的陈述.

因为 $g_{\mu\nu}$ 这些量决定連續区域的所有度規性質, 所以它們必然也决定着 $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$. 如考虑矢量 A^ν 的不变量,即其大小的平方

$$g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu,$$

它是不变量,則这在平行位移中不能改变. 因此有

$$0 = \delta(g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu) = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} A^\mu A^\nu dx_\alpha + g_{\mu\nu} A^\mu \delta A^\nu + g_{\mu\nu} A^\nu \delta A^\mu,$$

或,由(67),

$$\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - g_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} - g_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\mu\alpha}\right) A^\mu A^\nu dx_\alpha = 0.$$

因为括弧里的式子对于指标 μ 与 ν 是对称的，所以只有当这式子对于指标的所有組合都会化为零时，这个方程对于矢量（A^μ）与 dx_ν 的随意选择才能成立. 于是由指标 μ, ν, α 的輪換共获得三个方程. 照顧到 $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ 的对称性質，便能从这些方程得到

$$\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{bmatrix} = g_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\mu\nu}, \tag{68}$$

其中，依照克里斯托菲，采用了簡写法

$$\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right). \tag{69}$$

如果将(68)乘以 $g^{\alpha\sigma}$ 再按 α 求和，便有

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right) = \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{Bmatrix}, \tag{70}$$

其中 $\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{Bmatrix}$ 是第二种克里斯托菲記号. 这样就从 $g_{\mu\nu}$ 导出了量 Γ. 方程(67)与(70)是下面討論的基础.

张量的协变微分法 設（$A^\mu + \delta A^\mu$）是从 P_1 到 P_2 作无限小位移所获得的矢量，而（$A^\mu + dA^\mu$）是在 P_2 点的矢量 A^μ，則两者之差

$$dA^\mu - \delta A^\mu = \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha}A^\alpha\right) dx_\sigma$$

也是矢量. 因为对于 dx_σ 的随意选择都是如此，就推知

$$A^\mu_{;\sigma} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha}A^\alpha \tag{71}$$

是张量，称为一秩张量(矢量)的协变导数. 将这个张量降秩，就得到反变张量 A^μ 的散度. 在这里必須观察到：按照(70)，

$$\Gamma^\sigma_{\mu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha}\frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x_\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_\mu}. \tag{72}$$

如果再令

$$A^\mu\sqrt{g} = \mathfrak{A}^\mu, \tag{73}$$

卫尔称这个量为一秩反变张量密度[1]，则推知

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}^{\mu}}{\partial x_{\mu}} \tag{74}$$

是标量密度.

由于规定在实现平行位移时，标量

$$\phi = A^{\mu} B_{\mu}$$

保持不改变，因而对于指定給(A^{μ})的每个值，

$$A^{\mu}\delta B_{\mu} + B_{\mu}\delta A^{\mu}$$

总是化为零，就得到关于协变矢量B_{μ}的平行位移的定律. 于是有

$$\delta B_{\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} A_{\alpha} dx_{\sigma}. \tag{75}$$

按照引到(71)的同样程序，便由此获致协变矢量的协变导数

$$B_{\mu;\sigma} = \frac{\partial B_{\mu}}{\partial x_{\sigma}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} B_{\alpha}, \tag{76}$$

互换指标μ与σ，相减，便得到反称张量

$$\phi_{\mu\sigma} = \frac{\partial B_{\mu}}{\partial x_{\sigma}} - \frac{\partial B_{\sigma}}{\partial x_{\mu}}. \tag{77}$$

对于二秩与高秩张量的协变微分法，可以使用推求(75)的程序. 例如，設$(A_{\sigma\tau})$为二秩协变张量. 如果E与F是矢量，则$A_{\sigma\tau}E^{\sigma}F^{\tau}$是标量. 通过$\delta$位移，这个式子必然不改变；将此表示成公式，应用(67)，便求得$\delta A_{\sigma\tau}$，由此得到所須的协变导数

$$A_{\sigma\tau;\rho} = \frac{\partial A_{\sigma\tau}}{\partial x_{\rho}} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho} A_{\alpha\tau} - \Gamma^{\alpha}_{\tau\rho} A_{\sigma\alpha}. \tag{78}$$

为了能够清晰地看到张量的协变微分法的普遍規律，现在写出用类似方法推得的两个协变导数：

$$A^{\tau}_{\sigma;\rho} = \frac{\partial A^{\tau}_{\sigma}}{\partial x_{\rho}} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho} A^{\tau}_{\alpha} + \Gamma^{\tau}_{\alpha\rho} A^{\alpha}_{\sigma}, \tag{79}$$

$$A^{\sigma\tau}_{;\rho} = \frac{\partial A^{\sigma\tau}}{\partial x_{\rho}} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\rho} A^{\alpha\tau} + \Gamma^{\tau}_{\alpha\rho} A^{\sigma\alpha}. \tag{80}$$

于是形成的普遍規律就很明显了. 現在要从这些公式推导另一些

1) 由于$A^{\mu}\sqrt{g}\,dx = \mathfrak{A}^{\mu}dx$有张量特性，因此这样的称謂是合理的. 每个张量，乘以$\sqrt{g}$之后，就变为张量密度. 我們用大写哥德体字母表示张量密度.

对于理論的物理应用有关系的公式.

在 $A_{\sigma\tau}$ 是反称张量的情况下,用輪換与加法,得到张量

$$A_{\sigma\tau\rho}=\frac{\partial A_{\sigma\tau}}{\partial x_\rho}+\frac{\partial A_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma}+\frac{\partial A_{\rho\sigma}}{\partial x_\tau}, \tag{81}$$

它对于每对指标都是反称的.

如果在(78)里以基本张量 $g_{\sigma\tau}$ 代替 $A_{\sigma\tau}$, 则右边恆等于零; 关于 $g^{\sigma\tau}$,类似的陈述对于(80)也成立;就是說,基本张量的协变导数化为零. 在局部坐标系里可以直接看到这是必須如此的.

設 $A^{\sigma\tau}$ 是反称的,由(80),按 τ 与 ρ 降秩,就得到

$$\mathfrak{A}^\sigma=\frac{\partial\mathfrak{A}^{\sigma\tau}}{\partial x_\tau}. \tag{82}$$

在普遍的情况下,由(79)与(80),按 τ 与 ρ 降秩,便有方程

$$\mathfrak{A}_\sigma=\frac{\partial\mathfrak{A}^\alpha_\sigma}{\partial x_\alpha}-\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\mathfrak{A}^\beta_\alpha, \tag{83}$$

$$\mathfrak{A}^\sigma=\frac{\partial\mathfrak{A}^{\sigma\alpha}}{\partial x_\alpha}+\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\mathfrak{A}^{\alpha\beta}. \tag{84}$$

里曼张量 如果給定一条由連續区域的 P 点伸达 G 点的曲綫,则通过平行位移,可将給定在 P 的矢量 A^μ 沿曲綫移动到 G(图 4). 如果是欧几里得連續区域(更普遍地說,如果通过坐标的适当选择, $g_{\mu\nu}$ 都是恆量), 則作为位移結果而在 G 所得的矢量和連接 P 与 G 的曲綫选择无关. 否則,其結果将有賴于位移的途径. 所以在这种情况下, 当矢量由閉合曲綫的 P 点沿曲綫移动而返抵 P 时,会有变化(在它的方向上而不是大小上) ΔA^μ. 現在計算这个矢量变化:

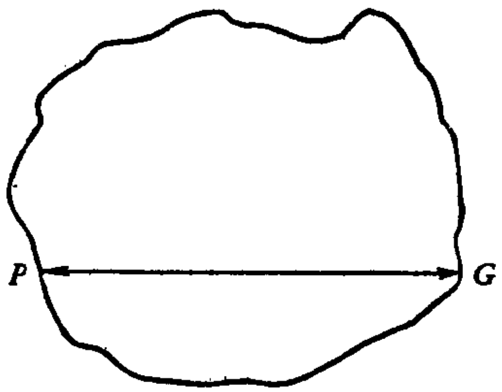


图 4.

$$\Delta A^\mu=\oint\delta A^\mu.$$

就象在关于矢量环繞閉合曲綫的綫积分的斯托克斯定理里一样,这个問題可以化作环繞綫度为无限小的閉合曲綫的积分法; 我們

将局限于这个情况.

首先由(67),有

$$\Delta A^{\mu} = -\oint \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha} dx_{\beta}.$$

在此,$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ 是这个量在积分途径上变动点G的值. 如果令

$$\xi^{\mu} = (x_{\mu})_G - (x_{\mu})_P$$

并以 $\overline{\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}}$ 表示 $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ 在P的值,則足够精确地,有

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \overline{\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}} + \overline{\frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}}} \xi^{\nu}.$$

再設 A^{α} 为由 $\overline{A^{\alpha}}$ 通过沿曲綫从P到G的平行位移而获得的值. 現在利用(67),容易証明 $A^{\mu} - \overline{A^{\mu}}$ 是一阶无限小量, 而对于具有一阶无限小綫度的曲綫, ΔA^{μ} 是二阶无限小量. 因此倘若令

$$A^{\alpha} = \overline{A^{\alpha}} - \overline{\Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau}}\, \overline{A^{\sigma}}\ \overline{\xi^{\tau}},$$

只会有二阶的誤差.

如果将 $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ 与 A^{α} 的这些值引入积分, 不計所有高于二阶的量,就得到

$$\Delta A^{\mu} = -\left(\frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}}{\partial x_{\alpha}} - \Gamma^{\mu}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}_{\sigma\alpha}\right) A^{\sigma} \oint \xi^{\alpha} d\xi^{\beta}. \tag{85}$$

由积分号下移出来的是关于P的量.从被积函数里減去$\frac{1}{2}d(\xi^{\alpha}\xi^{\beta})$,便有

$$\frac{1}{2}\oint (\xi^{\alpha} d\xi^{\beta} - \xi^{\beta} d\xi^{\alpha}).$$

这个二秩反称张量 $f^{\alpha\beta}$ 表示曲綫所围繞的面元素在大小与位置上的特性. 如果(85)的括弧里的式子对于指标 α 与 β 是反称的,便可由(85)判断它的张量特性. 通过互换(85)里的求和指标 α 与 β, 并将获得的方程与(85)相加,就能达成这个目的. 我們求得

$$2\Delta A^{\mu} = -R^{\mu}_{\sigma\alpha\beta} A^{\sigma} f^{\alpha\beta}, \tag{86}$$

其中

$$R^{\mu}_{\sigma\alpha\beta} = -\frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\mu}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}_{\sigma\beta} - \Gamma^{\mu}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}_{\sigma\alpha}. \tag{87}$$

由(86)推知 $R^{\mu}_{\sigma\alpha\beta}$ 的张量特性; 这是四秩里曼曲率张量,我們

不須研究其对称性質．它等于零是連續区域为欧几里得連續区域的充分条件(不管所取坐标的实性)．

将这个里曼张量按指标 μ, β 降秩，就得到二秩对称张量

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}. \tag{88}$$

如果选择坐标系使 g = 恆量，則最后两項化为零．由 $R_{\mu\nu}$ 可形成标量

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \tag{89}$$

最直(短程)綫　可作一曲綫，作法是从各元素按平行位移作出其相継的元素．这是欧几里得几何学里直綫的自然推广．对于这样的曲綫，有

$$\delta\left(\frac{dx_{\mu}}{ds}\right) = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{dx_{\alpha}}{ds}dx_{\beta}.$$

应以 $\frac{d^2x_{\mu}}{ds^2}$ 代替左边[1]，便得

$$\frac{d^2x_{\mu}}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{dx_{\alpha}}{ds}\frac{dx_{\beta}}{ds} = 0. \tag{90}$$

如果寻求能使积分

$$\int ds \text{ 或 } \int \sqrt{g_{\mu\nu}dx_{\mu}dx_{\nu}}$$

在两点間具有逗留値的曲綫(短程綫)，就会获得同一曲綫．

1) 通过沿綫素(dx_{β})的平行位移，便从所考虑的每一点的方向矢量而求得曲綫上一个邻近点的方向矢量．

第四章　广义相对論(續)

現在对于广义相对論的定律，已經有了确定表示式所必需的数学工具．在这里的陈述中不打算追求有系統的完整性，但是，将从已有知識与已获得的結果来逐步发展出新的结果和可能性．这样的陈述最适合我們的知識在目前的暫时状况．

按照惯性原理，不受力作用的質点沿直綫作匀速运动．在狭义相对論的四維連續区域里（含有实值的时間坐标），这是一条眞实的直綫．在不变量的普适（里曼几何）理論的概念体系中，直綫的自然的也就是最简单的推广意义，就是最直的綫或最短程綫的概念．因此，就等效原則的意义而論，需要假定：只在惯性与引力的作用下，質点的运动是以方程

$$\frac{d^2 x_\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 0 \tag{90}$$

描述的．事实上，如果引力場的所有分量 $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ 化为零，这个方程便化作了直綫方程．

这些方程是如何和牛頓运动方程联系的呢？按照狭义相对論，对于惯性系（含有实值的时間坐标并适当选择 ds^2 的符号），$g_{\mu\nu}$ 与 $g^{\mu\nu}$ 同样具有下列的值：

$$\left.\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\} \tag{91}$$

于是运动方程成了

$$\frac{d^2 x_\mu}{ds^2} = 0.$$

我們将称此为 $g_{\mu\nu}$ 場的“一級近似值”．象在狭义相对論里一样，考

虑近似法时采用虚值的 x_4 坐标往往是有益的，因为这样作时，在一級近似上，$g_{\mu\nu}$ 取下列的值：

$$\left.\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right\} \tag{91a}$$

这些值可以合写成关系式

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}.$$

然后为了达到二級近似，必須令

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{92}$$

其中的 $\gamma_{\mu\nu}$ 应看作一阶微量.

于是运动方程的两項便都是一阶微量. 如果不計相对于它們是一阶微小的各项，就須令

$$ds^2 = -dx_\nu^2 = dl^2(1 - q^2), \tag{93}$$

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = -\delta_{\mu\sigma}\begin{bmatrix}\alpha\beta \\ \sigma\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\alpha\beta \\ \mu\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\gamma_{\alpha\mu}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial\gamma_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha}\right). \tag{94}$$

现在要引入第二种近似法. 設质点的速度和光速相比是很微小的. 那么 ds 就会和时間微分 dl 相同. 其次，和 $\frac{dx_4}{ds}$ 相比較，$\frac{dx_1}{ds}$，$\frac{dx_2}{ds}$，$\frac{dx_3}{ds}$ 化为零. 此外，要假定引力場随时間变化得很緩慢，以致 $\gamma_{\mu\nu}$ 对于 x_4 的导数可以不計. 于是运动方程(对于 $\mu = 1, 2, 3$)化成了

$$\frac{d^2x_\mu}{dl^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\gamma_{44}}{2}\right). \tag{90a}$$

如果将 $\left(\frac{\gamma_{44}}{2}\right)$ 和引力場的势等同起来，这个方程和质点在引力場里的牛頓运动方程就相等同；这样是否容許，自然依賴于引力的場方程，就是說，要看这个量，按一級近似程度，是否象牛頓理論中的

引力势一样,满足同样的場的定律. 看一下(90)与(90a)就表明 $\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}$ 实际上起着引力場强度的作用. 这些量沒有张量特性.

方程(90)表示惯性与引力在質点上的影响. (90)的整个左边具有张量特性(对于任何坐标变换),但是这两項单独分开来却都沒有张量特性; 这个事实从形式上表示惯性与引力的統一. 类似于牛頓方程,第一項要当作惯性的表示式,第二項当作引力的表示式.

其次,須試图寻求引力場的定律. 为了这个目的,应将牛頓理論的泊松方程

$$\Delta\phi = 4\pi K\rho$$

当作范例. 这个方程是以有質物質的密度 ρ 引起引力場的观念为基础的. 在广义相对論里也必須如此. 然而狹义相对論的研究曾經指出須以单位体积的能量的张量代替物質的标密度. 前者不仅包含有質物質的能张量, 还要包含电磁能张量. 实在我們已經看到:在更完整的分析里, 以能张量表示物質只能当作是权宜之計. 实际上物質是带电粒子組成的,其本身須当作电磁場的一部分,而事实上是主要部分. 只是由于我們对于集中电荷的电磁場缺乏足够知識的情况, 迫使我們在介紹理論时暫不决定这个张量的眞实形式. 根据这个观点, 在目前适宜于引入还不知道結构的二秩张量 $T_{\mu\nu}$, 让它暂且将电磁場的和有質物的能量密度联合起来. 以后将称这个张量为"物質能张量".

