第六章：弹性力学

李 阳

中国科学技术大学近代物理系

力学A · 2024年秋

§1. 弹性体模型

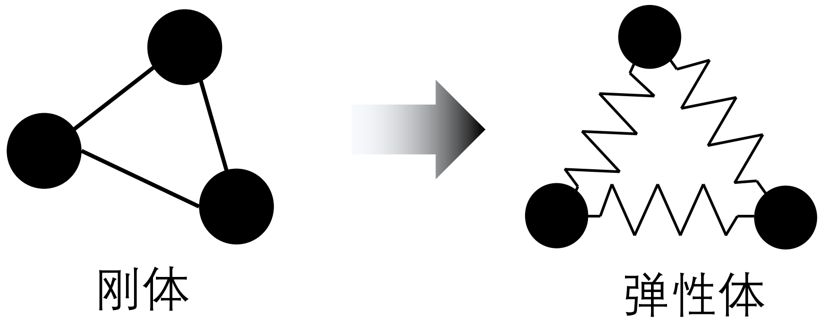
- 上一章我们讨论了刚体模型。在刚体模型中，我们忽略了物体的形变。
- 但自然界不存在绝对的刚体，物体在外力的作用下会发生形变，并且有些情况下，这些形变还有重要的应用

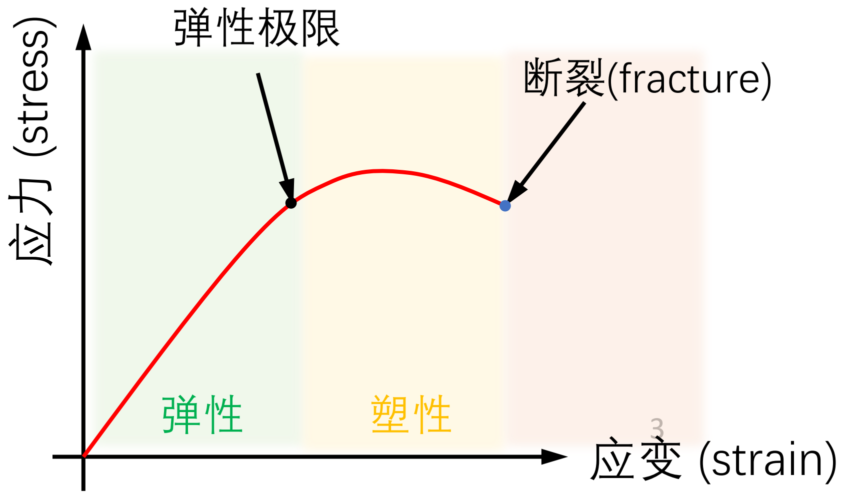
例子：弹簧、鼓、水、空气、足球、泥巴、沙子



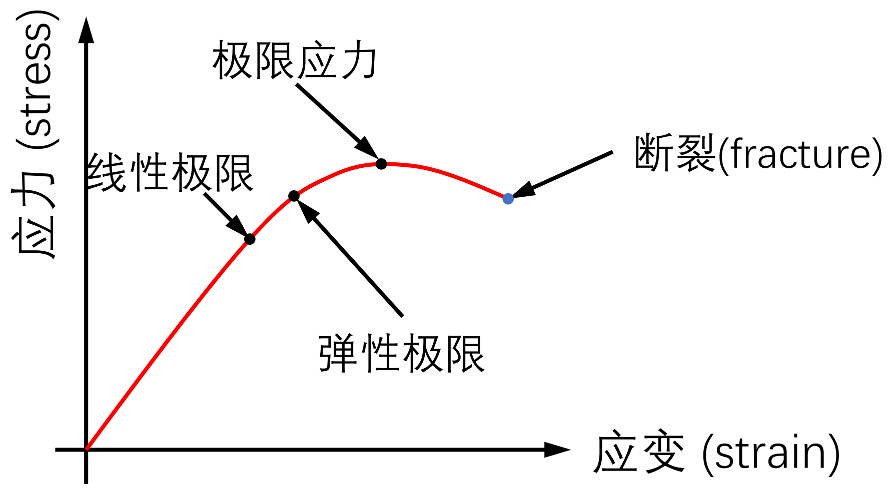


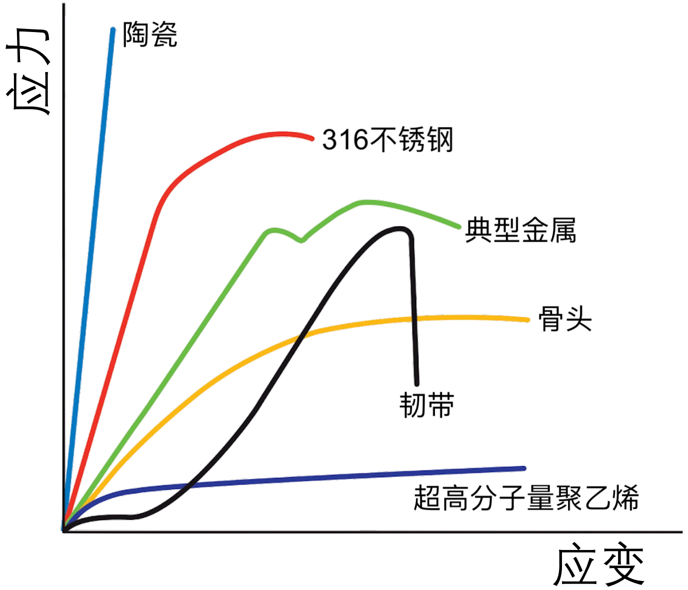

- 在这一章，我们首先讨论物体在外力作用下发生形变，但形变比较小的情况。当撤去外力时，物体将恢复其原有大小和形状。这种性质叫做弹性
- 但自然界不存在完全的弹性体，一般物体既有弹性又有塑性：即撤去外力后不能完全恢复其大小和形状。但是通常的固体材料在外力不超过某个限度时，可以近似看出完全弹性体
- 物体发生弹性形变时抵抗外力作用所产生的反作用力叫做应力，又叫做弹性力
- 弹性体的形变叫做应变将在后面详细讨论。





- 典型弹性体的应变-应力曲线如图所示
