力学期末总结

李 阳

中国科学技术大学近代物理系

联系我：

- 办公室：物质科研楼C1202
- 电邮：leeyoung1987@ustc.edu.cn
- 幻灯片会发给组织者，并且可以在如下url下载：
  http://staff.ustc.edu.cn/~leeyoung1987/Mechanics2023Fall/final.pdf
- 或者扫二维码：

期末考试

- **总评：** 平时表现 5% + 作业 25% ~ 30% + 期中考试 20% ~ 30% + 期末考试 40% ~ 50%，会视期中、期末情况灵活调整（随堂测验）
- **考试形式：** 半开卷，全校统一命题（6道题左右，计算为主，包括简答题和计算题）
- **考试范围：** 本学期全部内容，其中期中考试已经包含的内容占25%，其余部分占75%，不直接考察微积分、矢量代数
- **考试时间：** 1月10日

<u>* 具体以教务处安排为准，请咨询教务处或任课教师</u>

期末考试

- 注重对于基本概念和基本物理图像的理解，一般不涉及高深的数学知识或复杂的数学工具

- “坚守数理基础扎实”

“坚守数理基础扎实”	宽广的物理学/科学知识面	阅读
	清晰的物理图像	思考、讨论
	熟练的分析与解决问题的技巧	练习

如何学好力学?

- 能力的提升需要学习方法的转变:

	高中	大学	研究生
知识面	宽（较窄）	较宽	窄
知识深度	较浅	较深	深
知识系统性	不成体系	体系性较强	体系不唯一
知识获取	以教师为中心: 听课+作业+考试	以学生为中心: 听课+讨论+项目+报告	以研究为中心: 自学+上手做+论文+演讲
学习方法	做题	理解	创造

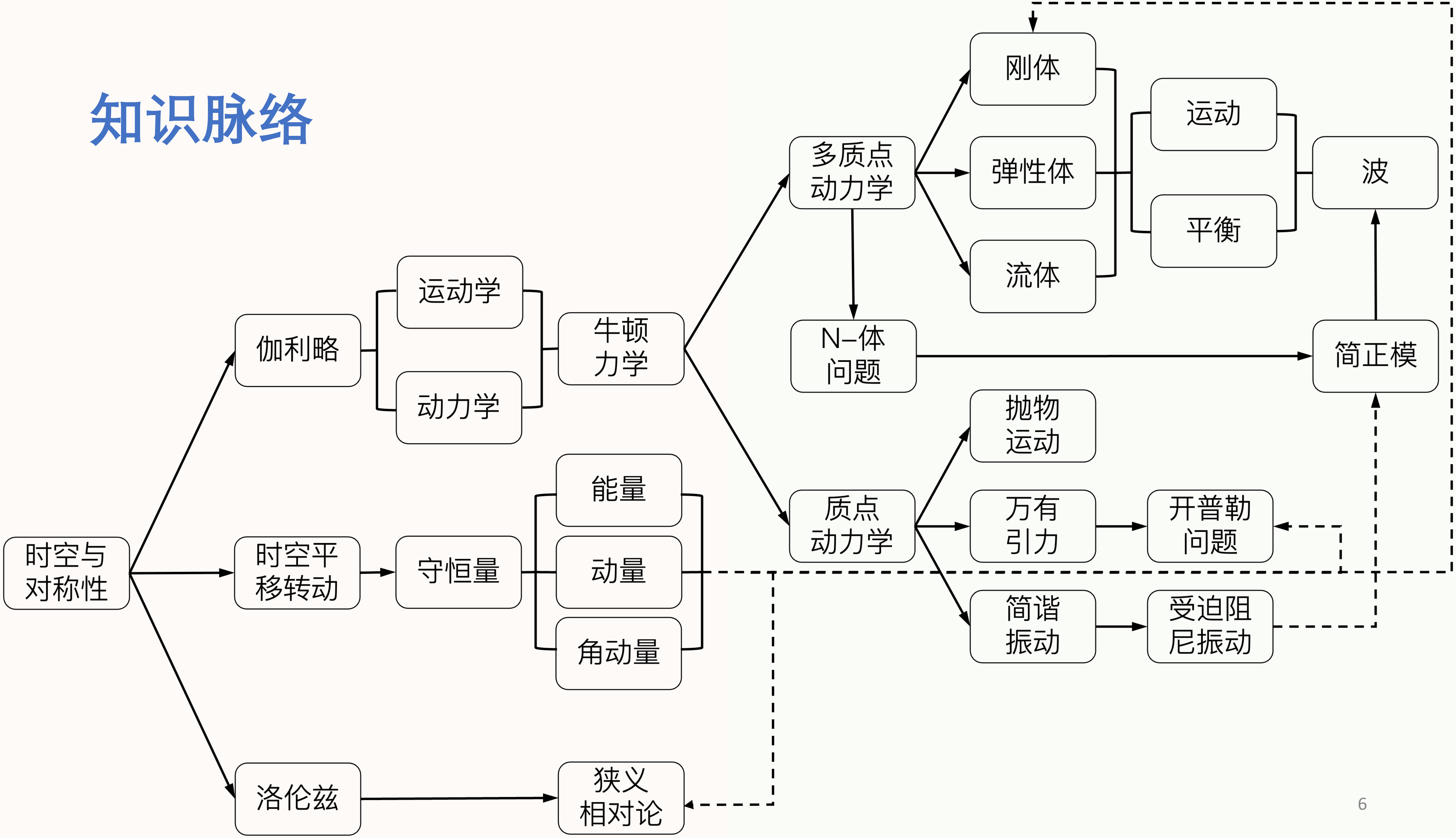
《礼记 • 学记》:君子之教，喻也。

课程内容

课程以微积分为工具，在此基础上对自然界的机械运动进行描述，了解其遵循的规律性

- 第1章 绪论、时间、空间与测量
- 第2章 质点运动学（包括微积分、矢量代数）
- 第3章 牛顿动力学
- 第4章 守恒定律（包括开普勒运动）
- 第5章 刚体力学
- 第6章 弹性力学初步
- 第7章 流体力学初步
- 第8章 振动和波
- 第9章 相对论

知识脉络



时空与对称性
伽利略
时空平移转动
洛伦兹
运动学
动力学
牛顿力学
守恒量
能量
动量
角动量
狭义相对论
多质点动力学
质点动力学
N–体问题
刚体
弹性体
流体
运动
平衡
波
简正模
抛物运动
万有引力
开普勒问题
简谐振动
受迫阻尼振动

绪论

- 物理学的研究方法

"Hypotheses non fingo": 自然哲学不关心某个现象的起因(cause)，而仅仅研究和转述事实(actual facts)

例子，伽利略研究自由落体：从某些假设出发，来推演落体的规律，并反过来通过逻辑推演和定量实验观测来考察 这些假设是否正确

- 测量与估计

测量与有效数字

数量级估计

量纲分析

熟悉物理学的研究方法；
熟悉测量、估计和量纲分析等方法

微积分、矢量代数

- 极限与导数的定义
- 导数的基本运算法则、高阶导数
- 微分：一阶导数作为微商
- 泰勒展开
- 积分的定义、初等函数的积分
- 矢量的定义：大小、方向
- 矢量代数：加法、内积、外积
- 矢量微积分
- 立体几何：极坐标、柱坐标、球坐标

熟练掌握用微积分、矢量代数来分析和解决物理问题

不直接考察

质点运动学

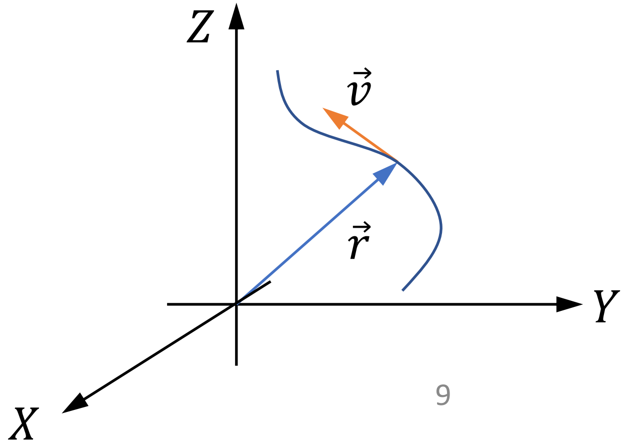
- 位置矢量、瞬时速度、加速度

$$\vec{r}, \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- 直角坐标系、运动独立性与合成
- 匀加速运动（自由落体、斜抛）

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

- 匀速圆周运动：向心加速度$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\vec{e}_r$



用矢量和微积分来描述运动
掌握匀加速运动、圆周运动等运动

质点运动学

- 一般二维运动:
  - 极坐标表示(以$\vec{r}$为参考进行投影)

$$\vec{r} = r\vec{e}_r, \qquad \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta, \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

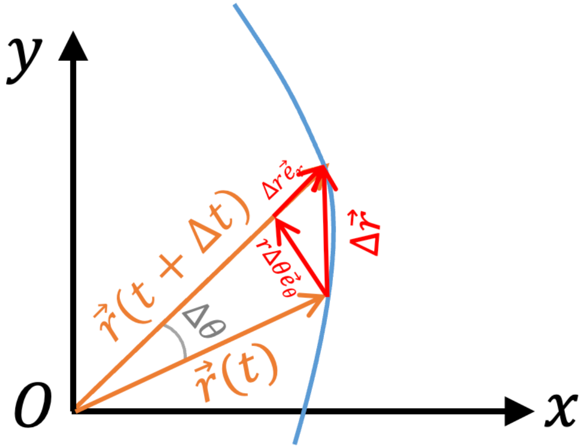
$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta,$$

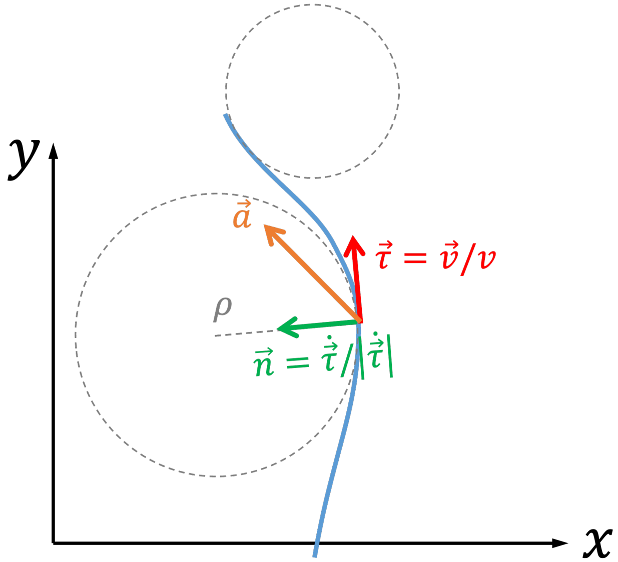
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

  - 自然坐标系(以$\vec{v}$为参考进行投影)

$$\vec{a} = \dot{v}\hat{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n}$$

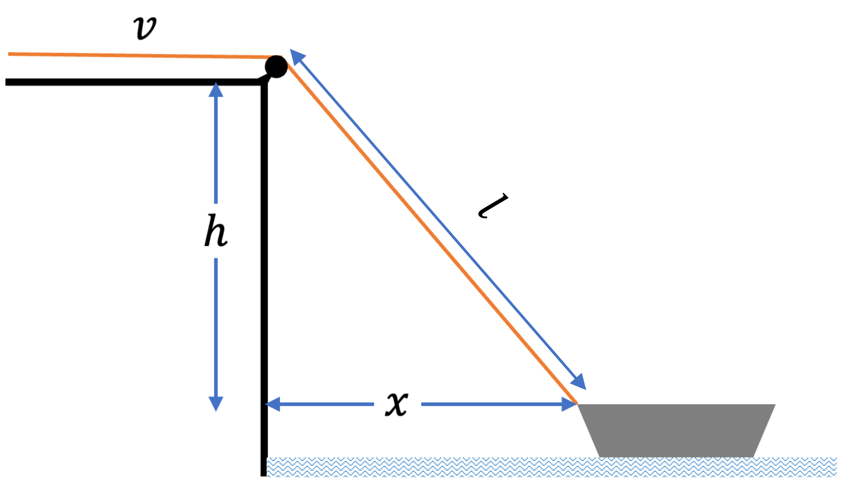
$\hat{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}, \hat{n} \propto \frac{d\hat{\tau}}{dt}, \rho$是曲率半径





用极坐标、自然坐标系来描述运动
掌握向心加速度等概念

例子

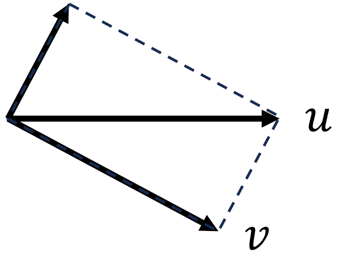


【例子】已知绳子的速度为v，求船的速度u。

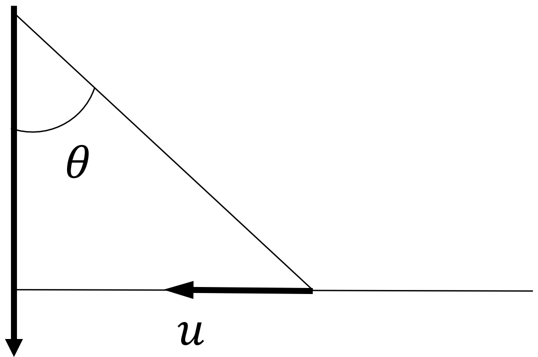
- 微积分方法：根据勾股定理$x = x(l) = \sqrt{h^2 + l^2}$

$$\Delta x = \frac{2l\Delta l}{2\sqrt{h^2 + l^2}} = \frac{l}{x}\Delta l \Rightarrow u = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{l}{x} v$$