按照以前的結果, 动量与能量的原理是用这个张量的散度等于零的陈述(47c)来表示. 在广义相对論里,将不得不假定相应的普遍协变方程是有效的. 如果 $(T_{\mu\nu})$ 表示协变的物質能张量, $\mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu}$ 表示相应的混合张量密度. 則按照(83),必須要求滿足

$$0 = \frac{\partial \mathfrak{T}_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}\mathfrak{T}_{\alpha}^{\beta}. \tag{95}$$

必須記住: 除了物質能量密度外, 还必須給定引力場的能量密度, 这样就不能单独論及物質的动量与能量的守恆原理. 这一点以(95)里第二項的出現作为数学上的表示,这使得判断形式为(49)

的积分方程的存在成为不可能. 引力場将能量与动量轉移給"物質",意思是說場施力于"物質"上并給它以能量;这是以(95)里的第二項来表示的.

如果在广义相对論里有类似于泊松方程的方程，則它一定是关于引力势的张量 $g_{\mu\nu}$ 的张量方程；物質能张量必然会出現在这个方程的右边. 在方程的左边必定有一个由 $g_{\mu\nu}$ 表出的微分张量. 需要寻求这个微分张量. 它完全为下列三个条件所决定:

1. 它不可能包含 $g_{\mu\nu}$ 的高于二阶的微分系数.
2. 它必須对于这些二阶微分系数是綫性的.
3. 其散度必須恆等于零.

前两个条件自然是从泊松方程得来的. 因为可以从数学上証明:由里曼张量,通过代数途径(即不用微分法), 就能形成所有这样的微分张量,所以我們的张量必然具有形式

$$R_{\mu\nu} + a g_{\mu\nu} R,$$

其中 $R_{\mu\nu}$ 与 R 分别按(88)与(89)下定义. 此外,可以証明第三个条件要求 a 的值为$-1/2$. 因此关于引力場的定律,得到方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}. \tag{96}$$

方程(95)是这个方程的一个推論. κ 表示一个恆量，它是和牛頓引力恆量有关联的.

下面要尽可能少用較复杂的数学方法，指出理論的一些从物理学观点看来是值得注意的要点. 首先必須証明左边的散度实际上等于零. 由(83),物質的能量原理可以表示成

$$0 = \frac{\partial \mathfrak{T}_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha} - \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \mathfrak{T}_\alpha^\beta, \tag{97}$$

其中

$$\mathfrak{T}_\sigma^\alpha = T_{\sigma\tau} g^{\tau\alpha} \sqrt{-g}.$$

将类似的运算用之于(96)的左边就会导致恆等式.

在包围每个世界点的区域里有着这样的坐标系,对于它們,选用虛值的 x_4 坐标，則在既定点有

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} \begin{cases} = -1, & \text{如果 } \mu = \nu, \\ = 0, & \text{如果 } \mu \neq \nu, \end{cases}$$

而且对于它們，$g_{\mu\nu}$ 与 $g^{\mu\nu}$ 的一阶导数都化为零. 現在来証明左边的散度在这点等于零. 各分量 $\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}$ 在这点等于零，因而需要証明的只是

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left[\sqrt{-g}\, g^{\nu\sigma}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right)\right]$$

等于零. 将(88)与(70)引入这个式子，便看出留存的只是含有 $g_{\mu\nu}$ 的三阶导数的各項. 因为 $g_{\mu\nu}$ 还应换成 $-\delta_{\mu\nu}$，最后只剩下少数几項，容易看出它們会互相抵消. 由于我們所形成的量具有张量特性，因此就証明了它对于每个其他的坐标系，并且自然对于每个其他的四維点，也是等于零的. 这样物质的能量原理(97)是場方程的数学推論.

为了要知道方程(96)是否和經驗一致，首先必須弄清楚这样的方程，作为一級近似，是否会引致牛頓理論. 为此須将各种近似引用在这些方程里. 我們已經知道：在某种近似程度下，欧几里得几何学与光速恆定律在很大范围的区域里，如行星系里，是有效的. 如果象在狹义相对論里那样，取虚值的第四坐标，这就意味着須令

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{98}$$

其中的 $\gamma_{\mu\nu}$ 和 1 比較是微小的，以致可以不計 $\gamma_{\mu\nu}$ 的高次冪及其导数. 如果这样做，我們就一点也不能探知引力場的結构或宇宙范围的度规空間的結构，然而却能获知邻近質量对于物理現象的影响.

在貫彻这种近似計算之前，先变换(96). 将(96)乘以 $g^{\mu\nu}$，按 μ 与 ν 求和；注意由 $g^{\mu\nu}$ 的定义而得的关系式

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4,$$

便获得方程

$$R = \kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \kappa T.$$

如果将 R 的这个值代入(96)，就有

$$R_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) = -\kappa T^{*}_{\mu\nu}. \tag{96a}$$

作上述的近似計算，左边便成了

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2\gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2\gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha}\right),$$

或

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \gamma'_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \gamma'_{\nu\alpha}}{\partial x_\alpha}\right),$$

其中曾令

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\sigma\sigma}\delta_{\mu\nu}. \tag{99}$$

現在必須注意方程(96)对于任何坐标系都是有效的。我們曾經选用特定的坐标系，使得 $g_{\mu\nu}$ 在所考虑的区域里和恆值 $-\delta_{\mu\nu}$ 只有无限小的差別。然而这个条件对于坐标的任何无限小的变化仍継續滿足，因而 $\gamma_{\mu\nu}$ 还可以受到四个条件的制約，只要这些条件和关于 $\gamma_{\mu\nu}$ 的数量級的条件不相冲突。現在假定选择坐标系时，使得四个关系式

$$0 = \frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{\sigma\sigma}}{\partial x_\mu} \tag{100}$$

得到滿足。于是(96a)取得形式

$$\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} = 2\kappa T^{*}_{\mu\nu}. \tag{96b}$$

用电动力学里习見的推迟势的方法可以解这些方程；用容易理解的写法表示，有

$$\gamma_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2\pi}\int \frac{T^{*}_{\mu\nu}(x_0, y_0, z_0, t-r)}{r}\,dV_0. \tag{101}$$

为了看出这个理論在什么意义上包括牛頓理論，必須更詳細地考虑物質能张量。从唯象观点考虑，这个能张量是由电磁場的和較狹义的物質的能张量組成的。如果按数量級来考虑这个能张量的不同部分，則根据狹义相对論的結果推知，和有質物的貢献相比較，电磁場的貢献实际上等于零。用我們的单位制，一克物質的能量等于 1；和它相比較，电場的能量可以不計，还有物質形变的

能量乃至化学能量也是如此．如果令

$$\left.\begin{aligned}T^{\mu\nu}&=\sigma\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\\ ds^2&=g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu\end{aligned}\right\}, \tag{102}$$

就会达到充分满足我們要求的近似程度．这里的 σ 是靜密度，就是参照随物质运动的伽利略坐标系，借助于单位量杆所测定的在通常意义下有质物质的密度．

此外，有見于在所选择的坐标系里，如果以 $-\delta_{\mu\nu}$ 代替 $g_{\mu\nu}$，便只会造成相对地微小的誤差；所以可令

$$ds^2=-\Sigma dx_\mu^2. \tag{102a}$$

无論产生場的質量相对于所选择的准伽利略坐标系的运动怎样地快，前面的推演总是有效的．但是天文学里，我們須处理这样的質量，它們相对于所用坐标系的速度总是远小于光速，用我們选取的时間单位，就是远小于1．因此如果在(101)里将推迟势换成通常的(非推迟的)势，并且对于产生場的質量，令

$$\frac{dx_1}{ds}=\frac{dx_2}{ds}=\frac{dx_3}{ds}=0,\quad \frac{dx_4}{ds}=\frac{\sqrt{-1}dl}{dl}=\sqrt{-1}, \tag{103a}$$

就会达到几乎满足所有实际要求的近似程度．于是 $T^{\mu\nu}$ 与 $T_{\mu\nu}$ 的值成了

$$\left.\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-\sigma\end{matrix}\right\} \tag{104}$$

T 的值成了 σ，而最后，$T^*_{\mu\nu}$ 的值便成了

$$\left.\begin{matrix}\frac{\sigma}{2}&0&0&0\\0&\frac{\sigma}{2}&0&0\\0&0&\frac{\sigma}{2}&0\\0&0&0&-\frac{\sigma}{2}\end{matrix}\right\} \tag{104a}$$

这样由(101)得到

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{11}=\gamma_{22}=\gamma_{33}=-\frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\\ \gamma_{44}=+\frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\end{aligned}\right\}, \tag{101a}$$

而所有其他的 $\gamma_{\mu\nu}$ 则等于零. 这些方程的最后一条和方程(90a)联系起来便包括了牛頓的引力理論. 如果将 l 换成 ct, 就得到

$$\frac{d^2x_\mu}{dt^2}=\frac{\kappa c^2}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\int\frac{\sigma dV_0}{r}. \tag{90b}$$

我們看到牛頓的引力恆量 K 以关系式

$$K=\frac{\kappa c^2}{8\pi} \tag{105}$$

和我們的場方程里的恆量 κ 相联系. 所以由 K 的已知数值,获知

$$\kappa=\frac{8\pi K}{c^2}=\frac{8\pi\cdot 6.67\cdot 10^{-8}}{9\cdot 10^{20}}=1.86\cdot 10^{-27}. \tag{105a}$$

从(101)看到: 即使在一級近似里, 引力場的結构和符合牛頓理論的引力場結构就有根本性的区别; 这个区别在于引力势具有张量的特性而无标量的特性. 过去沒有認識到这一点, 因为在一級近似上,只有分量 g_{44} 进入到質点的运动方程里.

現在为了能够从我們的結果推断量杆与时計的性質, 必須注意下述情形. 按照等效原理, 相对于范围无限小并在适当运动状态下(自由降落,且无轉动)的笛卡儿参照系,欧几里得几何学的度規关系是成立的. 在相对于这些系只有微小加速度的局部坐标系里,因而也在相对于所选的系为静止的坐标系里,我們都能作同样的陈述. 在这样的局部系里,对于两个邻近的点事件,有

$$ds^2=-dX_1^2-dX_2^2-dX_3^2+dT^2=-dS^2+dT^2,$$

其中 dS 与 dT 是分别用相对于系为静止的量杆与时計直接測定的;这些就是自然測定的长度与时間. 另一方面,因为我們知道用有限区域里所用的坐标 x_ν 表示, ds^2 的形式是

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu,$$

所以一方面是自然測定的长度与时間,另一方面是相应的坐标差,

我們就有可能得到两者之間的关系．由于空間与时間的划分对于两个坐标系是相符的，因此使 ds^2 的两种表示式相等便获得两个关系式．如果根据(101a)，令

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \\ + \left(1 - \frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)dl^2,$$

就足够近似地有

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2} = \\ &\qquad = \left(1 + \frac{\kappa}{8\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \\ &dT = \left(1 - \frac{\kappa}{8\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)dl \end{aligned}\right\}. \tag{106}$$

所以对于所选择的坐标系，单位量杆有坐标长度

$$1 - \frac{\kappa}{8\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}.$$

我們所选择的特殊坐标系保証这个长度只倚賴于地点，而和方向无关．如果选择不同的坐标系，这就不会如此．可是不論怎样选择坐标系，刚杆的位形的定律总是和欧几里得几何学的定律不符的；换句話說，我們选择任何坐标系，都不能使相当于单位量杆端点的坐标差 $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$，按任何方向放置，总满足关系式 $\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 = 1$．在这个意义下，空間不是欧几里得空間，而是"弯曲的"．根据上面第二个关系式，单位时計两次摆动間的間隔 $(dT = 1)$，以我們坐标系里所用的单位表示，就相当于"时間"

$$1 + \frac{\kappa}{8\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}.$$

照此說来，时計邻近的有質物質的質量愈大，它就走得愈慢．因此断定太阳表面上产生的光譜綫，和地球上产生的相应光譜綫相比較，大約要向紅端移动其波长的 $2\cdot10^{-6}$．起初，理論的这个重要推論好象和实驗不合；但是我們从过去几年所获得的結果看来，愈加相信这个效应的存在是可能的，很难怀疑理論的这个推論将在今

后几年里得到証实.

理論的另一个可用实驗检驗的重要推論是和光綫路径有关的. 在广义相对論里，相对于局部慣性系的光速也是到处相同. 采用时間的自然量度,这个速度是 1. 因此按照广义相对論,在通用坐标系里,光的传播定律的特性应以方程

$$ds^2 = 0$$

表示. 在我們使用的近似程度下，在所选择的坐标系里，按照(106),可由方程

$$\left(1+\frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)=\left(1-\frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)dl^2$$

表示光速的特性. 所以在我們的坐标系里,光速 L 是以

$$\frac{\sqrt{dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2}}{dl}=1-\frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r} \qquad (107)$$

表示的. 因而从此可作出光綫經过巨大質量近旁时将有偏轉的結論.如果設想太阳的質量 M 集中于坐标系的原点,則在 x_1-x_3 平面里和原点相距 Δ 并平行于 x_3 軸行进的光綫将向太阳偏轉，偏轉总值为

$$\alpha=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial x_1}dx_3.$$

进行积分,得

$$\alpha=\frac{\kappa M}{2\pi\Delta}. \qquad (108)$$

Δ 等于太阳半径时，偏轉是 1.7″. 1919 年英国日蝕观测队非常准确地証实了这个偏轉的存在，并对于 1922 年的日蝕，为获得更准确的观测数据作了极审慎的准备. 应注意，这个理論的結果也不受坐标系随意选择的影响.

在这里应提到理論的第三个可由观测检驗的推論，即有关水星近日点运动的推論. 对于行星軌道的长期变化了解得很准确，因而我們所用的近似程度对于理論与观测的比較就不够了. 需要回到普遍的場方程(96). 我解决这个問題时用了逐步求近法. 可

是从那时起，許瓦茲喜德与其他学者已經完全解决了对称有心静引力場的問題；H. 卫尔在他的"空間、时間、物质"一书中所作的推演是特别优美的. 如果不直接回到方程(96)而使計算基于和这个方程等效的一种变分原理，则計算可以略加簡化. 我将只按了解方法所必須的要求略示其程序.

在静場的情况下，ds^2 必定有形式

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= -d\sigma^2 + f^2 dx_4^2 \\ d\sigma^2 &= \sum_{1-3} \gamma_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta \end{aligned}\right\}, \tag{109}$$

其中后一条方程的右边只要按空間坐标求和. 場的中心对称性要求 $\gamma_{\mu\nu}$ 的形式应为

$$\gamma_{\alpha\beta} = \mu\delta_{\alpha\beta} + \lambda x_\alpha x_\beta, \tag{110}$$

而 f^2，μ 与 λ 都只是 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ 的函数. 可以随意选择这三个函数中的一个，因为我們的坐标系本来就是完全随意的；因为用代换

$$x_4' = x_4,$$
$$x_\alpha' = F(r)x_\alpha,$$

总能保証这三个函数中的一个成为 r' 的指定函数. 因此可令

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \lambda x_\alpha x_\beta \tag{110a}$$

来代替(110)而并未限制普遍性.

这样就用 λ 与 f 两个量表示了 $g_{\mu\nu}$. 先由(109)与(110a)計算 $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ 之后，把这些量引入方程(96)，便将它們确定成 r 的函数. 于是有

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma = \frac{1}{2}\frac{x_\sigma}{r}\cdot\frac{\lambda' x_\alpha x_\beta + 2\lambda r\delta_{\alpha\beta}}{1+\lambda r^2} (\text{对于 } \alpha, \beta, \sigma = 1, 2, 3) \\ &\Gamma_{44}^4 = \Gamma_{4\beta}^\alpha = \Gamma_{\alpha\beta}^4 = 0 \ (\text{对于 } \alpha, \beta = 1, 2, 3) \\ &\Gamma_{4\alpha}^4 = \frac{1}{2} f^{-2}\frac{\partial f^2}{\partial x_\alpha},\ \Gamma_{44}^\alpha = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\frac{\partial f^2}{\partial x_\beta} \end{aligned}\right\} \tag{110b}$$

借助于这些結果，場方程提供了許瓦茲喜德的解：

$$ds^2 = \left(1 - \frac{A}{r}\right) dl^2 - \left[\frac{dr^2}{1 - \frac{A}{r}} + r^2(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2)\right], \tag{109a}$$

其中曾令

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= l \\ x_1 &= r\sin\theta\sin\phi \\ x_2 &= r\sin\theta\cos\phi \\ x_3 &= r\cos\theta \\ A &= \frac{\kappa M}{4\pi} \end{aligned}\right\}. \tag{109b}$$

M表示太阳的质量，对于坐标原点取中心对称的位置．(109a)这个解只在这个质量之外有效，所有的 $T_{\mu\nu}$ 在这样的地点都等于零．如果行星的运动发生在 x_1-x_2 平面里，则必須以

$$ds^2 = \left(1-\frac{A}{r}\right)dl^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{A}{r}} - r^2 d\phi^2 \tag{109c}$$

代替(109a)．

行星运动的計算有賴于方程(90)．由(110b)的第一个方程与(90)，对于指标 1, 2, 3, 得到

$$\frac{d}{ds}\left(x_\alpha \frac{dx_\beta}{ds} - x_\beta \frac{dx_\alpha}{ds}\right) = 0,$$

如果积分，并以极坐标表示結果，就有

$$r^2 \frac{d\phi}{ds} = \text{恆量}. \tag{111}$$

由(90)，对于 $\mu=4$, 得

$$0 = \frac{d^2 l}{ds^2} + \frac{1}{f^2}\frac{\partial f^2}{\partial x_\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dl}{ds} = \frac{d^2 l}{ds^2} + \frac{1}{f^2}\frac{df^2}{ds}\frac{dl}{ds}.$$

由此，在乘以 f^2 并积分之后，有

$$f^2 \frac{dl}{ds} = \text{恆量}. \tag{112}$$

(109c)，(111)与(112)使我們有了三个关于四个变量 s, r, l 与 ϕ 的方程，从这些方程就可按照和經典力学里同样的方法計算行星的运动．由此获得的最重要的結果是行星橢圓軌道依照行星公轉方向的长期轉动，每公轉按弧度計的値是

$$\frac{24\pi^3 a^2}{(1-e^2)c^2T^2}, \tag{113}$$

其中

a = 行星半长軸按厘米計的长度，

e = 偏心率，

$c = 3 \cdot 10^{+10}$，光在眞空中的速度，

T = 按秒計的公轉周期.