  - 在应变较小时，产生的应力与应变呈线性关系
  - 在应变继续增大时，产生的应力与应变将偏离线性关系，但此时弹性体仍然处在弹性区间，即外力撤除时，弹性体仍能恢复其大小和形状
  - 应变继续增大，弹性体将进入塑性区间，并最终发生断裂
- 可见，当物体外力不是特别大时，应变与应力呈线性关系，称此时物体的行为为线性弹性。线性弹性满足叠加原理





a. 弹簧质点模型

胡克定律：弹簧的弹性力与其长度变化成正比：

$$F = -k\Delta x$$

- 弹簧串联：$F_1 = F_2 = F, \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$，因此

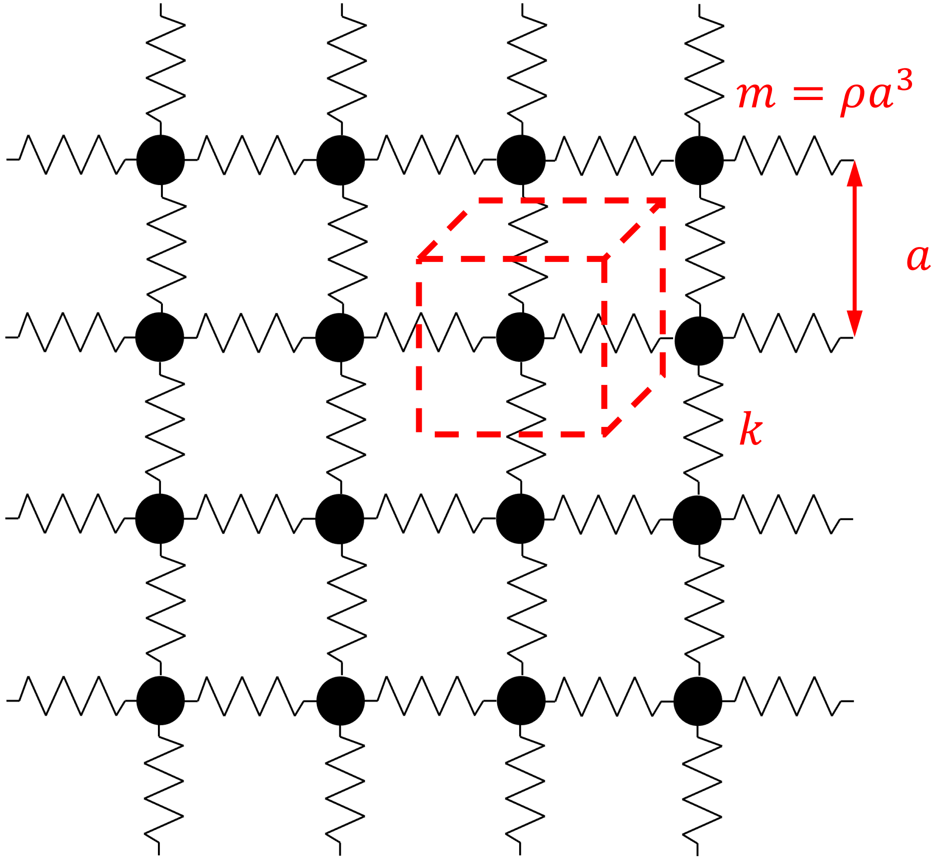
$$k^{-1} = -\frac{\Delta x}{F} = -\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{F} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \qquad \Rightarrow k_{\text{eff}} = \frac{k}{N}$$

