

第一章：绪论

§ 1. 课程信息

§ 1.1. 教学安排

- 力学 A (4 学分), 2023 年秋, 二教 2106, 周二 7:50–9:25 (1,2), 二教 2106 周四 9:45–11:20 (3,4), **具体时间以教务处公布为准**
- 课时: 80 学时, 需要 18 周教学但实际只有 16 周, 将占用周四第 5 节课时间补课。
- 主讲: 李阳, 东区物质科研楼 C1202, 邮箱: leeyoung1987@ustc.edu.cn
- 助教: 习题课、答疑、作业等
 - 张闻宇, 邮箱: zwy_2020@mail.ustc.edu.cn
 - 樊友龙, 邮箱: ylfan01@mail.ustc.edu.cn
 - 课程 QQ 群:
- 教材: 《交叉科学基础物理教程·力学》, 第二版, 刘斌, 中国科学技术大学出版社
- 参考书:
 1. 《力学·理论力学》上册, 杨维弘, 科学出版社, 2007 年
 2. 《力学概论》, 安徽科学技术出版社, 1986 年
 3. 《力学》, 郑永令, 贾起民, 复旦大学出版社, 1992 年; 高等教育出版社, 2002 年
 4. 《新概念物理教程·力学》, 赵凯华、罗蔚茵, 高等教育出版社, 1995 年
 5. 《力学讲义》, 赵亚溥, 科学出版社, 2018 年
 6. 《费曼物理学讲义》第 1 卷, 理查德·费曼, 郑永令 (译), 上海科学技术出版社, 2020 年
 - 免费的英文在线版本: <https://www.feynmanlectures.caltech.edu>
 - 《费曼物理学讲义习题集》, 理查德·费曼, 拉斐尔·莱顿, 上海科学技术出版社, 2020 年
- 授课方式: 板书为主、幻灯片作为辅助

§ 1.2. 考核形式

百分制：总评 = 平时表现 5% + 作业 25% + 期中考试 20%–30% + 期末考试（全部都考）40%–50%，会视期中、期末情况灵活调整

- 平时表现：出勤、课堂互动、回答问题以及其他优秀表现
- 作业：可以讨论、查资料，不允许抄袭；发布题目以后 2 周内交作业，延迟 1–2 周 95%，延迟 3–4 周 85%，延迟 4 周以上 75%，不交作业 0%
- 习题课，包括作业讲解、考前复习
- 期中期末考试形式：半开卷。期中考试各个班单独命题，期末考试 100% 题目为全校统一命题
- 每两周安排一次随堂测验，15–20 分钟，计划安排在周四第 5 节课，成绩计入平时成绩或考试成绩

§ 1.3. 课程计划

课程分为两部分。

第一部分：

- 绪论 (2 学时)
- 第 1 章时间、空间与测量 (2 学时)
- 第 2 章质点运动学 (8 学时，包括数学准备)
- 第 3 章质点动力学 (8 学时，包括虚拟力)
- 第 4 章万有引力 (4 学时)
- 第 5 章守恒定律（功，能量，动量，角动量，碰撞，变质量物体运动。12 学时）
- 复习和期中考试（最晚 11 月中旬）