- 矢量分析方法：

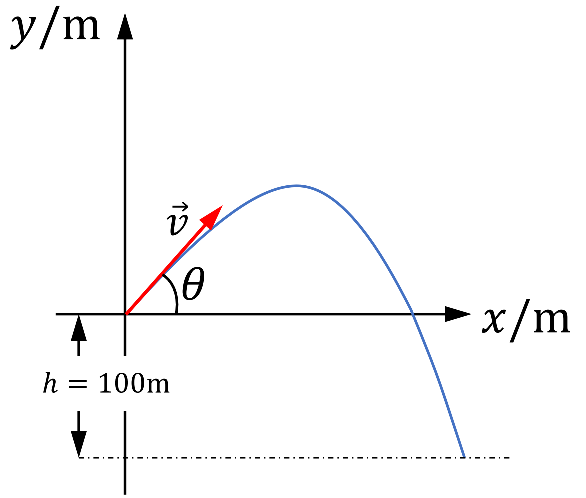


- 极坐标方法：



例题 2-93

一架直升机向北洪水困住湖中水筏上的灾民投放救济物品。当包裹被投出时，直升机在水筏的正上方100m高空，速度为25.0 m/s，并于水平面向上成$\boldsymbol{\theta} = 36.9°$的夹角。（1）包裹在空中停留时间为多长？（2）包裹落地时离木筏有多远？



解：

$$x(t) = v\cos\theta\, t,$$

$$y(t) = v\sin\theta\ t - \frac{1}{2}gt^2 = -h$$

$$\Rightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-v\sin\theta \pm \sqrt{v^2\sin^2\theta + 2gh}}{-g} = 6.30\mathrm{s}$$

$$\Rightarrow \Delta x = 126\ \mathrm{m}$$

舍弃$t < 0$的根

质点动力学

- 牛顿三大定律
- 非惯性参考系
  - 惯性力、离心力与科里奥利力
- 伽利略相对性原理
- 求解力学问题的一般策略: 隔离分解
  - 受力分析
  - 运动学分析：常见约束
  - 建立运动方程，并取分量
  - 数学求解
  - 注意守恒量分析

牛顿定律的物理内涵;
非惯性参考系;
掌握受力分析与求解基本的动力学方程（斜面、滑轮、摩擦力、落体……）

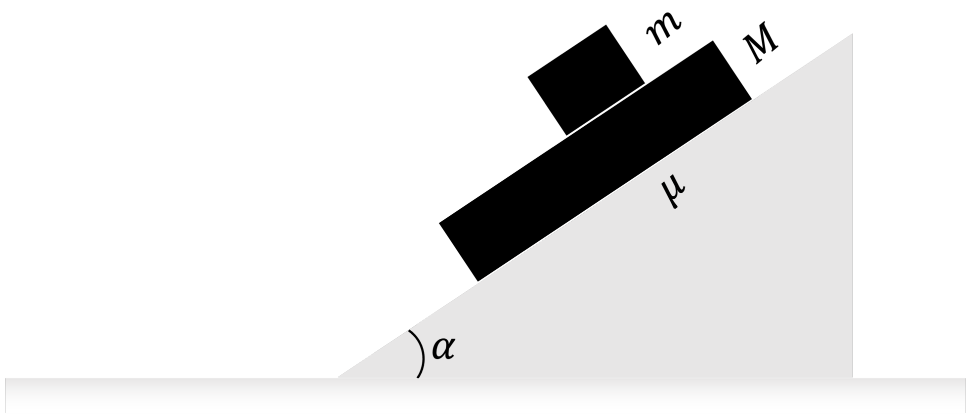
质点动力学

- 常见的力：
  - 弹性力、摩擦力、万有引力、阻力、基本相互作用力等
  - 做功、保守力、势能
- 万有引力定律
  - 性质
  - 壳层定理、引力势能
  - 潮汐力等引力现象
- 时间、空间与动力学

- 掌握常见的力，包括摩擦力、弹性力、万有引力等的性质，会计算这些力做功和势能
- 掌握万有引力、引力势能计算
- 潮汐力等引力和天文现象

例3.4

如图斜面问题，求木块M的加速度：



解：

$$Mg\sin\alpha-(m+M)g\cos\alpha\ \mu=Ma$$
$$\Rightarrow a=g\sin\alpha-\left(1+\frac{m}{M}\right)g\cos\alpha\ \mu$$

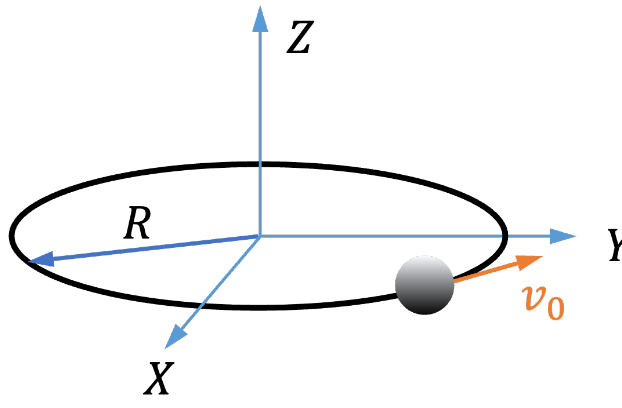
例子

一个质量为M的薄木板静置在水平桌面上，木板与桌面大小相同且一端与桌边对齐。木板中心放着一个质量为m的小木块。现在将一个恒定的水平力F作用在木板上，要将木板从木块下抽出来，又要是木块不掉到地上。假定各个接触面的摩擦系数均为μ，求F至少多大。

- 受力分析
- 约束分析（摩擦力问题，注意分情况讨论）
- 方程求解（匀加速问题）

例子

如图所示，一根半径为R的环形细铁丝固定光滑水平面上。铁丝上穿有一个质量为m的小球。已知细铁丝与小球之间的摩擦系数为μ，小球的初始速度为v_0。如果不考虑重力，求t时刻小球的速度。



受力分析：

$$ma = -\mu N, \qquad N = \frac{mv^2}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\mu \frac{v^2}{R}$$

求微分方程方法：分离变量直接积分方法（注意积分上下限）

$$\int \frac{dv}{v^2} = -\frac{\mu}{R}\int dt \qquad \Rightarrow v(t) = \frac{v_0}{1 + \mu v_0 t/R}$$

能量守恒

- 动能定理

$$\Delta T = W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int P dt$$

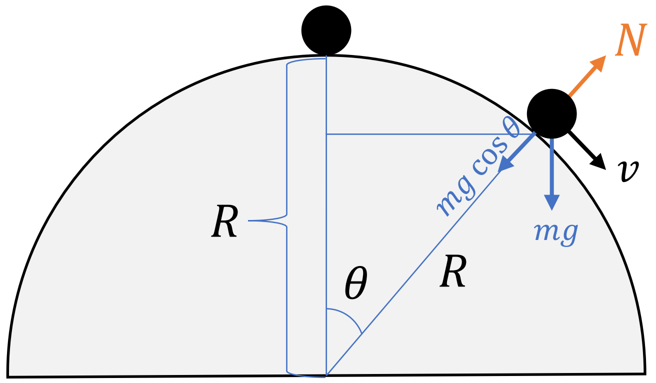
- 势能
- 机械能守恒

$$E = T + U$$

- 掌握动能定理、机械能守恒
- 掌握利用动能定理、机械能守恒计算运动速度、距离以及与其他问题的结合等

例子

一个小球在一个半圆形的穹顶顶部从静止开始下滑，穹顶半径为R,忽略穹顶和小球之间的摩擦。求小球脱离穹顶时的位置。



解:

设小球脱离穹顶的角度为θ。此时，穹顶对于小球的支撑力为0。而重力的分量完全用来提供小球所需要的向心力:

$$\frac{v^2}{R} = g\cos\theta$$

而速度可以通过机械能守恒得到:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(R - R\cos\theta),$$

联立可得,

$$2(1-\cos\theta) = \cos\theta \Rightarrow \theta = \arccos\frac{2}{3} \approx 48.2°$$

动量守恒

- 掌握动量守恒、冲量定理、质心定理
- 掌握孤立两体问题约化为单体问题

- 动量守恒

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- 冲量定理

$$\Delta\vec{p} = \int \vec{F} dt$$

- 质心定理： 孤立体系的质心保持静止或匀速直线运动

$$\vec{r}_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

- 两体问题：
  - 可以视为质心运动与相对运动的叠加

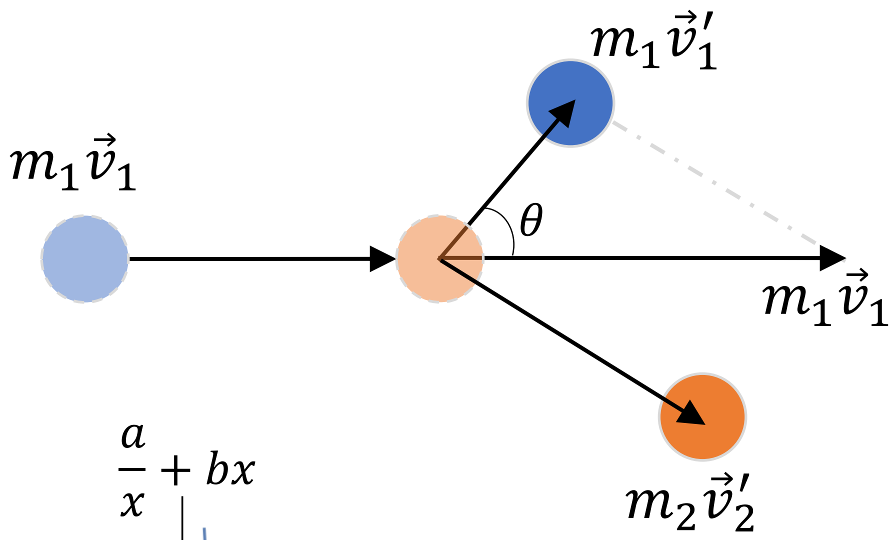
碰撞

- 动量守恒
- 能量关系
- 其他关系（速度、角度等）
- 质心参考系很多时候可以化简物理图像

- 掌握利用动量守恒等分析碰撞问题，并分析能量关系

例子

质量为m的粒子以$\vec{v}_1$的速度撞上质量为m_2的静止粒子。已知碰撞过程是弹性的，求碰撞前后粒子1的最大偏转角。



解：动量、能量守恒：

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

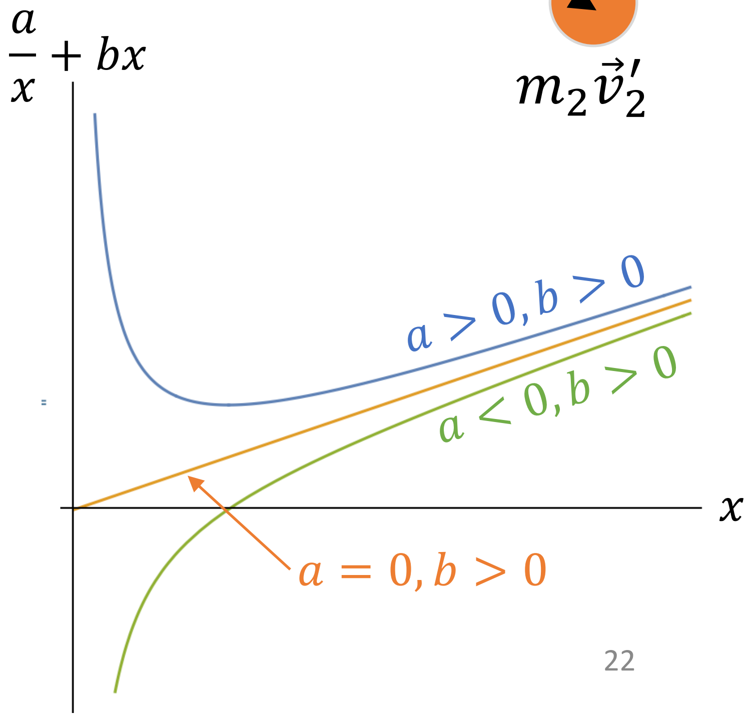
$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2'^2$$

消去v_2'，

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{(m_1-m_2)\,v_1^2 + (m_1+m_2)v_1'^2}{2m_1v_1v_1'} = \frac{a}{x} + bx$$

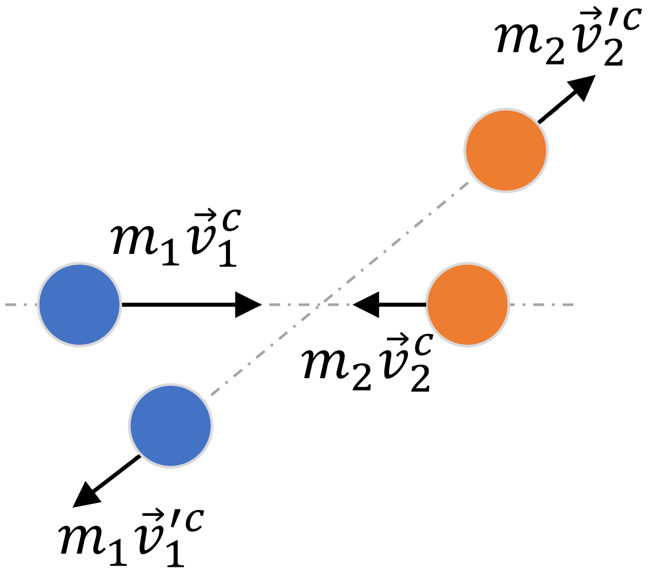
$$x = \frac{v_1'}{v_1}, \qquad a = \frac{m_1-m_2}{2m_1}, b = \frac{m_1+m_2}{2m_1}$$

- 如果$m_1 \le m_2$，$\theta_{max} = 180^\circ$（粒子1被弹回）
- 如果$m_1 \ge m_2$，$\theta_{max} = \arccos\sqrt{1-\frac{m_2^2}{m_1^2}} = \arcsin\frac{m_2}{m_1}$