这个式子使得百年来(自赖斐列起始)大家所熟知而理論天文学一直未能滿意解释的水星近日点运动获得了説明.

以广义相对論表示麦克斯韦的电磁場論是沒有困难的；应用(81)，(82)与(77)等张量的形成就能做到. 設 ϕ_μ 为一秩张量，体会成电磁四元势；那么，因为电磁場张量可以用这些关系式下定义，

$$\phi_{\mu\nu} = \frac{\partial\phi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\phi_\nu}{\partial x_\mu}. \tag{114}$$

于是麦克斯韦方程組的第二个方程就用由此所得的张量方程

$$\frac{\partial\phi_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial\phi_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial\phi_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \tag{114a}$$

来确定，而以张量密度关系式

$$\frac{\partial\mathfrak{f}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mathfrak{J}^\mu \tag{115}$$

来确定麦克斯韦方程組的第一个方程，其中

$$\mathfrak{f}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} \phi_{\sigma\tau},$$

$$\mathfrak{J}^\mu = \sqrt{-g}\, \rho \frac{dx_\nu}{ds}.$$

如果将电磁場的能张量引入(96)的右边并取散度，就会对于特殊情况 $\mathfrak{J}^\mu = 0$ 得到(115)，作为(96)的一个推論. 許多理論家認为这种在广义相对論的方案里包括电的理論是武断而不能令人滿意的. 这样我們也不能了解构成基本带电粒子的电的平衡. 如果有一种理論，引力場与电磁場不作为邏輯上有区别的結构进入其中，这样的理論就会是可取得多的. H. 卫尔以及近来 Th. 卡鲁查沿

着这个方向提出了巧妙的见解；然而关于这些見解，我深信它们并沒有引导我們更接近于基本問題的眞实解答．我不打算进一步研究这一点．但我要簡略地討論所謂宇宙学问题，因为沒有这种討論，关于广义相对論的考虑在某种意义上仍然是不够的．

上面基于場方程（96）的考虑以这样的概念为基础，就是空間整个来說是伽利略、欧几里得空間，而只是含在里面的质量才扰乱了这个特性．只要涉及的空間在数量級上如天文学通常所处理的那样，这个概念当然是有理由的．但是宇宙的哪些部分是准欧几里得的，不论它們多大，却是全然不同的問題．从曾經多次用到的曲面理論中举一个例子，可以弄清这一点．如果曲面的某个部分实际上可当作平面，絲毫不能推断整个曲面具有平面的形状；这个曲面尽可以是半径足够大的球面．在相对論发展前，从几何学观点已討論得很多的一个問題是宇宙全部来說是否是非欧几里得的．但是随着相对論，这問題已进入新的阶段，因为按照这个理論，物体的几何性质不是独立的，而是和質量分布有关的．

如果宇宙是准欧几里得的，则馬赫認为惯性以及引力倚賴于物体間的一种相互作用的見解，是完全錯誤的．因为在这个情况下，对于适当选择的坐标系，$g_{\mu\nu}$ 在无限远处会是恆定的，就象它們在狭义相对論里一样；而作为有限区域里质量影响的結果，在有限区域里，对于适当选择的坐标，$g_{\mu\nu}$ 会和这些恆定值只有微小的差别．那么空間的物理性質便不是完全独立的，即不是完全不受物质的影响，不过大体上来說，它們会受到物質的制約，而且只在微小的程度上受制約．这样一种二元論的观念，甚至其本身也是不能令人满意的；不过有一些駁斥它的重要物理論点，我們将予以考虑．

假定宇宙是无限的且在无限远处是欧几里得的，从相对論的观点看，是一个复杂的假設．用广义相对論的語言說，这就要求四秩里曼张量 R_{iklm} 在无限远处化为零，这个张量提供了二十个独立条件，而只有十个曲率分量 $R_{\mu\nu}$ 进入引力場定律里．假設这样影响远及的限制而沒有任何物理基础，当然是不能令人滿意的．

但是第二点，馬赫認为慣性倚賴于物質的一种相互作用的想法，从相对論看来，可能走上了正确的道路．因为下面将要指出：按照我們的方程，在慣性的相对性意义下，慣性質量确在互相作用，即使作用很微弱．沿着馬赫的思路应当期待些什么呢？

1. 有質物堆积在物体邻近时，物体的慣性必定增加．

2. 邻近質量加速时，物体一定受到加速力，事实上力必定和加速度同方向．

3. 轉动的中空物体必定在其本身內部产生使运动物体按轉动方向偏轉的"科里奧利場"以及径向离心場．

現在要証明：根据我們的理論，按馬赫見解应当期待的这三种效应是实际存在的，虽然它們在大小上过于微小，以致无从設想由实驗室的实驗加以証实．为了这个目的，回到質点运动方程(90)，并要进行比較方程(90a)里略进一步的近似計算．

首先，設 γ_{44} 为一級微量．按照能量方程，質量在引力影响下运动的速度的平方是同級的量．因此将所考慮的質点的速度以及产生場的質量的速度都当作級数为 1/2 的微量是合理的．現在要在从場方程(101)与运动方程(90)而来的方程里进行近似計算，达到的程度是对于(90)左方的第二項中，考慮那些与速度成綫性关系的各項．此外，不設 ds 与 dl 彼此相等，而要按照較高的近似程度，令

$$ds=\sqrt{g_{44}}\,dl=\left(1-\frac{\gamma_{44}}{2}\right)dl.$$

起初由(90)得到

$$\frac{d}{dl}\left[\left(1+\frac{\gamma_{44}}{2}\right)\frac{dx_\mu}{dl}\right]=-\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dl}\frac{dx_\beta}{dl}\left(1+\frac{\gamma_{44}}{2}\right). \tag{116}$$

由(101)，按要求的近似程度，有

$$\left.\begin{aligned}-\gamma_{11}=-\gamma_{22}=-\gamma_{33}=\gamma_{44}&=\frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\\ \gamma_{4\alpha}&=-\frac{i\kappa}{2\pi}\int\frac{\sigma\dfrac{dx_\alpha}{ds}dV_0}{r}\\ \gamma_{\alpha\beta}&=0\end{aligned}\right\}, \tag{117}$$

其中 α 与 β 只表示空間指标.

可以在(116)的右边将 $1+\frac{\gamma_{44}}{2}$ 换成1,并将 $-\Gamma_\mu^{\alpha\beta}$ 换成 $\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{bmatrix}$.此外,容易看出:按这样的近似程度,必須令

$$\begin{bmatrix}44\\ \mu\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial\gamma_{4\mu}}{\partial x_4},$$

$$\begin{bmatrix}\alpha 4\\ \mu\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{4\mu}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial\gamma_{4\alpha}}{\partial x_\mu}\right),$$

$$\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{bmatrix}=0,$$

其中 α, β 与 μ 表示空間指标. 因此按通常的矢量写法,由(116)得到

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dl}[(1+\bar{\sigma})\mathbf{v}]&=\operatorname{grad}\bar{\sigma}+\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial l}+[\operatorname{rot}\mathfrak{A},\mathbf{v}]\\ \bar{\sigma}&=\frac{\kappa}{8\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\\ \mathfrak{A}&=\frac{\kappa}{2\pi}\int\frac{\sigma\frac{dx_\alpha}{dl}dV_0}{r}\end{aligned}\right\}\qquad(118)$$

事实上,現在运动方程(118)表明:

1. 慣性質量和 $1+\bar{\sigma}$ 成比例,所以当有质物趋近試驗物体时会增加.

2. 加速質量对于試驗物体有同符号的感应作用. 这就是 $\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial l}$ 一項.

3. 在轉动的中空物体內部,垂直于轉軸运动的質点按轉动方向偏轉(科里奥利場). 从理論还可推断在轉动的中空物体內部有上面提到的离心作用,正如梯尔令曾經指出的一样[1].

虽然由于 κ 是这样微小,所有这些效应都不可能从实驗观测

1) 在相对于慣性系作匀速轉动的坐标系的特殊情况下,即使不用計算,也可以認識到离心作用必然是和科里奥利場的存在不可分离地联系着的;普遍的协变方程自然必須适用于这样的情况.

到，但是按照广义相对論，它們肯定是存在的．对于馬赫关于所有慣性作用的相对性的見解，我們应从这些效应中看到有力的支持．如果在思想上将这些見解一致地貫彻到底，就必須期待全部慣性，即整个 $g_{\mu\nu}$ 場，是由宇宙的物質来决定，而不是主要由无限远处的边界条件来决定．

星体的速度和光速相比較是微小的，这个事实看来对于建立宇宙大小的 $g_{\mu\nu}$ 場的适当概念是有意义的．由此推知：对于适当的坐标选择，在宇宙間，至少在宇宙間有物質的部分，g_{44} 几乎是恆定的．而且，宇宙間各处都有星体的假設似乎是自然的，所以很可以假定 g_{44} 的不恆定只是由于物質并不連續分布而却集中在单独天体与天体系里的原因．如果为了研究宇宙作为整体的一些几何性質，愿意不顧物質密度与 $g_{\mu\nu}$ 場的这些較为局部的非均匀性，則似乎自然可将实际的質量分布代之以連續分布，并进一步給这个分布指定均匀的密度 σ．在这样設想的宇宙里，所有各点連同空間方向在几何上是等效的；关于它的空間延展，它具有恆定的曲率，并且对于 x_4 坐标是柱狀的．有可能宇宙是空間有界的，因而按照 σ 为恆定的假定，具有恆定曲率，作球狀或橢球狀，这种可能性好象特別令人滿意；因为既然如此，根据广义相对論的观点，无限远处的边界条件是极不方便的，就可将它換成自然得多的閉合空間的条件．

根据上面所說，应令

$$ds^2 = dx_4^2 - \gamma_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \tag{119}$$

其中指标 μ 与 ν 只由 1 到 3．$\gamma_{\mu\nu}$ 是 x_1, x_2, x_3 的某种函数，它相应于具有正的恆曲率的三維連續区域．現在必須研究这样的假設能否滿足引力場方程．

为了能作这样的研究，必須首先知道具有恆曲率的三維流形滿足什么微分条件．浸沒在四維欧几里得連續区域里的三維球狀流形[1]可用方程

1）这里引用第四空間維，除了作为数学上的手段之外，当然是沒有意义的．

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2,$$
$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = ds^2,$$

表示．消去 x_4，得

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}.$$

不計含 x_ν 三次与更高次的各項，就可在坐标原点的邻近令

$$ds^2 = \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{a^2}\right) dx_\mu dx_\nu.$$

括弧內部是流形在原点邻近的 $g_{\mu\nu}$．由于 $g_{\mu\nu}$ 的一阶导数，因而还有 $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$，都在原点化为零，所以由(88)計算这个流形在原点的 $R_{\mu\nu}$ 是很簡单的．我們有

$$R_{\mu\nu} = -\frac{2}{a^2}\delta_{\mu\nu} = -\frac{2}{a^2}g_{\mu\nu}.$$

因为关系式 $R_{\mu\nu} = -\frac{2}{a^2}g_{\mu\nu}$ 是一般地协变的，而且流形的所有各点都是在几何上等效的，所以这个关系式对于每个坐标系以及在流形的各处都能成立．为了避免和四維連續区域相混淆，以下将以希腊字母表示有关三維連續区域的量，并令

$$P_{\mu\nu} = -\frac{2}{a^2}\gamma_{\mu\nu}. \tag{120}$$

現在进行将場方程(96)应用到我們的特殊情况．对于四維流形，由(119)得

$$\left.\begin{array}{ll} R_{\mu\nu} = P_{\mu\nu} & \text{对于指标 1 到 3} \\ R_{14} = R_{24} = R_{34} = R_{44} = 0 & \end{array}\right\}. \tag{121}$$

对于(96)的右边，須考虑作尘云状分布的物质的能张量．因此按照以上所說，专对靜止情况，必須令

$$T^{\mu\nu} = \sigma\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}.$$

但是此外还要添加一个压强項，这可以从物理上来成立如下．物質是带电粒子組成的．在麦克斯韦理論的基础上，不能将它們設想为沒有奇异点的电磁場．为了符合事实起見，須引入麦克斯韦理論里沒有的能量項，使得单独的带电粒子不管它們的带有同号

电的組素間的相互推斥而可以聚合．为了符合这个事实，邦嘉莱曾假定在这些粒子內部有平衡静电推斥的压強存在．然而不能断言这个压強在粒子外面就化为零．如果在我們的唯象性的陈述里添加一个压強項，就会符合这个情況．可是切莫以此和流体动力压強相混淆，因为它只用来作为物質內部动力关系的能的表示．于是令

$$T_{\mu\nu}=g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\sigma\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}-g_{\mu\nu}p. \tag{122}$$

因此在我們的特殊情况下，須令

$$T_{\mu\nu}=\gamma_{\mu\nu}p\ \text{（对于从 1 到 3 的}\ \mu\ \text{与}\ \nu\text{），}$$
$$T_{44}=\sigma-p,$$
$$T=-\gamma^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}p+\sigma-p=\sigma-4p.$$

看到場方程(96)可以写成

$$R_{\mu\nu}=-\kappa\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)$$

的形式，便从(96)获得方程

$$+\frac{2}{a^2}\gamma_{\mu\nu}=\kappa\left(\frac{\sigma}{2}-p\right)\gamma_{\mu\nu},$$

$$0=-\kappa\left(\frac{\sigma}{2}+p\right).$$

由此得到

$$\left.\begin{aligned}p&=-\frac{\sigma}{2}\\ a&=\sqrt{\frac{2}{\kappa\sigma}}\end{aligned}\right\}. \tag{123}$$

如果宇宙是准欧几里得的，因而有无限大的曲率半径，则 σ 会等于零．但是宇宙間物質的平均密度确然为零，是少有可能的；这是我們反对准欧几里得宇宙的假設的第三个論点．看来我們假設的压強也不可能化为零；只有在我們有了更完善的电磁場的理論知識之后，才能体会这个压強的物理本質．根据(123)的第二个方程，宇宙的半径 a 是用方程

$$a = \frac{M\kappa}{4\pi^2} \tag{124}$$

由物質的总質量M确定的. 借助于这个方程，几何性質之完全有賴于物理性質就显得很清楚了.

这样就可以引入下述論点来駁斥空間无限的观念，并支持空間有界或閉合的观念:

1. 根据相对論的观点,假設閉合的宇宙比較在宇宙的准欧几里得結构的无限远处假設相应的边界条件,要簡单得多.

2. 馬赫表示的关于慣性倚賴于物体相互作用的見解是作为一次近似而包含在相对論的方程里的;根据这些方程推知,慣性倚賴于,至少是部分地倚賴于,質量間的相互作用. 因为如果假定慣性一部分依賴于相互作用,一部分又倚賴于空間的独立性質,則所作的假定是不能令人滿意，从而馬赫的見解就更加显得可能了. 然而馬赫的这个見解只适应于空間有界的有限宇宙，而不适应于准欧几里得的无限宇宙. 根据認識論的观点，让空間的力学性質完全由物質确定会更令人滿意些,而只有在閉合宇宙中才是这样的情况.

3. 只有在宇宙間物質的平均密度等于零的情况下，无限的宇宙才有可能. 这样一种假定在邏輯上虽有可能，但是和宇宙間的物質存在着有限的平均密度的假設相比,它还是可能較少的.