第二部分：

- 第 6 章刚体力学（转动惯量，转动定律，刚体平行平面运动，陀螺的进动。8 学时）

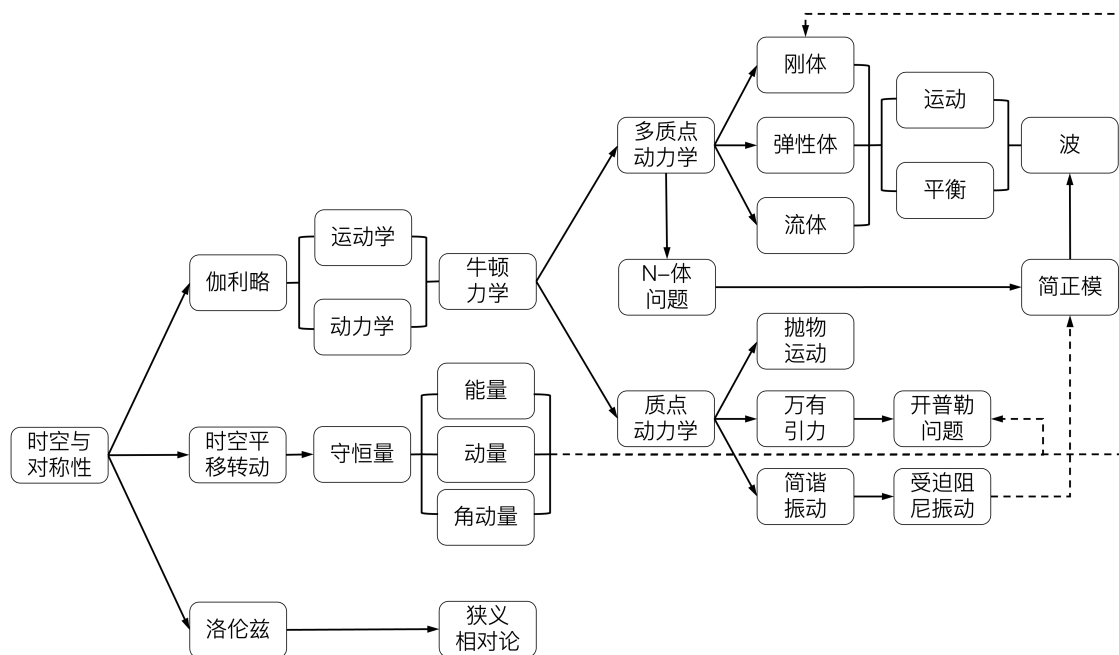


图 1. 力学课程脉络

- 第 7 章弹性力学初步（简单介绍弹性体模型及其描述方法。2 学时）
- 第 8 章流体力学（流体静力学，对流体动力学的研究方法作简单介绍，理想流体，伯努利方程，黏滞流体，雷诺数，相似法则，层流，湍流。8 学时）
- 第 9 章振动和波（简谐振动，振动合成，阻尼振动，受迫振动，简谐波，波动方程，波的传播、迭加、干涉，波的群速度，多普勒效应。12 学时）
- 第 10 章相对论（相对性原理，洛伦兹变换，相对论时空观，相对论力学。6 学时）
- 复习和期末考试（8 学时）

§ 1.4. 课程简介

力学是大学第一门普通物理课程，主要介绍与描述、研究物体机械运动有关的基本概念、基本理论和相关研究方法，包括质点运动学、牛顿动力学等，以及建立在此基础上关于振动与波、刚体、流体等的基本理论；除此之外，还简单介绍狭义相对论的基本内容。

课程以微积分为工具，在此基础上对自然界的机械运动进行描述，了解其遵循的规律性。要求学生基本掌握用所学的数学理论处理相对复杂的运动等问题。注意用新的近代观点处理老的内容。对空间、时间、惯性等基本概念，能量守恒、动量守恒、角动量守恒等基本规律进行较深入的讨论。课程将以物理学的前沿最新成果来充实教学内容。

力学是第一门大学普通物理基础课，着重于对基本概念和基本规律的阐述，为学生的后继课程及专业训练作好必要准备，打好物理基础。力学教学要使学生得到一定的科学素质教育，培养献身科学的精神，了解科学思维的重要性以及科学与哲学的关系。

力学课不是经典力学/理论力学课程。物理专业的经典力学课更侧重形式理论的发展（拉格朗日形式理论、哈密顿形式理论）以及力学概念的进一步发展（对称性、正则变换），还可能包括将力学原理推广到无穷自由度体系（场论）。这一课程是为了学习更高级的物理课做准备（量子力学、电动力学、广义相对论、统计力学、量子场论）。力学课也区别于材料力学、固体力学、断裂力学、流体力学等工程或工程物理专业课程，虽然这些方面的初步的知识会有少量涉及。囿于笔者的学识和兴趣，力学课也不涉及现代力学的前沿内容。

§ 2. 前言

1. 为什么要学力学 物理学是物质科学的基础，而“力学则是数学物理的脊柱”[索末菲，1952]。本门课所说的力学指的是经典力学，又叫做牛顿力学，它在物理学中的位置如下图所示。

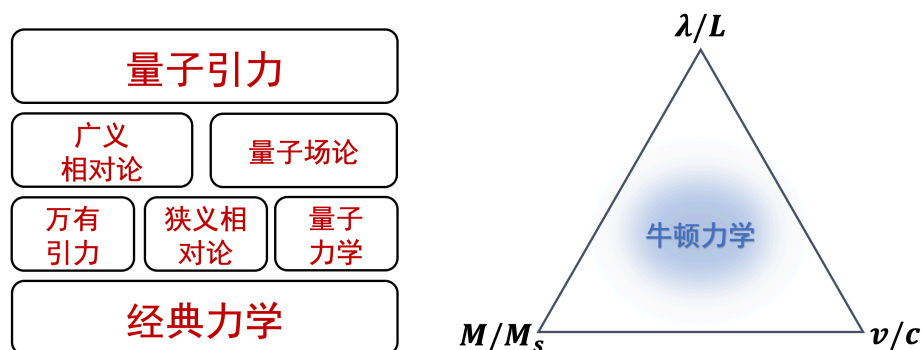


图 2. 经典力学在物理理论中的位置

从现代物理学来看，牛顿力学是物质在宏观、低速、弱引力极限下的有效理论¹。所谓低速，指的是体系特征运动速度远小于真空光速 $v \ll c$ ；所谓宏观，指的是物体特征尺寸远大于其德布洛意波波长 $L \gg \lambda = h/p$ ；所谓弱引力，指的是物体质量远小于其特征施瓦兹质量 $M \ll M_s = rc^2/G$ 。这里，我们涉及到几个物理学常数，真空光速 $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 、普朗克常数 $h \approx 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 和牛顿万有引力常数 $G \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ 。在国际单位制中，这几个常数要么非常大要么非常小，从而这几个关系在日常生活中很容易得到满足，这也表明我们在生活的物理世界可以用牛顿力学来很好的描述，即牛顿力学是一个很有效的理论。在牛顿力学的基础上，我们可以发展高阶效应，例如数值广义相对