- 弹簧并联：$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x, F = F_1 + F_2$，因此

$$k = -\frac{F}{\Delta x} = k_1 + k_2 \qquad \Rightarrow k_{\text{eff}} = Nk$$

$$F = -k\Delta x$$

考虑一个弹性体的简单模型：将弹性体视为很多质点的集合，相邻质点之间由轻弹簧相连（弹簧-质点模型）

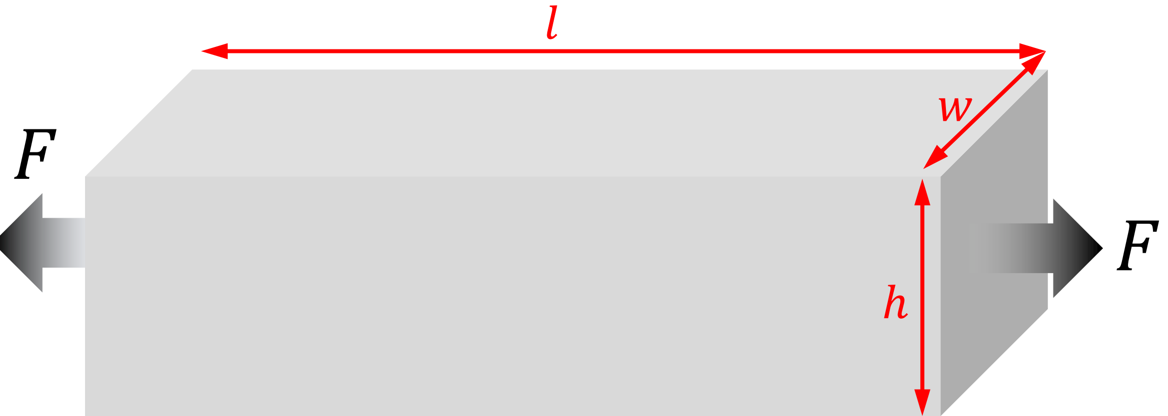


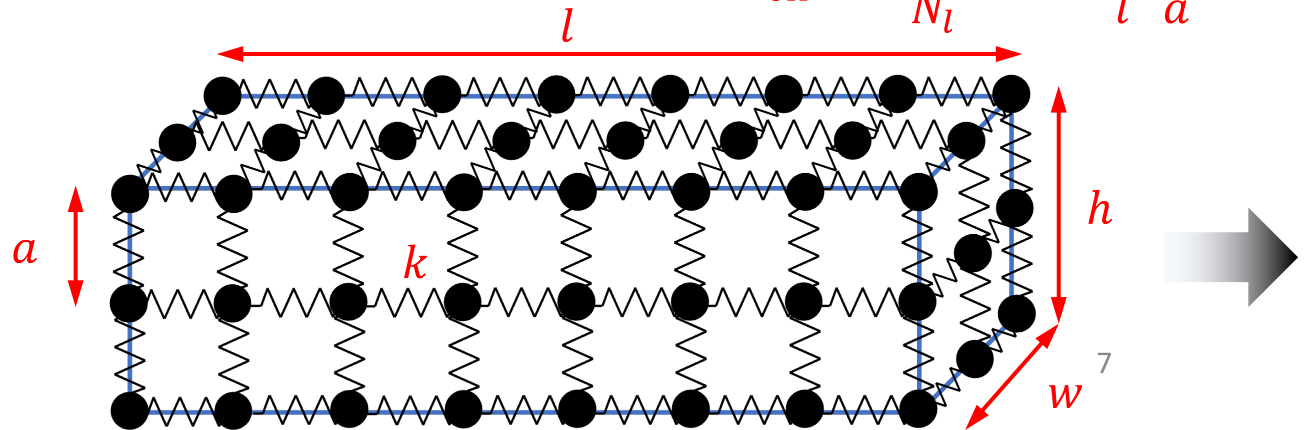
b. 线应变 (linear strain)

- 考虑一根弹性杆，长宽高分别为l, w, h，在其两端施加拉力F，根据胡克定律，杆的长度变化正比于拉力，$\Delta l \propto F$
- 杆的伸长还与杆的原长l有关，类比于弹簧串联的例子相同的拉力作用下，越长的杆，伸长的长度越大
- 同样地，类比于弹簧并联的例子杆的伸长也与杆的横截面积有关