例子

质量为m的粒子以$\vec{v}_1$的速度撞上质量为m_2的静止粒子。已知碰撞过程是弹性的，求碰撞前后粒子1的最大偏转角。



质心参考系求解:

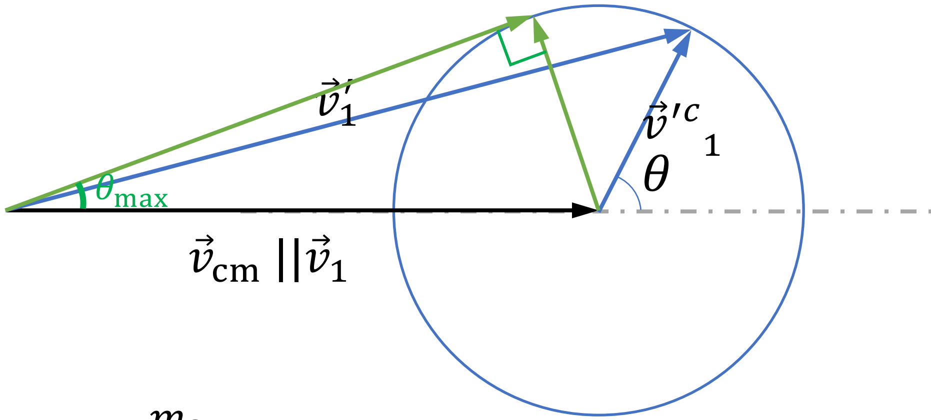
$$\vec{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1\vec{v}_1}{m_1+m_2}$$

$$\vec{v}_1^c = \vec{v}_1 - \vec{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{m_2\vec{v}_1}{m_1+m_2}$$

弹性碰撞前后质心速度大小不变，仅方向发生改变，

因此，$v_1'^c = v_1^c = \frac{m_2 v_1}{m_1+m_2}$。

变换到实验室参考系（如右图所示），$\vec{v}_1' = \vec{v}_1'^c + \vec{v}_{\mathrm{cm}}$



如果$v_{cm} \le v_1'^c$即$m_1 \le m_2$，最大偏转角为$\theta_{max} = 180^\circ$；

如果$v_{cm} > v_1'^c$即$m_1 > m_2$，最大偏转角为，$\theta_m = \arcsin\frac{v_1'^c}{v_{cm}} = \arcsin\frac{m_2}{m_1}$

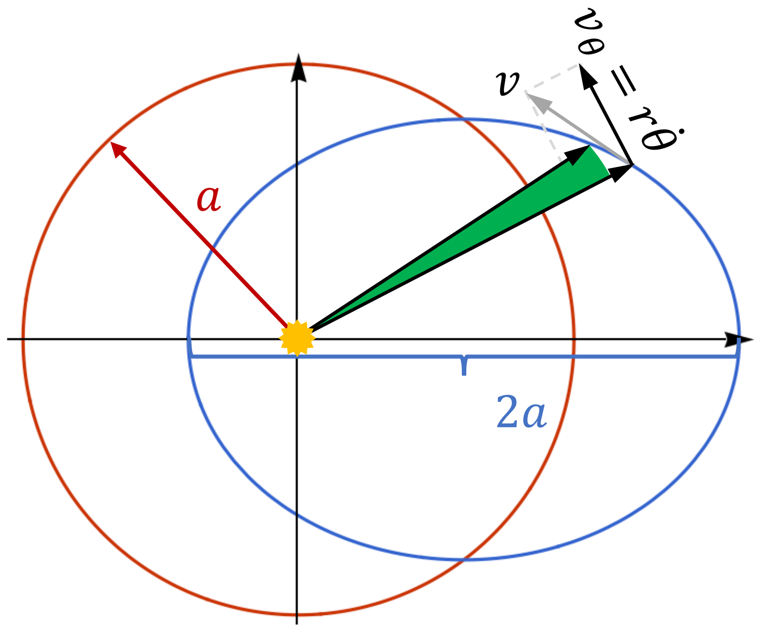
角动量守恒与开普勒运动

- 角动量与角动量守恒

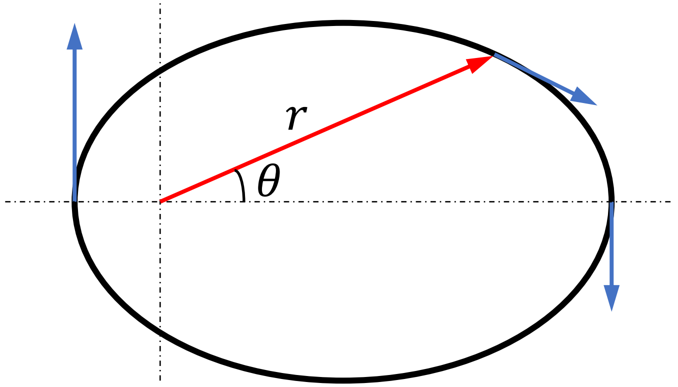
$$\vec{l} = m\vec{r}\times\vec{v}$$

- 其他守恒量、有效势能曲线、轨道方程
- 天体运动：开普勒行星运动三大定律
  - 结合牛顿第二定律、能量守恒
  - 开普勒第二定律：$\frac{1}{2}rv_\theta = \frac{\pi ab}{T}$
  - 开普勒第三定律：$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$

- 掌握角动量及角动量守恒的概念
- 掌握开普勒定律：圆轨道和椭圆轨道问题



角动量守恒与开普勒运动



- 圆轨道的能量:

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=-\frac{GMm}{2r}$$

- 椭圆轨道的能量（vis viva方程）:

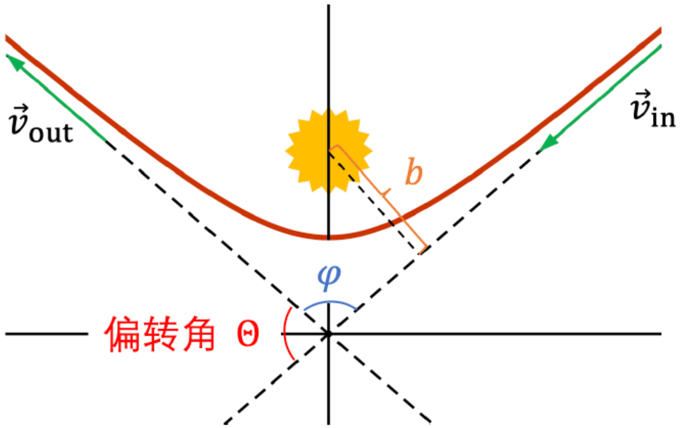
$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=-\frac{GMm}{2a}$$

- 近日点、远日点速度:

$$v_{max}=\sqrt{\frac{2GM}{r_{min}+r_{max}}\frac{r_{max}}{r_{min}}},\qquad v_{min}=\sqrt{\frac{2GM}{r_{min}+r_{max}}\frac{r_{min}}{r_{max}}}$$

掌握利用能量守恒、开普勒定律计算圆轨道、椭圆轨道、双曲轨道、抛物线轨道参数问题

角动量守恒与开普勒运动



- 双曲轨道与抛物线轨道
  - 轨道能量、角动量分析

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 = E = \frac{GMm}{2a}, l = v_\infty b$$

  - 轨道参数

- 了解圆锥曲线的基本参数和性质对于求解物理问题有帮助

掌握利用能量守恒、开普勒定律计算圆轨道、椭圆轨道、双曲轨道、抛物线轨道参数问题

表 III. 椭圆轨道的几何参数与物理参数

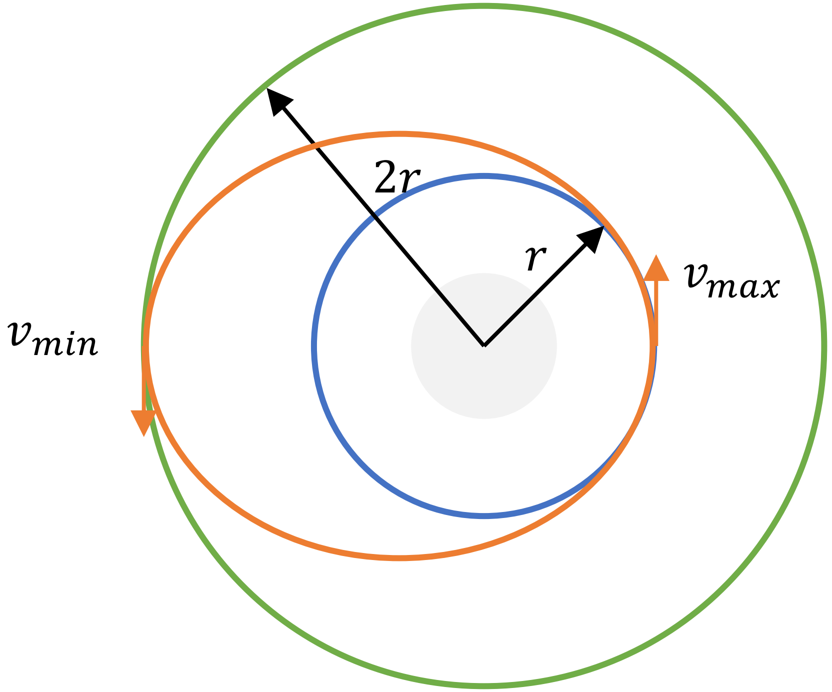
半长轴:	$a = -\dfrac{GMm}{2E}$,
半短轴:	$b = \dfrac{l}{\sqrt{2mE}}$,
半焦距:	$c = \sqrt{a^2 - b^2} = ae = -\dfrac{GMm}{2E}\sqrt{1 + \dfrac{2l^2E}{G^2M^2m^3}}$
偏心率:	$e = \sqrt{1 + \dfrac{2l^2E}{G^2M^2m^3}} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$,
半正交弦长:	$p = \dfrac{l^2}{GMm^2} = \dfrac{b^2}{a} = a(1 - e^2)$,
轨道频率:	$\Omega = \sqrt{\dfrac{GM}{a^3}} = \dfrac{2\pi}{T}$
轨道周期:	$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{GM}}$

表 IV. 双曲轨道的几何参数与物理参数

渐进速度:	$v_\infty = \sqrt{\dfrac{2E}{m}}$,
偏折角:	$\Theta = \pi - 2\arctan\sqrt{\dfrac{2l^2E}{G^2M^2m^3}} = 2\mathrm{arccot}\dfrac{v_\infty^2 b}{GM}$
半长轴:	$a = \dfrac{GMm}{2E} = \dfrac{GM}{v_\infty^2}$,
半短轴:	$b = \dfrac{l}{\sqrt{2mE}} = \dfrac{l}{mv_\infty}$,
半焦距:	$c = \sqrt{a^2 + b^2} = ae = \dfrac{GMm}{2E}\sqrt{1 + \dfrac{2l^2E}{G^2M^2m^3}}$
偏心率:	$e = \sqrt{1 + \dfrac{2l^2E}{G^2M^2m^3}} = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}}$,
半正交弦长:	$p = \dfrac{l^2}{GMm^2} = \dfrac{b^2}{a} = a(e^2 - 1)$,

例子

质量为m的卫星沿着圆轨道运动，轨道半径为r。卫星可以在极短的时间内喷出燃料进行轨道转移，燃料相对于卫星的速度为$u \gg v_{\mathrm{sat}}$。现在希望卫星进行一次轨道转移后卫星沿椭圆轨道运动，其远地点的距离为$2r$，求卫星需要喷出的燃料的质量Δm。



质量为m的卫星沿着圆轨道运动，轨道半径为r。卫星可以在极短的时间内喷出燃料进行轨道转移，燃料相对于卫星的速度为$u \gg v_{\mathrm{sat}}$。现在希望卫星进行一次轨道转移后卫星沿椭圆轨道运动，其远地点的距离为$2r$，求卫星需要喷出的燃料的质量Δm。

解：

轨道转移前，卫星在圆轨道运动，速度为，

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

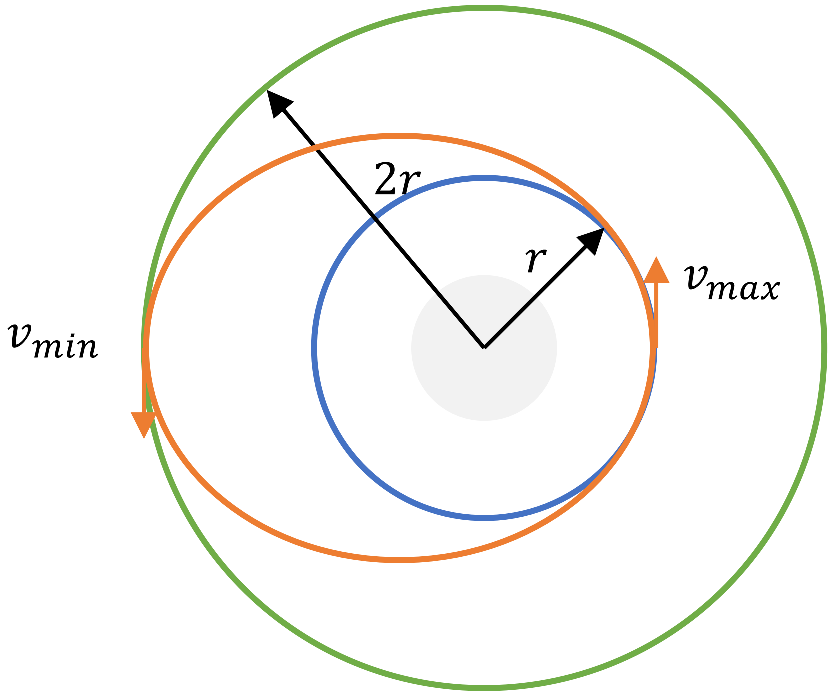
轨道转移后，卫星在椭圆轨道运动，近地点和远地点距离分别为$r, 2r$。根据开普勒第二定律，

$$r_{min} v_{max} = r_{max} v_{min}$$

同时，总机械能守恒，

$$\frac{1}{2} m v_{max}^2 - \frac{GMm}{r_{min}} = \frac{1}{2} m v_{min}^2 - \frac{GMm}{r_{max}} = -\frac{GMm}{2a}$$