¹ 注意，这几个极限未必存在。例如，电动力学中低速运动的物体存在两个极限：电极限与磁极限。

论中的后牛顿近似（展开）、量子理论中的函程近似（展开）、经典与量子理论中的非相对论近似（展开）。从这个角度出发，经典力学对于科学研究而言仍然具有不可取代的价值。

力学课程的作用有二：

第一，力学提供的方法、概念和物理图像仍然是现代物理的核心。

【例子】 动量、能量；微扰论、散射

【例子】 电动力学、热力学、量子力学、结构力学、材料力学、流体力学、统计力学

第二，力学是现代科学和工程学的基础，也是现代工业的基础。

【例子】 土建工程中的受力分析：深圳华北强赛格大厦摇晃；央视大楼；世界最高的20座摩天大厦中我国占10座；

【例子】 航空、航天、航海：歼-20、神舟飞船和天宫空间站、蛟龙号和奋斗者号；九院（工程院）

【例子】 力学与其他科学的关系：环化生材

力学将会是诸位大学生涯中最值得学习的一门课！它提供了绝佳的使用工具、分析问题、解决问题的训练！根据美国物理协会的统计，仅有5%的物理系本科毕业生能最终成为大学教授 [今日物理，2017]。这意味着，绝大部分学生最终将进入业界、国企和政府部门工作。在非学术界工作，专业知识不一定是学生未来工作最需要的技能。2014年，美国物理协会统计了2013-2014年从事工程与信息领域工作的物理系本科毕业生所需要的日常技能，如图3所示。其中最重要的技能就是解决问题的能力，其次是团队协作能力。

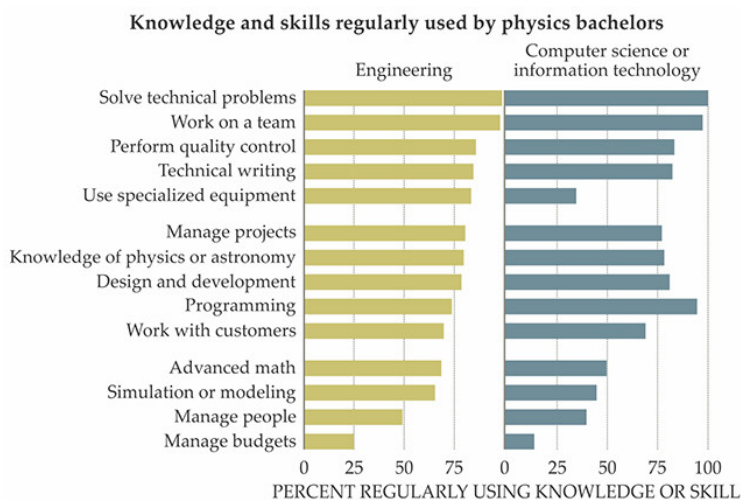


图 3. 2013-2014 年，美国物理系本科毕业生回访认为自己任职最需要的日常技能统计。

【例子】 物理系毕业的企业家等：张朝阳（搜狐）、阿北/杨勃（豆瓣）、邓暉（虹软）、杨钊（能量奇点）、Elon Musk (Tesla/SpaceX/Paypal)、Stephen Wolfram (Wolfram Research)、Richard Stallman (GNU)、Jimmy Carter（美国前总统）、Angela Merkel（德国前总理）、Brian May (Queues)

【例子】 2016年初，某头部IT公司架构师：我有很多用户数据需要分析（数学模型、算法）；

【例子】 某科研院所：空间站实验载荷运行仿真；

【例子】 量化投资：“拥有五道口排名第三的物理系”

2. 如何学习力学 中学到大学然后到研究生再到工作岗位（科研、研发、管理及其他），每一个阶段所需要的能力和学习方法都是不同的。从中学到大学，很多同学需要面临学习方法的转换。关于在大学如何学习，这里有几点建议，

- 尽快从做题模式中走出来，着重建立物理图像，掌握物理分析方法，熟悉相关物理实验
《礼记·学记》：君子之教，喻也。道而弗牵，强而弗抑，开而弗达。
- 独立思考。独立写作业，即使由于种种原因你和别人讨论或请教，也要自己独立复盘一遍保证自己能够独立做出来。
费曼：「第一个原则是你不要欺骗自己，而你自己是容易被欺骗的人」
- 建立自信。来到科大的都是精英，以后回到社会上去仍然是台柱。每个人有自己的长处。考试的首要目的是为了提供一个反思的机会。
张亚勤；费孝通先生：各美其美、美人之美，美美与共，天下大同
- 边做边学。不要指望完全掌握了所需要的数学工具再开始学习相关物理，要学会快速上手，边做边学。没听懂或没学会的可以暂时跳过，回头再来搞清楚，不要卡在一个地方。
Learning by doing; learning by breaking things.