附录一　论“宇宙学问题”

自这本小书第一版发行以来，相对論又有了一些进展。其中有些打算在这里只作简要的説明：

前进的第一步是断然証明发源地点的(負)引力势所引起的光譜綫紅向移动的存在(参看第59頁)。所謂“矮星”的发現使这个証明有了可能，这种星的平均密度成万倍地超过水的密度。对于这样一顆能够确定質量与半径的星(例如天狼星的淡弱伴星)[1]，曾根据理論推測紅向移动約为对于太阳的20倍，而实际証明它确在所推測的范围之內。

前进的第二步涉及受引力的物体的运动定律，于此略加叙述。在起初确定理論的表示式时，受引力的質点的运动定律是作为引力場定律之外的独立基本假設来引入的——参看方程(90)，它断言受引力的質点沿短程綫运动。这就造成由伽利略慣性定律轉到存在“眞正”引力場的情况这种假想的轉化。已經証明这个运动定律——推广到任意大的受引力質量的情况——可以单独从空虛空間的場方程求得。根据这个推导，运动定律取决于一个条件，就是場在产生場的各質点外面到处无奇异点。

前进的第三步涉及所謂“宇宙学問題”，这里打算詳細討論，部分地由于它的基本重要性，部分地也因为这些問題的討論还根本沒有結束。由于我逃不掉这样的印象，就是在目前对于这个問題的处理中，最重要的基本观点还不够強調；这个事实也使我感到一种督促来作更确切的討論。

1) 質量是应用牛頓定律而以光譜学方法从天狼星上的反作用得到的；半径是从总光亮度与每单位面积的輻射強度得到的，而后者又可由其輻射溫度获得。

問題大致可以这样規定：根据对于恆星的观測，我們坚信恆星系統大体上并不象漂浮在无限的空虛空間里的島屿，而且也不存在任何类似于所有現存物質总量的重心的东西．无宁說我們深信空間物質有着不等于零的平均密度．

于是引起这样的問題：能否使根据經驗所提出的这个假設和广义相对論相調协？

首先須将問題規定得更确切些．考慮宇宙的一个足够大的有限部分，能使其中所含物質的平均密度是(x_1, x_2, x_3, x_4)的近似連續函数．这样一个子空間可以近似地当作关联到星体运动的慣性系（閔可斯基空間）．能够安排它使得相对于这个系的平均物質速度在所有的方向上都化为零．剩下的是各个星体的（近乎紊乱的）运动，类似于气体分子的运动．一个主要之点是，由經驗知道星体的速度和光速相比較是很微小的．所以暂且完全忽略这个相对运动，并将这些星代之以各微粒相互間沒有（紊乱）运动的物質尘埃，是行得通的．

上述条件还絕不足以使問題成为确定的問題．最簡单而最根本的特殊規定是这个条件：物質的（自然測定的）密度ρ在空間到处都是相同的；对于适当选择的坐标，度規是与x_4无关的，且对于x_1, x_2, x_3是均匀而各向同性的．

我起初就認为这个情况是大規模物理空間最自然的理想化描述；本书曾在第67到70諸頁加以論述．反对这个解法的意見是所須引入的負压強沒有物理根据．为了使这样的解法成为可能，我原来在方程里新添一項以代替上述压強，根据相对論的观点，这是容許的．这样扩大后的引力方程是

$$\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)+\Lambda g_{ik}+\kappa T_{ik}=0, \tag{1}$$

其中Λ是一个普适恆量（“宇宙学恆量”）．这个第二項的引入使理論趋于复杂化，严重地减弱了理論在邏輯上的朴素性．几乎不能避免引用物質的有限平均密度，这就造成了困难，而只能以这个困难来說明上述补充項是应当引入的．順便提到，同样的困难在牛

頓理論里也是存在的.

数学家弗利德曼为这个进退两难的境地找到一条出路[1]. 后来他的結果由于赫布耳的星系膨胀的发現（随距离均匀增加的光譜綫紅向移动）而获得意外的証实. 下面主要只是弗利德曼見解的說明：

对于三維各向同性的四維空間

我們发覚所看到的一些星系在所有的方向上以大致同样的密度分布着. 于是促使我們假定系的空間各向同性对于所有的观察者，对于和周围物質相比較是处于靜止的观察者的每个地点与每个时刻都是成立的. 另一方面，我們不再假定对于和邻近物質保持相对靜止的观察者，物質的平均密度对于时間是恆定的. 与此相伴，我們拋掉度規場的表示式和时間无关的假設.

現在須为宇宙就空間而論处处各向同性的条件找出数学形式. 通过（四維）空間的每一点 P 有一条質点所行的路綫（以下簡称"短程綫"）. 設 P 与 Q 是这样一条短程綫上无限接近的两点，那么就有必要要求相对于保持 P 与 Q 固定的坐标系的任何轉动，場的表示式是不变的. 这对于任何短程綫的任何元素都将有效[2].

上述不变性的条件意味着短程綫全綫处于轉动軸上而其各点在坐标系的轉动下保持不变. 这就意味着这个解对于坐标系繞三重无限多的短程綫的所有轉动应是不变的.

为簡略起見，我不打算涉及解法的演繹推导. 可是对于三維空間，似乎能直覚地显然看到：在繞双重无限多的綫的轉动下不变的度規根本上属于中心对称的类型（按适当的坐标选择），其中轉动軸是径向直线，由于对称性的緣故，它們是短程綫. 那么恆值半径的曲面是（正）曲率恆定的曲面，这些曲面处处垂直于（径向）短程綫. 因此按不变論的語言就有下述結果：

1）他指出：根据場方程，在整个（三維）空間里可能有有限的密度，不必特地为此扩大这些場方程. Zeitschrift für Physik（物理学杂志）10(1922).

2）这个条件不仅限制度規，并且还要求对于每一条短程綫都存在一个坐标系，能使得相对于这个系，繞这条短程綫轉动下的不变性是有效的.

存在着正交于短程綫的曲面族．这些曲面的每一个都是曲率恆定的曲面．这些短程綫在曲面族的任何两个曲面間的弧段是相等的．

注 族中曲面可能有負的恆値曲率或欧几里得曲面(零曲率)，就这一点而論，前面直覚地获得的幷不是一般情况．

我們所关心的四維情况是完全类似的．此外，当度規空間有慣性指数 1 时幷无根本区别；不过須选择径向作为类时的方向而相应地以族中曲面內的方向作为类空的方向．所有各点的局部光錐的軸都处于径向的綫上．

坐标的选择

現在选择在物理解释的观点上更方便的别种坐标，以代替将宇宙的空間各向同性表示得最为明显的四个坐标．

在中心对称的形式下，質点短程綫是通过中心的直綫，就选择它們作为类时綫，綫上的 x_1, x_2, x_3 是恆定的，而独有 x_4 是变化的．再設 x_4 等于到中心的度規距离．按这样的坐标，度規的形式为

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= dx_4^2 - d\sigma^2 \\ d\sigma^2 &= \gamma_{ik}dx_idx_k(i,k=1,2,3) \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

$d\sigma^2$ 是諸球状超曲面之一上面的度規．于是除了仅仅依賴于 x_4 的一个正因子之外，属于不同超曲面的 γ_{ik}(由于中心对称性)在所有超曲面上的形式是一样的：

$$\gamma_{ik} = \underset{0}{\gamma}_{ik}G^2, \tag{2a}$$

其中 $\underset{0}{\gamma}$ 只倚賴于 x_1, x_2, x_3，而 G 仅仅是 x_4 的函数．于是得到

$$d\underset{0}{\sigma}^2 = \underset{0}{\gamma}_{ik}dx_idx_k(i,k=1,2,3) \tag{2b}$$

是三維里曲率恆定的确定度規，对于每个 G 是相同的．

方程

$$\underset{0}{R}_{iklm} - B(\underset{0}{\gamma}_{il}\underset{0}{\gamma}_{km} - \underset{0}{\gamma}_{im}\underset{0}{\gamma}_{kl}) = 0 \tag{2c}$$

表示这种度規的特性．可选择坐标系(x_1, x_2, x_3)使得綫素成为保形地欧几里得的：

$$d\underset{0}{\sigma}^2 = A^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)\text{，即 } \underset{0}{\gamma}_{ik} = A^2\delta_{ik}, \tag{2d}$$

其中 A 将仅仅是 $r(r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ 的正值函数. 代入方程，获得两个关于 A 的方程:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{r}\left(\frac{A'}{Ar}\right)' + \left(\frac{A'}{Ar}\right)^2 = 0 \\ -\frac{2A'}{Ar} - \left(\frac{A'}{A}\right)^2 - BA^2 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

第一个方程为

$$A = \frac{c_1}{c_2 + c_3 r^2} \tag{3a}$$

所满足，其中恆量暂时是随意的. 于是由第二个方程,得到

$$B = 4\frac{c_2 c_3}{c_1^2}. \tag{3b}$$

关于各个恆量 c，有下列情况: 如果对于 $r=0$，A 应有正值则 c_1 与 c_2 必须有相同符号. 因为改变所有三个恆量的符号并不改变 A，所以可设 c_1 与 c_2 都是正的. 还可令 c_2 等于 1. 此外，由于正因子总能并入 G^2 里，因而也可使 c_1 等于 1 而不损失普遍性. 所以能令

$$A = \frac{1}{1 + cr^2};\quad B = 4c. \tag{3c}$$

现在有了三种情况:

$c > 0$（球状空间），

$c < 0$（赝球状空间），

$c = 0$（欧几里得空间）.

用坐标的相似性变换($x_i = ax_i$，其中 a 是恆定的)还可在第一种情况下得到 $c = \frac{1}{4}$，在第二种情况下得到 $c = -\frac{1}{4}$.

于是对于这三种情况，分别有

$$\left.\begin{aligned} A = \frac{1}{1 + \frac{r^2}{4}};\quad B = +1 \\ A = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{4}};\quad B = -1 \\ A = 1;\quad B = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3d}$$

在球状情况下,单位空间($G=1$)的"周长"是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dr}{1+\frac{r^2}{4}}=2\pi;$$

单位空间的"半径"等于1. 在所有这三种情况下,时间的函数 G 是(在空间截口测定的)两质点间距离随时间变化的量度. 在球状的情况下, G 是在时刻 x_4 的空间半径.

摘要 理想化宇宙的空间各向同性假设导致度规:

$$ds^2=dx_4^2-G^2A^2(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2), \tag{2}$$

其中 G 仅仅依赖于 x_4, A 仅仅依赖于 $r^2(=x_1^2+x_2^2+x_3^2)$, 并且

$$A=\frac{1}{1+\frac{z}{4}r^2}, \tag{3}$$

而分别以 $z=1$, $z=-1$, 与 $z=0$ 表示不同情况的特性.

場 方 程

现在必须进一步满足引力场方程, 即不带有以前曾特地引入的"宇宙学项"的场方程:

$$\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)+\kappa T_{ik}=0. \tag{4}$$

代入基于空间各向同性假设的度规表示式,计算后获得

$$\left.\begin{aligned}
&R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=\left(\frac{z}{G^2}+\frac{G'^2}{G^2}+2\frac{G''}{G}\right)GA\delta_{ik}(i,k=1,2,3)\\
&R_{44}-\frac{1}{2}g_{44}R=-3\left(\frac{z}{G^2}+\frac{G'^2}{G^2}\right)\\
&R_{i4}-\frac{1}{2}g_{i4}R=0\qquad(i=1,2,3)
\end{aligned}\right\}. \tag{4a}$$

此外关于"尘埃"的物质的能张量 T_{ik}, 有

$$T^{ik}=\rho\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}. \tag{4b}$$

物质沿着作运动的短程线是仅仅 x_4 沿着它变化的线; 在它们

上面 $dx_4 = ds$. 有唯一不为零的分量

$$T^{44} = \rho. \tag{4c}$$

降下指标,得到 T_{ik} 的唯一不化为零的分量

$$T_{44} = \rho. \tag{4d}$$

考虑及此,場方程就成了

$$\left.\begin{aligned} \frac{z}{G^2} + \frac{G'^2}{G^2} + 2\frac{G''}{G} &= 0 \\ \frac{z}{G^2} + \frac{G'^2}{G^2} - \frac{1}{3}\kappa\rho &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

$\frac{z}{G^2}$ 是空間截口 $x_4 =$ 恆量里的曲率. 因为在所有的情况下, G 是两質点間度規距离作为时間函数的一个相对的量度, $\frac{G'}{G}$ 表示赫布耳膨胀. A 从方程里消去了; 因为如果引力方程应具有所要求的对称形式的解, A 就不得不消去. 将两个方程相減,得到

$$\frac{G''}{G} + \frac{1}{6}\kappa\rho = 0. \tag{5a}$$

因为 G 与 ρ 必須处处是正的, 所以对于不化为零的 ρ, G'' 处处是負的. 因此, $G(x_4)$ 既无极小値,又无拐点; 此外、沒有 G 是恆定的解.

空間曲率为零($z = 0$)的特殊情况

密度 ρ 不化为零的最簡单的特殊情况就是 $z = 0$ 的情况, 其中截口 $x_4 =$ 恆量是不弯曲的. 如果令 $\frac{G'}{G} = h$, 則場方程在这个情况下是

$$\left.\begin{aligned} 2h' + 3h^2 &= 0 \\ 3h^2 &= \kappa\rho \end{aligned}\right\}. \tag{5b}$$

第二个方程里給定的赫布耳膨胀 h 与平均密度 ρ 之間的关系,至少就数量級而論,在某种程度上是可和經驗相比較的. 对于

10^6 秒差距的距离，膨胀是每秒 432 千米[1]. 如果以我們所用的量度制(以厘米为长度单位，以光行一厘米的时間为时間单位)表示，便得

$$h = \frac{432 \cdot 10^5}{3.25 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 10^{10}}\right)^2 = 4.71 \cdot 10^{-28}.$$

因为参看(105a)，还有 $\kappa = 1.86 \cdot 10^{-27}$，由(5b)的第二个方程得

$$\rho = \frac{3h^2}{\kappa} = 3.5 \cdot 10^{-28}\ 克/立方厘米.$$

按数量級，这个值約略符合于天文学家的估計(根据可看到的星与星系的質量与視差). 这里引用 G. C. 麦克維諦的話为例(伦敦物理学会会报第 51 卷，1939，第 537 頁)："平均密度肯定不超过 10^{-27} 克一立方厘米，而更可能的数量級是 10^{-29} 克/立方厘米".

由于确定这个大小的巨大困难，我暫且就認为这样的符合是使人滿意的. 因为确定 h 这个量比較确定 ρ 更准确些，所以認为确定可观察的空間的构造要靠 ρ 的更精密的确定，这种看法可能是不为过分的. 因为，由于(5)的第二个方程，空間曲率在普遍情况下是

$$zG^{-2} = \frac{1}{3}\kappa\rho - h^2. \tag{5c}$$

所以如果方程的右边是正的，則空間具有正的恆曲率并因此是有限的；其大小可按和这个差值一样的准确程度来确定. 如果右边是負的，空間就是无限的. 目前 ρ 的确定还不足以使我們从这个关系式推求出不等于零的空間(截口 $x_4 =$ 恆量)的平均曲率.

如果不計空間曲率，适当地选取 x_4 的起点之后，(5c)的第一个方程就成了

$$h = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x_4}. \tag{6}$$

这个方程对于 $x_4 = 0$ 有奇异性，因此这样的空間或者具有負膨

1) 按 1954 年的新数据，对于 10^6 秒差距的距离，这个恆量是每秒 174 千米.——译者注.

