

第五章：刚体

§ 1. 多质点体系

前面讨论了两体体系，其中很多结论可以直接推广到多质点体系。对于多质点体系的动力学规律，每个质点应用牛顿第二定律，

$$\vec{F}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \quad (1)$$

其中， \vec{F}_i 为第 i 个质点所受到的合力。可以将其分为两类，一类是来自质点系内部的力，又叫做内力，如 \vec{F}_{ij} 为该质点受到的第 j 个质点的相互作用，它仅依赖于 i, j 之间的相对坐标 \vec{r}_{ij} 、相对速度 \vec{v}_{ij} 。另一类是质点系以外来源的力 \vec{F}_i^{ext} ，又叫做外力，

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j(\neq i)} \vec{F}_{ij} \quad (2)$$

根据牛顿第三定律， $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ 。因此， $\sum_i \sum_{j(\neq i)} \vec{F}_{ij} = 0$ 。对于孤立体系来说， $\vec{F}_i^{\text{ext}} = 0$ ，系统只受到内力的作用。注意，孤立体系是指每个质点受到的外力 \vec{F}_i^{ext} 为 0，也就是说每个质点仅受到质点系内其他质点的相互作用。不是指体系的合外力 $\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}}$ 为零。例如：外力压缩的情况。

N 体问题的动力学求解比较复杂，德国数学家布伦斯和法国数学家庞加莱证明，当 $N \geq 3$ 时，一般 N 体问题不存在解析解。当然，特殊解析解是存在的，例如欧拉三体问题、拉格朗日问题等，而且具有非常重要的应用价值。对于一般 N 体质点系的动力学问题，只能采用数值方法求解，包括渐进级数方法。

历史上，对 N 体问题的定性分析，极大促进了现代数学的发展，并产生了新的数学分支：动力系统和混沌理论

【例子】万有引力 N 体问题：太阳系稳定吗？

1. 质点系的动能定理

$$\Delta T_i = W_i = \int \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \int \vec{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_i + \sum_{j(\neq i)} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i \quad (3)$$

考虑外力为保守力时，其做功可以写成外力对应的势能差，

$$\int \vec{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_i = -\Delta U_i^{\text{ext}} \quad (4)$$

内力做功仅依赖于质点之间的相对坐标，因此类似两体的情形，可以定义质点之间的相对势能：

$$\int \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \int \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j = \int \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = -\Delta U_{ij} \quad (5)$$

此处， $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ 。质点 i, j 之间的相互作用力 $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ 仅依赖于 \vec{r}_{ij} 。因此，体系的总机械能可以写成，

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + U_i^{\text{ext}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j(i \neq j)} U_{ij} \quad (6)$$

U_i^{ext} 叫做单体相互作用势，简称单体势，它只涉及单个质点； U_{ij} 涉及到两个质点，叫做两体势。类似地还可以引入三体势、四体势等等。

2. 质心定理 定义质心为：

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (7)$$

质心速度：

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{d\vec{r}_{\text{cm}}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} \quad (8)$$

总动量

$$\vec{p} = M \vec{v}_{\text{cm}} \quad (9)$$

其中， $M = \sum_i m_i$ 是体系总质量。由动量守恒我们可以得到，

孤立体系的质心保持静止或者匀速直线运动。

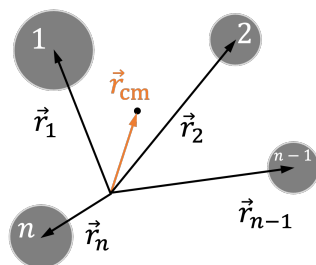


图 1.

如何求质心呢？首先考虑三个粒子的质心，

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (10)$$

可以证明，质心坐标可以写成如下形式，

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{m_{12}\vec{r}_{12} + m_3\vec{r}_3}{m_{12} + m_3} \quad (11)$$

其中， $m_{12} = m_1 + m_2$ 为第 1、2 个粒子的总质量， $\vec{r}_{12} = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)/(m_1 + m_2)$ 为第 1、2 个粒子的质心。这个办法还可以推广到质点系的任意划分。更一般的情形下，考虑个粒子组成的质点系统。我们可以将质点系分成 A, B 两个集团，原质点系的质心坐标，

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{m_A\vec{r}_A + m_B\vec{r}_B}{m_A + m_B} \quad (12)$$

其中， $m_A = \sum_{i \in A} m_i$ ， $m_B = \sum_{i \in B} m_i$ 分别是集团 A, B 的总质量， $\vec{r}_A = (\sum_{i \in A} m_i\vec{r}_i)/m_A$ ， $\vec{r}_B = (\sum_{i \in B} m_i\vec{r}_i)/m_B$ ，分别是集团 A, B 的质心坐标。

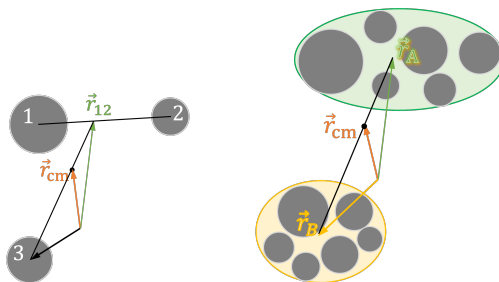


图 2.

【例子】如右图所示有一支质量均匀的曲尺，求它的质心位置。

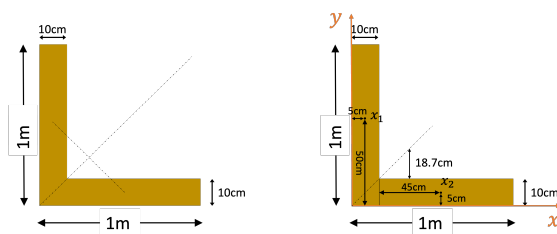


图 3.

解答：

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= (5, 50)\text{cm}, m_1 = 0.1 \cdot 1, \\ \vec{x}_2 &= (55, 5)\text{cm}, m_2 = 0.1 \cdot 0.9 \\ \vec{x}_{\text{cm}} &= (m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)/(m_1 + m_2) = (28.7, 28.7)\text{cm}\end{aligned}$$

【例子】平静湖面上停着一只质量为 M 长度为 l 的木船，一个质量为 m 的人从船的一端走到另一端，问船的位移。

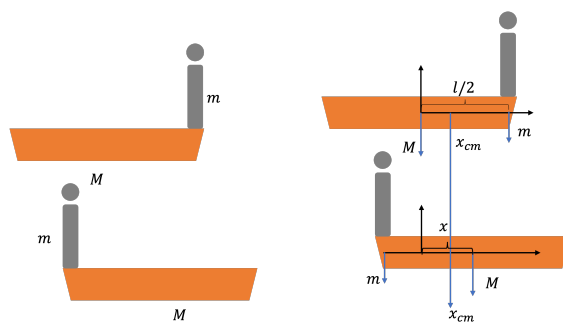


图 4.

解：建立一个坐标系，以船的中心为原点，质心的位置为

$$x_{\text{cm}} = M \times 0 + ml/2 = ml/2 \quad (13)$$

设船的位移为 x ，则在新的位置，质心位置为，

$$x_{\text{cm}} = Mx + m(x - l/2) \quad (14)$$

根据质心定理，质心位置不变，因此

$$ml/2 = Mx + m(x - l/2) \Rightarrow x = \frac{ml}{m + M} \quad (15)$$

考虑重力的合力：

$$\vec{F} = \sum_i m_i \vec{g} = Mg \quad (16)$$

考虑重力势能：

$$U_i = \sum_i m_i g z_i = Mgz_{\text{cm}} \quad (17)$$

相当于位于质心的质点的势能。考虑重力的力矩：

$$\vec{M} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{g} = M\vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{g} \quad (18)$$

因此对于质点系来说，重力的作用相当于质量为 M 的位于质心的质点。由于这个原因质心也被称为重心。

在一般情况下，非孤立体系的质心满足：

$$\frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = \sum_i \frac{m_i d\vec{v}_i/dt}{M} = \sum_i \frac{\vec{F}_i}{M} \Rightarrow M \frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = \vec{F}_{\text{tot}} \quad (19)$$

其中， $\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{F}_i$ ，而 \vec{F}_i 为每个质点所受的合力，

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_j \vec{F}_{ij} \quad (20)$$

其中， \vec{F}_i^{ext} 为该质点所受的合外力， \vec{F}_{ij} 为该质点收到的第 j 个质点的相互作用，即内力。根据牛顿第三定律， $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ 。因此， $\sum_{ij} \vec{F}_{ij} = 0$ 。这样以来，

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} \equiv \vec{F}^{\text{ext}} \quad (21)$$

这里， \vec{F}^{ext} 为合外力。因此有推广的质心定理：

$$\boxed{M \frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}} \quad (22)$$

【例子】 英文里面有一个概念叫做 bootstrap 翻译为自举，本意是一个人提着自己的靴子把自己提起来。从物理上看，这是否可能。



图 5.