力学以及物理学的学习离不开解题。解题的一般策略（后面授课过程中会结合题目展示）：

- 画图分析
- 写下已知的以及想要求的
- 先做形式推导
- 检查特殊情况、极限情况
- 检查数量级

- 检查单位和量纲

如何在力学乃至物理学学习中获得好成绩：

- 理解相关概念，建立物理直觉
- 抽象建模能力
- 数学能力（微积分、向量代数）——算功

§ 3. 力学批判小史

力学是一门古老的学科。马赫 (Ernst Mach) 在他的《力学及其发展的批判历史概论》中将力学知识分为力学经验和力学科学 [马赫, 1942]。力学经验可以追溯到人类文明的早期。考古学的研究发现人类在很久以前就已经在生活实践中积累了大量的力学知识, 并将其应用到劳动生产的各个方面。但是这些知识是经验性的、不成体系, 往往还是自相矛盾的。

【例子】 古代中国的力学实践

「例子」 宋朝的《营造法式》、隋朝李春建造的赵州桥, 是结构力学原理的高超运用

「例子」 贾湖骨笛 (考古系张居中老师主持发掘) 是迄今为止中国考古发现的最古老的乐器 (公元前 9000 多年), 也是世界上最早的可吹奏乐器

「例子」 曾侯乙编钟神奇的一钟两音, 按照编钟上的错金标音铭文所示, 敲击编钟的正鼓部和侧鼓部会发出不同的乐音, 而且两音之间相差三度。研究表明, 曾侯乙编钟反映了公元前 5 世纪中国居世界领先地位的科技和音乐成就。早在宋朝时期, 沈括在其《梦溪笔谈》中写到: “盖钟圆则声长, 扁则声短。声短则节, 声长则曲, 节短处声皆相乱, 不成音律”。所以作为乐器的钟都是扁的, 圆钟则无法演奏, 西方的钟几乎都为圆形, 所以并不能用来演奏

【例子】 古代中国的力学概念

「例子」 《墨子·经上》“力, 刑之所以奋也”, 提出力是物体加速运动的原因。

「例子」 《墨子·经说上》: “重之谓, 下与重, 奋也”。则指出重力是一种力, 明确区分了重力与质量。

「例子」 《尚书纬》, “地恒动不止, 而人不知, 譬如人在大舟中, 闭庸而坐, 舟行而人不绝也。”这是相对运动的概念。

「例子」 汉代刘安《淮南子》“下轻上重, 其覆必易”, 提出了稳定平衡的要点。

【例子】 其他古代工程力学实践: 长城、金字塔等

而力学作为一门现代科学, 是从伽利略 (Galileo Galilei) 开始的。古人的力学知识绝大多数在静力学方面。伽利略首次创立了动力学, 因此动力学是一门完全现代的科学。亚里士多德认为每一个物体都有自身的自然位置, 而物体如果偏离了该位置便会运动, 以求恢复到这些自然运动。例如重物会往下落, 轻的东西会往上飘。伽利略工作的现代性在于, **他不去发问为什么重物会往下落, 而是问重物如何往下落, 即重物下落符合何种规律。伽利略从某些假设出发, 来推演落体的规律, 并反过来通过逻辑推演和定量实验观测来考察这些假设是否正确。**力与运动的关系是伽利略首先正确认识到的。

【例子】 伽利略在研究落体规律时, 通过观察首先假设: 落体速度随着下落距离增加而成比例增加, 即下落速度正比于下落距离, 如图 4 所示。然而, 从距离 d 加速到 v 所

需要的时间 $T = d/v$ 与从两倍距离 $2d$ 加速到两倍速度 $2v$ 所需要的时间 $T = 2d/2v$ 是相等的。这意味着落体在第二段降落时必须是瞬时的。而这与实验观察不符合，因此落体速度与距离成正比这个假设是错误的。(注意，伽利略时代还没有瞬时速度和力的概念)