胀，而时間则往上受到 $x_4=0$ 一值的限制，或者它具有正膨胀，其存在由 $x_4=0$ 开始．后一情况符合于自然的現实．

我們由 h 的測定值获知宇宙到現在存在的时間是 $1.5\cdot10^9$ 年．这个年龄和根据坚实地壳中鈾蜕变所作的推算大致相同．这是一个有矛盾的結果，它由于好几个原因引起了关于理論有效性的怀疑．

現在发生一个問題：实际上忽略空間曲率的假定目前所造成的困难能否由于引入适当的空間曲率而消除？确定 G 对于时間依赖关系的(5)的第一个方程在这里是有用的．

方程在空間曲率不为零的情况下的解法

如果研究空間截口($x_4=$ 恆量)的空間曲率，就有方程

$$\left.\begin{aligned} zG^{-2}+\left(2\frac{G''}{G}+\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right)=0 \\ zG^{-2}+\left(\frac{G'}{G}\right)^2-\frac{1}{3}\kappa\rho=0 \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

$z=+1$ 时，曲率是正的，$z=-1$ 时，是負的．这些方程的第一个可以积分．先将它写成下列形式：

$$z+2GG''+G'^2=0. \tag{5d}$$

如将 $x_4(=t)$ 当作 G 的函数，便有

$$G'=\frac{1}{t'},\ G''=\left(\frac{1}{t'}\right)'\frac{1}{t'}.$$

写 $u(G)$ 以代替 $\frac{1}{t'}$，得

$$z+2Guu'+u^2=0, \tag{5e}$$

或

$$z+(Gu^2)'=0. \tag{5f}$$

从此由簡单的积分获得

$$zG+Gu^2=G_0, \tag{5g}$$

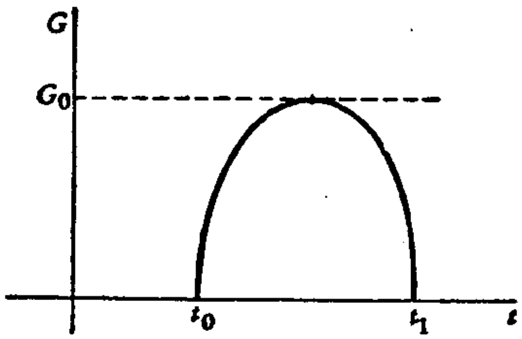
或由于令 $u=\frac{1}{\frac{dt}{dG}}=\frac{dG}{dt}$，有

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 = \frac{G_0 - \varepsilon G}{G}, \tag{5h}$$

其中 G_0 为恆量．如果取(5h)的微商并考虑到 G'' 由于(5a)的緣故是負的，則知这个恆量不会是負的．

(a) 具有正曲率的空間．

G 留存在区間 $0 \leqslant G \leqslant G_0$ 里．下面是从量上表示 G 的略图：



(1)

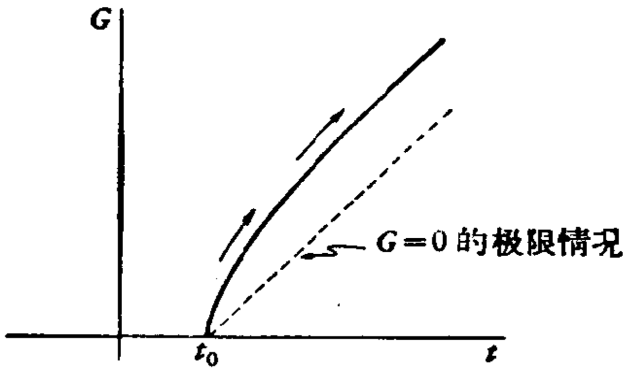
半径 G 由 0 升至 G_0，然后再連續降到 0．空間截口是有限的（球状的）：

$$\frac{1}{3}\kappa\rho - h^2 > 0. \tag{5c}$$

(b) 具有負曲率的空間．

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 = \frac{G_0 + G}{G}.$$

G 随 t 由 $G=0$ 向 $G=+\infty$ 增大（或从 $G=\infty$ 走到 $G=0$）．因此 $\frac{dG}{dt}$ 从 $+\infty$ 到 1 单調地減小，如略图所示：



(2)

那么这是連續膨胀而无收縮的情况，空間截口是无限的，并有

$$\frac{1}{3}\kappa\rho - h^2 < 0. \tag{5c}$$

上节所述平面空間截口的情况，按方程

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 = \frac{G_0}{G}, \tag{5h}$$

处于这两种情况之間.

附識 負曲率的情况包括 ρ 为零作为极限情况. 在这种情况下，$\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 = 1$（参看略图 2）. 因为計算表明曲率张量等于零，所以这是欧几里得的情况.

ρ 不为零的負曲率情况愈来愈接近地趋于这个极限情况，于是随着时間的增加，空間結构便愈来愈在更小的程度上为包含在它里面的物質所确定.

从对曲率不为零的情况的这种研究，便可得出下述結論. 对于每种（“空間的”）曲率不为零的情况，象在曲率为零的情况下一样，存在有 $G = 0$ 的起始状态，相当于膨胀的开始. 因此在这个截口上，密度为无限大而場是奇异的. 引入这样新的奇异性，看来其本身是成問題的[1].

此外，引入空間曲率对于从开始膨胀到降达某个确定值 $h = \frac{G'}{G}$ 的时間的影响似乎在数量级上是可以忽略的. 用初等的計算可以从(5h)求得这个时間，这里略去不論. 現在限于考虑 ρ 为零的膨胀空間. 上面說过，这是負空間曲率的一种特殊情况. 由(5)的第二个方程有（考虑到第一項的反号）

$$G' = 1.$$

于是（对于适当的 x_4 的起始点）

$$G = x_4,$$

$$h = \frac{G'}{G} = \frac{1}{x_4} \cdots. \tag{6a}$$

1）然而应注意如下的情形：目前相对論的引力理論是以区分“引力場”与“物質”两概念为基础的. 不无理由的看法是，由于这个原因使理論不能适用于很高的物質密度，很可能在一种統一理論里就不致出現奇异性了.

因此对于膨胀时間，除了数量級为 1 的因子而外，这个极端情况产生的結果象空間曲率为零的情况一样(参看方程(6)).

因此引入空間曲率并不能消去涉及方程(6)时提到的疑問，就是对于目前能够观测的星与星系的发展，它曾給出那样非常短促的时间.

上述研究的扩展：按有靜止質量的物質推广方程

直到现在，在所有得到的解里总存在着系的一个状态，在这个状态下度規有奇异性($G=0$)而密度为无限大. 于是发生这样的問題：这种奇异性的产生是否可能由于我們考虑物质时将它当作了不抵抗凝聚的尘埃？我們曾否忽略了单独星体无規运动的影响而未加論証？

例如可将尘埃的状态由微粒彼此保持相对靜止换成彼此相对作无規运动，象气体分子一样. 这样的物質会抵抗絕热的凝聚，且抵抗随凝聚而加強. 如此能否防止无限凝聚的发生？下面将指出：在物质描述上的这种修正絲毫不能改变上面那些解的主要特性.

按狹义相对論处理的"粒子气"

考虑質量为 m 并作平行运动的一羣粒子. 用适当的变换就可以認为这个羣是静止的. 于是粒子的空間密度 σ 在洛伦兹的意义上是不变的. 对于任意的洛伦兹系，

$$T^{uv}=m\sigma\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds} \tag{7}$$

具有不变的意义(羣的能张量). 如果有許多这样的羣，用求和法，对于其全体就有

$$T^{uv}=m\sum_p\sigma_p\left(\frac{dx^u}{ds}\right)_p\left(\frac{dx^v}{ds}\right)_p. \tag{7a}$$

关于这个形式，可以选择洛伦兹系的时間轴，使 $T^{14}=T^{24}=T^{34}=0$. 由系的空間轉动还可获得 $T^{12}=T^{23}=T^{31}=0$. 再設粒子气是各

向同性的．这意味着 $T^{11}=T^{22}=T^{33}=p$．这和 $T^{44}=u$ 一样，都是不变量．这样便将不变量

$$\mathscr{T}=T^{uv}g_{uv}=T^{44}-(T^{11}+T^{22}+T^{33})=u-3p \qquad (7b)$$

用 u 与 p 来表示．

由 T^{uv} 的表示式可知 T^{11}, T^{22}, T^{33} 与 T^{44} 都是正的；因而 T_{11}，T_{22}，T_{33}，T_{44} 也同样都是正的．

于是引力方程成了

$$\left.\begin{aligned} 1+2GG''+G^2+\kappa T_{11}=0 \\ -3G^{-2}(1+G'^2)+\kappa T_{44}=0 \end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

由第一个方程可知在这里（因为 $T_{11}>0$）G^{11} 也总是負的，而对于既定的 G 与 G'，含 T_{11} 的項只会减小 G'' 的值．

由此看到：考虑質点的无規相对运动并未从根本上改变我們的結果．

綜述与其他附識

1．虽然按相对論的观点有可能将"宇宙論項"引入引力方程，但从合邏輯的簡約着眼却应当放弃． 如弗利德曼所首先指出的，倘若容許两質点的度規距离随时間变化，就可使处处有限的物質密度和引力方程的原有形式相調协[1]．

2．仅仅作宇宙在空間上各向同性的要求就会引致弗利德曼的形式．因此它无疑是适合宇宙論問題的普遍形式．

3．不計空間曲率的影响，可获知平均密度与赫布耳膨胀之間的关系，就数量級而言，这已为經驗所証实．

此外关于从膨胀开始到现在的时間，获得的值按数量級是 10^9 年．这个时間的短促和恆星发展的理論是不符的．

4．后一結果沒有因为引入空間曲率而改变；考虑星以及星系彼此間相对的无規运动也未使其改变．

1）假使赫布耳的膨胀发現于广义相对論建立的时期，就决不致引入宇宙論項．現在看来，将这样一項引入場方程里是更缺乏理由的，因为它的引入失却了原有的唯一根据，就是导致宇宙論問題的自然解法．

5. 有人試图对于赫布耳的光譜綫移动采用多普勒效应之外的其他解释. 可是已知的物理事实并不支持这样的观念. 按照这种假設就可能用刚杆連接 S_1 与 S_2 两个星体. 如果沿着杆的光的波长数在途中随时間变化，則由 S_1 发送到 S_2 并反射回来的单色光将以不同的頻率（用 S_1 上的时計测定）返达 S_1. 这意味着各地点测得的光速依賴于时間，这甚至和狹义相对論也是相抵触的. 此外須注意，不断在 S_1 与 S_2 間往复的光訊号将形成一只“时計”，而它却不能和在 S_1 的时計（例如原子时計）保持恆定的关系. 这将意味着不存在有相对性意义的度規. 这不仅会使人們失去对于相对論所建立的一切关系的理解，而且这也不能符合于这样的事实，即某些原子論形式并非以“相似性”而是以“全等性”相关联的（銳光譜綫，原子体积等的存在）.

可是以上的討論是以波动說为基础的，也許上述假設的某些倡議者会設想光的膨胀过程根本不合于波动說，而多少类似于康普頓效应的情形. 設想这种沒有散射的过程就形成了一种假設，这种假設还不能按目前知識的观点来証实它是对的. 它也不能解释頻率的相对移动为何和原来的頻率无关. 因此不得不将赫布耳的发現看成星系的膨胀.

6. 关于“宇宙的起始”（膨胀开始）大約只在 10^9 年前的假定，对它的怀疑有經驗与理論两重性质的根源. 天文学家傾向于将不同光譜类型的星作为根据均匀发展过程所进行的年龄分类，这种过程所需要的时間远較 10^9 年长久. 因此这样的理論实际上和相对論方程所指出的推論相矛盾. 可是依我看来，星体的进化論建立的基础比較場方程的脆弱.

理論上的怀疑所根据的事实是，膨胀起始时，度規成为奇异的而密度 ρ 成了无限大. 关于这一点，应注意下述情形：目前相对論的依据是，把物理現实分为以度規場（引力）为一方面，而以电磁場与物质为另一方面. 实际上空間可能有均匀的特性，而目前的理論可能只作为极限情况才有效. 对于很大的場的密度与物质的密度，場方程甚至出現于其中的場变量就都不会有眞实意义. 所以

不得假定方程对于很高的場的密度与物质的密度仍然有效，也不得断定"膨胀的起始"必須意味着数学意义上的奇异性．总之需要認清方程不得推广到这样的区域去．

然而这种考虑并不改变如下的事实，就是按目前存在的星与星系的发展观点，"宇宙的起始"眞正构成这样的开端，当时那些星与星系还沒有作为单独的东西而存在．

7．可是有一些經驗上的論据有利于理論所需的动力空間观．虽然鈾分解得比較快，而且也看不出有創造鈾的可能，为何仍然有鈾存在？为何空間沒有充滿了輻射，使夜間的天空看起来象灼热的表面呢？这是一个老問題，按稳定的宇宙观点还至今沒有找到令人滿意的答案．然而研究这类問題就会走得过于遙远了．

8．根据所說的这些理由，看来我們还須不顧"寿命"的短促，認眞对待膨胀宇宙的观念．如果这样，主要問題就成了空間到底具有正的还是負的空間曲率．关于这一点还想給以如下的討論．

根据經驗的观点，要作出的决定归根到底无非是表示式 $\frac{1}{3}\kappa\rho - h^2$ 的値是正的（球状情况）还是負的（贋球状情况）的問題．依我看，这是最重要的問題．按目前天文学的状况，看来根据經驗的判断不是不可能的．由于 h（赫布耳膨胀恆量）有比較公認的値，一切就依靠以最高可能的准确度測定 ρ．

作出宇宙为球状的証明是可以想象的（难于想象能証明它是贋球状的）．这关系到人們总能給出 ρ 的下界而不能給出上界的事实．情形所以是这样，因为关于 ρ 究竟有多大一部分属于天文上无从观测的（无輻射的）质量，还难于提出意見．我想将这一点討論得稍为詳細些．

只考虑輻射星体的质量就可以給出 ρ 的一个下界 ρ_s．如果看起来 $\rho_s > \frac{3h^2}{\kappa}$，就会作出贊成球状空間的判断．如果看起来 $\rho_s < \frac{3h^2}{\kappa}$，就有必要試图确定无辐射质量的部分 ρ_d．現在要証明我

們也能求得$\frac{\rho_d}{\rho_s}$的一个下界.

設想一天文对象，包含許多单独的星并可足够准确地当作稳定的体系，例如球形星团(具有已知視差). 可由光譜观测获得的速度能确定引力場(在似乎合理的假定下)，于是也就能計算产生这个場的質量. 可以将这样算得的質量和星团中看得見的星的質量相比較，这样至少对于产生場的質量究竟超过星团中看得見的星的質量到什么程度，会获得一个粗略的概算. 于是对于这个特殊的星团，就得到关于$\frac{\rho_d}{\rho_s}$的估計.

由于无輻射的星平均比輻射的星小，它們和星团中的星所起的相互作用使得它們，和較大的星相比，平均傾向于較高的速度. 所以和較大的星相比，它們会更快地由星团中向外“蒸发”. 因此可以期待星团內部小天体的相对数量会比較外部的小. 所以可将$\left(\frac{\rho_d}{\rho_s}\right)_k$(上述星团中的密度关系)当作整个空間里密度比$\frac{\rho_d}{\rho_s}$的一个下界. 于是获得

$$\rho_s\left[1+\left(\frac{\rho_d}{\rho_s}\right)_k\right]$$

作为空間質量的全部平均密度的一个下界. 如果这个量大于$\frac{3h^2}{\kappa}$，就可以断定空間具有球状特性. 另一方面，我还想不出任何相当可靠的方法来确定ρ的一个上界.

9. 最后的但不是最不重要的問題：宇宙的年龄，按这里所用的意义，当然必須超过由放射矿物推断的堅实地壳的年龄. 因为由这些矿物确定年龄在各方面都是可靠的，所以如果发現这里提出的宇宙学理論和任何这类結果相抵触，它就被推翻了. 在这种情况下，我看不到合理的解答.

附录二　非对称場的相对論性理論

开始进入本題之前，我打算首先討論一般場方程組的“強度”．这个討論具有本質意义，全然不限于这里提出的特殊理論．可是为了更深刻地理解我們的問題，这样的討論几乎是必不可少的．

論場方程組的“相容性”与“强度”

給定某些場变量和关于它們的一組場方程，后者一般并不完全确定場．关于場方程的解，还留下某些自由的数据．符合場方程組的自由数据的个数愈小，方程組愈“強”．显然如果沒有任何其他选择方程的論点，则宁愿选取較“強”的方程組而舍弃弱的．我們的目的是为方程組的強度寻求一种量度．将会看到，下这种量度的定义时，甚至可使我們在場变量的个数与类别都不相同的情形下还能互相比較方程組的強度．

現在用漸趋复杂的例子来介紹这里所牽涉的概念与方法，限制于四維的場，并在举例过程中逐步引入相关的概念．

例一．标量波动方程[1]．

$$\phi_{,11} + \phi_{,22} + \phi_{,33} - \phi_{,44} = 0.$$

此处方程組只由一个場变量的一个微分方程組成．假定在一点P的邻域将ϕ展开成泰勒級数(預設ϕ的解析特性)．于是其全部系数完全描述了函数．n阶系数(就是ϕ在P点的n阶导数)的个数等于$\dfrac{4\cdot 5\cdots(n+3)}{1\cdot 2\cdots n}$$\left(\text{簡写成}\begin{pmatrix}4\\n\end{pmatrix}\right)$，并且如果微分方程沒有包含这些系数間的某些关系，就可以自由地选取所有的系数．由于方程是二阶的，将方程微分$(n-2)$次便求出这类关系式．于是

1) 以下逗号总是表示偏微商；因此，例如$\phi_{,i}=\dfrac{\partial\phi}{\partial x^i}$，$\phi_{,11}=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^1\partial x^1}$等等．

为 n 阶系数求得 $\binom{4}{n-2}$ 个条件. 所以保持自由的 n 阶系数的个数是

$$z = \binom{4}{n} - \binom{4}{n-2}. \tag{1}$$

这个数对于任何 n 都是正的. 因此如果确定了所有小于 n 的各阶自由系数,则不必改变已选定的系数,总能满足 n 阶系数的条件.

类似推理可应用于几个方程组成的方程組. 如果自由的 n 阶系数的个数不小于零, 便称方程組为**絕对相容**的. 今后将限于这样的方程組. 我所知道的所有物理学里用到的方程組都属于这一类.