可以求出，$v_{max} = \sqrt{\frac{4GM}{3r}}$



质量为m的卫星沿着圆轨道运动，轨道半径为r。卫星可以在极短的时间内喷出燃料进行轨道转移，燃料相对于卫星的速度为$u \gg v_{\text{sat}}$。现在希望卫星进行一次轨道转移后卫星沿椭圆轨道运动，其远地点的距离为$2r$，求卫星需要喷出的燃料的质量Δm。

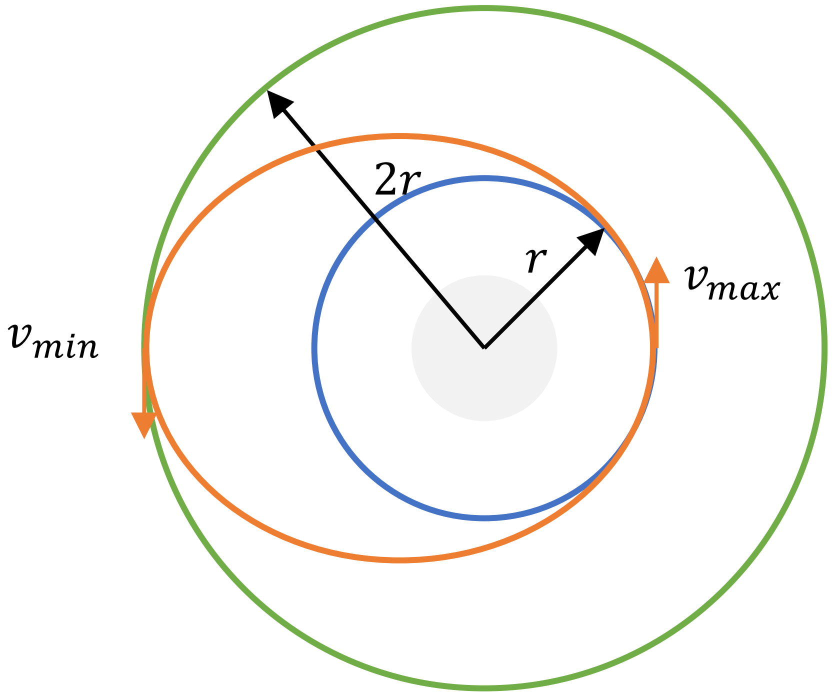
利用火箭方程

$$\Delta m = m\left(1 - e^{-\frac{\Delta v}{u}}\right) \approx m\left(\sqrt{\frac{4}{3}} - 1\right)\frac{1}{u}\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

或动量守恒，

$$mv_0 = (m - \Delta m)v_{max} - \Delta m(u - v_0)$$

$$\Rightarrow \Delta m = m\left(\sqrt{\frac{4}{3}} - 1\right)\frac{1}{u}\sqrt{\frac{GM}{r}}$$



质点系力学

- 质点系的动量与动量守恒

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = M\vec{v}_{cm}$$

  - 质心定理

$$M\vec{a}_{cm} = \vec{F}^{ext}$$

- 质点系的角动量、角动量分解与角动量守恒

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i = M\vec{r}_{cm}\times\vec{v}_{cm} + \sum_i m_i\vec{r}_i'\times\vec{v}_i'$$

  - 角动量定理

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{ext}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i\,,$$

$$\vec{v}_{cm} = \dot{\vec{r}}_{cm},$$

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_{cm},$$

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

质点系运动的守恒量以及质心运动与相对运动的分解

质点系力学

- 质点系的能量、柯尼希定理与能量守恒

$$E=\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i,j}V(r_{ij})=\frac{1}{2}Mv_{cm}^2+\frac{1}{2}\sum_i m_i\, v'^2_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j}V(r_{ij})$$

  - 两体问题的柯尼希定理： $T=\frac{1}{2}M\vec{v}_{cm}^2+\frac{1}{2}\mu v^2$
- 两体问题的约化：
  - 方法一： 相对运动

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F},\qquad \vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2,\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

  - 方法二： 相对于质心的运动 $\vec{\xi}_i=\vec{r}_i-\vec{r}_{cm}$

掌握两体运动的约化、柯尼希定理、质心参考系及其应用（如碰撞问题）

几类特殊的质点系问题

- 变质量体系（本质上是动量守恒的应用）：

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{ext} + \frac{dm}{dt}\vec{v}_r$$

- 刚体
- 多质点弹簧耦合体系：简正模
- 连续体

掌握利用动量守恒分析变质量体系问题

刚体

- 刚体运动：平动+转动（6个自由度）

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times(\vec{r}_P - \vec{r}_C)$$

- 刚体动力学：质心定理+角动量定理

$$M\frac{d\vec{v}_{\mathrm{cm}}}{dt} = \vec{F}^{\mathrm{ext}}, \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\mathrm{ext}}$$

  - 刚体静力平衡：$\sum\vec{F}^{\mathrm{ext}} = 0, \sum\vec{M}^{\mathrm{ext}} = 0$

- 角动量$\vec{\omega}$与角速度$\vec{L}$之间的关系：转动惯量
  - 定轴转动刚体的转动惯量的计算
  - 平行轴定理、垂直轴定理

- 刚体运动
- 掌握刚体静力平衡、动力学
- 掌握平面平行运动的能量分析和动力学分析，包括利用动量和角动量

刚体

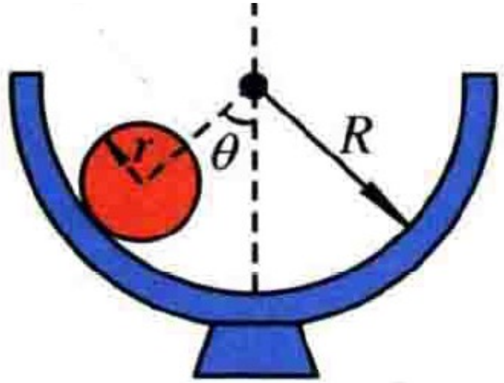
- 刚体动能：平动+转动

$$T = \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{cm}}\omega^2$$

- 平面平行运动
  - 运动学（纯滚动等、平动+转动、瞬时转动轴）
  - 能量分析
  - 动力学分析（动量和角动量分析）

- 刚体运动
- 掌握刚体静力平衡、动力学
- 掌握平面平行运动的能量分析和动力学分析，包括利用动量和角动量

如图所示，在半径为 R 的半球形碗内有一个半径为 r 的均匀实心球（$r<R$）。小球从与垂直方向成 θ 角的位置由静止释放，沿碗内壁无滑动地滚动。求当它到达碗底部时的角速率。



解一：能量守恒

重力势能：以碗底为参考点，重心的位置 $mg[R-(R-r)\cos\theta]$

刚体动能：

$$T=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

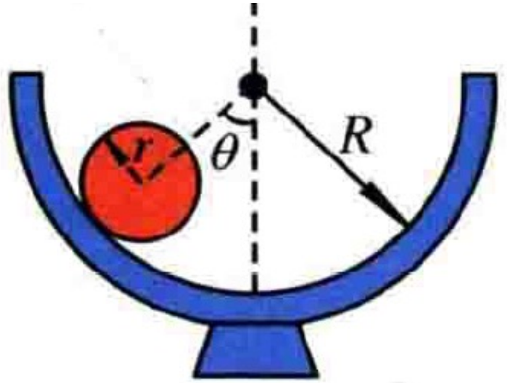
球的转动惯量：$I=\frac{2}{5}mr^2$

约束条件：纯滚动$v=\omega r$，代入动能表达式，$T=\frac{7}{10}mv^2$

总能量守恒：$E=\frac{7}{10}mv^2+mg[R+(r-R)\cos\theta]$

$$\Rightarrow v=\sqrt{\frac{10}{7}g(R-r)(1-\cos\theta)},\qquad \omega=\frac{v}{r}=\sqrt{\frac{10g}{7r}\left(\frac{R}{r}-1\right)(1-\cos\theta)}$$

如图所示，在半径为 R 的半球形碗内有一个半径为 r 的均匀实心球（$r<R$）。小球从与垂直方向成 θ 角的位置由静止释放，沿碗内壁无滑动地滚动。求当它到达碗底部时的角速率。



解二：加速度

切向：$mg\sin\theta - f = ma$，法向加速度由支持力提供

力矩：$fr = I\dot{\omega} = \frac{2}{5}mr^2\dot{\omega}$

约束关系：$\dot{\omega}r = a$

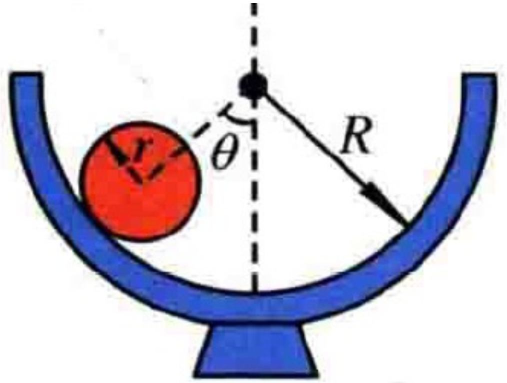
因此，$f = \frac{2}{5}ma \Rightarrow mg\sin\theta - \frac{2}{5}ma = ma \Rightarrow a = \frac{5g}{7}\sin\theta$

切向加速度与角度的关系：切向距离 $s = (R-r)\theta$

$$\Rightarrow v = -(R-r)\dot{\theta} \Rightarrow a = -(R-r)\ddot{\theta}$$

$$(R-r)\ddot{\theta} = -\frac{5g}{7}\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{5g}{7(R-r)}\sin\theta$$

如图所示，在半径为 R 的半球形碗内有一个半径为 r 的均匀实心球（$r<R$）。小球从与垂直方向成 θ 角的位置由静止释放，沿碗内壁无滑动地滚动。求当它到达碗底部时的角速率。



变量代换：$\ddot{\theta}=\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{d\dot{\theta}}{dt}=\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta}=\frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$

$$\frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}=-\frac{5g}{7(R-r)}\sin\theta$$

$$\frac{dv^2}{d\theta}=\frac{10g}{7}(R-r)\sin\theta \quad\Rightarrow\quad v^2=\frac{10g}{7}(R-r)(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow\omega=\frac{v}{r}=\sqrt{\frac{10g}{7r}\left(\frac{R}{r}-1\right)(1-\cos\theta)}$$

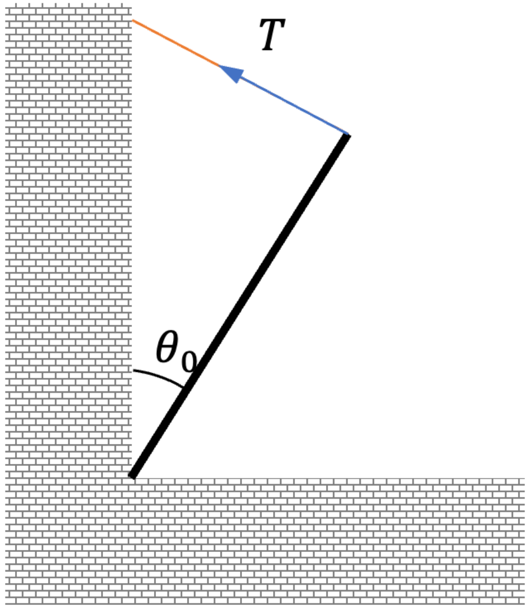
例子

一个高L、质量为M的镜框放在墙角，如图所示。镜框上端系着一根细绳，下端放置在墙角。已知镜框与墙的初始夹角为$\theta_0 = 30°$，镜框与墙和地面的摩擦都可以忽略不计。

a)求保持镜框平衡所需要的最小的张力T；

b)某一时刻，细绳突然断裂，求镜框脱离墙角时与墙面的夹角θ^*。

c)求镜框完全接触地面时的角速度ω。



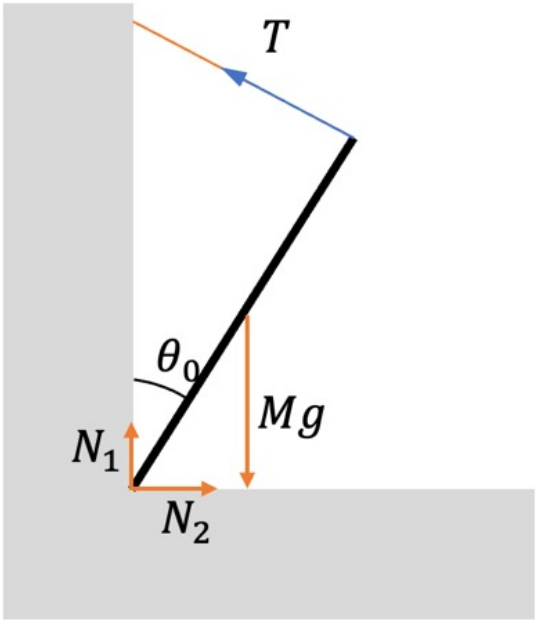
解:

a) 首先对镜框做受力分析（如图）。以墙角为参考点建立刚体静力平衡方程:

$$TL\sin\alpha = Mg\frac{L}{2}\sin\theta_0$$

其中α为绳与镜框的夹角。当两者呈90度时，张力最小为,

$$T = \frac{Mg}{2}\sin\theta_0 = \frac{Mg}{4}$$



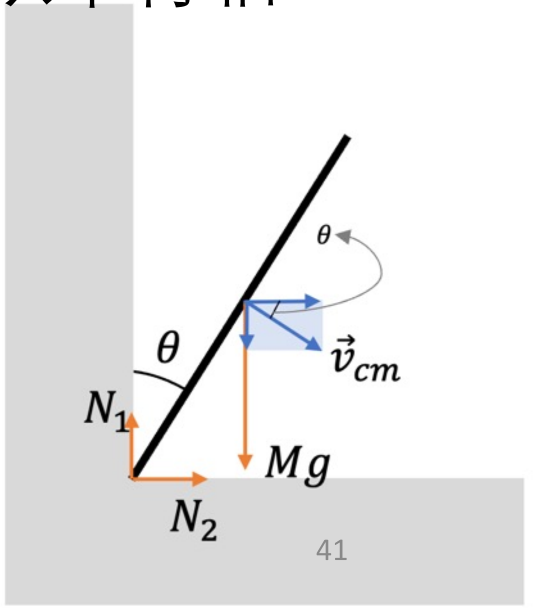
b) 镜框在绳断裂以后、脱离墙角以前，以墙角为轴做定轴转动。根据刚体的动能定理，重力做的功转化为刚体的转动动能。