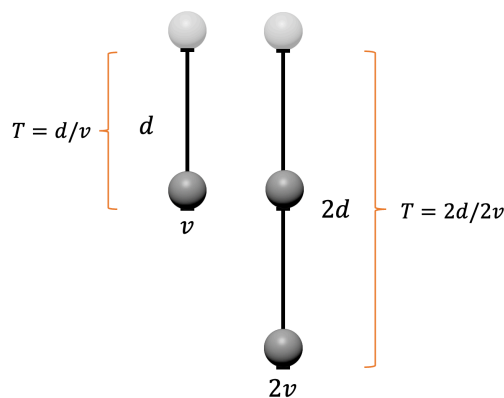


图 4. 伽利略的自由落体实验。

牛顿 (Isaac Newton) 是经典力学的奠基人。他的《原理》一书是经典力学工作的集大成者。效仿欧几里德，牛顿建立了力学的公理化体系，从牛顿定律出发，采用数学和逻辑方法推导出开普勒定律等运动学规律。为此，牛顿还发明了、发展了微积分等数学知识。直到相对论和量子力学的建立，所有力学的发展仍基于牛顿的公理。牛顿还继承了伽利略的科学研究方法。他特别指出，

自然哲学不关心某个现象的起因 (cause)，而仅仅研究和转述事实 (actual facts)

——他的目标不是提出语出惊人的新的想法，而是在实验事实的基础上了解自然。他自豪地宣称“hypotheses non fingo (I do not frame hypotheses - 我并不提出假设——作为对笛卡尔、惠更斯理论的回应。笛卡尔、惠更斯认为天体做环形运动是因为宇宙中存在某种不可见物质的涡旋，而不是天使在推动)”。牛顿继承并发扬光大的哥白尼和伽利略的另外一个重要的科学思想是物理定律的普适性——马赫称之为连续性原理。牛顿提出，天体与地球上的物体遵循相同的规律，他称之为万有引力。有人把这个叫做物理学的第一次大统一。

“迄今为止，我们已经用万有引力解释了天体和海洋的现象，但还没有指出这种力量的原因…… 我无法从现象中发现万有引力的这些特性的原因，我也没有提出任何假设 [hypotheses non fingo]; 因为任何不是从现象中推导出来的东西都被称为假设；而假设，无论是形而上学的还是物理学的，无论是神秘的还是机械的，在实验哲学中都没有地位……。…… 对我们来说，万有引力确实存在，并且按照我们已经解释过的规律运行，足以解释天体和海洋的所有运动，这就足够了。”——牛顿《原理》

力学进一步的发展大致可以分为大致两个方向。第一是力学表述的数学形式的发展。牛顿的力学是几何形式的，“即使到今天，除了少数修改和加强以外，牛顿奠定的基础仍然是力学最自然、

最直接的途径” [索末菲, 1952]。然而, 欧拉等特别是拉格朗日和哈密顿提出的分析力学和哈密顿力学形式极大简化了力学的应用, 并为相对论力学和量子力学的发展提供了理论工具。沿着这一方向, 力学发展成为了现代物理学。与此同时, 力学与现代数学相结合, 还发展成为了一个高度专业的领域, 叫做力学。

力学的第二个发展方向是应用。力学的应用异常丰富, 按照自由度, 我们大致可以把它们分为单体问题、少体问题、多体问题和连续体问题。求解的难度也随之增加。即时到今天, 多体问题和连续体问题仍然是科学研究的热门前沿, 也具有巨大的应用价值。按照应用领域, 将其分为: 结构力学, 材料力学, 固体力学, 流体力学等等。

延伸阅读:

1. Ernst Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung 8th ed.* F.A. Brockhaus, Leipzig, 1923
[Trans. *The science of mechanics.* Open Court Publishing Co. LaSalle, 1942; 中译本: 力学及其发展的批判历史概论, 李醒民译, 商务印书馆, 1982年]
2. 赵亚溥, 《力学讲义》, 科学出版社, 2018年

§ 4. 测量与估计

测量是物理学的基础，最基本的测量是长度和时间的测量（根据伽利略-牛顿-马赫精神，我们不讨论时间、空间的定义）。最初的时间测量来自日夜和季节的交替，这也是人类最基本的时间感受。最原始的时间测量工具是日晷。同样的，长度的测量最初来自于人体的尺寸。随着科学技术的发展，人类测量时间和长度的精度越来越高（图 5），这时候便需要制定一个统一的参考标准，来最大限度地减少采用不同标准所带来的误差。

Standard	Resonator	Date of origin	Timing uncertainty (24 hr)	Frequency uncertainty (24 hr)
Sundial	Apparent motion of sun	3500 B.C.	NA	NA
Verge escapement	Verge and foliet mechanism	14th century	15 min	1×10^{-2}
Pendulum	Pendulum	1656	10 sec	7×10^{-4}
Harrison chronometer (H4)	Pendulum	1759	300 msec	3×10^{-6}
Shortt pendulum	Two pendulums, slave and master	1921	10 msec	1×10^{-7}
Quartz crystal	Quartz crystal	1927	10 μ sec	1×10^{-10}
Rubidium gas cell	^{87}Rb resonance (6,834,682,608 Hz)	1958	100 nsec	1×10^{-12}
Cesium beam	^{133}Cs resonance (9,192,631,770 Hz)	1952	1 nsec	1×10^{-14}
Hydrogen maser	Hydrogen resonance (1,420,405,752 Hz)	1960	1 nsec	1×10^{-14}
Cesium fountain	^{133}Cs resonance (9,192,631,770 Hz)	1991	100 psec	1×10^{-15}