現在重新写方程(1). 我們有

$$\binom{4}{n-2} = \binom{4}{n}\frac{(n-1)n}{(n+2)(n+3)} = \binom{4}{n}\left(1 - \frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n^2} + \cdots\right),$$

其中 $z_1 = +6$.

如果把 n 限于很大的值,就可以不計括弧里的 $\frac{z_2}{n^2}$ 等項, 于是对于(1)便**漸近**地有

$$z = \binom{4}{n}\frac{z_1}{n} = \binom{4}{n}\frac{6}{n}. \tag{1a}$$

我們称 z_1 为"自由系数", 在我們的情況下的值是 6. 这个系数愈大,相应的方程組便愈弱.

例二. 空虛空間的麦克斯韦方程.

$$\phi^{is}_{,s} = 0; \phi_{ik,l} + \phi_{kl,i} + \phi_{li,k} = 0.$$

借助于

$$\eta^{ik} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix},$$

提升反对称张量 ϕ_{ik} 的协变指标,便得 ϕ^{ik}.

这里有 4 + 4 个关于六个場变量的場方程. 这八个方程中間存在两个恆等式. 如果分别以 G^i 与 H_{ikl} 表示場方程的左边,恆等

式便有形式

$$G^i_{;i}\equiv 0;\ H_{ikl,m}-H_{klm,i}+H_{lmi,k}-H_{mik,l}=0.$$

关于这个情况，作如下推理.

六个場分量的泰勒展开式供給

$$6\binom{4}{n}$$

个 n 阶的系数. 将八个一阶場方程微分 $(n-1)$ 次，便得到这些 n 阶系所必須滿足的条件. 所以这些条件的个数是

$$8\binom{4}{n-1}.$$

可是这些条件并不彼此独立，因为在八个方程中間存在两个二阶恆等式. 将它們微分 $(n-2)$ 次，便在从場方程得到的条件中間产生了

$$2\binom{4}{n-2}$$

个代数恆等式. 于是 n 阶自由系数的个数是

$$z=6\binom{4}{n}-\left[8\binom{4}{n-1}-2\binom{4}{n-2}\right].$$

z 对于所有的 n 都是正的. 因此方程組是“絕对相容的”. 如果在右边提取因子 $\binom{4}{n}$ 并象上面一样对于很大的 n 展开，就漸近地有

$$z=\binom{4}{n}\left[6-8\frac{n}{n+3}+2\frac{(n-1)n}{(n+2)(n+3)}\right]\sim$$

$$\sim\binom{4}{n}\left[6-8\left(1-\frac{3}{n}\right)+2\left(1-\frac{6}{n}\right)\right]\sim$$

$$\sim\binom{4}{n}\left[0+\frac{12}{n}\right].$$

于是，在这里 $z_1=12$. 这表示这个方程組确定場不及标量波动方程的情况里 $(z_1=6)$ 那样強，并且还表示相差到什么程度. 括弧里的常数項在这两种情况下都等于零，这表明一个事实，即所涉及的方程組不会让四个变量的任何函数自由.

例三. 空虛空間的引力方程.

将它們写成如下的形式：

$$R_{ik}=0;\ g_{ik,l}-g_{sk}\Gamma^s_{il}-g_{is}\Gamma^s_{lk}=0.$$

R_{ik} 只含 Γ，并且对于它們是一阶的．我們在这里将 g 与 Γ 当作独立的場变量．第二个方程表明将 Γ 当作一阶微商的量是适宜的，这意味着将泰勒展开式

$$\Gamma=\underset{0}{\Gamma}+\underset{1}{\Gamma}_s x^s+\underset{2}{\Gamma}_{st}x^s x^t+\cdots$$

里面的 $\underset{0}{\Gamma}$ 当作是一阶的，$\underset{1}{\Gamma}_s$ 是二阶的，等等．于是必須将 R_{ik} 当作是二阶的．这些方程之間存在四个边齐恆等式；作为所取約定的推断，应将它們当作是三阶的．

在一般地协变的方程組里出現了新的情况：仅由坐标变换而互相形成的場应当只認为是同一个場的不同表示．这个情况对于自由系数的正确計数是很重要的．因此 g_{ik} 的

$$10\binom{4}{n}$$

个 n 阶系数里只有一部分是用来表示根本不同的場的特性的．所以实际确定場的展开系数应减少相当的个数，現在必須計算出来．

在 g_{ik} 的变换律

$$g^*_{ik}=\frac{\partial x^a}{\partial x^{i*}}\frac{\partial x^b}{\partial x^{k*}}g_{ab}$$

里，g_{ab} 与 g^*_{ik} 事实上代表同一个場．如果将这个方程对于 x^* 微分 n 次，就会注意到四个函数 x 对于 x^* 的所有 $(n+1)$ 阶导数都出現在 g^* 的展开式的 n 阶系数里；就是說，有 $4\binom{4}{n+1}$ 个数对于表示場的特性是沒有份的．因此在任何广义相对論的理論里，为了考虑到理論的普遍协变性，必須从 n 阶系数的总数里减去 $4\binom{4}{n+1}$．于是关于 n 阶自由系数的計数就有下述結果．

由十个 g_{ik}（零阶微商的量）与四十个 Γ^l_{ik}（一阶微商的量）并鑑于刚才得到的修正，便产生

$$10\binom{4}{n}+40\binom{4}{n-1}-4\binom{4}{n+1}$$

个有关的 n 阶系数. 場方程(10 个二阶的与 40 个一阶的)供給它們

$$N = 10\binom{4}{n-2} + 40\binom{4}{n-1}$$

个条件. 可是必須从这个数里減去这 N 个条件中恆等式的个数

$$4\binom{4}{n-3},$$

这些恆等式是由边齐恆等式(三阶的)得来的. 因此在这里求得

$$z = \left[10\binom{4}{n} + 40\binom{4}{n-1} - 4\binom{4}{n+1}\right] - \\ - \left[10\binom{4}{n-2} + 40\binom{4}{n-1}\right] + 4\binom{4}{n-3}.$$

再提出因子 $\binom{4}{n}$,便对于很大的 n 漸近地有

$$z = \binom{4}{n}\left[0 + \frac{12}{n}\right]. \text{ 于是 } z_1 = 12.$$

在这里 z 对于所有的 n 也都是正的, 所以就上面所下定义的意义而論, 方程組是絕对相容的. 空虛空間的引力方程在确定場的強度上恰巧和电磁場情况下的麦克斯韦方程一样,这是令人惊异的.

相对論性的場論

一 般 評 述

广义相对論使物理学沒有需要引入"慣性系"(或諸多慣性系),这就是它的主要成就. 这个观念[1] 之所以不能令人滿意是由于下面的緣故: 它从所有可想到的坐标系中間挑选出某一些来而缺乏任何較深厚的基础. 于是假定物理定律 (例如慣性定律与光速恆定定律) 只对于这类慣性系是有效的. 因此由于在物理学体系里所指派給这种空間的任务, 使它显得和物理描述的所有其他要素不同. 它在所有的过程中居于有决定性的地位, 它却不受这些过程的影响. 虽然这样一种理論在邏輯上是可能的, 另一方面却頗

1) 指引入慣性系.——中文譯本編者註.

不能令人满意. 牛頓曾經充分覚察到这个缺点，可是他也清楚地了解当时在物理学上沒有其他的途径. 后来物理学家中尤其是恩斯特·馬赫，集中注意到这个問題.

在牛頓后的物理学基础的发展中有哪些革新使得越过慣性系观念成为可能的呢？首先是法拉第与麦克斯韦的电磁理論，幷跟着这个理論之后，引入場的概念，或者說得更确切些，是引入場作为独立而不可再簡化的基本概念. 就目前可能判断的而論，只能将广义相对論看成一种場論. 如果堅持一种看法，認为实在世界是由在相互作用力影响下作运动的質点組成的，則广义相对論就难于成长. 假使有人試图根据等效原理向牛頓解說慣性質量与引力質量的相等，他势必不得不以如下的反对意見作答：相对于加速坐标系，物体誠然都經受相同的加速度，就像它們在接近有引力的天体的表面时都經受相同的相对于該天体的加速度一样. 但是在前一情况下，产生加速度的質量在哪里呢？相对論显然預設了場的概念的独立性.

使广义相对論得以建立起来的数学知識全賴高斯与里曼的几何研究. 高斯在他的曲面理論里研究了包藏在三維欧几里得空間里的曲面的度規性質，他曾經証明这些性質能用某些概念来描述，这类概念只涉及曲面本身而不涉及它和包藏它的空間的关系. 因为一般地說，在曲面上幷不存在优越的坐标系，所以这种研究初次导致用通用坐标表示有关的量. 里曼将这种二維曲面理論推广到任意維数的空間（具有里曼度規的空間，度規的特性以二阶对称张量場表示）. 他在这令人欽佩的研究中求得了高維度規空間里曲率的普遍表示式.

刚才所述創立广义相对論所須的基本数学理論的发展曾有这样的結果，就是起初将里曼度規当作广义相对論，因而也当作避免慣性系，所根据的基础概念. 可是后来利威·契韦塔正确地指出：使避免慣性系成为可能的理論要点不如說是无限小位移場 Γ^l_{ik}. 度規或确定它的对称张量場 g_{ik}，就确定位移場而言，只是間接和慣性系的避免有关. 下面的討論将会弄清这一点.

从一个慣性系到另一个的过渡是以(特种的)綫性变换来确定的. 如果在任意隔开的两点 P_1 与 P_2 分别有两个矢量 $\underset{1}{A^i}$ 与 $\underset{2}{A^i}$，其对应分量彼此相等($\underset{1}{A^i}=\underset{2}{A^i}$)，則在可允許的变换下这个关系是保持了的. 倘使在变换公式

$$A^{i*}=\frac{\partial x^{i*}}{\partial x^a}A^a$$

里，系数 $\frac{\partial x^{i*}}{\partial x^a}$ 和 x^a 无关，矢量分量的变换公式便和位置无关. 如果限于慣性系，則在不同点 P_1 与 P_2 的两个矢量分量的相等是不变关系. 可是如果抛弃慣性系的概念，因而容許任意連續的坐标变换，以致 $\frac{\partial x^{i*}}{\partial x^a}$ 倚賴于 x^a，則属于空間不同两点的两个矢量分量的相等便失却其不变意义，于是就不再能直接比較在不同点的矢量. 由于这个事实，在一种广义相对論的理論里便不能再用簡单的微分法从既定的张量形成新张量，并且在这样一种理論里，不变量的形成总起来就少得多了. 这种缺乏是由引用无限小位移場来补償的. 正因为它使得在无限接近点的矢量有比較的可能，便計它代替慣性系. 下面将从这个概念出发介紹相对論性的場論，注意除去任何对于我們的意图而言是不必要的东西.

无限小位移場 Γ

設 P 点(坐标 x^t)的反变矢 A^i 和在无限接近点 (x^t+dx^t) 的矢量 $A^i+\delta A^i$ 是由双綫性表示式

$$\delta A^i=-\Gamma^i_{st}A^s dx^t, \qquad (2)$$

关联起来的，其中 Γ 是 x 的函数. 另一方面，如果 A 是矢量場，則 (A^i) 在点 (x^t+dx^t) 的分量等于 A^i+dA^i，其中[1]

$$dA^i=A^i_{,t}dx^t.$$

1) 和以前一样，“$,t$”表示寻常微商 $\frac{\partial}{\partial x^t}$.

于是在邻近点(x^t+dx^t)，这两个矢量之差本身是矢量

$$(A^i_{,t}+A^s\Gamma^i_{st})dx^t\equiv A^i_{;t}dx^t,$$

把矢量場在无限接近两点的分量联絡起来．由于位移場体現了原先由慣性系供給的这种联絡，就让它代替慣性系．括弧里的式子是张量，簡写成$A^i_{;t}$．

$A^i_{;t}$的张量特性确定Γ的变换律．首先有

$$A^{i^*}_{k}=\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}A^i_k.$$

在两个坐标系里使用同样的指标并不意味着它指的是相应的分量，即在x与在x^*里的i独立地取由1到4的标号．通过一些練习便感到这种写法使方程明晰得多．現在将$A^{i^*}_{k}$换成$A^{i^*}_{,k^*}+A^{s^*}\Gamma^{i^*}_{sk}$，将$A^i_k$换成$A^i_{,k}+A^s\Gamma^i_{sk}$，再将$A^{i^*}$换成$\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i}A^i$，将$\frac{\partial}{\partial x^{k^*}}$换成$\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial}{\partial x^k}$．这样就得到一个方程．除了$\Gamma^*$之外，这个方程只含原系的場量与它們对于原系里$x$的导数．解方程以求$\Gamma^*$，便获得所須的变换公式

$$\Gamma^{i^*}_{kl}=\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l^*}}\Gamma^i_{kl}-\frac{\partial^2 x^{i^*}}{\partial x^s\partial x^t}\frac{\partial x^s}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^t}{\partial x^{l^*}},\tag{3}$$

其中右边第二项可以略为化簡：

$$\begin{aligned}-&\frac{\partial^2 x^{i^*}}{\partial x^s\partial x^t}\frac{\partial x^s}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^t}{\partial x^{l^*}}=\\&=-\frac{\partial}{\partial x^{l^*}}\left(\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^s}\right)\frac{\partial x^s}{\partial x^{k^*}}=-\frac{\partial}{\partial x^{l^*}}\left(\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^{k^*}}\right)+\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*}\partial x^{l^*}}=\\&=\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*}\partial x^{l^*}}.\end{aligned}\tag{3a}$$

我們称这样的量为贋张量．在綫性变换下，它变换得象张量一样；然而对于非綫性变换，就須增加一項，这一項不包含受变换的式子，却只倚賴于变换系数．

关于位移場的附識．

1．将下标易位所获得的量$\bar{\Gamma}^i_{kl}(\equiv\Gamma^i_{lk})$也按照(3)变换，因此

同样是位移場.

2. 使方程(3)对于下标 k^*, l^* 成为对称或反对称,便得到两个方程

$$\Gamma^{i^*}_{\underline{kl}}\left(=\frac{1}{2}\left(\Gamma^{i^*}_{kl}+\Gamma^{i^*}_{lk}\right)\right)=$$

$$=\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l^*}}\Gamma^i_{\underline{kl}}-\frac{\partial^2 x^{i^*}}{\partial x^s\partial x^t}\frac{\partial x^s}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^t}{\partial x^{l^*}},$$

$$\Gamma^{i^*}_{\underset{\vee}{kl}}\left(=\frac{1}{2}\left(\Gamma^{i^*}_{kl}-\Gamma^{i^*}_{lk}\right)\right)=\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l^*}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{kl}}.$$

所以 Γ^i_{kl} 的两个(对称的与反对称的)成分变换时彼此独立,即不相混合. 因此按变换律的观点,它們表現为独立的量. 第二个方程表明 $\Gamma^i_{\underset{\vee}{kl}}$ 变换得象张量. 所以从变换羣的观点看来,好象起初将这两个成分相加而合成单一的量是不自然的.

3. 另一方面,Γ 的两个下标在定义方程(2)里有着全然不同的地位,因此沒有強制的理由用对于下标对称的条件来限制 Γ. 然而倘使眞这样做,就会导致純粹引力場的理論. 可是如果不註 Γ 接受限制性的对称条件,就会获致依我看来是引力定律的自然推广.

曲 率 张 量

虽然 Γ 場本身幷沒有张量特性,它却暗示着一个张量的存在. 最容易获得这个张量的办法是按照(2)将矢量 A^i 沿无限小的二維面元素的周界移动幷計算其一周的变化. 这个变化具有矢量特性.

設 $\underset{0}{x^t}$ 是周界上一个固定点的坐标而 x^t 是上面另一点的坐标. 于是 $\xi^t=x^t-\underset{0}{x^t}$ 对于周界上所有的点都是微小的,幷且可用来当作数量級的定义基础.

于是按更明显的写法,要計算的积分 $\oint\delta A^i$ 就是

$$-\oint\underline{\Gamma^i_{st}}\,\underline{A^s}\,dx^t\quad 或\quad -\oint\underline{\Gamma^i_{st}}\,\underline{A^s}\,d\xi^t.$$

在被积函数里的量下面的横綫表示应按周界上相継的各点(而不

是按起始点 $\xi^t=0$)取它們的值.