【例子】 一个球形灯泡挂在距离地面高度为 h 处。某一时刻，灯泡突然破碎，碎片均匀分布，初始速度为 v ，方向亦均匀分布。求灯泡碎片落地时分布的范围。灯泡大小可以忽略，碎片不会碰到天花板。

解：根据质心定理，碎片质心的运动做自由落体，

$$y_c = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad (23)$$

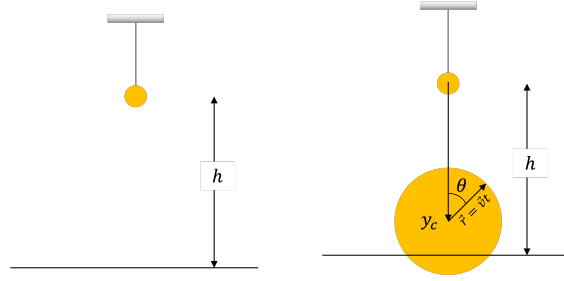


图 6.

而碎片相对于质心做匀速直线运动，速度为 v 。因此， t 处的碎片坐标为， $\vec{r} = (0, y_c) + vt(\sin \theta, \cos \theta)$ ， $(x, y) = (vt \sin \theta, h - 1/2gt^2 + vt \cos \theta)$ 。落地时刻为 $y = 0 \Rightarrow t = \frac{v \cos \theta}{g} + \frac{1}{g} \sqrt{2gh + v^2 \cos^2 \theta}$ 落地时，碎片水平方向的坐标为， $x = \frac{v^2}{2g} \sin 2\theta + \frac{v}{g} \sin \theta \sqrt{2gh + v^2 \cos^2 \theta}$ 。

3. 柯尼希定理 柯尼希定理可以推广到多粒子的情形，此时总动能为，

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (24)$$

可以证明，总动能可以写成以下形式，

$$T = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{\text{cm}})^2 \quad (25)$$

其中， \vec{v}_{cm} 是质心速度， M 是总质量。

证明：略。

根据柯尼希定理，受保守力作用下的多粒子体系的总机械能可以写成，

$$\begin{aligned} E &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + U_i^{\text{ext}} + \frac{1}{2} \sum_{ij} U(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \\ &= \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \sum_i U_i^{\text{ext}} + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{\text{cm}})^2 + \frac{1}{2} \sum_{ij} U(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \end{aligned}$$

其中， U_i^{ext} 是外力所对应的势能。第一部分仅与质心运动有关，第三部分仅与相对运动有关。除此之外，体系的总机械能还可以写成如下形式，

$$E = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \sum_i U_i^{\text{ext}} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left[\frac{m_i m_j}{2M} (\vec{v}_i - \vec{v}_j)^2 + U(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right]$$

【例子】跳高

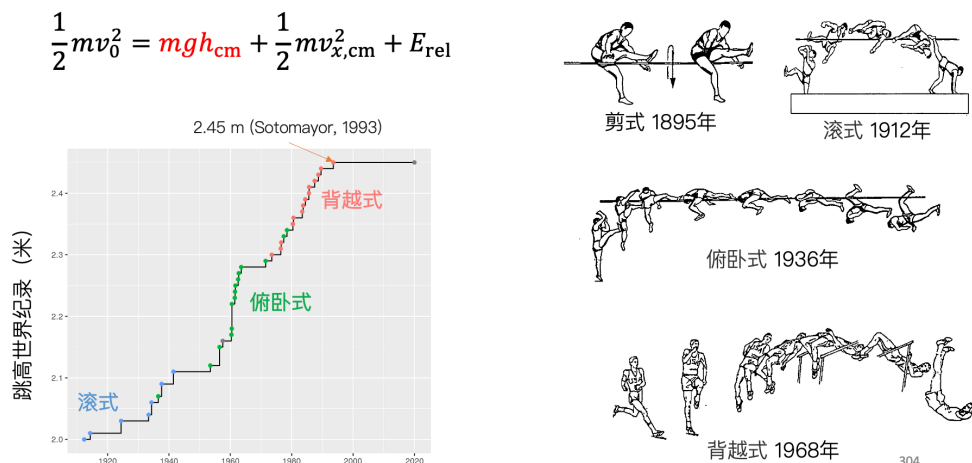


图 7.

4. 质点系的角动量 质点系的总角动量可以分解为质心角动量与相对于质心的角动量 (内禀角动量):

$$\begin{aligned}\vec{L} &\equiv \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\ &= M \vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm} + \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i \\ &= \vec{L}_{cm} + \vec{L}_{int}\end{aligned}$$

其中, $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{cm}$, $\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{cm}$ 。第一项是质心运动的角动量, 第二项是相对于质心运动的内禀角动量。有时候又把第一项, 即质点系质心运动引起的角动量, 叫做轨道角动量 (地球绕着太阳公转的角动量)。把第二项, 即质点系相对于质心的角动量叫做自旋 (地球自转)。

前面已经证明, 质点角动量的改变来自于力矩。对于质点系角动量而言, 也是如此,

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \sum_i m_i \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \equiv \vec{M}_{tot}$$

这里的力 \vec{F}_i 是质点 i 所对应的合力, 既包含内力也包含外力,

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_j \vec{F}_{ij} \quad (26)$$

因此，我们可以计算总力矩。

$$\begin{aligned}\vec{M}_{\text{tot}} &= \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_j \vec{F}_{ij}) \\ &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_i \sum_j \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \\ &= \vec{M}^{\text{ext}} + \sum_{i,j(i<j)} \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij}\end{aligned}$$

其中， $\vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j$ 。如果不考虑自旋时，相互作用力 $\vec{F}_{ij} \propto \vec{r}_{ij}$ ，因此， $\vec{M}_{\text{tot}} = \vec{M}^{\text{ext}}$ 。

$$\boxed{\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}^{\text{ext}}} \quad (27)$$

之前已经证明， \vec{L} 可以分解为质心角动量和内禀运动的叠加。质心角动量的改变，

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{\text{cm}} = \vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{F}^{\text{ext}} \quad (28)$$

为合外力作用在质心上时的力矩。因此根据角动量定理，内禀角动量的改变，

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{\text{int}} = \vec{M}^{\text{ext}} - \vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{F}^{\text{ext}} = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} \equiv \vec{M}_{\text{cm}}^{\text{ext}} \quad (29)$$

其中， $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{\text{cm}}$ 。 $\vec{M}_{\text{cm}}^{\text{ext}}$ 为相对于质心的力矩。

【例子】 从一个质量为 M 、半径为 R 的线轴上抽线。已知抽线时的张力为 T ，线轴的轴心固定，忽略线的质量与轴心的摩擦力，且初始时刻线轴静止。求 t 时刻线轴的角速度。

解：考虑内禀角动量，即相对于质心的角动量， $L_{\text{int}} = MR^2\omega$ 。

$$\frac{dL_{\text{int}}}{dt} = MR^2\dot{\omega} = TR \Rightarrow \omega(t) = \frac{T}{MR}t \quad (30)$$

§ 2. 刚体运动学

刚体 (rigid body) 是指组成体系的各个质点之间的相对位置在运动过程中不发生变化。自然界不存在绝对的刚体——物体受到外力作用时多多少少都会发生形变。但是，只要物

体形变可以忽略，就可以将其视为刚体。刚体上任意两个质点满足，

$$\frac{d}{dt}|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = 0. \quad (31)$$

或者，

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 = 0. \quad (32)$$

那么刚体上任意两点是否速度也完全相同呢？对上式求导可以得到，

$$\vec{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij} = 0. \quad (33)$$

即，两点之间的相对速度垂直于其连线。这一点让我们回忆起做圆周运动的质点。后面可以看到，转动的确是刚体运动的主要方式。

描述刚体需要多少个独立坐标呢？假设我们可以将刚体分割为 N 个质点，那么所有质点的坐标 $\{x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N\}$ 一共是 $3N$ 个。然而，刚体的各个质点之间还有约束存在，因此这 $3N$ 个坐标并非独立坐标。物理上将描述体系运动所需要的独立坐标的数目叫做自由度 (degrees of freedom)。质点体系的自由度 $N_d = 3N - N_c$ 其中 N_c 是独立约束的数目。

【例子】 考虑一个单摆。单摆的质点的坐标 (x, y) 一共是 2 个。不过这两个坐标需要保持摆长 $l = \sqrt{x^2 + y^2}$ 不变，因此只有一个独立的自由度。这个独立的自由度也可以用单摆的角度 θ 来表示。

刚体的任意两个质点之间都存在一个约束。因此总的约束数目为 $\binom{N}{2} = N(N-1)/2$ 个。但是，这些约束并非都是独立的。原因在于，在 3 维空间，一个质点只需要它与三个质点之间的距离固定，这个质点的坐标就完全固定了。这样以来，刚体的质点虽然很多，但是每增加一个质点的同时还增加 3 个约束，换句话说，并不增加自由度。因此，一个刚体只要包含 3 个及质点以上，不论有多少个质点它的自由度都是非常有限的数目。这个数目是 6。对于包含只有两个质点的刚体，即，由刚性杆相连的两个质点的运动，自由度的数目为 $6 - 1 = 5$ 。如果刚体固定在平面上，那么其自由度的数目为 3。

刚体的自由度：3 维空间刚体的自由度是 6，2 维空间刚体的自由度为 3。

1. **刚体的基本运动** 刚体最基本的运动是平动 (translation)。在平动中，刚体所有点具有相同的速度，因此只需要用一个矢量描述即可，自由度为 3。描述刚体的平动与描述质点运动无异。