图 5. 时间测量标准的演化

1. **单位制** 根据《米制公约》(Treaty of the Metre)，基本度量的标准由国际计量大会来协调（图 6）。根据最新的国际计量大会决议（2019 年 5 月 20 日生效），时间的基本单位为“秒”，定义为铯-133 原子在基态下两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射的 9192631770 个周期的时间。长度的基本单位为“米”，精确定义为光在 $1/299792458$ 秒内在真空传播的距离。质量的基本单位为“千克”，由精确的普朗克常数 $h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ($\text{J} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$)、米和秒所定义。类似地，电流的单位“安培”、温度的单位“开尔文”也是通过基本常数与秒所精确地定义。其他单位制可以通过这些基本物理量组合得到。国际单位制还规定了基本单位倍数的词头，以方便交流使用。

2. **不确定度** 真实的测量，总是存在一定程度的不确定性。图 7 用直尺测量铅笔长度。由于直尺的最小刻度为毫米 (mm)，我们无法将铅笔的长度测量准确到毫米以下。既然测量结果具有一定的精度，测量结果的记录也必须尊重客观事实，采用有效数字来表示。所谓有效数字 (significant figures)，就是指实际能够测量到的数字，包括估读的数字。例如图 7 的铅笔的长度，我们实际能够测量到的铅笔的长度在 7.4 厘米到 7.5 厘米之间。对与直尺而言，我们一般可以至少估读到最小刻度的一半，即测量不确定度为 0.05 厘米。那么上图的测量结果可以表示为 7.45 厘米，其中最后一位数字是估读。

【例子】测量结果 a: 8.50 厘米，这里 0 是有效数字，表示测量结果在 8.45-8.55 厘米之间。

测量结果 b: 8.5 厘米，表示测量结果在 8 厘米-9 厘米之间。

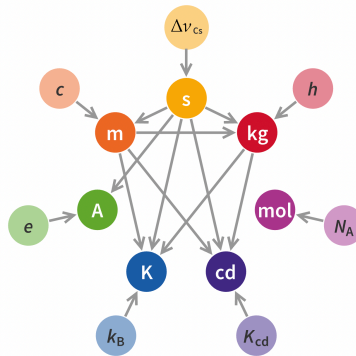


图 6. 最新的国际单位制基本物理量



图 7. 用直尺测量铅笔长度。

为了有效区分有效数字 0 与非有效数字 0，我们可以采用科学记数法。

【例子】 $3.60 \times 10^3 \text{ m}$ 小数点后两位都是有效数字，如果估读到最小刻度的 $1/10$ ，表示长度在 3590 米-3610 米之间。

【例子】 $3.6 \times 10^3 \text{ m}$ 小数点后一位是有效数字，如果估读到最小刻度的 $1/10$ ，表示长度在 3500 米-3700 米之间。

一个有效的测量，不仅仅要包括测量结果，还要包括测量的不确定度 (uncertainty)。对于物理测量来说，没有不确定度的结果是没有意义的（有时候看起来没有不确定度，实际上是采用了默认不确定度或者很容易估计不确定度）。实际研究中，不确定度分析往往要比前者花费几倍甚至成百上千倍的投入。