首先按最低的近似程度計算 $\underline{A^i}$ 在周界上任意点 ξ^t 的值. 現在就經历做开路綫計算的积分里将 $\underline{\Gamma^i_{st}}$ 与 $\underline{A^s}$ 代之以 Γ^i_{st} 与 A^s 在积分起始点($\xi^t=0$)的值, 便获得这种最低的近似值. 于是由积分得到

$$\underline{A^i}=A^i-\Gamma^i_{st}A^s\int d\xi^t=A^i-\Gamma^i_{st}A^s\xi^t.$$

这里略去不計的是 ξ 的二阶或高阶項. 立即又以同样的近似程度获得

$$\underline{\Gamma^i_{st}}=\Gamma^i_{st}+\Gamma^i_{st,r}\xi^r.$$

将这些表示式代入上面的积分,适当选取連加指标,便首先有

$$-\oint(\Gamma^i_{st}+\Gamma^i_{st,q}\xi^q)(A^s-\Gamma^s_{pq}A^p\xi^q)d\xi^t,$$

其中除了 ξ 之外,所有的量都須按积分起始点取值. 然后求得

$$-\Gamma^i_{st}A^s\oint d\xi^t-\Gamma^i_{st,q}A^s\oint\xi^q d\xi^t+\Gamma^i_{st}\Gamma^s_{pq}A^p\oint\xi^q d\xi^t,$$

其中各个积分都是經历閉合周界計算的. (第一項等于零,因为它的积分等于零.)和$(\xi)^2$ 成比例的一項是高阶的, 所以略去. 其他两項可合并成

$$[-\Gamma^i_{pt,q}+\Gamma^i_{st}\Gamma^s_{pq}]A^p\oint\xi^q d\xi^t.$$

这就是矢量 A^i 沿周界移动后的变化 ΔA^i. 我們有

$$\oint\xi^q d\xi^t=\oint d(\xi^q\xi^t)-\oint\xi^t d\xi^q=-\oint\xi^t d\xi^q.$$

因此这个积分按 t 与 q 是反对称的,此外它有张量特性. 用 f^{tq} 表示它. 如果 f^{tq} 是任意的张量, 則 ΔA^i 的矢量特性就意味着往上倒数第二个公式方括号里的式子的张量特性. 既然如此, 只有使括号里的式子对于 t 与 q 反对称, 才能推断它的张量特性. 这样就有曲率张量

$$R^i_{klm}\equiv\Gamma^i_{kl,m}-\Gamma^i_{km,l}-\Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{km}+\Gamma^i_{sm}\Gamma^s_{kl}. \qquad (4)$$

所有指标的位置就由此确定. 按 i 与 m 降秩,得到降秩曲率张量

$$R_{ik}\equiv\Gamma^s_{ik,s}-\Gamma^s_{is,k}-\Gamma^s_{il}\Gamma^t_{sk}+\Gamma^s_{ik}\Gamma^t_{st}. \qquad (4a)$$

λ 变 换

曲率有一种性质，在以后很重要. 可以对于位移場 Γ 按下列公式对 Γ^* 下新的定义：

$$\Gamma_{ik}^{l*} = \Gamma_{ik}^{l} + \delta_i^l \lambda_{,k}, \tag{5}$$

其中 λ 是坐标的任意函数，而 δ_i^l 是克罗内克尔张量("λ 变换"). 如果形成 $R^i_{klm}(\Gamma^*)$ 而将 Γ^* 换成(5)的右边，λ 消去了，所以有

与

$$\left.\begin{aligned} R^i_{klm}(\Gamma^*) &= R^i_{klm}(\Gamma) \\ R_{ik}(\Gamma^*) &= R_{ik}(\Gamma) \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

曲率在 λ 变换下是不变的("λ 不变性"). 因此只在曲率张量里含有 Γ 的理論不能完全确定 Γ 場，而只确定到保持任意的函数 λ. 在这样的理論里，应訊为 Γ 与 Γ^* 都在表示同一个場，就象 Γ^* 只是用坐标变换从 Γ 得来的一样.

值得注意的是和坐标变换相反，λ 变换从对于 i 与 k 对称的 Γ 产生出不对称的 Γ^*. Γ 的对称条件在这样的理論里失去了客观意义.

以后将看到，λ 不变性的主要意义在于它对于場方程組的"強度"有影响.

"易位不变性"的要求

非对称場的引入遭遇如下的困难. 如果 Γ_{ik}^l 是位移場，則 $\tilde{\Gamma}_{ik}^l(=\Gamma_{ki}^l)$ 也是. 如果 g_{ik} 是张量，則 $\tilde{g}_{ik}(=g_{ki})$ 也是. 結果使大量协变的形成不能单独按相对性原理从中进行选择. 現在举例說明这个困难并指出它如何能按自然的方式加以克服.

在对称場的理論里，张量

$$(W_{ikl}\equiv)g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma_{il}^s - g_{is}\Gamma_{lk}^s$$

占着重要地位. 如果設它等于零，就得到一个方程，这个方程容許用 g 表示 Γ，即能消去 Γ. 从下列事实出发：(1) 如早先所証，$A_{;t}^i \equiv A_{,t}^i + A^s\Gamma_{st}^i$ 是张量，(2)任意反变张量都能以形式 $\sum\limits_{t} \underset{(t)}{A^i}\underset{(t)}{B^k}$ 表示；不难証明上面的表示式也有张量特性，如果 g 与 Γ 的場不再是

对称的.

然而在后面的情况下,如果,譬如,将末項里的 Γ^s_{ik} 易位,即换成 $\tilde{\Gamma}^s_{ik}$,则张量特性并未失去(这是由于 $g_{is}(\Gamma^s_{kl}-\Gamma^s_{lk})$是张量). 还有别的形成,纵然不完全如此簡单,却保持张量特性并可当作把上面式子推广到非对称場的情况去. 因而如果需要将 g 与 Γ 間的关系引伸到非对称場,这个关系式是由令上面式子等于零而获得的,则这样似乎包含一种随意的选择.

但是上面的形成具有一种性质,使它区别于其他可能的形成. 如果在它里面同时将 g_{ik} 与 Γ^l_{ik} 分别换成 $\tilde{g}_{ik}$ 与 $\tilde{\Gamma}^l_{ik}$,然后互换指标 i 与 k,则变成了它自己:它对于指标 i 与 k 是"易位对称"的. 令这个式子等于零而获得的方程是"易位不变"的. 設 g 与 Γ 是对称的,则这个条件当然也是满足的;它是場量对称条件的推广.

假設非对称場的場方程是易位不变的. 我想这个假設,就物理学来說,相当于要求阳电与阴电对称地参加在物理学定律里.

看一下(4a)便知道张量 R_{ik} 不是完全易位对称的,因为它易位后变成

$$(R^*_{ik}=)\Gamma^s_{ik,s}-\Gamma^s_{sk,i}-\Gamma^s_{it}\Gamma^t_{sk}+\Gamma^s_{ik}\Gamma^t_{ts}. \tag{4b}$$

这个情况是試图建立易位不变的場方程时遭受困难的根源.

贋张量 U^l_{ik}

发生的事情是引用略为不同的贋张量 U^l_{ik} 代替 Γ^l_{ik} 能够由R_{ik} 形成易位对称张量. 可以将(4a)里綫性地含有 Γ 的两項在形式上合并成单独一項. 将 $\Gamma^s_{ik,s}-\Gamma^s_{is,k}$ 换成$(\Gamma^s_{ik}-\Gamma^t_{it}\delta^s_k)_{,s}$ 并以方程

$$U^l_{ik}\equiv\Gamma^l_{ik}-\Gamma^t_{it}\delta^l_k \tag{7}$$

定义新的贋张量 U^l_{ik}. 因为由(7)按 k 与 l 降秩,有

$$U^t_{it}=-3\Gamma^t_{it},$$

所以得到下列以 U 表示 Γ 的式子:

$$\Gamma^l_{ik}=U^l_{ik}-\frac{1}{3}U^t_{it}\delta^l_k. \tag{7a}$$

将它們代入(4a),求得以 U 表示的降秩曲率张量

$$S_{ik} \equiv U^s_{ik,s} - U^s_{it}U^t_{sk} + \frac{1}{3}U^s_{is}U^t_{tk}. \tag{8}$$

然而这个表示式是易位对称的．正是这个事实使得赝张量U对于非对称場論非常有用．

U的λ变换　如果在(5)里将Γ换成U,则通过簡单的計算便得到

$$U^{l*}_{ik} = U^l_{ik} + (\delta^l_i\lambda_{,k} - \delta^l_k\lambda_{,i}). \tag{9}$$

这个方程确定了U的λ变换．(8)对于这个变换是不变的($S_{ik}(U^*) = S_{ik}(U)$)．

U的变换律　如果借助于(7a)，在(3)与(3a)里将Γ换成U，便得到

$$U^{l*}_{ik} = \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i^*}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}U^l_{ik} + \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{k^*}} - $$
$$- \delta^{l^*}_{k^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}}. \tag{10}$$

注意即使用相同的字母，有关两系的指标仍然彼此独立地取所有从1到4的标号．关于这个公式,值得注意的是：由于末項,它对于指标i与k不是易位对称的．証明这个变换可当作易位对称的坐标变换与λ变换的組合，便能弄清楚这个特殊情形．为了看出这一点,先将末項写成下列形式：

$$-\frac{1}{2}\left[\delta^{l^*}_{k^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}} + \delta^{l^*}_{i^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*}\partial x^{t^*}}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\delta^{l^*}_{i^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*}\partial x^{t^*}} - \delta^{l^*}_{k^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}}\right].$$

两項中的第一項是易位对称的．让它和(10)的右边前两項合并成表示式$K^{l^*}_{ik}$．現在考虑在变换

$$U^{l^*}_{ik} = K^{l^*}_{ik}$$

后面又随之以λ变换

$$U^{l^{**}}_{ik} = U^{l^*}_{ik} + \delta^{l^*}_{i^*}\lambda_{,k^*} - \delta^{l^*}_{k^*}\lambda_{,i^*}$$

所获得的結果．这个組合产生

$$U^{l^{**}}_{ik} = K^{l^*}_{ik} + (\delta^{l^*}_{i^*}\lambda_{,k^*} - \delta^{l^*}_{k^*}\lambda_{,i^*}).$$

这意味着：倘若能将(10a)的第二项化为形式 $\delta_{i^*}^{l^*}\lambda_{,k^*}-\delta_{k^*}^{l^*}\lambda_{,i^*}$，则可将(10)当作这样的組合．为此只須証明存在 λ 能使

$$\frac{1}{2}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*}\partial x^{t^*}}=\lambda_{,k^*} \tag{11}$$

$$\left(与\ \frac{1}{2}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}}=\lambda_{,i^*}\right).$$

为了变换至今还是假定的方程的左边，必須先以反变换的系数 $\frac{\partial x^a}{\partial x^{b^*}}$ 表示 $\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}$．一方面

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^{t^*}}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}=\delta_s^p. \tag{a}$$

另一方面

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^{t^*}}V_{t^*}^s=\frac{\partial x^p}{\partial x^{t^*}}\frac{\partial D}{\partial\left(\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right)}=D\delta_s^p.$$

这里 $V_{t^*}^s$ 表示 $\frac{\partial s}{\partial x^{t^*}}$ 的余因子，并可表示成行列式 $D=\left|\frac{\partial x^a}{\partial x^{b^*}}\right|$ 对于 $\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}$ 的导数．所以又有

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^{t^*}}\cdot\frac{\partial \ln D}{\partial\left(\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right)}=\delta_s^p. \tag{b}$$

从(a)与(b)得到

$$\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}=\frac{\partial \ln D}{\partial\left(\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right)}.$$

由于这个关系，可将(11)的左边写成

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \ln D}{\partial\left(\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right)}\left(\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right)_{,k^*}=\frac{1}{2}\frac{\partial \ln D}{\partial x^{k^*}}.$$

这意味着

$$\lambda=\frac{1}{2}\ln D$$

的确满足(11). 这就証明了能将(10)当作易位对称变换

$$U_{ik}^{l*}=\frac{\partial x^{l*}}{\partial x^{l}}\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i*}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k*}}U_{ik}^{l}+\frac{\partial x^{l*}}{\partial x^{s}}\frac{\partial^{2}x^{s}}{\partial x^{i*}\partial x^{k*}}-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\delta_{k*}^{l*}\frac{\partial x^{t*}}{\partial x^{s}}\frac{\partial^{2}x^{s}}{\partial x^{i*}\partial x^{t*}}+\delta_{i*}^{l*}\frac{\partial x^{t*}}{\partial x^{s}}\frac{\partial^{2}x^{s}}{\partial x^{k*}\partial x^{t*}}\right] \quad (10b)$$

与 λ 变换的組合. 于是可用(10b)代替(10)作为 U 的变换公式. 只改变表示形式的任何 U 場的变换都能表示成按照 (10b) 的坐标变换与 λ 变换的組合.

变分原理与場方程

由变分原理导出場方程有这样的优点: 保証所获方程組的相容性并系統地获得关系到普遍协变性的恆等式,"边齐恆等式",以及守恆定律.

应变分的积分要求以标量密度作为被积函数 $\mathfrak{H}$. 最簡单的程序是分别在 Γ 或 U 之外另添权数为 1 的张量密度 $\mathfrak{g}^{ik}$,令

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{g}^{ik}R_{ik}(=\mathfrak{g}^{ik}S_{ik}). \quad (12)$$

$\mathfrak{g}^{ik}$ 的变换律必須是

$$\mathfrak{g}^{ik*}=\frac{\partial x^{i*}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{k*}}{\partial x^{k}}\mathfrak{g}^{ik}\left|\frac{\partial x^{t}}{\partial x^{t*}}\right|, \quad (13)$$

其中不顧同样字母的使用, 又将有关不同坐标系的指标作为是彼此独立的. 果然获得

$$\int\mathfrak{H}^{*}d\tau^{*}=\int\frac{\partial x^{i*}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{k*}}{\partial x^{k}}\mathfrak{g}^{ik}\left|\frac{\partial x^{t}}{\partial x^{t*}}\right|\cdot\frac{\partial x^{s}}{\partial x^{i*}}\frac{\partial x^{t}}{\partial x^{k*}}S_{st}\left|\frac{\partial x^{r*}}{\partial x^{r}}\right|d\tau=$$

$$=\int\mathfrak{H}d\tau,$$

即积分对于变换是不变的. 此外, 积分对于 λ 变换(5)或(9)是不变的,因为分别以 Γ 或 U 表示的 R_{ik},因而还有 $\mathfrak{H}$,对于 λ 变换是不变的. 由此知道应由取 $\int\mathfrak{H}d\tau$ 的变分而导出的場方程对于坐标和对于 λ 变换也是协变的.

但是我們又假定場方程对于 $\mathfrak{g}$, Γ 两場或 $\mathfrak{g}$, U 两場应是易位

不变的．如果$\mathfrak{H}$是易位不变的，这就有保証．已知如果用U表示，R_{ik}是易位对称的；如果以Γ表示，就不是．因此只有在$\mathfrak{g}^{ik}$之外引入U（而不是引入Γ）作为場变量，$\mathfrak{H}$才是易位不变的．在那种情况下，我們从开始就确信取場变量的变分而由$\int \mathfrak{H} d\tau$导出的場方程是易位不变的．

取$\mathfrak{H}$（方程(12)与(8)）对于$\mathfrak{g}$与U的变分，求得

$$\left.\begin{aligned} \delta\mathfrak{H} &= S_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik} - \mathfrak{N}_l^{ik}\delta U_{ik}^l + (\mathfrak{g}^{ik}\delta U_{ik}^s)_{,s}, \\ \text{其中}\quad S_{ik} &= U_{ik,s}^s - U_{it}^s U_{sk}^t + \frac{1}{3}U_{is}^s U_{tk}^t, \\ \mathfrak{N}_l^{ik} &= \mathfrak{g}_{,l}^{ik} + \mathfrak{g}^{sk}\left(U_{sl}^i - \frac{1}{3}U_{st}^t \delta_l^i\right) + \\ &\quad + \mathfrak{g}^{is}\left(U_{ls}^k - \frac{1}{3}U_{ts}^t \delta_l^k\right). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

場　方　程

我們的变分原理是

$$\delta\left(\int \mathfrak{H} d\tau\right) = 0. \tag{15}$$

应独立地取$\mathfrak{g}^{ik}$与U_{ik}^l的变分，它們的变分在积分区域的边界上等于零．这个变分首先給出

$$\int \delta\mathfrak{H} d\tau = 0.$$

如果在此将(14)里所給定的式子代入，则$\delta\mathfrak{H}$的表示式的末項无任何貢献，因为δU_{ik}^l在边界上等于零．因此获得場方程

$$S_{ik} = 0, \tag{16a}$$

$$\mathfrak{N}_l^{ik} = 0. \tag{16b}$$

它們对于坐标变换和对于λ变换是不变的，并且也是易位不变的，这是从变分原理的选择就已經明白了的．

恒　等　式

这些場方程并不彼此独立．在它們中間存在$4+1$个恒等式．

就是説，在它們的左边之間存在 4+1 个方程，这些方程总是有效，不論 g — U 場是否满足場方程.

用一种大家熟悉的方法，根据 $\int \mathfrak{H} d\tau$ 对于坐标变换和对于 λ 变换不变的事实，可以导出这些恆等式.

因为如果将由无限小坐标变换或无限小 λ 变换所分别产生的变分 $\delta \mathrm{g}$ 与 δU 代入 $\delta \mathfrak{H}$，則由 $\int \mathfrak{H} d\tau$ 的不变性就知道它的变分恆等于零.