刚体的另外一种简单的运动是定轴转动 (rotation about a fixed axis)。做定轴转动时，刚体上任意一个质点做垂直于转轴的圆周运动，所有质点的角速度相同，因此自由度为 1。

【例子】定轴转动一个主要的例子是车轮。车轮被认为是人类历史上最伟大的发明之一。斯洛文尼亚的卢布尔雅那沼泽轮是目前发现的世界最早的轮子，距今已经有 5000 多年的历史。我国二里头遗址（3700 年前）已经发现了车轮的遗迹（图：8）。



图 8. 斯洛文尼亚的卢布尔雅那沼泽轮是目前发现的世界最早的轮子，距今已经有 5000 多年的历史

【例子】定轴转动的车轮相对于轴心的角动量（图 9）。

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (34)$$

其中， $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$ ， \hat{n} 为轴心的方向（右手螺旋定则）。角动量：

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \omega \hat{n} \sum_i m_i r_i^2 \quad (35)$$

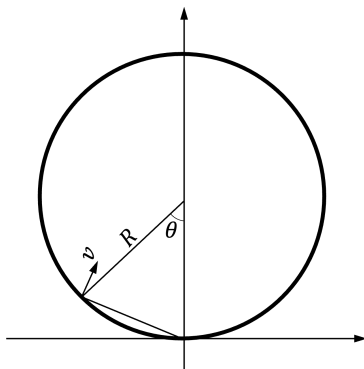


图 9.

需要注意的一点是，转轴不一定在刚体上，也可能在刚体的虚拟延伸体之上，这些虚拟延伸体与刚体一起运动，可以视为刚体的一部分，只不过没有质量。另外一个需要注意的是，刚体做平动时，不一定在做直线运动。当刚体平动时的运动为圆周运动时，需要注意区分刚体平动与转动（图10）。

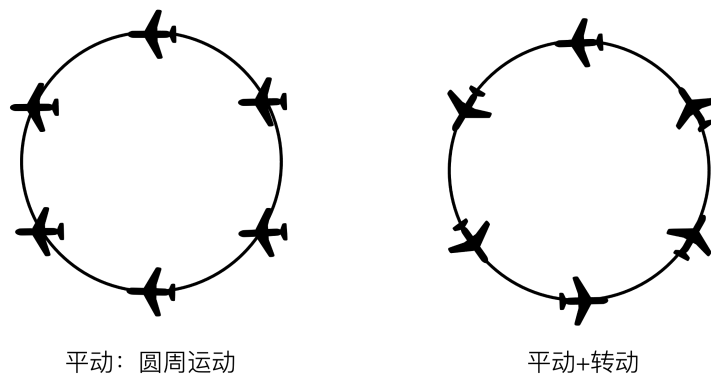


图 10.

2. **平面平行运动** 刚体做平面平行运动时, 所有点都在与某一轴垂直的平面内运动。刚体做平面平行运动时自由度为 3。刚体做平面平行运动可以视为刚体平动与转动的叠加。

注意, 做平面平行运动的刚体本身不一定是平面物体或柱形 (图 11)。

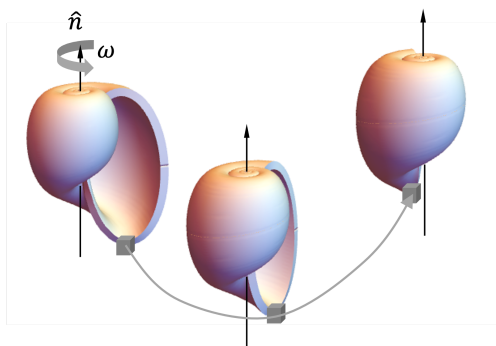


图 11.

【例子】车轮的滚动 (图 12)。车轮上的质点的运动可以分为车轮的平动 (速度为 \vec{v}_0) 与车轮绕轴的转动 (角速度 ω)。距离车轴 \vec{r}_i 的一点, 速度为, $\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ 。

车轮的总动量为,

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_0 \quad (36)$$

相对于轴心的总角动量为,

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = I \vec{\omega} \quad (37)$$

其中, $I = \sum_i m_i r_i^2 = mR^2$ 。

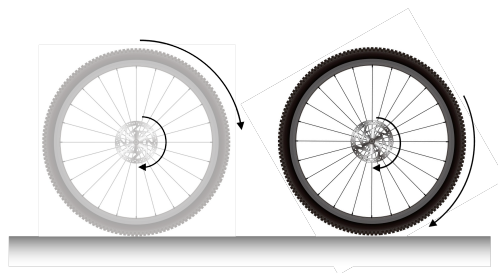


图 12.

如果 $v_0 = \omega R$ ，其中， R 为车轮的半径，那么，车轮与地面的接触点的速度 $v = 0$ ，也就是说，车轮与地面相接处的点的瞬时速度为 0。这种情形称为纯滚动。

上面的计算中，车轮的转动的参考点都是取得轴心。也可以取为其他点作为参考点。例如对于纯滚动的情形，可以取车轮与地面的接触点为参考点。这个参考点的速度为 0，因此车轮整体绕该点转动。车轮上任意一点的速度 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{d}$ ，其中 \vec{d} 为点距离参考点的位置矢量。此时，车轮的总角动量为，

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} R d\theta \frac{m}{2\pi R} \left(2R \sin \frac{\theta}{2}\right)^2 \omega \\ &= \omega m R^2 \frac{1}{2\pi} 4 \int_0^{2\pi} d\theta \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= 2mR^2\omega \end{aligned}$$

可见，选择不同的点作为参考点，得到的角动量是不同的。注意，例子中选的两个参考点都是运动的参考点。

刚体做平面平行运动的转动轴一般都是运动。在某一时刻转动轴可能是静止的，这样转动轴叫做瞬时转动轴。在这一瞬间，刚体整体围绕该瞬时转动轴做转动。例如，车轮做纯滚动时与地的接触点就是一个瞬时转动轴 (图 13)。根据平面几何的知识，刚体做平面平行运动时一定存在一个瞬时转动轴，当然这个瞬间转动轴不一定在刚体上，甚至可能在无穷远。

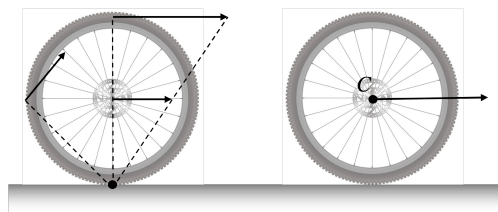


图 13.

3. 刚体定点转动 (*body-fixed point rotation*) 刚体在做定点转动时, 始终绕着某一个固定点转动。这个固定点可以在刚体上, 也可以在刚体的延拓部分。转轴方向可以改变。自由度为 3: 转动——1 个自由度, 转轴的方向——2 个自由度。



图 14. 陀螺是一种典型的做定点转动的刚体

4. 刚体的一般运动 刚体的一般运动可以分解为平动与转动的叠加。具体而言, 刚体上任意一点 A 的速度可以写成,

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \quad (38)$$

其中, B 是刚体上任意一点, $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$ 是相对于位矢。 $\vec{\omega}$ 为角速度。

如何理解这一点呢? 在刚体中任意两个质点之间的距离是固定的, 因此 A 相对于 B 位置矢量 \vec{r}_{AB} 仅改变方向, 换句话说, A 相对于 B 做瞬时转动。所以, 相对速度可以写成转动的形式: $(\frac{d}{dt})(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \equiv \vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$ (图 15)。

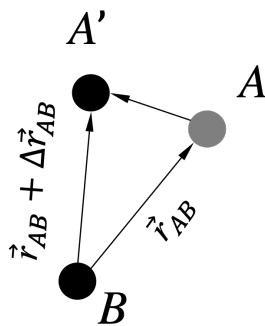


图 15.

还可以直接从质点运动学出发。选 C 为坐标原点, 即考虑 P 相对于 C 的运动。根据运动学的知识 (图 16),

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (39)$$

其中, $\vec{\omega} = \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_r - \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\theta + \dot{\theta} \vec{e}_\phi$ 是角速度矢量。利用刚体的性质, $\dot{r} = \frac{d}{dt}|\vec{R} - \vec{R}_C| = 0$,

因此,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (40)$$

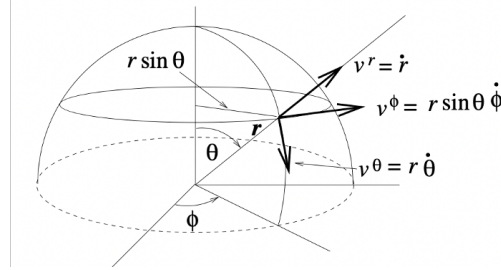


图 16.