因此当镜框与墙的夹角为θ时，其角速度$\omega = \dot{\theta}$满足，

$$Mg\frac{L}{2}(\cos\theta_0 - \cos\theta) = \frac{1}{2}I\omega^2$$

这里，$I = \frac{1}{3}ML^2$为镜框绕其一端转动的转动惯量（可以从平行轴定理求出来）。由此可以得到，

$$\omega = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$$



写下镜框脱离墙角以前满足的动力学方程。在水平方向，镜框只受到墙的支持力的作用，方向向右：

$$N_2 = Ma_x$$

这里，a_x为镜框质心的加速度。因此，当$a_x = 0$时，镜框将脱离墙角。质心的加速度可以从质心速度导数得到，(参考后面见另外一种求加速度的方法)

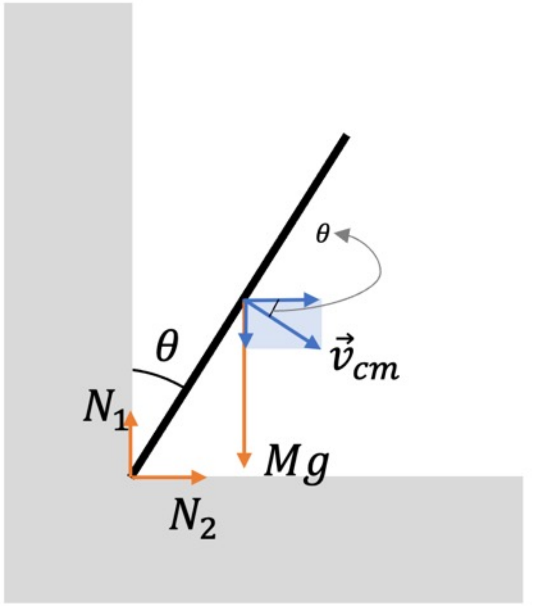
$$a_x = \dot{v}_x$$

这里，

$$v_x = v_{\mathrm{cm}} \cos\theta$$

为质心速度$\mathrm{v_{cm}}$的水平分量。其中，质心速度$\mathrm{v_{cm}}$根据定轴转动可以得到，

$$v_{\mathrm{cm}} = \omega \frac{L}{2}$$



$$\Longrightarrow v_x = \cos\theta\sqrt{\frac{3gL}{4}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$$

下一步，对上式求时间导数，从而得到加速度。

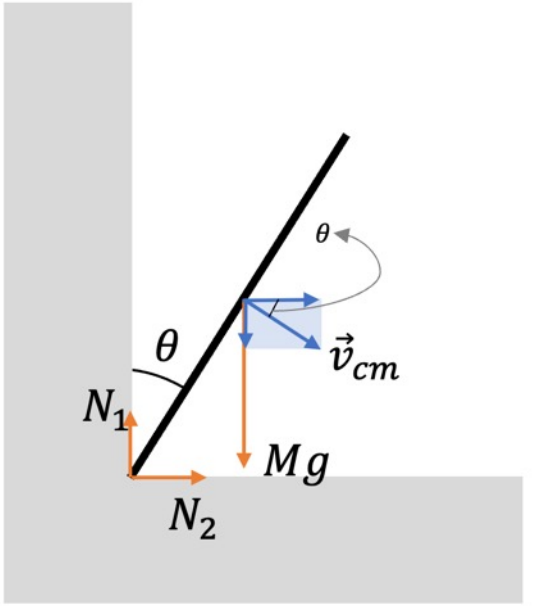
$$a_x = \sqrt{\frac{3gl}{4}}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} - \sin\theta\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}\right)\dot{\theta}$$

$$= \frac{3}{4}g(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)\sin\theta$$

上式用到了角动量的结果。

从$a_x = 0$可以得到，镜框脱离墙角的临界角为，

$$\cos\theta^* = \frac{2}{3}\cos\theta_0 \Longrightarrow \theta^* = \arccos\left(\frac{2}{3}\cos\theta_0\right) \approx 55°$$



第二种求加速的方法可以根据质心的曲线运动求出来。其中，质心的法向加速度为，

$$a_n = \frac{v_{\mathrm{cm}}^2}{\left(\frac{L}{2}\right)} = \frac{\omega^2\left(\frac{L}{2}\right)^2}{\frac{L}{2}} = \frac{\omega^2 L}{2} = \frac{3g}{2}(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

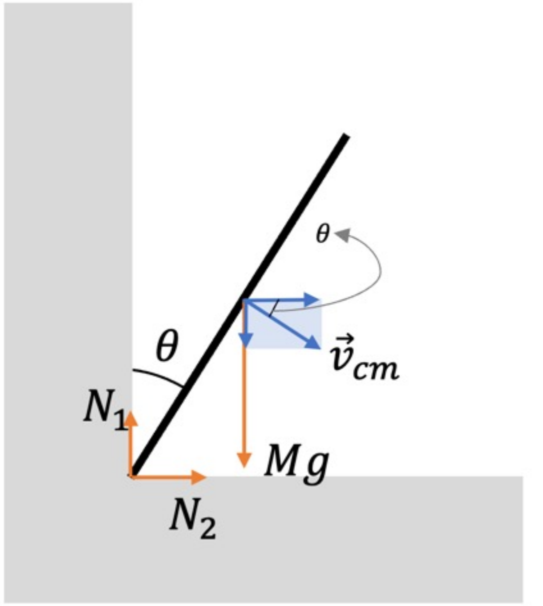
质心的切向加速度为，

$$a_t = \frac{\beta L}{2}$$

这里，β为角加速度。既可以通过对ω求导得到，也可以直接根据力矩方程得到（以镜框下端为参考点）：

$$I\beta = \frac{1}{2}MgL\sin\theta, \qquad \left(I = \frac{1}{3}ML^2\right)$$

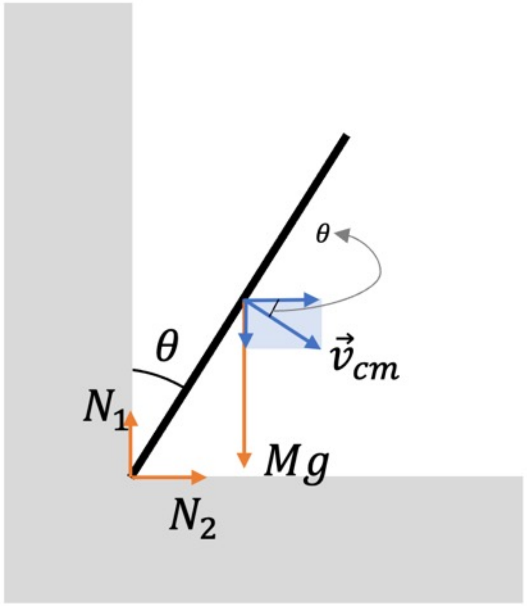
因此，$\beta = \frac{3g}{2L}\sin\theta$, 从而，切向加速度为，



$$a_t = \frac{3g}{4}\sin\theta$$

水平方向的加速度 a_x 可以通过两个加速度在水平方向投影得到：

$$a_x = \frac{3g}{4}\sin\theta(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$$



c) 镜框脱离墙面以后，水平方向上不受力，因此水平方向的质心速度不变，

$$v_x = \cos\theta^* \sqrt{\frac{3gL}{4}(\cos\theta_0 - \cos\ \theta^*)} = \frac{1}{3}\sqrt{gL\cos^3\theta_0}$$

由于镜框下端不脱离水平面，以质心为参考点必然有（如图），

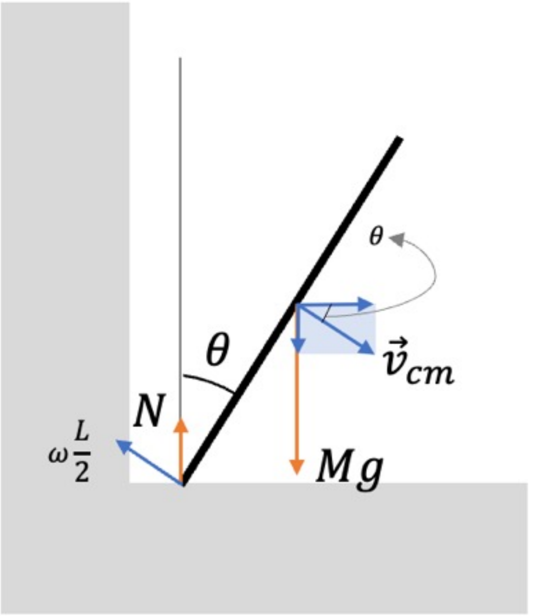
$$v_y = \omega\frac{L}{2}\sin\theta$$

其中，v_y是质心在垂直方向的速度。对于末态，$\theta = \frac{\pi}{2} = 90°$，因此y方向末态速度，

$$v_y = \omega\frac{L}{2}$$

根据动能定理，镜框完全着地时，

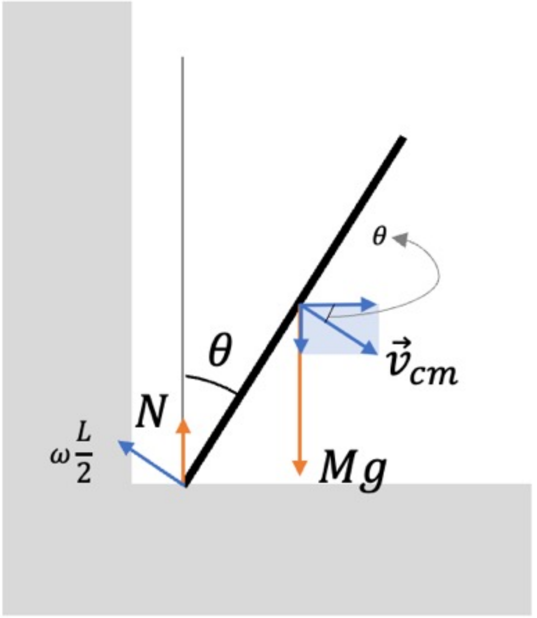
$$Mg\frac{L}{2}\cos\theta_0 = \frac{1}{2}Mv_x^2 + \frac{1}{2}Mv_y^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2$$



把上述表达式代入，整理可以得到，

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{3L}\cos\theta_0\,(9-\cos^2\theta_0)} = \sqrt{\frac{11\sqrt{3}}{8}\frac{g}{L}} \approx \sqrt{2.4\frac{g}{L}}$$

这个角速度比完全不脱离墙角(铰链)下落$\sqrt{3\frac{g}{L}}$稍微慢一些。



弹性体力学

- 弹性体模型：应力与应变
- 胡克定律、弹簧串并联
- 线性应变、体应变、剪切应变：杨氏模量、泊松比
- 弹性波：胀缩波、剪切波

- 了解弹性体模型、剪切应变和体应变的概念；
- 结合振动与波一章，了解弹性体中的波；
- 掌握基本的线性应变的计算

流体力学

- 流体模型
- 流体静力平衡

$$p = p_0 + \rho g h \quad \longrightarrow \quad p + \rho\varphi = \text{const.}$$

  - 浮力（阿基米德原理）
  - 流体压力的特点：各向同性、垂直于液面
- 流体动力学模型
  - 流场、流线、流管
  - 定常流动
  - 连续性原理：流量守恒

- 熟悉流体的概念；
- 掌握计算流体静压力、浮力的方法
- 掌握利用伯努利方程计算流体压力
速度等量；
- 粘滞流体的基本概念，包括斯托克
斯定理和泊肃叶定理；

流体力学

- 伯努利原理

$$\frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

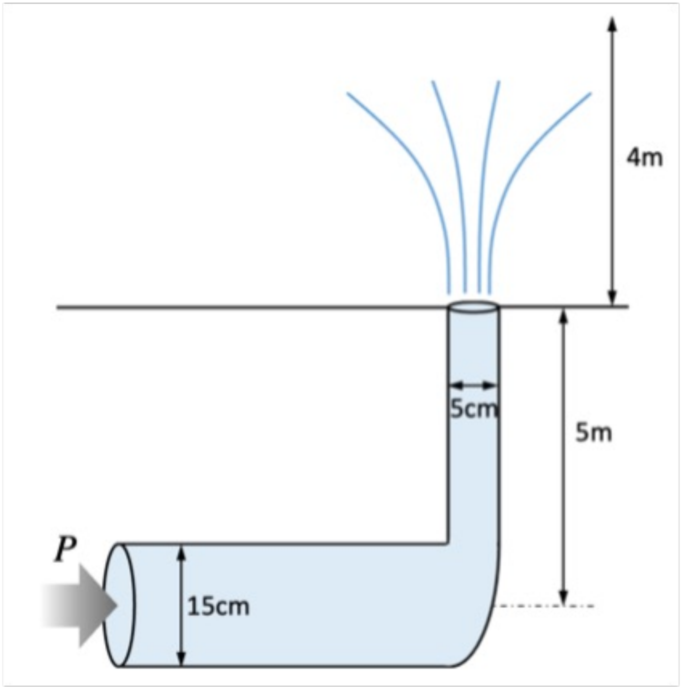
$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p = \text{const.}$$