【例子】汽车生产，福特、本田

【例子】卡脖子问题，光刻机、飞机发动机

【例子】：希格斯粒子的发现与 750 GeV 双光子溢出事例，图 8

测量结果表示的若干例子：

$$M = 1.23 \pm 0.02 \text{ kg}$$

$$\ell = 1.23_{-0.03}^{+0.02} \text{ cm}$$

$$t = 1.23(2) \times 10^{-6} \text{ s}$$

$$\rho = 1.23 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

$$\sigma = 1.23(10)(23) \text{ b}$$

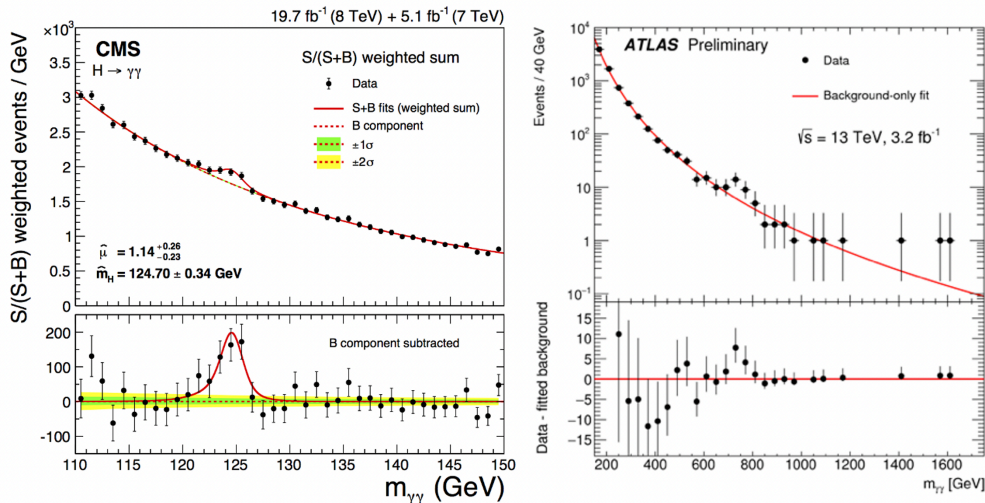


图 8. 为什么左图的测量结果代表发现了一个新粒子（希格斯），而右图的测量结果则是统计涨落呢？

3. 数量级估计 与测量相对应的是估计。这同样是研究物理的重要手段。

数量级：每差 10 倍，叫做差一个数量级。宇宙以层级的形式出现，相似的物理结构具有差不多的数量级。比如，人 \sim 米量级。比如，所有强相互作用主导的衰变发生的时间为 10^{-23} s，电磁主导的衰变 10^{-16} s，弱相互作用， $> 10^{-13}$ s。化学能源主要涉及电子能级，eV；核能 MeV = 10^6 eV。一般差三个数量级，尺度分离。这些基于数量级的估计可以帮助我们迅速锁定其中的主导物理因素。