角速度 $\vec{\omega}$ 对刚体上任意两点之间的相对运动都是相同的。为了证明这一点, 我们首先假定 $\vec{\omega}$ 依赖于 A, B 点的坐标,

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{AB} \quad (41)$$

考虑第三个点 C ,

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= \vec{v}_B + \vec{\omega}_{CB} \times \vec{r}_{CB}, \\ \vec{v}_C &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_{CA} \times \vec{r}_{CA} \end{aligned}$$

比较这三个式子可以得到,

$$\vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{AB} = \vec{\omega}_{CB} \times \vec{r}_{CB} - \vec{\omega}_{CA} \times \vec{r}_{CA} \quad (42)$$

根据刚体约束, $\vec{r}_{AB} \cdot \vec{v}_{AB} = 0$ 。用 \vec{r}_{AB} 点乘等号两边可以得到,

$$0 = \vec{r}_{AB} \cdot (\vec{\omega}_{CB} \times \vec{r}_{CB}) - \vec{r}_{AB} \cdot (\vec{\omega}_{CA} \times \vec{r}_{CA}) \quad (43)$$

由于 $\vec{r}_{CA} + \vec{r}_{AB} = \vec{r}_{CB}$, 因此,

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{r}_{AB} \cdot (\vec{\omega}_{CB} \times \vec{r}_{CA}) - \vec{r}_{AB} \cdot (\vec{\omega}_{CA} \times \vec{r}_{CA}) \\ \Rightarrow \vec{r}_{AB} \cdot [(\vec{\omega}_{CB} - \vec{\omega}_{CA}) \times \vec{r}_{CA}] &= 0 \\ \Rightarrow (\vec{\omega}_{CB} - \vec{\omega}_{CA}) \cdot (\vec{r}_{CA} \times \vec{r}_{AB}) &= 0 \end{aligned}$$

A, B, C 为刚体上任取的三点, 因此, 要想使得这个关系成立, $\vec{\omega}_{CB} = \vec{\omega}_{CA} \equiv \vec{\omega}$ 。

至此, 我们证明了, 刚体上任意一点的速度可以视为平动速度与转动的叠加,

$$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_C) \quad (44)$$

这里， C 是任选的一个参考点。注意，这里转动相对的转动轴不一定保持不动（包括方向和大小），它一般来说是一个瞬时转动轴。

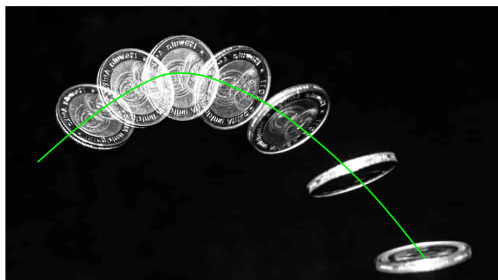


图 17.

这一结论实际上是一个更强的结论——欧拉旋转定理的一个推论。欧拉旋转定理 (Euler's rotation theorem, 1775) 告诉我们，刚体上任何一点的有限位移，都可以视为平动与转动的叠加，

$$\Delta \vec{r}_P = \Delta \vec{r}_C + R(\vec{r}_P - \vec{r}_C) \quad (45)$$

这里 $\Delta \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$ 为有限位移， $R(\vec{r})$ 表示对与矢量 \vec{r} 做旋转，它其中一种表示方式是罗德里格斯转动公式 (Rodriguez rotation formula) (图 18)，

$$R(\vec{r}) = \vec{r} \cos \theta + (\hat{n} \times \vec{r}) \sin \theta + \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r})(1 - \cos \theta) \quad (46)$$

这里， \hat{n} 是旋转轴的单位矢量； θ 是旋转角度。当我们取无穷小转动，并除以时间时，便可以化简上式得到前述刚体运动的公式。

其他转动方式：欧拉转动，

$$R = R_z(\theta)R_y(\phi)R_z(\varphi) \quad (47)$$

转动操作的不可对易性——对质点运动的叠加性做对比：矩阵、不对易代数等等

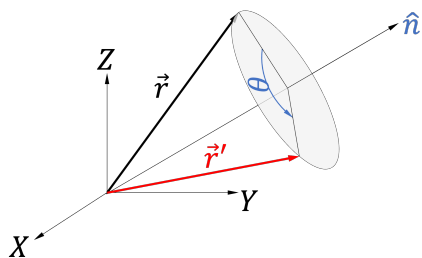


图 18.

【例子】 考察图 10 两种刚体运动方式。如果你沿着操场跑圈，如何将你自己的运动进行分解？

【例子】刚体做平动时，所有质点的速度相同， $\vec{v} = \vec{v}_C$ 。因此刚体角速度 $\vec{\omega} = 0$ 。

【例子】平面刚体的定轴转动，如车轮（不考虑车轮厚度）

$$\vec{v}_P = \dot{\theta} \hat{n} \times \vec{r}_{PC} \quad (48)$$

其中， C 为转轴与刚体相交的点。 \hat{n} 为转轴的方向（右手定则），角速度为 $\vec{\omega} = \hat{n} \dot{\theta}$ 。

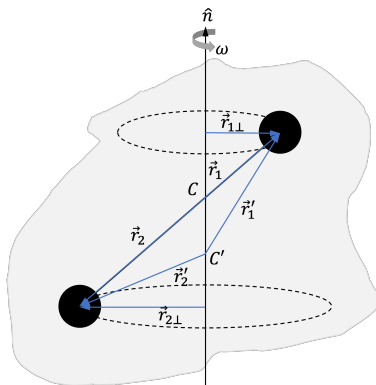


图 19.

【例子】三维刚体的定轴转动

考虑如图的定轴转动，质点 1、2 的连线与其速度方向并不在一个平面。质点 i 的速度为，

$$\vec{v}_i = \omega \hat{n} \times \vec{r}_{i\perp} = \omega \hat{n} \times \vec{r}_i \quad (49)$$

因此， $\vec{\omega} = \hat{n} \omega$ 。并且，参考点可以选择为转动轴上的任意一点。对于定轴转动来说，可以认为质点是绕着轴转动的。

当然，还可以选择其他点作为参考点。不过刚体的角速度是不变的。

【例子】刚体的平面平行运动

仍然选择转动轴上任意一点为参考点。

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \omega \hat{n} \times \vec{r}_{i\perp} = \vec{v}_C + \omega \hat{n} \times \vec{r}_i \quad (50)$$

【例子】车轮在地面上做纯滚动

选择转动轴为参考点：

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \omega \hat{n} \times \vec{r}_{i\perp} = \vec{v}_C + \omega \hat{n} \times \vec{r}_i \quad (51)$$

纯滚动满足，车轮与地面接触的点没有相对运动。因此平动速度与转动速度满足： $v_C = \omega R$ 。

选择车轮与地面的接触点为参考点 ($\vec{v}_G = 0$):

$$\vec{v}_i = \vec{v}_G + \omega \hat{n} \times \vec{R}_{i\perp} = \omega \hat{n} \times (\vec{r}_i + R\hat{z}) = \omega R \hat{n} \times \hat{z} + \omega \hat{n} \times \vec{r}_i \quad (52)$$

【例子】陀螺: 设陀螺的瞬时转动轴的方向指向 \hat{n} , 其瞬时角速度为 ω , 则任意一点 i 的速度为,

$$\vec{v}_i = \omega \hat{n} \times \vec{r}_{i\perp} = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \quad (53)$$

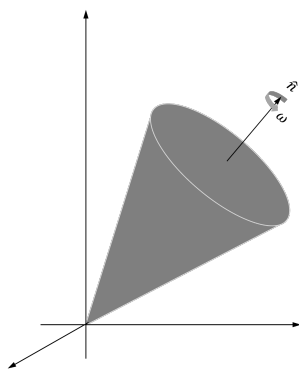


图 20.

§ 3. 刚体动力学

刚体动力学原则上可以直接使用牛顿第二定律,

$$\vec{F}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \quad (54)$$

这里的力 \vec{F}_i 为质点 i 所受到的合力。它既包含外力, 也包含刚体质点之间的内力。刚体约束给出的是刚体内部质点之间的关系, 而非内力。因此, 这会求解带来不方便——当然, N -体问题本身也无法直接求解。

我们已经知道, 刚体实际上只有 6 个自由度, 根据上一节结论, 任意质点的运动可以分解为平动与转动的叠加, 因此我们只需要研究刚体平动和转动所遵循的动力学规律即可。需要注意, 刚体运动的分解与参考点的选择有关: 当刚体运动中存在一个体固定点时 (定点旋转的转轴、定点旋转的定点) 一个方便的参考点是该固定点; 当刚体运动中不存在一个体固定点时, 选择质心参考系比较方便。

在多质点系一节, 我们已经推导出来了关于质点系的质心运动和转动的两条规律, 可

以直接应用于刚体：

$$M\vec{a}_{\text{cm}} = \vec{F}^{\text{ext}}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{ext}} \quad (55)$$

其中， \vec{L} 是质点系的总角动量。

注意，这两个方程仅依赖于外力（包括外力的力矩），因此是完全确定的。刚体一共有 6 个自由度。这一组方程确定了 6 个动力学变量： \vec{v}_{cm} （或者总动量： $\vec{P} = M\vec{v}_{\text{cm}}$ ）、 \vec{L} 。加上初始条件，我们可以确定刚体的坐标。

注意，角动量的定义与参考点（坐标原点）的选择有关。根据牛顿定律，参考点的选择是任意的。如果选择质心作为角动量参考点，对应的角动量为内禀角动量（自旋角动量），

$$\vec{L} = M\vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{L}_{\text{int}} \quad (56)$$