  - 托里拆利原理：$v = \sqrt{2gh}$
- 粘滞流体
  - 流体粘滞的基本概念
  - 泊肃叶定理
  - 斯托克斯定理
- 流体的一般理论：相似性法则（量纲分析）、雷诺数与湍流

- 熟悉流体的概念；
- 掌握计算流体静压力、浮力的方法；
- 掌握利用伯努利方程计算流体压力、速度等量；
- 粘滞流体的基本概念，包括斯托克斯定理和泊肃叶定理；

例子

一个喷泉由一根位于地下5m处的直径为15cm的水平管道供水。这根管道在喷泉的位置弯曲向上，直径缩小为5cm，最终在地面处水喷出形成喷泉。现要求喷泉的高度为4m。假定水在水管中做定常流动，不考虑水的粘滞效应，喷泉出口处的压强取大气压$p_0 = 1.01 \times 10^5$ Pa。问需要在水平管道中施加多大压强P才能达到设计要求？



例子

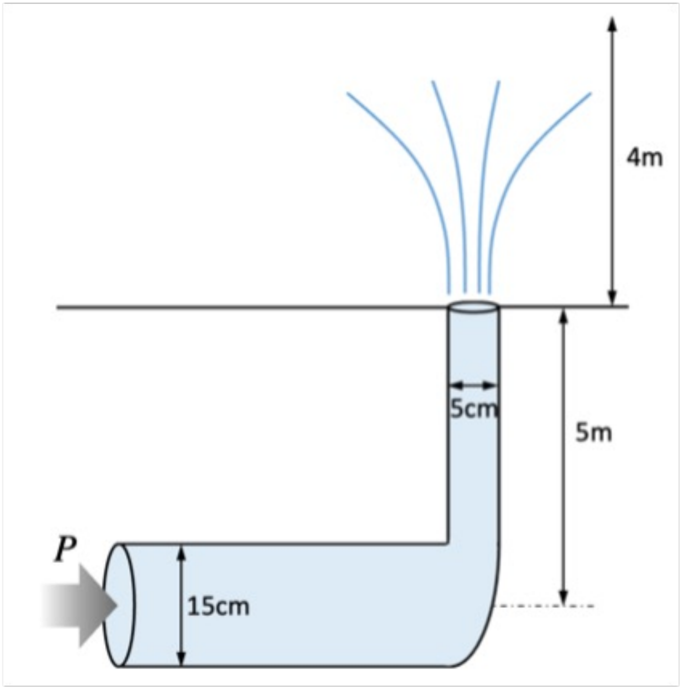
一个喷泉由一根位于地下5m处的直径为15cm的水平管道供水。这根管道在喷泉的位置弯曲向上，直径缩小为5cm，最终在地面处水喷出形成喷泉。现要求喷泉的高度为4m。假定水在水管中做定常流动，不考虑水的粘滞效应，喷泉出口处的压强取大气压$p_0 = 101\ \text{kPa}$。问需要在水平管道中施加多大压强P才能达到设计要求？

解：

- 根据伯努利方程，

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g h_0$$

- 由高度得到喷泉速度v_0：$v_0 = \sqrt{2gh} = 8.8\ \text{m/s}$



例子

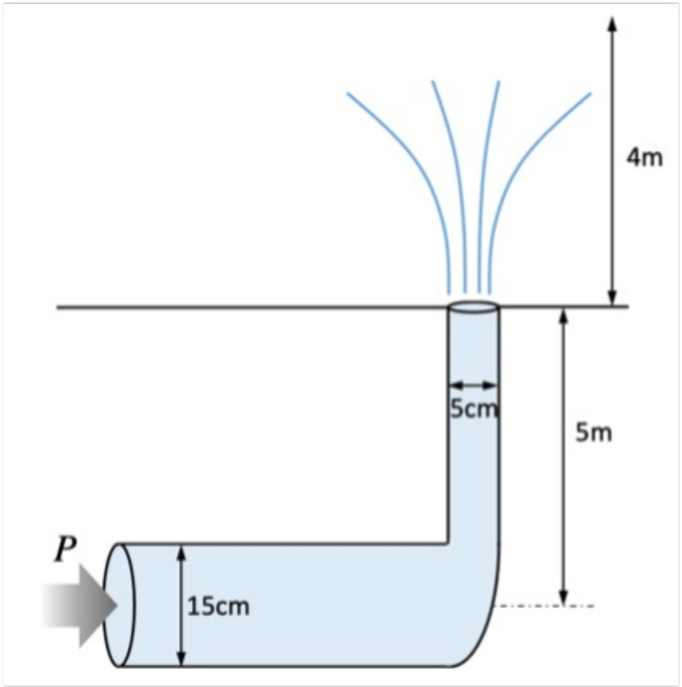
一个喷泉由一根位于地下5m处的直径为15cm的水平管道供水。这根管道在喷泉的位置弯曲向上，直径缩小为5cm，最终在地面处水喷出形成喷泉。现要求喷泉的高度为4m。假定水在水管中做定常流动，不考虑水的粘滞效应，喷泉出口处的压强取大气压$p_0 = 101\ \text{kPa}$。问需要在水平管道中施加多大压强P才能达到设计要求？

解：

- 根据伯努利方程，

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g h_0$$

- 由高度得到喷泉速度v_0：$v_0 = \sqrt{2gh} = 8.8\ \text{m/s}$



例子

一个喷泉由一根位于地下5m处的直径为15cm的水平管道供水。这根管道在喷泉的位置弯曲向上，直径缩小为5cm，最终在地面处水喷出形成喷泉。现要求喷泉的高度为4m。假定水在水管中做定常流动，不考虑水的粘滞效应，喷泉出口处的压强取大气压$p_0 = 101\ \mathrm{kPa}$。问需要在水平管道中施加多大压强P才能达到设计要求?

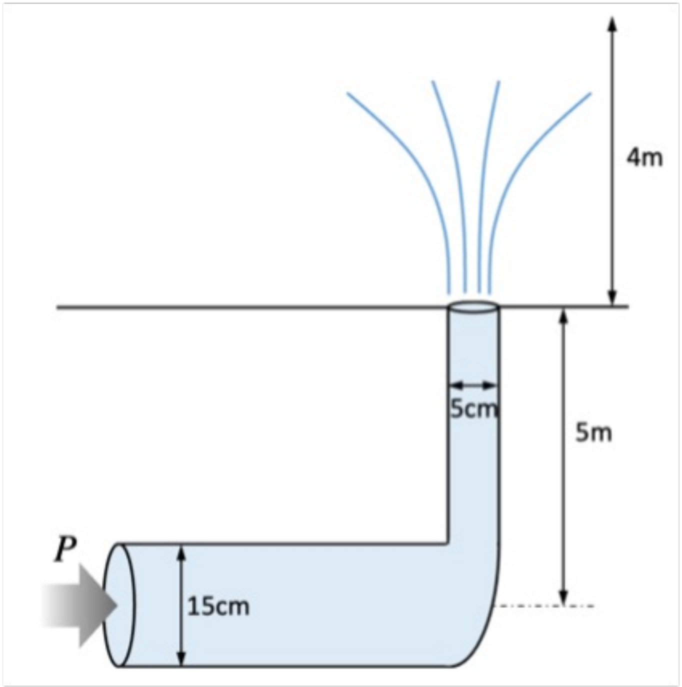
解:

- 连续性方程,

$$\rho v \pi R^2 = \rho v_0 \pi r^2$$

$\Rightarrow v = 0.98\ \mathrm{m/s}$

- $P = 189\ \mathrm{kPa}$



振动与波对比

振动

- 时间周期性
- 适用于单质点
- 简谐振动
  - 三角函数
- 能量守恒
- 简谐振动的叠加
  - 拍

多质点振动

- 时间周期性
- 适用于多质点体系
- 简正模
  - 三角函数
- 能量守恒
- 简正模的叠加

波动

- 时间、空间周期性
- 适用于连续介质
- 简谐波
  - 三角函数
- 能量传播
- 简谐波的叠加
  - 拍、波包、驻波、干涉、衍射、反射、折射

振动与波

- 掌握简谐振动的基本性质；
- 掌握将平衡位置附近的运动近似为简谐振动，并求其周期
- 熟悉阻尼运动的基本概念，会计算品质因子、能量衰减率等基本关系

- 简谐振动
  - 简谐振动的性质：周期、频率、振幅、速度、加速度、能量……
  - 单摆、复摆、受恒定力（如重力、摩擦力）的简谐振动
  - 一维势能曲线、将平衡位置附近的振动近似为简谐振动
    - 分析回复力或者分析能量

$$V(x) = V(x_0) + \cancel{V'(x_0)}(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$

- 阻尼振动与受迫振动
  - 欠阻尼、临界阻尼、过阻尼解的形式及基本性质，如能量衰减等
  - 受迫振动的稳态解的基本性质
  - 共振曲线、品质因子

振动与波

- 熟悉简谐振动的叠加;
- 掌握利用拍频计算频率;
- 掌握简谐波基本性质;
- 了解基本波动方程的推导，尤其是可以利用质点弹簧模型推导;

- 振动的叠加
  - 相同频率的振动的叠加：三角函数关系、矢量叠加
  - 不同频率的振动的叠加：拍频$\nu = |\nu_1 - \nu_2|$
- 简谐波
  - 基本性质：包括相位、周期$T = 2\pi/\omega$、波长λ、波数$k = 2\pi/\lambda$、相速度$c = \lambda/T$、色散关系
  - 基本的波动方程：利用弹簧质点模型推导波动方程
  - 波的能量密度与能流密度、声强
  - 简谐波的叠加：波包
  - 驻波：边界条件、波长与总长的关系
  - 惠更斯原理

振动与波

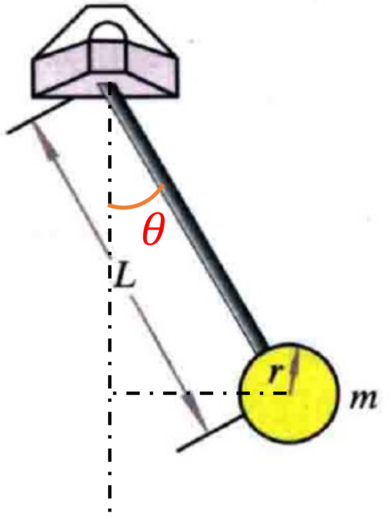
- 了解惠更斯原理，及相应的干涉、衍射、折射和反射等现象
- 掌握多普勒效应计算频率改变
- 了解简正模的概念

- 惠更斯原理
  - 球面波振幅随着距离的衰减
  - 惠更斯原理、双缝干涉、衍射、折射、反射
- 多普勒效应

$$\nu' = \frac{1 + v/c}{1 - u/c}\nu$$

  - 多普勒效应测量运动物体速度
  - 激波与马赫锥
- 简正模
  - 弹簧耦合的多质点体系的简正模

如图所示，一复摆由一个质量为 m、半径为 r 的球状摆锤悬挂在一根质量忽略不计的硬棒下组成。摆锤中心到支点的距离为 L。当 $r\ll L$ 时，这样的复摆常常看成长度为 L 的单摆。(1) 证明：对于小振动，振动周期为 $T=T_0\sqrt{1+2r^2/(5L^2)}$，其中 $T_0=2\pi\sqrt{L/g}$ 是单摆的振动周期。



解：能量方法 $E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2$

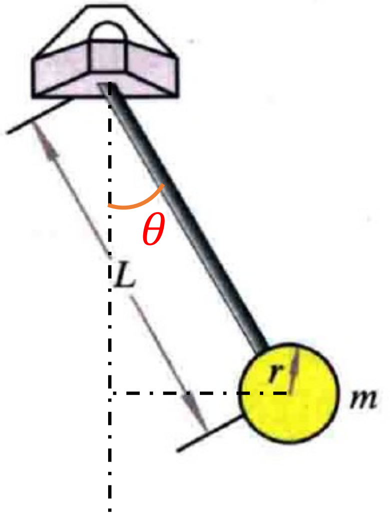
- 势能，$V=mgL(1-\cos\theta)\approx\frac{1}{2}mgL\theta^2$

$$\boxed{\cos\theta\approx 1-\frac{1}{2}\theta^2+O(\theta^4)}$$

- 动能——刚体的动能：平动+转动。
  - 如果以质心为参考点，平动速度$v\approx L\dot{\theta}$，转动速度$\omega=\dot{\theta}$，转动惯量$I=\frac{2}{5}mr^2$

$$T=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}m(L^2+\frac{2}{5}r^2)\dot{\theta}^2$$

如图所示，一复摆由一个质量为 m、半径为 r 的球状摆锤悬挂在一根质量忽略不计的硬棒下组成。摆锤中心到支点的距离为 L。当 $r \ll L$ 时，这样的复摆常常看成长度为 L 的单摆。（1）证明：对于小振动，振动周期为 $T = T_0\sqrt{1+2r^2/(5L^2)}$，其中 $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ 是单摆的振动周期。



- 如果以转轴为参考点，角速度$\omega = \dot{\theta}$，转动惯量$I = I_C + mL^2 = \frac{2}{5}mr^2 + mL^2$

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\left(L^2 + \frac{2}{5}r^2\right)\dot{\theta}^2$$