【例子】波恩-奥本海默近似：两个质子、两个电子放在一个正方形上。初识时刻零速度释放。求充分长时间以后质子、电子末态速度。

为了进行估计，我们要对与自然界的尺度有所了解。

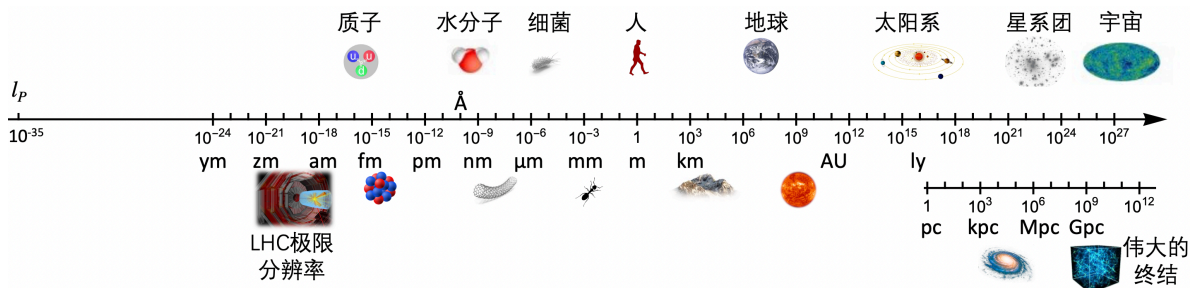


图 9. 从微观到宏观尺度

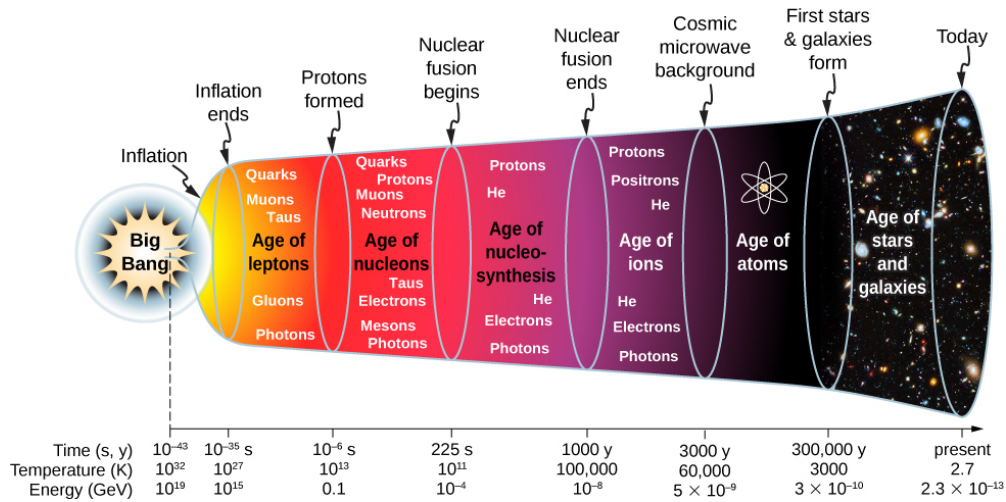


图 10. 宇宙简史

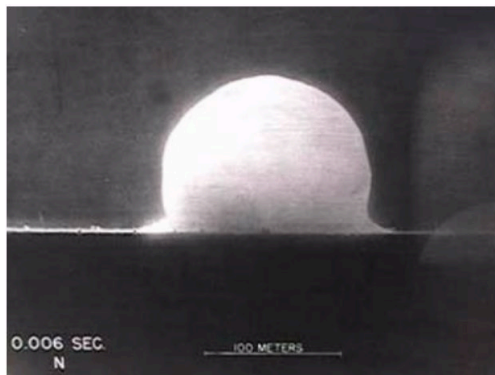


图 11. 美国生活杂志发布的“三位一体”核爆实验照片

4. 量纲分析 物理规律与单位制的选择无关。这就要求与问题相关的物理量之间满足一定的量纲关系。

【例子】单摆的周期 τ 。相关物理量，摆长 l ，单摆的质量 m ，重力加速度 g 。

$$\begin{cases} l & [L] \\ m & [M] \\ g & [L]/[T]^2 \\ \tau & [T] \end{cases}$$

假设 $[T] = \tau = Cmg/l = [M][L]^0[T]^{-2}$ 两边量纲并不平衡，也就是意味着我们采用不同单位制时（例如，kg、g）所得到的结果不同。为了避免这一点，我们必须组合出合适的量纲。可以看到，唯一正确的答案是， $[T] = \tau = C\sqrt{l/g} = [T]$ 。而单摆的正确公式是 $\tau = 2\pi\sqrt{l/g}$ 。

【例子】估计原子弹当量。1950 年，美国生活杂志发布了一张美国第一次核爆“三位一体”测试的照片（图 11）。G. I. 泰勒根据这张照片估计出该次爆炸的当量，而这当时还是美国国家机密。

假定原子弹爆炸的火球半径 R 与总能量 E 、时间 t 、空气密度 ρ 有关。通过量纲分析可以得到，

$$R = C \left(\frac{Et^2}{\rho} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (1)$$

作为估计可以取 $C = 1$ 。根据照片可以得到， $t = 0.006 \text{ s}$ ， $R = 75 \text{ m}$ 。空气密度为 $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ 。可以得到， $E = 8 \times 10^{13} \text{ J}$ 。折合为 TNT 当量（1 吨 TNT 当量 = $4.2 \times 10^9 \text{ J}$ ）为 2 万吨 TNT 当量。

【应用】检验量纲、检验数量级（sanity check - 理智分析）

【例子】托卡马克定标率。为了实现受控热核聚变，一个关键的因素在于提高等离子体的能量约束性能。然而大量带电粒子在磁场中运动的行为非常复杂。为了指导 ITER 装置的建设，人们提出了托卡马克定标率。已知与等离子体约束相关的装置指标为，等离子体电流 I ，磁场 B ，等离子

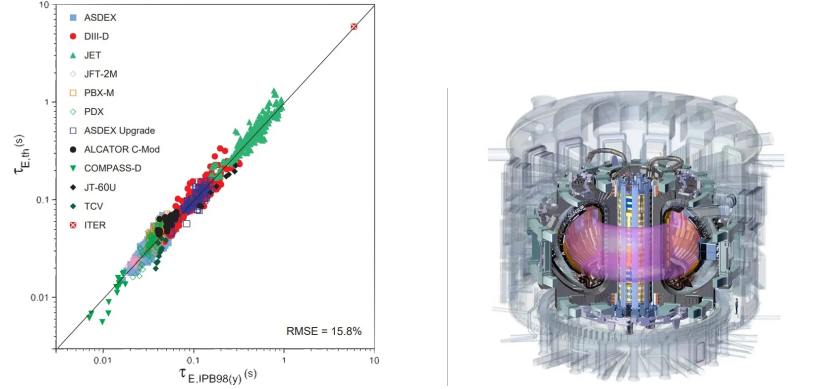


图 12. ITER 定标率与实验数据的比较

体数密度 n ，等离子体加热功率 P ，等离子体环的半径 R ，等离子体截面半径 a 。通过拟合实验数据典型的托卡马克定标率给出，

$$\frac{\tau_E}{s} = 0.0562 \left(\frac{I}{MA} \right)^{0.93} \left(\frac{B}{T} \right)^{0.15} \left(\frac{n}{10^{19}m^{-3}} \right)^{0.41} \left(\frac{P}{MW} \right)^{-0.69} \left(\frac{R}{m} \right)^{1.97} \left(\frac{a}{R} \right)^{0.58} \quad (2)$$

[索末菲, 1952] Arnold Sommerfeld, *Mechanics*, 4th Ed., Lectures on Theoretical Physics, Vol. 1, Academic Press Inc. Publishers (NY), 1952.

[今日物理, 2017] L. McNeil and P. Heron, *Physics Today* **70**, 11, 38 (2017); doi: 10.1063/PT.3.3763

[马赫, 1942] Ernst Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung* 8th ed. F.A. Brockhaus, Leipzig, 1923 [Trans. *The science of mechanics*. Open Court Publishing Co. LaSalle, 1942; 中译本: *力学及其发展的批判历史概论*, 李醒民译, 商务印书馆, 1982 年]