因此在质心参考系且以质心为原点， $\vec{L} = \vec{L}_{\text{int}}$ 。由于质心一般为非惯性参考系，在质心参考系，角动量的改变满足：

$$\frac{d\vec{L}_{\text{int}}}{dt} = \vec{M}^{\text{ext}} - \vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{F}^{\text{ext}} \quad (57)$$

第二项的贡献为零，这是由于在质心参考系以质心为原点，质心位置 $\vec{r}_{\text{cm}} = 0$ 。因此，非惯性力不贡献力矩。从而，刚体的角动量方程也可以写成，

$$\frac{d\vec{L}_{\text{int}}}{dt} = \vec{M}^{\text{ext}} \quad (58)$$

【例子】 从一个质量为 M 、半径为 R 的线轴上抽线。已知抽线时的张力为 T ，线轴的轴心固定，忽略线的质量与轴心的摩擦力。已知线轴可以看出一个环形柱体且初始时刻线轴静止。求 t 时刻线轴的角速度。

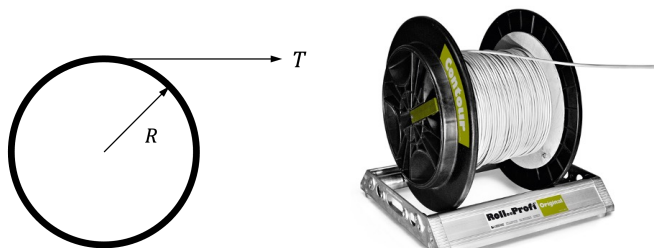


图 21.

求解：角动量 $L = -MR^2\omega$ ，根据动力学方程，

$$MR^2\dot{\omega} = TR \Rightarrow \omega(t) = \frac{T}{MR} \quad (59)$$

【例子】考虑斜面上的一个质量为 m 、半径为 r 的环从静止开始沿着斜面滚动。已知斜面的倾角为 θ ，斜面与环之间的摩擦系数为 μ 。

(a) 若环做纯滚动，求其加速度 a 。此时摩擦系数 μ 至少需要多大才能保持纯滚动？

(b) 若环做滑动，求其加速度 a ；

求解：(a) 设摩擦力为 f ，平动与滚动（以质心为参考点）所满足的方程为，

$$a = g \sin \theta - \frac{f}{m}, \quad (60)$$

$$\dot{L} = fr, \quad (61)$$

其中， $L = mr^2\omega$ 是环相对质心的角动量。纯滚动的条件为， $v = \omega r$ 。由此可以得到，

$$a = \frac{1}{2}g \sin \theta \quad (62)$$

发生纯滚动的条件为，

$$f \leq \mu N \quad (63)$$

$$\Rightarrow m \frac{1}{2}g \sin \theta \leq \mu mg \cos \theta \quad (64)$$

$$\mu \geq \frac{1}{2} \tan \theta \quad (65)$$

(b) 如果环做滑动，则 $f = \mu N = \mu mg \cos \theta$ 。

加速度为， $a = g \sin \theta - \mu g \cos \theta$

1. 刚体静力学平衡 静力学平衡可以视为刚体动力学的特殊情况。刚体处于静力学平衡时，速度与角动量恒为零。因此，刚体静力学平衡的条件为合外力为零，同时相对于任意一个静止参考点的合外力矩为零：

$$\vec{F}^{\text{ext}} = 0, \quad \vec{M}^{\text{ext}} = 0. \quad (66)$$

应用：简单机械（杠杆、滑轮、轮轴、齿轮、斜面、螺旋、楔子）如图 22。

【例子】求 F_1, F_2

【例子】请问下图中的平衡鸟重心位置在哪里？



图 22. 六大经典机械

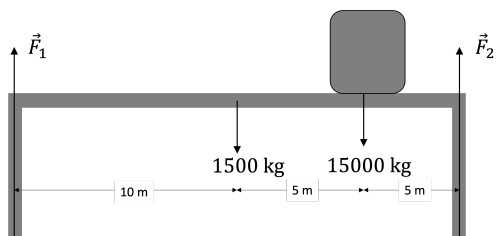


图 23.

【例子】一架均匀的梯子斜靠在一面墙上。已知地面与梯子的静摩擦系数为 μ ，墙与梯子的摩擦力可以忽略。求梯子与水平面的最小的可能的夹角。

求解：首先进行受力分析。梯子可能受到的力包括，重力 mg ，地面的支持力 N_1 和摩擦力 f_1 ，墙面的支持力 N_2 和摩擦力 f_2 。根据刚体静力平衡原理，力平衡条件：

$$mg = N_1, \quad N_2 = f_1 \quad (67)$$

以梯子与墙的接触点为参考点，力矩平衡条件：

$$mg \frac{l}{2} \cos \theta + f_1 l \sin \theta = N_1 l \cos \theta, \quad (68)$$

从这些表达式可以求出来，

$$f_1 = \frac{1}{2} mg \cot \theta \quad (69)$$



图 24.

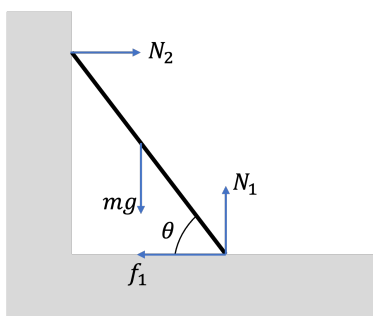


图 25.

最后，摩擦约束要求， $f_1/N_1 \leq \mu$ ，因此

$$\mu \geq \frac{1}{2} \cot \theta \Rightarrow \theta \geq \arctan(2\mu)^{-1}. \quad (70)$$

【例子】 一架均匀的梯子斜靠在一面墙上。已知地面与梯子的静摩擦系数为 $\mu = 0.5$ ，墙与梯子的摩擦力系数为 $\mu' = 0.5$ 。求梯子与水平面的最小的可能的夹角。

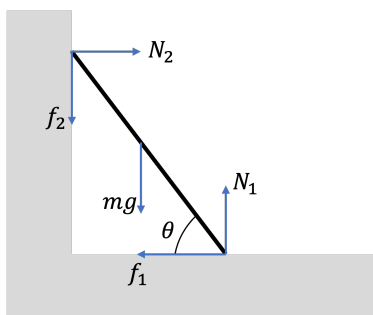


图 26.

求解：这个问题与上题相比，增加了墙的摩擦力。仍然按照力平衡、力矩平衡写下方程，

$$mg + f_2 = N_1, \quad N_2 = f_1, \quad mg \frac{l}{2} \cos \theta + f_1 l \sin \theta = N_1 l \cos \theta, \quad (71)$$

问题在于，我们有 4 个未知数，但是只有 3 个方程，因此无法把所有的摩擦力确定下来。这一类问题叫做静摩擦欠定问题。我们无法完全确定摩擦力，只能确定摩擦力之间的关系，

$$f_1 \tan \theta - f_2 = \frac{1}{2} mg \quad (72)$$

摩擦力实际的大小，与梯子的压缩/拉伸状态有关——换句话说，纯粹将梯子视为刚体模型是不够的！

不过本题目作为求最值问题仍然可以求解。除了上式以外，我们还有摩擦约束所提供的两个不等式：

$$\left| \frac{f_1}{N_1} \right| \leq \mu, \quad \left| \frac{f_2}{N_2} \right| \leq \mu'. \quad (73)$$

可以将支持力 N_1, N_2 表示为摩擦力 f_1, f_2 。这样，我们可以得到关于两个摩擦力的几个约束关系：

$$f_1 \tan \theta - f_2 = \frac{1}{2} mg, \quad \left| \frac{f_1}{mg + f_2} \right| \leq \mu, \quad \left| \frac{f_2}{f_1} \right| \leq \mu'. \quad (74)$$

若以 f_1 和 f_2 分别为横纵坐标，画出上述约束来，问题的解应为所有约束重叠的区域。虚线和实线分别是取不同 θ 角时的两个摩擦约束。容易看到，最小 θ 在实线的情形取到，此时

$$\theta^* = \frac{1 - \mu\mu'}{2\mu} \Rightarrow \tan \theta^* \approx 36.9^\circ \quad (75)$$

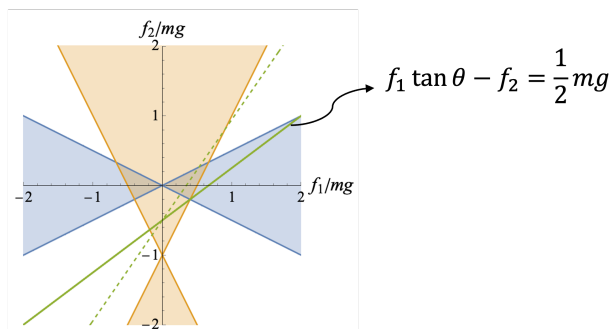


图 27.