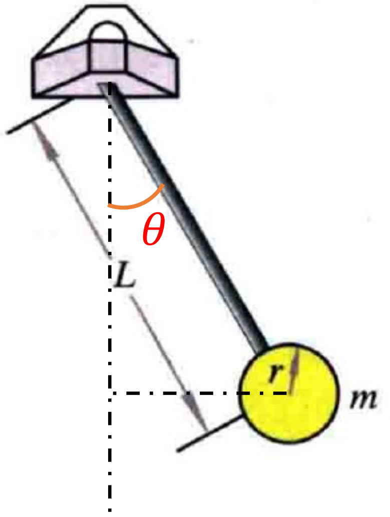
总能量：$E = \frac{1}{2}m\left(L^2 + \frac{2}{5}r^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgL\theta^2,$

$$m_{\text{eff}} = m\left(L^2 + \frac{2}{5}r^2\right), k_{\text{eff}} = mgL$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{\text{eff}}}{k_{\text{eff}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}\left(1 + \frac{2}{5}\frac{r^2}{L^2}\right)} = T_0\sqrt{1 + \frac{2r^2}{5L^2}}$$

$$E = \frac{1}{2}m_{\text{eff}}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_{\text{eff}}x^2$$

如图所示，一复摆由一个质量为 m、半径为 r 的球状摆锤悬挂在一根质量忽略不计的硬棒下组成。摆锤中心到支点的距离为 L。当 $r \ll L$ 时，这样的复摆常常看成长度为 L 的单摆。(1) 证明：对于小振动，振动周期为 $T = T_0\sqrt{1+2r^2/(5L^2)}$，其中 $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ 是单摆的振动周期。



解：运动方程方法 $m\ddot{x} = -kx$

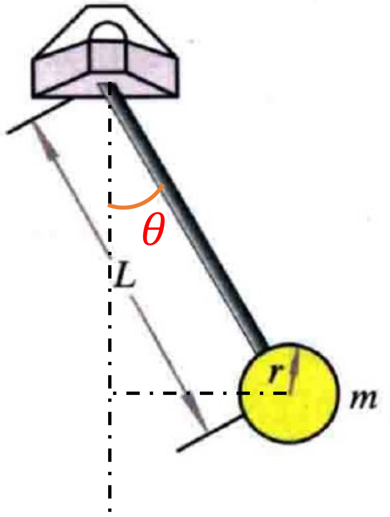
- 力：$F = mg\sin\theta \approx mg\theta$；力矩：$M = mgL\sin\theta \approx mgL\theta$
- 刚体做定轴转动，只有一个自由度——角度
- 运动方程，

$$I\ddot{\theta} = -mgL\theta$$

其中，$I = \frac{2}{5}mr^2 + mL^2$

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + O(\theta^4)$$

如图所示,一复摆由一个质量为 m、半径为 r 的球状摆锤悬挂在一根质量忽略不计的硬棒下组成。摆锤中心到支点的距离为 L。当 $r \ll L$ 时,这样的复摆常常看成长度为 L 的单摆。(1) 证明:对于小振动,振动周期为 $T = T_0\sqrt{1+2r^2/(5L^2)}$,其中 $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ 是单摆的振动周期。



解: $m\left(L^2+\frac{2}{5}r^2\right)\ddot{\theta} = -mgL\theta$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{\text{eff}}}{k_{\text{eff}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}\left(1+\frac{2}{5}\frac{r^2}{L^2}\right)} = T_0\sqrt{1+\frac{2}{5}\frac{r^2}{L^2}}$$

$$\boxed{m_{\text{eff}}\,\ddot{x} = -k_{\text{eff}}x}$$

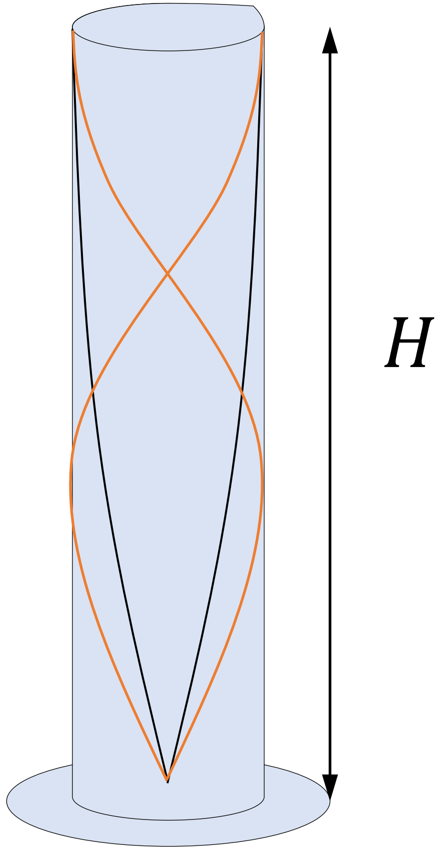
一只试管高$H = 10\ \mathrm{cm}$，对着管口吹气试管会发出声音。求发声的最低频率。

求解：空气振动，在试管中形成驻波。管底为固定端，因此为波节。管口为开放端，因此为波腹。

因此，最低频率对应的波长满足，

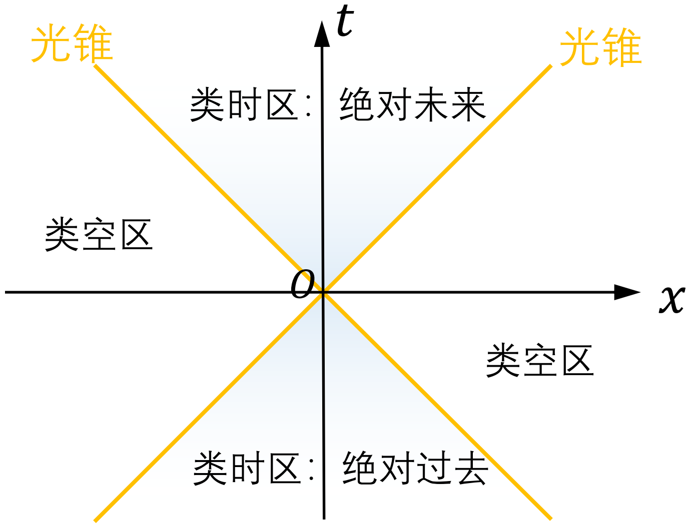
$$\lambda = 4H = 40\ \mathrm{cm}$$

频率：$\nu = v_s/\lambda$，其中$v_s \approx 340\ \mathrm{m/s}$为声速，可以得到，$\nu = 825\ \mathrm{Hz}$



狭义相对论

- 相对论时空观
  - 相对论的基本假设
  - 时空图
  - 光锥与因果结构
- 洛伦兹变换
  - 洛伦兹变换公式
  - 同时的相对性
  - 时间膨胀
  - 长度收缩
- 速度变换（速度合成）



- 相对论的基本假设
- 利用时空图分析问题
- 掌握洛伦兹变换公式
- 掌握相对论效应，包括同时的相对性、时间膨胀、长度收缩

狭义相对论

- 相对论动力学
  - 相对论动量、相对论质量
  - 相对论能量、质能关系与相对论碰撞
  - 相对论动力学
- 广义相对论的时空观

- 相对论动量和相对论质量
- 相对论能量和质能关系

例子

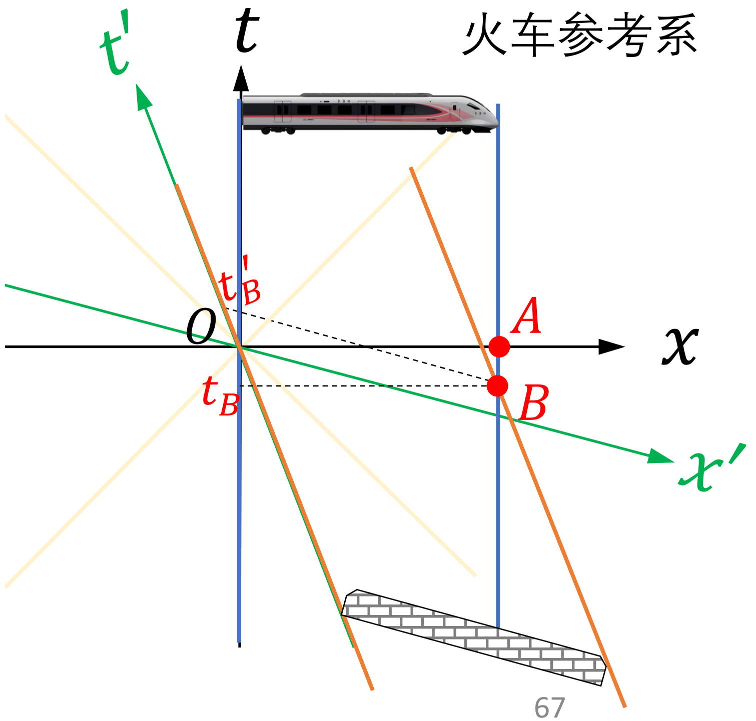
一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以$0.6c$匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。火车车尾刚进入站台时车尾发出一道闪光；车头刚出站台时也发出一道闪光。问在列车上的人与站台的人分别看来，这两道闪光是否同时发生？

例子

一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以$0.6c$匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。火车车尾刚进入站台时车尾发出一道闪光；车头刚出站台时也发出一道闪光。问在列车上的人与站台的人分别看来，这两道闪光是否同时发生？

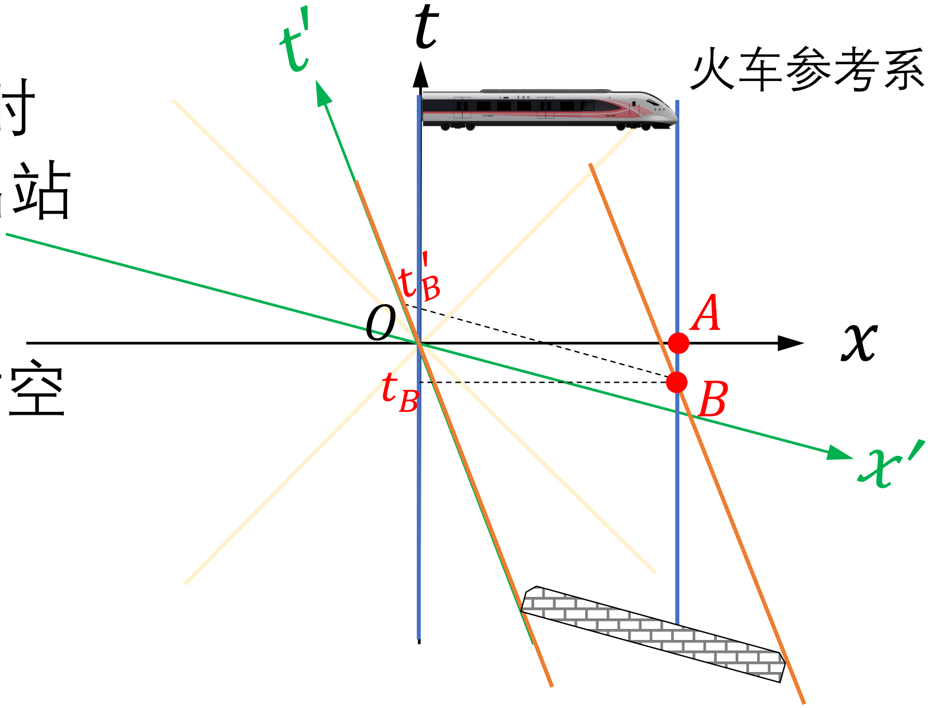
利用时空图上来看这个问题：

- 时空图中的点叫做事件
- 一系列事件的集合构成一条世界线
    - 一个质点的时空轨迹，完全描述了质点的运动
    - 匀速直线运动的世界线：直线
    - 静止质点的世界线：平行于t轴的直线



例子

一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以0.6c匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。火车车尾刚进入站台时车尾发出一道闪光；车头刚出站台时也发出一道闪光。问在列车上的人与站台的人分别看来，这两道闪光是否同时发生？



- 以火车为参考系，取车尾与入站相遇的事件为时空坐标原点。车头闪光事件为B，这是车头与出站相遇。
- 火车车头的时空轨迹为：$x_T(t_T) = l$；出站的时空轨迹为：$x_S'(t_S') = l$; 进行洛伦兹变换，

$$x_S = \gamma(x_S' - \beta c t_S') = \gamma(l - \beta c t_S'),$$
$$t_S = \gamma(t_S' - \beta x_S'/c) = \gamma(t_S' - \beta l/c)$$

- 车头与站台相遇的条件是：$t_T = t_S, x_S = x_T$

例子

一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以0.6c匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。火车车尾刚进入站台时车尾发出一道闪光；车头刚出站台时也发出一道闪光。问在列车上的人与站台的人分别看来，这两道闪光是否同时发生？

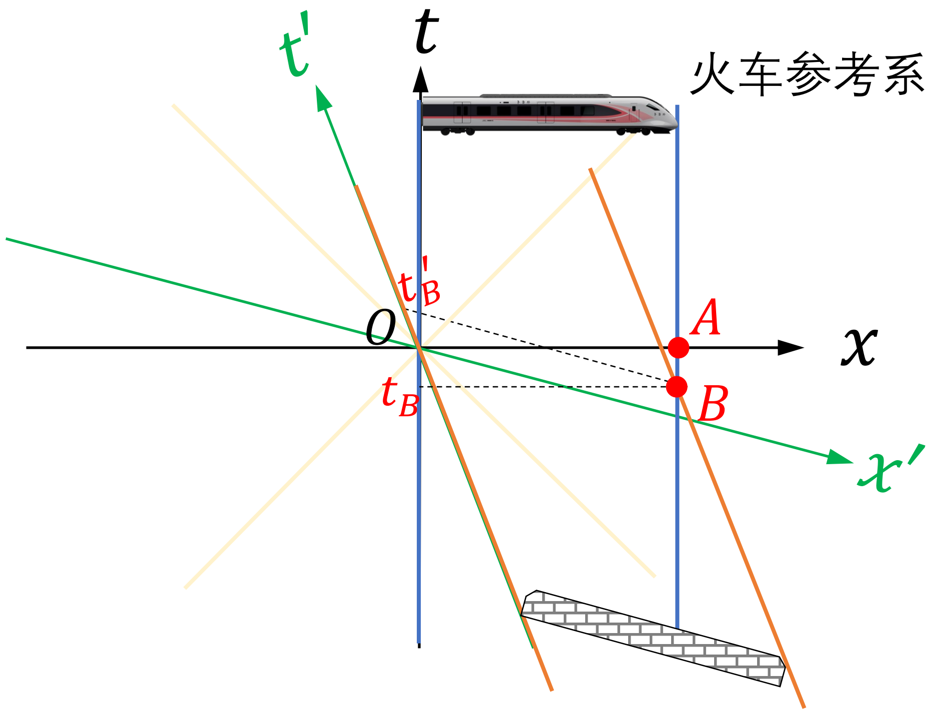
$$\gamma(l-\beta c t_S') = l,$$
$$\gamma(t_S' - \beta l c) = t_S$$