无限小坐标变换用

$$x^{i*} = x^i + \xi^i \tag{17}$$

描述，其中 ξ^i 是任意的无限小矢量. 現在必須用方程(13)与(10b)以 ξ^i 表示 $\delta \mathrm{g}^{ik}$ 与 δU^l_{ik}. 由于(17)，必須

$$\text{将} \frac{\partial x^{a*}}{\partial x^b} \text{换成} \delta^a_b + \xi^a_{,b}, \text{将} \frac{\partial x^a}{\partial x^{b*}} \text{换成} \delta^a_b - \xi^a_{,b},$$

并略去按 ξ 是高于一阶的所有各項. 于是获得

$$\begin{aligned}\delta \mathrm{g}^{ik}(=\mathrm{g}^{ik*} - \mathrm{g}^{ik}) = \mathrm{g}^{sk}\xi^i_{,s} + \mathrm{g}^{is}\xi^k_{,s} - \mathrm{g}^{ik}\xi^s_{,s} + \\ + [-\mathrm{g}^{ik}_{,s}\xi^s],\end{aligned} \tag{13a}$$

$$\begin{aligned}\delta U^l_{ik}(=U^{l*}_{ik} - U^l_{ik}) = U^s_{ik}\xi^l_{,s} - U^l_{sk}\xi^s_{,i} - U^l_{is}\xi^s_{,k} + \\ + \xi^l_{,ik} + [-U^l_{ik,s}\xi^s].\end{aligned} \tag{10c}$$

在此須注意如下情形. 变换公式給出場变量对于連續区域里同一点的新值. 上面指出的計算首先給出 $\delta \mathrm{g}^{ik}$ 与 δU^l_{ik} 的表示式，不带方括号里的項. 另一方面，$\delta \mathrm{g}^{ik}$ 与 δU^l_{ik} 在变分法里表示对于固定坐标值的变分. 要得到这些，就須加上方括号里的項.

如果将这些“变换变分” $\delta \mathrm{g}$ 与 δU 代入(14)，积分 $\int \mathfrak{H} d\tau$ 的变分就恆等于零. 如果再选择 ξ^i 使它們联同他們的一阶导数在积分区域的边界上化为零，則(14)里的末項便无貢献. 因此如果将 $\delta \mathrm{g}^{ik}$ 与 δU^l_{ik} 换成表示式(13a)与(10c)，則积分

$$\int (S_{ik}\delta \mathrm{g}^{ik} - \mathfrak{N}^{ik}_l \delta U^l_{ik}) d\tau$$

恆等于零. 因为这个积分綫性地且齐次性地倚賴于 ξ^i 与它們的导

数，用迭次换部积分法可将它化成形式

$$\int \mathfrak{M}_i \xi^i d\tau,$$

其中 $\mathfrak{M}_i$ 是（按 S_{ik} 为一阶而按 $\mathfrak{N}_l^{ik}$ 为二阶的）已知式. 由此得恆等式

$$\mathfrak{M}_i \equiv 0. \tag{18}$$

这些是有关場方程左边 S_{ik} 与 $\mathfrak{N}_l^{ik}$ 的四个恆等式，它們相当于边齐恆等式. 按照以前引用的命名法，这些恆等式是三阶的.

存在第五个恆等式，相当于积分 $\int \mathfrak{H} d\tau$ 对于无限小 λ 变换的不变性. 在此須将

$$\delta \mathfrak{g}^{ik} = 0, \quad \delta U_{ik}^l = \delta_i^l \lambda_{,k} - \delta_k^l \lambda_{,i}$$

代入(14)，其中 λ 是无限小的并且在积分区域的边界上等于零. 首先有

$$\int \mathfrak{N}_l^{ik} (\delta_i^l \lambda_{,k} - \delta_k^l \lambda_{,i}) d\tau = 0,$$

或在换部积分之后，获得

$$2 \int \mathfrak{N}_{s,i}^{\underset{\vee}{is}} \lambda d\tau = 0$$

（其中普遍有 $\mathfrak{N}_l^{\underset{\vee}{ik}} = \frac{1}{2}(\mathfrak{N}_l^{ik} - \mathfrak{N}_l^{ki})$）.

这便給出所須的恆等式

$$\mathfrak{N}_{s,i}^{\underset{\vee}{is}} \equiv 0. \tag{19}$$

按我們的命名法，这是二阶的恆等式. 对于 $\mathfrak{N}_s^{\underset{\vee}{is}}$，由(14)直接計算，获得

$$\mathfrak{N}_s^{\underset{\vee}{is}} \equiv \mathfrak{g}_{,s}^{\underset{\vee}{is}}. \tag{19a}$$

于是如果場方程(16b)能滿足，就有

$$\mathfrak{g}_{,s}^{\underset{\vee}{is}} = 0. \tag{16c}$$

对物理解释的附識 和麦克斯韦的电磁場論比較，便提示一种解释，認为(16c)表示磁流密度等于零. 如果承認这一点，便也知道应当用什么式子表示电流密度. 可以給张量密度 $\mathfrak{g}^{ik}$ 指定张量 g^{ik}，令

$$\mathfrak{g}^{ik} = g^{ik} \sqrt{-|g_{st}|}, \tag{20}$$

其中协变张量 g_{ik} 用方程

$$g_{is}g^{ks} = \delta_i^k \tag{21}$$

和反变张量相关連．由这两个方程得到

$$g^{ik} = \mathfrak{g}^{ik}(-|\mathfrak{g}^{st}|)^{-\frac{1}{2}},$$

然后由方程(21)得到g_{ik}．于是可假定

$$(a_{ikl}) = g_{\underset{\vee}{ik},l} + g_{\underset{\vee}{kl},i} + g_{\underset{\vee}{li},k} \tag{22}$$

或

$$\mathfrak{a}^m = \frac{1}{6}\eta^{iklm}a_{ikl} \tag{22a}$$

表示电流密度，其中 η^{iklm} 是利威·契韦塔的张量密度（具有分量 ±1)，它按所有的指标都是反对称的．这个量的散度恒等于零．

方程組(16a)，(16b)的强度

在这里应用上述計数方法时，必須考虑到以形式(9)的 λ 变换从既定的 U 获得的所有的 U^* 其实代表同一 U 場．这就有这样的推論：U_{ik}^l 展开式的 n 阶系数包含着 $\binom{4}{n}$ 个 λ 的 n 阶导数，其选择对于区别实际不同的 U 場是无关重要的．因此和 U 場計数有关的展开系数的个数就减少 $\binom{4}{n}$．对于自由的 n 阶系数的个数，用計数方法获得

$$\begin{aligned} z = &\left[16\binom{4}{n} + 64\binom{4}{n-1} - 4\binom{4}{n+1} - \binom{4}{n}\right] - \\ &- \left[16\binom{4}{n-2} + 64\binom{4}{n-1}\right] + \\ &+ \left[4\binom{4}{n-3} + \binom{4}{n-2}\right]. \end{aligned} \tag{23}$$

第一个方括号代表描述 $\mathfrak{g}-U$ 場特性的有关 n 阶系数的总数，第二个代表由于存在場方程而須减少的个数，第三个方括号给出因为恒等式(18)与(19)而对于这个减少所作的修正．計算对于很大的 n 的漸近值，求得

$$z = \binom{4}{n}\frac{z_1}{n}, \tag{23a}$$

其中

$$z_1 = 42.$$

因此非对称場的場方程比較純粹引力場的要弱得多.

λ 不变性对于方程組强度的影响　有人也許想从易位不变式

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2}(\mathfrak{g}^{ik}R_{ik} - \tilde{\mathfrak{g}}^{ik}\tilde{R}_{ik})$$

出发(代替引用 U 作为場变量),导致理論的易位不变性. 所得的理論当然和上述的不同. 能証明对于这个 $\mathfrak{H}$ 就不存在 λ 不变性. 在此也获得(16a),(16b)类型的場方程,它們是(对于 $\mathfrak{g}$ 与 Γ)易位不变的. 然而在它們中間只存在四个"边齐恆等式". 如果将計数方法应用于这个方程組,則在相当于(23)的方程里缺少第一个方括号里的第四項与第三个方括号里的第二項. 我們得到

$$z_1 = 48.$$

可見方程組比較我們选择的要弱些,所以丢弃不用.

和前面場方程組的比較　这是由下面給定的:

$$\Gamma^s_{\underset{\vee}{is}} = 0, \qquad R_{\underline{ik}} = 0,$$

$$g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\Gamma^s_{lk} = 0, \qquad R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},k} = 0,$$

其中 R_{ik} 由(4a)定义成 Γ 的函数 $\Big($而其中 $R_{\underline{ik}} = \frac{1}{2}(R_{ik} + R_{ki})$,

$R_{\underset{\vee}{ik}} = \frac{1}{2}(R_{ik} - R_{ki})\Big)$.

这个方程組完全等效于新方程組(16a),(16b),因为它是用变分法从同一积分导出的. 它对于 g_{ik} 与 Γ^l_{ik} 是易位不变的. 可是有区别如下. 应取变分的积分本身并不是易位不变的,取其变分而首先获得的方程組也不是;不过它对于 λ 变换(5)是不变的. 为了在此获得易位不变性,須应用一种技巧. 形式上引用四个新的場变量 λ_i,取变分之后选择它們,使得方程 $\Gamma^s_{\underset{\vee}{is}} = 0$ 被滿足[1]. 于是将对于 Γ 取变分而获得的方程化成指定的易位不变形式. 然而 R_{ik} 方程仍旧含有輔助变量 λ_i. 可是能够消去它們,这就如上述

1) 令 $\Gamma^{l^*}_{ik} = \Gamma^l_{ik} + \delta^l_i\lambda_k$.

那样导致这些方程的分解．于是得到的方程也是(对于 $\mathfrak{g}$ 与 Γ)易位不变的．

假定方程 $\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{is}}=0$ 造成 Γ 場的归一化，它取消掉方程組的 λ 不变性．作为結果，并非 Γ 場的所有等效表示都能成为这个方程組的解．这里发生的情况，可以和純粹引力場方程附加上限制坐标选择的任意方程的程序相比較．在我們的情况下，方程組还变得不必要地复杂起来．从对于 $\mathfrak{g}$ 与 U 是易位不变的变分原理出发，始終用 $\mathfrak{g}$ 与 U 作为場变量，便可在新的表示里避免这些困难．

散度定律和动量与能量的守恒定律

如果满足了場方程并且变分又是变换变分，则在(14)里不仅 S_{ik} 与 $\mathfrak{N}^{ik}_{l}$ 等于零，而且 $\delta\mathfrak{H}$ 也是，所以場方程意味着方程

$$(\mathfrak{g}^{ik}\delta U^{s}_{ik})_{,s}=0,$$

其中 δU^{s}_{ik} 由(10c)給定．这个散度定律对于矢量 ξ^{i} 的任何选择都是有效的．最簡单的特殊选择，就是 ξ^{i} 不依賴 x，会引致四个方程

$$\mathfrak{T}^{s}_{t,s}\equiv(\mathfrak{g}^{ik}U^{s}_{ik,t})_{,s}=0.$$

这些可当作动量与能量的守恆方程来解释与应用．須注意这样的守恆方程决不是由場方程組唯一确定的．按照方程

$$\mathfrak{T}^{s}_{t}\equiv\mathfrak{g}^{ik}U^{s}_{ik,t},$$

能流密度 $(\mathfrak{T}^{1}_{4},\mathfrak{T}^{2}_{4},\mathfrak{T}^{3}_{4})$ 以及能量密度 $\mathfrak{T}^{4}_{4}$ 对于不依賴 x^{4} 的場都等于零．从此可以推断：按照这个理論，沒有奇异性的稳定場决不能描述异于零的質量．

如果采用前面的确定場方程的办法，则守恆定律的推导以及形式就变得复杂多了．

一 般 評 注

甲．我的意見認为这里介紹的理論是有可能的、邏輯上最簡单的相对論性場論．然而这并不意味着自然就不会遵从較复杂的場論．

較复杂的場論曾屡次被提出．它們可按下列特征加以分类：

（一）增加連續区域的維数．在这种情况下必須解释为何連續区域外观上限于四維．

（二）在位移場及其相关的张量場 g_{ik}（或 g^{ik}）之外另添不同种类的場(譬如矢量場)．

（三）引用高阶(微商的)場方程．

依我看,考虑这种較复杂的体系和它們的組合,只有存在着应該这样做的物理經驗的理由时才应进行．

乙．場論还沒有完全为場方程組所确定．是否容許奇异性的出現？是否須假定边界条件？关于第一个問題，我的意見是必須排除奇异性．将場方程对于它不成立的点(或綫等等)引入連續区域的理論里,依我看是不合理的．并且引入奇异性就等于在紧密包围奇异地点的“曲面”上假設边界条件（这按場方程的观点是任意的)．沒有这样的假設,理論便过于模糊．我認为第二个問題的答案是:边界条件的假設是免不了的．我举一个初等的例子說明这一点．可以将形式为 $\phi = \Sigma \frac{m}{r}$ 的势的假設和在質点外面（三維里）滿足方程 $\Delta\phi$ 的陈述相比較．但是如果不加上 ϕ 在无限远处化为零（或保持有限）的边界条件，就存在是 x 的整函数（例如 $x_1^2 - \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2)$）且在无限远处成为无限大的解．如果是“开敞”空間,則只有假定边界条件才能排除这样的場．

丙．可否想象場論让人理解“实在”的原子論的和量子的結构？几乎每人都将对这个問題作否定的答复．但是我相信目前关于它并沒有人知道任何可靠的論据．其所以如此是因为我們不能判断奇异性的排除将怎样減少解的多样性并达到什么程度．我們并无任何方法可以系統地获致沒有奇异性的解．近似法不适用，因为对于特殊的近似解，从来不知道是否存在沒有奇异性的精确解．为了这个理由，目前就无法将非綫性場論的內容和經驗相比較．只有数学方法上的重大进展才能对此有所助益．目前盛行的意見認为場論必須通过“量子化”，按照大致确定了的規則首先化为場几率的統計理論．我在这个方法里只看到試图用綫性方法来

描述具有本质上非綫性特征的关系.

丁. 人們可以提出很好的理由，說为什么完全不能以連續場表示"实在". 从量子現象看,似乎肯定知道:具有有限能量的有限系統可以完全用有限的数集(量子数)来描述. 这看来并不符合連續理論,而且必然会导致为描述"实在"而寻求純粹代数理論的企图. 但是无人知道怎样获得这种理論的基础.

索　引

三　画

卫尔　44,61,63

四　画

不变量　6 及以后
反称张量　9
反变矢量　42
反变张量　43
引力质量与惯性质量的相等　37
引力場方程　54,76
引力恆量　58
牛頓的引力恆量　58
水星的近日点　60,63
日蝕观测　60

五　画

正交条件　5
正交变换　5
对于相对論的指責　18
对于惯性原理的指責　38
对称张量　9
加速质量的感应作用　66
可压縮的粘滞流体　13
四維連續区域　20
四元矢量　25
电磁場的能张量　31
由微分法形成张量　44
卡魯查　63
弗利德曼　73

六　画

全等定理　2
优先使用的坐标系　5
同时性　10,18
迈克耳孙与莫雷　17
光时間　20
光錐　24,25
光譜綫的移动　59,71
光綫路径　60
协变　7 及以后
协变矢量　42
毕奥、薩伐尔力　27
守恆原理　33
曲綫坐标　39
宇宙的有限性　64
宇宙半径　69,76
宇宙年龄　79,84,85,86
宇宙学問題　71 及以后
宇宙恆量　72

七　画

麦克斯韦方程　14
伽利略变换　17
伽利略区域　38
时間概念　18
时空概念　20
闵可斯基　20
运动的量桿与时計　23
里曼　41
里曼张量　48,50,64
利威・契韦塔　44

八　画

空間概念　2
空間的各向同性　10,73 及以后
空間的均匀性　10,11
参照空間　2
参照空間的等效性　16
欧几里得几何学　4
张量　7 及以后,42 及以后
张量的秩　8
张量的运算　8 及以后
张量的加法与減法　9

张量的乘法 9
张量的降秩 9
张量的微分法 44,46
物质的能张量 33
泊松方程 53

九 画

相对論前物理学的假設 16
洛伦兹变换 19,21
洛伦兹电动力 27

十 画

連續性方程的协变性 13
脅強张量 14
特殊洛伦兹变换 21
速度的加法定理 24
能量与質量 28,29
流体动力学方程 33
馬赫 36,65,67,70
离心力 39
高斯 39

十一画

質量与能量 28,29
質能相当性 30
質点的运动方程 30
基本张量 43
梯尔令 66

十二画

斐索 18
等效原理 37
最直綫 50
短程綫 50

十四画

綫性正交变换 5
慣性質量与引力質量的相等 37
赫布耳的膨胀 73,77 及以后

十六画

錫托 18

十八画

轉动 38