【例子】分析图中的架子为啥可以仅依靠绳索保持平衡。

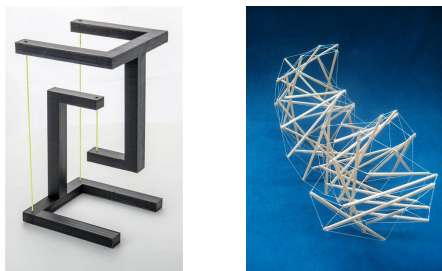


图 28. 张拉整体结构

2. 刚体的转动 描述刚体运动时，我们用到了角速度 $\vec{\omega}$ 。而另一方面描述刚体动力学时，我们需要刚体的角动量 \vec{L} 。两者之间该如何相联系呢？考虑相对于参考点 C 的角动量：

$$\begin{aligned}\vec{L}_C &= \sum_i m_i \vec{r}_{iC} \times \vec{v}_{iC} \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_{iC} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{iC}) \\ &= \sum_i m_i r_{iC}^2 \vec{\omega} - \sum_i m_i \vec{r}_{iC} (\vec{r}_{iC} \cdot \vec{\omega})\end{aligned}$$

可见，一般而言，刚体的角动量 \vec{L} 与角速度 $\vec{\omega}$ 呈线性关系，但是两者方向不一定相同。

两者的比例系数叫做转动惯量。由于两者都是矢量，因此转动惯量不是一个数字，而是一组数字。这一组数构成一个张量，记做：

$$\overset{\leftrightarrow}{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (76)$$

这样，角动量与角速度的关系可以写成，

$$I_{ab} = \sum_i m_i r_{iC}^2 \delta_{ab} - \sum_i m_i r_{iCa} r_{iCb} \quad (77)$$

$$\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \vec{\omega} \quad (78)$$

【例子】 考虑下图做定轴转动的刚体由两个质量为 m 的球组成，球由长度为 l 的刚性轻杆相连。刚体绕过轻杆中心 C 的轴转动角速度为 ω 。转轴与轻杆之间的夹角为 θ ，求刚体以 C 为参考点的角动量。

求解：总角动量，

$$\vec{L} = m\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m\vec{r}_2 \times \vec{v}_2 = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 \quad (79)$$

其中两个球都做圆周运动，因此其速度： $\vec{v}_i = \omega \hat{n} \times \vec{r}_{i\perp} = \omega \hat{n} \times \vec{r}_i$ 。这样以来，

$$\vec{l}_i = m\vec{r}_i \times \vec{v}_i = \frac{1}{4}m\omega l^2(\hat{n} \sin^2 \theta - \vec{e}_\perp \cos \theta \sin \theta) \Rightarrow \vec{L} = \frac{1}{2}m\omega l^2(\hat{n} \sin^2 \theta - \vec{e}_\perp \cos \theta \sin \theta) \quad (80)$$

注意角动量的大小不变，方向与轻杆儿保持垂直，因此一直是变化的。

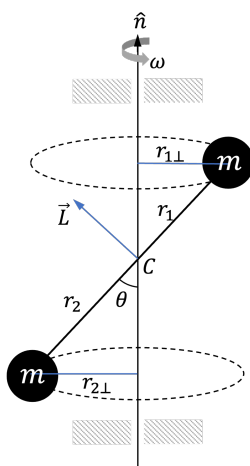


图 29.

可见角动量的方向一直在发生改变，力矩是由哪里提供的？

答案是转轴。定轴转动的刚体在高速旋转时，如果角动量方向与角速度方向不一致，将会给转轴施加非常大的力，从而有可能对转轴或者支撑点造成破坏。例如，使用高速离心机前需要将其配平。洗衣机甩干时会先执行自动配平程序。

在下面几种情况下，刚体角动量与角速度方向相同：

- 平面刚体且当转动轴与刚体平面垂直时。取转动轴与刚体交点为参考点时， $\vec{r}_{iC} \perp \vec{\omega}$ ，因此

$$\vec{L} = \sum_i m_i r_{iC}^2 \vec{\omega} \quad (81)$$

- 刚体存在一个转动对称轴，且绕着对称轴转动时。

此时我们可以将刚体视为圆环的集合。因此首先考虑一个圆环的角动量。圆环上任意质点的速度为， $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_{i\perp}$ ，这里， $\vec{r}_{i\perp}$ 为垂直于转轴的矢量。

$$\vec{L}_{\text{ring}} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = m r_\perp^2 \vec{\omega} \quad (82)$$

其中, r_{\perp} 为圆环的半径。并且角动量大小与参考点选择无关。对于具有转动对称轴的一般刚体来说, 可以将其视为圆环的集合。因此, 刚体相对于转动轴上任何一点的角动量与角速度方向相同,

$$\vec{L} = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \vec{\omega} \quad (83)$$

- 通过数学可以证明, 一般刚体存在三个正交的轴, 叫做主轴。当刚体沿着主轴转动时, 角动量方向与角速度方向相同。

【例子】考虑一个高速旋转的陀螺角速度为 $\omega \gg 1$, 陀螺的角动量 $\vec{L} = I\vec{\omega}$ 。已知陀螺质心的高度为 h , 陀螺质量为 m 。当陀螺略微偏离垂直位置时, 分析陀螺的运动。

解: 设陀螺偏离垂直位置的角度为 θ 。陀螺所有的外力均在垂直方向, 地面所提供的支持力与重力平衡。以陀螺与地面的接触点为原点, 重力的力矩为, $\vec{M} = \vec{h} \times m\vec{g}$, 其中大小为 $M = mgh \sin \theta$, 方向为垂直于纸面向里, 根据角动量-力矩定理:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (84)$$

由于力矩方向一直垂直于角动量, 因此角动量的大小不变, 仅改变方向, 即发生进动:

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \quad (85)$$

换句话说, 陀螺不会倒下, 而是会绕垂直轴进动, 进动角速度为,

$$mgh \sin \theta = \Omega I \omega \sin \theta \Rightarrow \Omega = \frac{mgh}{I\omega} \quad (86)$$

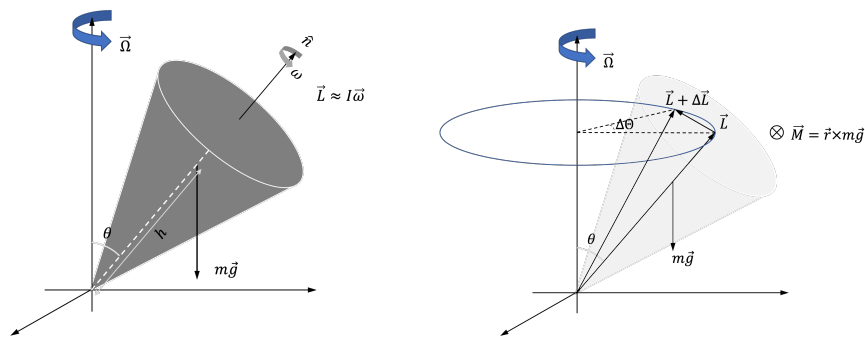


图 30.

这个例子有非常重要的应用。例如来复枪 (rifle) 发明以前, 广泛使用的是滑膛枪 (musket)。相比于滑膛枪来说, 来复枪在枪管中增加了螺旋形的膛线, 使得

子弹出射以后处在高速旋转状态。这样以来当子弹受到空气阻力影响时不会翻滚从而影响射击精度。

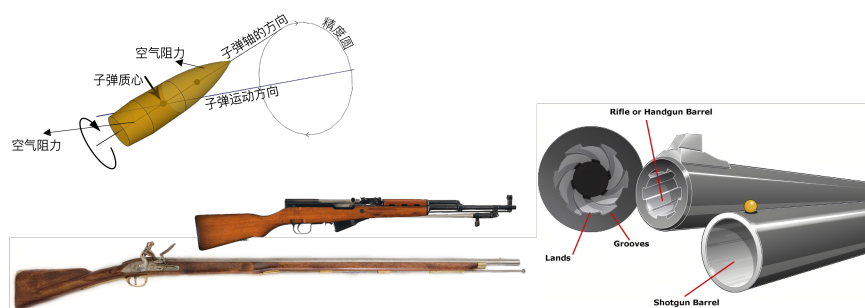


图 31.

【例子】一个车轮质量为 m ，半径为 R 。恒定的驱动力 F 作用在车轴上。已知车轮在水平面上从静止开始做纯滚动。求车轴的速度 $v(t)$ 及车轮的角速度 $\omega(t)$ 。

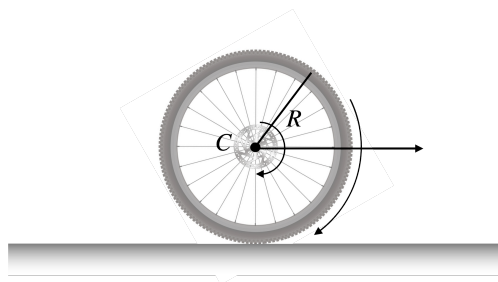


图 32.