从第一个方程可以得到，

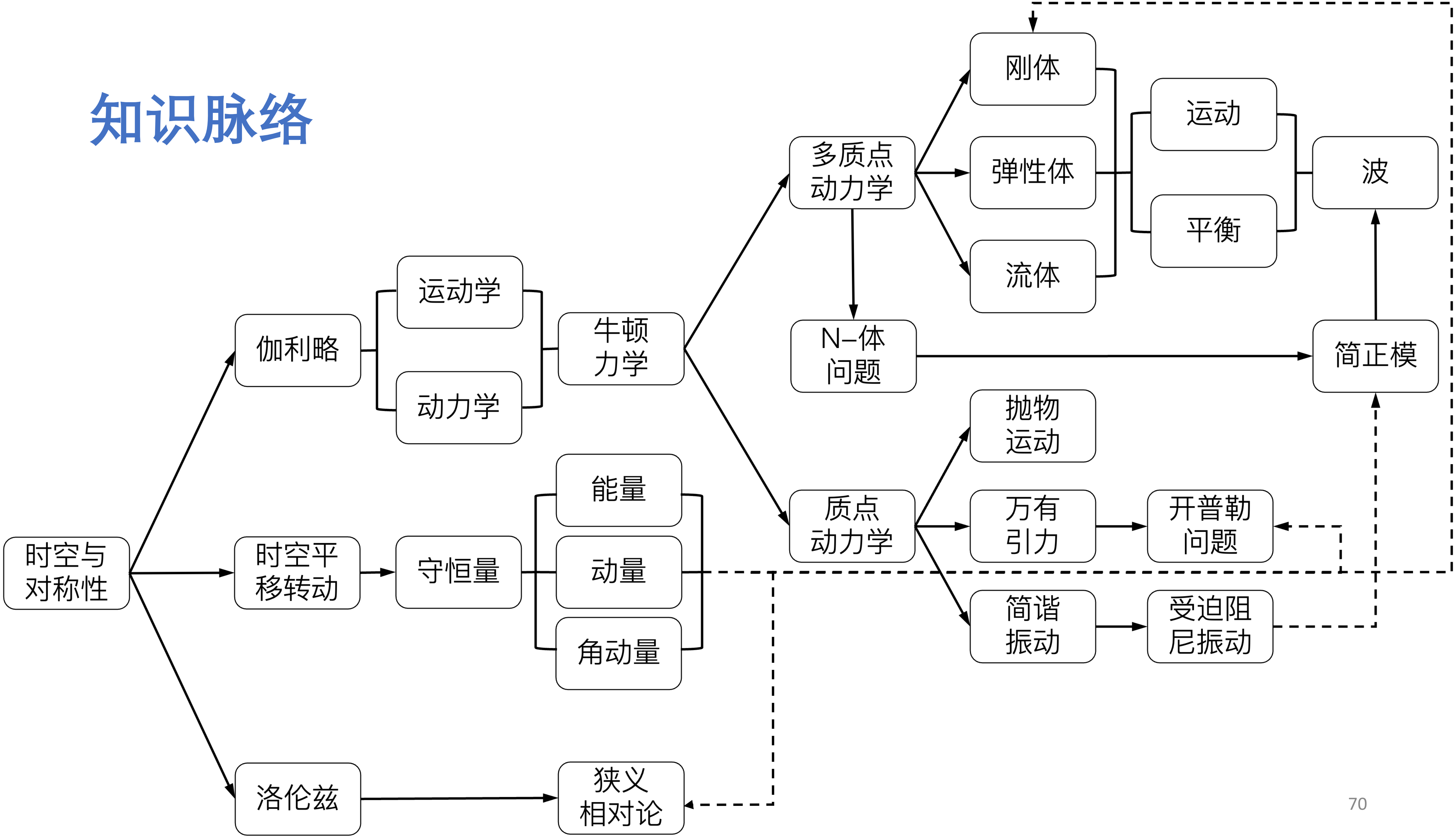
$$t_S' = \frac{(\gamma-1)l}{\gamma\beta c} \equiv t_B'$$

从第二个方程可以得到，

$$t_S = -\frac{(\gamma-1)l}{\gamma\beta c} \equiv t_B$$



知识脉络



时空与对称性
伽利略
时空平移转动
洛伦兹
运动学
动力学
守恒量
能量
动量
角动量
牛顿力学
狭义相对论
多质点动力学
N–体问题
质点动力学
刚体
弹性体
流体
抛物运动
万有引力
简谐振动
运动
平衡
开普勒问题
受迫阻尼振动
波
简正模

知识脉络

连续体

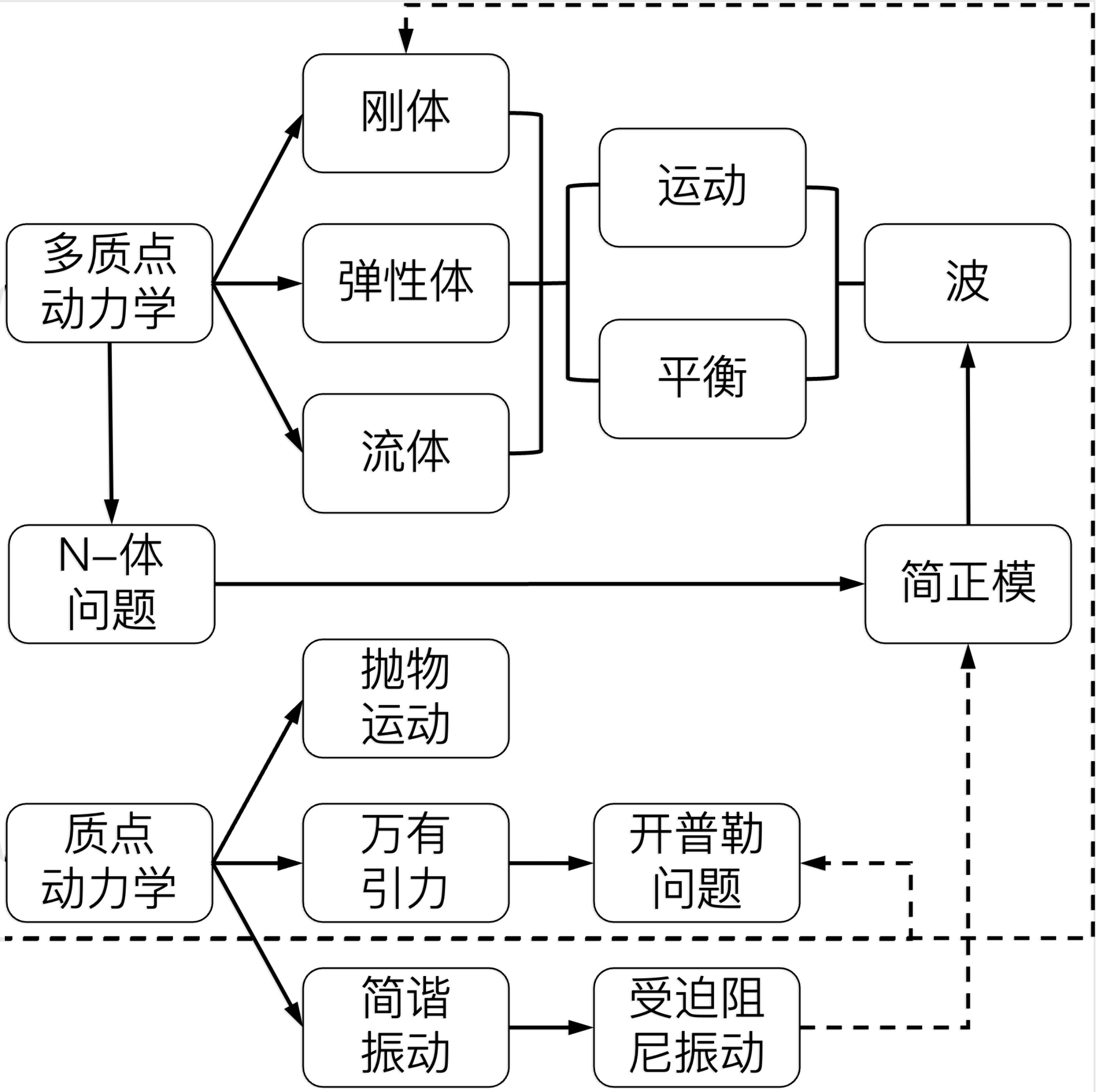
↑

多质点运动

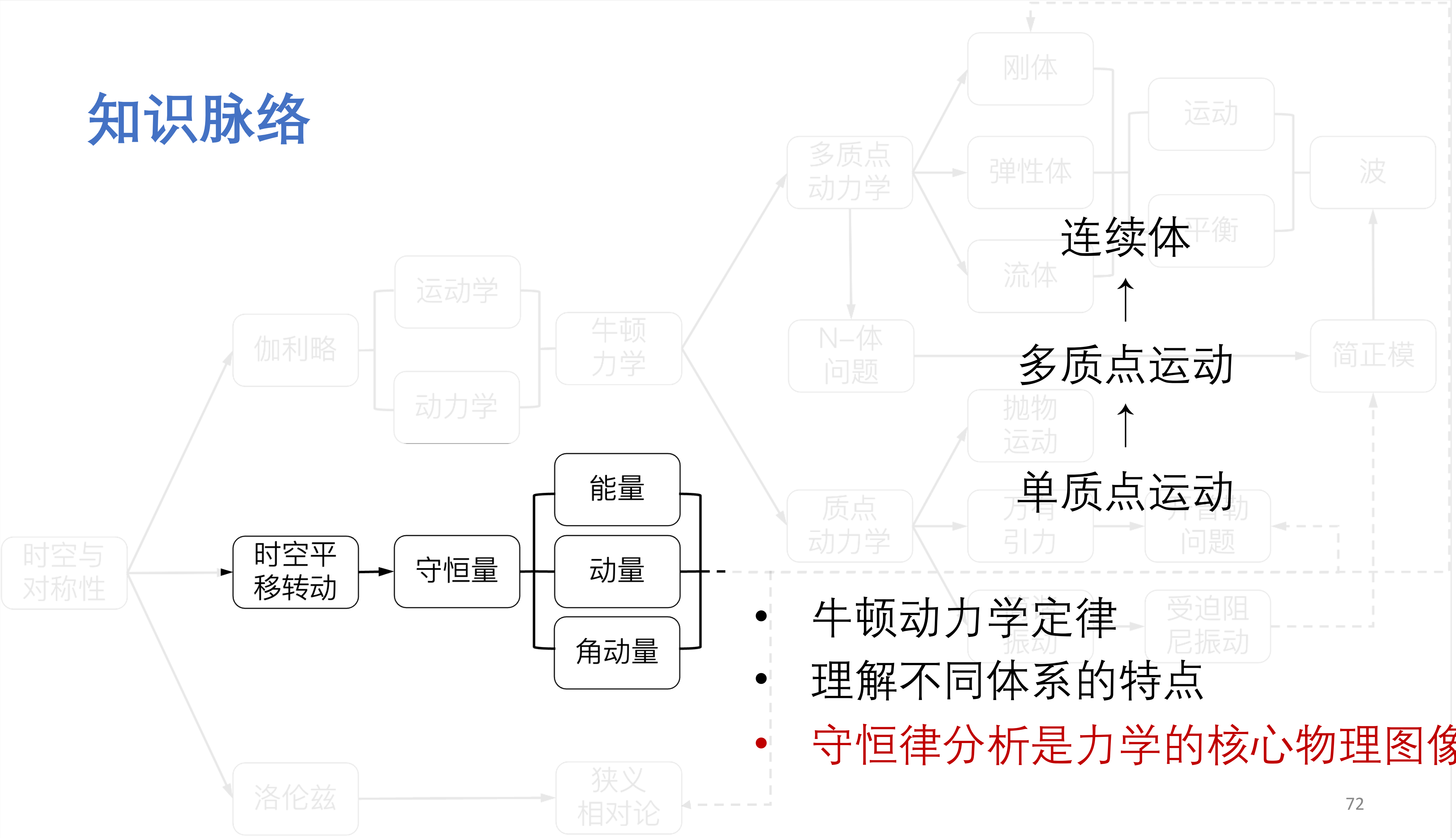
↑

单质点运动

- 牛顿动力学定律
- 理解不同体系的特点



知识脉络



- 牛顿动力学定律
- 理解不同体系的特点
- 守恒律分析是力学的核心物理图像

如何解题

- 阅读题目、分析题目
- 画图分析；写下已知的以及想要求的，包括：
  - 问题涉及基本物理原理
  - 考虑其他约束或限制条件
- 先做形式推导再做数学求解
- 检查单位和量纲；检查特殊情况、极限情况；检查数量级
- 不要空着题目不写，即使你不会做！写下相关的基本方程

考试之外

- 未来从事技术相关的工作所需要的能力
  - 分析和解决问题的能力
  - 团队协作能力
- 数理基础扎实是科大人的特色
- 力学和微积分、线性代数是数理基础中的基础，也是未来学习工作中必不可少的工具

祝大家考试顺利！