解：设车轮受到的地面的摩擦力为 f 。根据刚体的动力学方程，

$$F - f = m \frac{dv}{dt}, \quad Rf = mR^2 \frac{d\omega}{dt} \quad (87)$$

车轮做纯滚动的条件是， $v = \omega R$ 因此， $F = f + ma = 2ma$ ，

$$v(t) = \frac{F}{2m} t \quad (88)$$

还可以求出做纯滚动所需要的摩擦系数： $f = F/2 \Rightarrow \mu \geq \frac{f}{mg} = \frac{F}{2mg}$ 。在摩擦系数一定的情况下增加力 F ，最终当 $F \geq 2mg\mu$ 时，车轮将无法维持纯滚动。

3. 刚体的动能 根据柯尼希定理, 刚体的总动能为,

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\
 &= \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{\text{cm}})^2 \\
 &= \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2 \\
 &= \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i [r_i'^2 \omega^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_i)^2] \\
 &= \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \vec{L}_{\text{int}} \cdot \vec{\omega}
 \end{aligned}$$

再利用角动量与角速度直接的关系, 刚体的动能还可以写成,

$$T = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \overset{\curvearrowright}{I}_{\text{cm}} \cdot \vec{\omega}. \quad (89)$$

这里, $\overset{\curvearrowright}{I}_{\text{cm}}$ 表示过质心的转动惯量。

再考虑外力做功的功率:

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_i \\
 &= \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} \cdot (\vec{v}_{\text{cm}} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i) \\
 &= \vec{F}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\text{cm}} + \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}'_i \\
 &= \vec{F}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{\omega} \cdot \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} \\
 &= \vec{F}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{M}_{\text{int}}^{\text{ext}} \cdot \vec{\omega}
 \end{aligned}$$

§ 4. 转动惯量

作为刚体运动的基本形式, 首先考虑刚体做定轴转动时的动力学问题。此时, 刚体的运动只有一个自由度。因此我们只需要考虑平行于转轴方向的角动量分量。不妨取转轴方向为 z 。取轴向任意一点作为参考点, 角动量分量,

$$L_z = \sum_i m_i (r_i^2 - r_{iz}^2) \omega = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \omega \equiv I_z \omega \quad (90)$$

这里, I_z 叫做转动惯量:

$$I_z \equiv \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (91)$$

动力学方程为,

$$\frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = M_z^{\text{ext}} \quad (92)$$

对于定轴转动来说, 这个方程相当于质点平动的牛顿第二定律。其中, I 起到质量的作用。

对于连续分布的刚体, 求和可以换成积分,

$$I_z = \int \rho (x^2 + y^2) d^3V \quad (93)$$

这里, ρ 是刚体的密度。转动惯量与转轴的选择有关, 相同的刚体关于不同的转轴的转动惯量可能不相同。

【例子】计算圆环的转动惯量 $I = MR^2$

【例子】计算圆柱的转动惯量 $I = (1/2)MR^2$

【例子】计算均匀实心球关于过球心的轴的转动惯量 $I = (2/5)MR^2$ 。

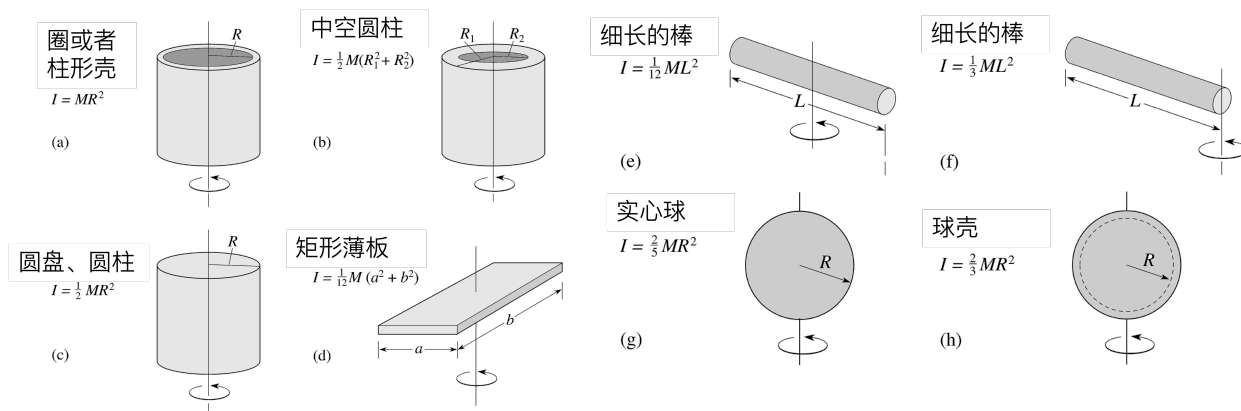


图 33.

1. 平行轴定理与垂直轴定理 绕某个轴的转动惯量等于绕平行于该轴且过质心的转轴的转动惯量 I_{cm} 加上 Md^2 , 其中 d 为两轴之间的距离, 即

$$I = I_{\text{cm}} + Md^2 \quad (94)$$

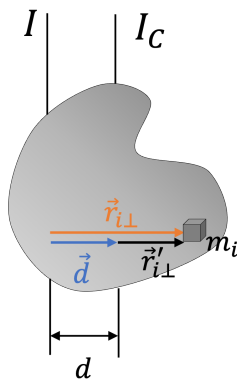


图 34.

证明：如图所示，

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = \sum_i m_i (\vec{r}'_{i\perp} + \vec{d})^2 \\
 &= \sum_i m_i r_{i\perp}'^2 + \sum_i m_i d^2 + \sum_i m_i 2\vec{r}'_{i\perp} \cdot \vec{d} \\
 &= I_C + Md^2
 \end{aligned}$$

上式用到了： $\vec{r}'_{i\perp} \cdot \vec{d} = \vec{r}'_i \cdot \vec{d}$ ，以及 $\sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$ 。

【例子】计算均匀圆盘关于过盘边缘一点且垂直于圆盘的转动惯量。

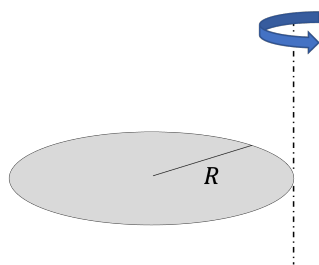


图 35.

求解：直接利用平行轴定理

$$I = I_C + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 \quad (95)$$

垂直轴定理：对于平面刚体，令 x, y, z 为三个正交的轴，且 z 垂直于平面， x, y 在平面以内。则，绕三个轴的转动惯量，

$$I_z = I_x + I_y \quad (96)$$

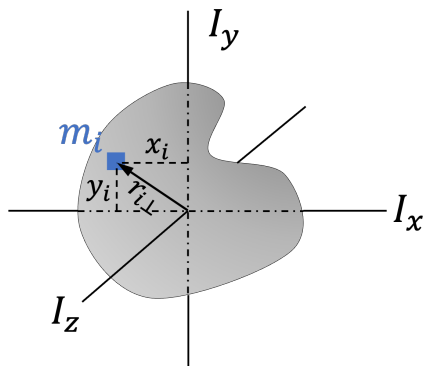


图 36.

证明:

$$I_z = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = I_y + I_x$$

【例子】计算均匀圆盘关于过盘边缘一点且平行于圆盘的转动惯量。

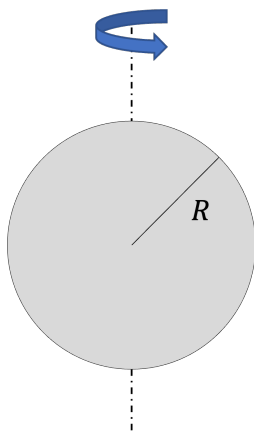


图 37.

利用垂直轴定理,

$$I_z = I_x + I_y \quad (97)$$

其中, $I_z = \frac{1}{2}MR^2$ 。利用对称性, $I_x = I_y$, 因此,

$$I_x = I_y = \frac{1}{2}I_z = \frac{1}{4}MR^2 \quad (98)$$

【例子】质量为 m_1 、 m_2 的木块如图吊在阿德伍德机两端, 滑轮的质量为 m , 可以视为一个半径为 r 的圆盘。已知可以忽略绳的质量且滑轮与绳之间的摩擦力足够大, 忽略其他摩擦。求木块的加速度。

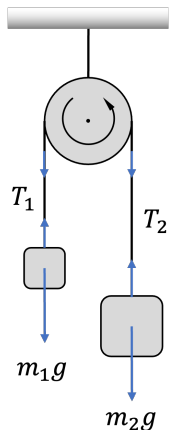


图 38.

求解：首先做受力分析，如图所示。木块在重力与张力的作用下做匀加速运动，滑轮在张力力矩的作用下做定轴转动，转动惯量为 $I = \frac{1}{2}mr^2$ ，建立动力学方程，

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 g - T_1, \\ m_2 a_2 &= m_2 g - T_2, \\ T_1 r - T_2 r &= I \alpha \end{aligned}$$

由于绳不可伸长，木块之间的加速度满足约束关系： $a_1 + a_2 = 0$ ，绳在滑轮上不打滑，因此， $\alpha r = a_1$ 。可以解得：

$$a_1 = -a_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} g \quad (99)$$

2. 定轴转动的动能 刚体的转动动能，

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{L}_{\text{int}} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} I_C \omega^2 \quad (100)$$

其中 I_C 为刚体关于过质心的轴的转动惯量。因此刚体的动能为

$$T = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \quad (101)$$

第一项为质心运动（平动）的动能，第二项为刚体绕过质心的轴转动时的动能。注意：当刚体沿不同方向的轴转动时，刚体的转动惯量可能不同；刚体做定轴转动时，质心的速度不一定为 0。

考虑定轴转动的情形。此时质心速度 $v_{\text{cm}} = \omega d$ ，其中 d 为质心距离转轴的距离。总动

能,

$$T = \frac{1}{2}Md^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 \quad (102)$$

根据平行轴定理, $I = I_C + Md^2$, 因此刚体做定轴转动的总动能为,

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (103)$$

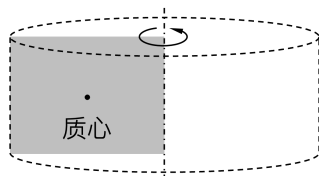


图 39.

3. 平面平行运动 平面平行运动有 3 个自由度, 其中两个可以来自刚体的质心运动, 一个来自刚体绕质心为转轴的转动。在质心参考系, 刚体以过质心的转轴做定轴转动,

$$M \frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}},$$

$$I_C \frac{d\omega}{dt} = M_z^{\text{ext}}$$

其中 I_C 为刚体关于过质心的轴的转动惯量。注意, 在质心参考系, 惯性力对于力矩的贡献为 0。做平面平行运动的刚体的总能量:

$$T = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 \quad (104)$$

前面提到过, 刚体做平面平行运动时, 在任意时刻, 一定可以找到一个瞬时转动轴。令质心与瞬时转动轴之间的瞬时距离为 d , 则 $v_{\text{cm}} = \omega d$ 。因此, 平面平行运动的刚体的总能量可以写成,

$$T = \frac{1}{2}Md^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (105)$$

这里利用了平行轴定理, $I = I_C + Md^2$ 。

【例子】车轮质量为 M , 半径为 R , 在水平面上做纯滚动, 车轴速度为 v 。求车轮总动能。

求解: 以质心为参考点 ($I_C = MR^2$),

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = Mv^2 \quad (106)$$

车轮和地面的接触点为瞬时转动轴，以此为参考点 ($I = I_C + MR^2 = 2MR^2$)

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 = Mv^2 \quad (107)$$

【例子】弹硬币游戏。一枚硬币质量为 M ，半径为 R 。垂直立在光滑水平面上。 $t = 0$ 时刻，用手指快速地弹硬币的边缘，弹的方向沿水平方向且垂直于硬币平面。已知弹射后硬币中心的水平速度为 v ，求硬币旋转的角速度 ω 。



图 40.

求解：手指给硬币一个冲量 $\Delta I = F\Delta t$ ， F 为冲量所对应的平均力。以质心为参考系，相对于质心的内禀冲量矩为，

$$\Delta M^{\text{int}} = RF\Delta t = R\Delta I \quad (108)$$

应用质心的动量定理，

$$Mv = \Delta I \quad (109)$$

应用冲量矩-角动量定理，

$$\Delta IR = I\omega = \frac{1}{4}MR^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{4v}{R} \quad (110)$$

【例子】一个质量为 m ，半径为 R 的实心球从一个斜面上从静止开始运动。已知斜面的倾角为 θ ，球与斜面之间的摩擦系数为 μ 。求球的质心的加速度。

解：小球在斜面上运动时，即可能滚动，又可能滑动。发生滚动时，摩擦力 $f \leq \mu N$ ，发生滑动时，摩擦力 $f = \mu N$ ，因此需要分情况讨论。首先是受力分析如图所示。将力沿着平行于斜面和垂直于斜面两个方向分解。刚体动力学方

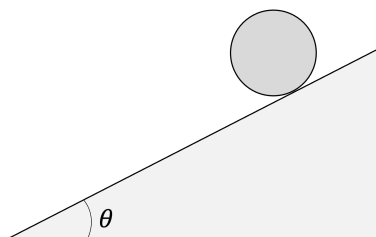


图 41.

程为,

$$mg \sin \theta - f = ma$$

$$mg \cos \theta = N$$

$$fR = I\alpha$$

这里 $I = \frac{2}{5}mR^2$ 为小球的转动惯量。

假如小球发生纯滚动, 约束条件为, $\alpha R = a$ 。可以得到,

$$a = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I}{mR^2}} = \frac{5}{7}g \sin \theta \quad (111)$$

而小球做纯滚动的条件是, $f \leq \mu N$, 从加速度可以求得,

$$N = mg \cos \theta, \quad f = \frac{2}{7}mg \sin \theta \quad (112)$$

因此, 小球做纯滚动的条件是 $\mu \geq \frac{2}{7} \tan \theta$ 。

假如 $\mu < \frac{2}{7} \tan \theta$, 小球在运动过程中既滚动也滑动, 摩擦力为 $f = \mu N$, 从中可以得到,

$$a = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) \quad (113)$$

可以获得球与斜面写出点的角加速度为, $\alpha = \frac{5}{2R}\mu g \cos \theta$ 。可以验证, $a > \alpha R$, 即确实发生了滑动。

对于这个题目, 如果知道小球的初始高度为 h , 求最终的速度 v 。

对于发生纯滚动的情形, 所涉及的摩擦力为静摩擦。静摩擦力不做功, 因此可以直接利用能量守恒,

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (114)$$

利用纯滚动条件, $v = \omega R$,

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} \quad (115)$$

对于既滚动又滑动的情形，直接利用加速度求速度比较方便：

$$v^2 = 2a \frac{h}{\sin \theta} \Rightarrow v = \sqrt{2gh(1 - \mu \cot \theta)} \quad (116)$$

如果利用摩擦力做功求的话，需要注意摩擦力做功包含两部分，一部分是摩擦力导致质心运动对应的功，另外一部分是摩擦力导致转动所对应的功。

【例子】 一个高 L 、质量为 M 的镜框放在墙角，如图所示。镜框上端系着一根细绳，下端放置在墙角。已知镜框与墙的初始夹角为 $\theta_0 = 30^\circ$ ，镜框与墙和地面的摩擦都可以忽略不计。某一时刻，细绳突然断裂。求镜框完全接触地面时的角速度 ω_f 。

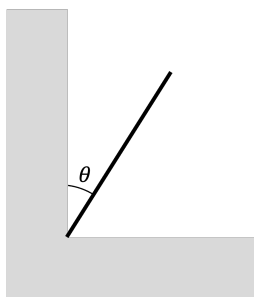


图 42.

求解：镜框的下落分为两部分。第一部分，镜框不离开墙角，以下端为轴心做定轴转动。第二部分，镜框离开墙角，由于没有摩擦力，水平方向的速度守恒。利用能量守恒可以求出角速度。因此首先要求出镜框脱离墙角的角速度，以及此时的水平速度。

镜框脱离墙角以前，以墙角为轴做定轴转动。根据刚体的动能定理，重力做的功转化为刚体的转动动能。因此当镜框与墙的夹角为 θ 时，其角速度 $\omega = \dot{\theta}$ 满足，

$$Mg \frac{L}{2} (\cos \theta_0 - \cos \theta) = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (117)$$

其中， $I = \frac{1}{3} ML^2$ 为镜框绕其一端转动的转动惯量。由此可以得到，

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L} (\cos \theta_0 - \cos \theta)} \quad (118)$$

对镜框做受力分析（如图 43）。当墙对镜框支持力为 0 时，镜框脱离墙角。根据动力学方程，

$$N_2 = M a_x \quad (119)$$

其中, a_x 为镜框质心的水平方向的加速度, $a_x = \dot{v}_x$, 这里,

$$v_x = v_{\text{cm}} \cos \theta = \omega \frac{L}{2} \cos \theta = \cos \theta \sqrt{\frac{3gL}{4} (\cos \theta_0 - \cos \theta)} \quad (120)$$

为质心水平方向的速度分量。直接对其求导可以得到 a_x ,

$$\begin{aligned} a_x &= \sqrt{\frac{3gL}{4}} \left(\frac{1}{2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}} - \sin \theta \sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta} \right) \dot{\theta} \\ &= \frac{3g}{4} (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0) \sin \theta \end{aligned}$$

这里用到了 $\dot{\theta} = \omega$ 。

镜框脱离墙角的临界角度为, $a_x = 0 \Rightarrow \cos \theta^* = \frac{2}{3} \cos \theta_0$ 。对应的水平方向的速度为,

$$v_x = \cos \theta^* \sqrt{\frac{3gL}{4} (\cos \theta_0 - \cos \theta^*)} = \frac{1}{3} \sqrt{gL \cos^3 \theta_0} \quad (121)$$

由于水平方向力为零, 此后这一水平速度将保持不变。

根据动能定理,

$$Mg \frac{L}{2} (\cos \theta_0 - \cos \theta) = \frac{1}{2} M v_x^2 + \frac{1}{2} M v_y^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \quad (122)$$

这里, $I_C = \frac{1}{12} ML^2$ 是镜框关于质心的转动惯量。

由于镜框下端不脱离水平面, 必然有, $v_y = \omega \frac{L}{2} \sin \theta$ 。因此,

$$\omega = \sqrt{\frac{12g \cos \theta_0 - \frac{1}{9} \cos^3 \theta_0 - \cos \theta}{L (1 + 3 \sin^2 \theta)}} \quad (123)$$

当 $\theta = 90^\circ$ 时, 带入数据可以得到,

$$\omega_f = \sqrt{\frac{11\sqrt{3}g}{8} \frac{1}{L}} \quad (124)$$

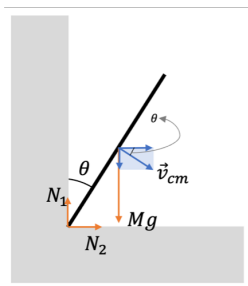


图 43.