$$F = k_{\text{eff}} \Delta l \;\Rightarrow\; F \propto S\Delta l / l$$

$$k_{\text{eff}} = \frac{N_w N_h}{N_l} k = \frac{hw}{l} \frac{k}{a}$$





- 常数k/a仅跟材料的微观性质有关，跟材料的形状无关，因此将其定义为

$$Y = \frac{k}{a}$$

叫做杨氏模量(Young’s modulus)，单位为Pa

- 定义应力为单位面积的力$\sigma = F/S$，定义应变为单位长度的伸长$\varepsilon = \Delta l/l$，胡克定律可以写成，

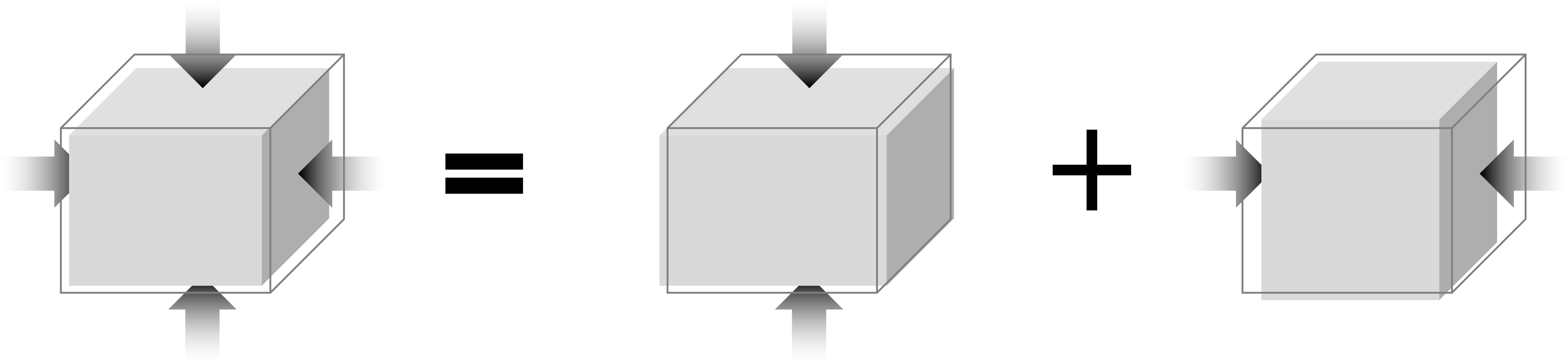
$$\sigma = Y\varepsilon$$

- 当物体在一个方向拉伸时，在与此方向垂直的方向上将会收缩，宽度的相对收缩与高度的相对收缩相同，都正比于长度的相对拉伸，

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\nu\frac{\Delta l}{l}$$

比例系数ν叫做泊松比，是表征物体性质的另一个参数

- 叠加原理：不同外力的合外力产生的作用等于各个外力单独作用时产生的作用之和



c. 体应变 (bulk strain)

考虑一个立方体在三对面都存在作用时的应变，如图所示。根据叠加原理，可以单独考虑每一对应力存在时的应变。当单独存在p_1时，

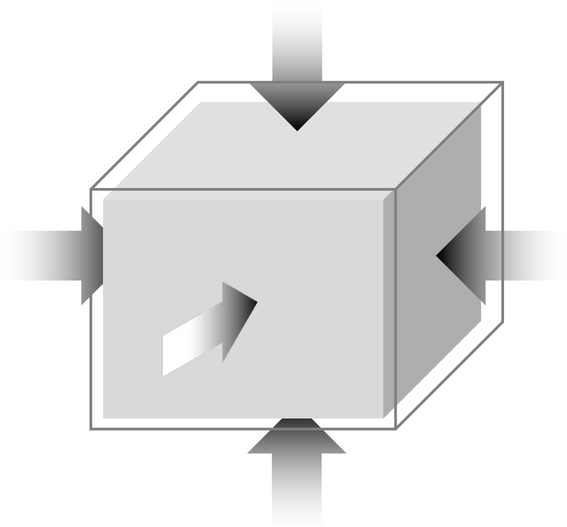
$$\frac{\Delta x_1}{x_1}=\frac{p_1}{Y},\qquad \frac{\Delta y_1}{y_1}=-\nu\frac{\Delta x_1}{x_1}=-\nu\frac{p_1}{Y},\qquad \frac{\Delta z_1}{z_1}=-\nu\frac{\Delta x_1}{x_1}=-\nu\frac{p_1}{Y}$$

类似地，单独存在p_2时，

$$\frac{\Delta x_2}{x_2}=-\nu\frac{p_2}{Y},\qquad \frac{\Delta y_2}{y_2}=\frac{p_2}{Y},\qquad \frac{\Delta z_2}{z_2}=-\nu\frac{p_2}{Y}$$

单独存在p_3时，

$$\frac{\Delta x_3}{x_3}=-\nu\frac{p_3}{Y},\qquad \frac{\Delta y_3}{y_3}=-\nu\frac{p_3}{Y},\qquad \frac{\Delta z_3}{z_3}=Y\frac{p_3}{Y}$$



- 因此，当所有应力都存在时，物体的形变为，

$$\frac{\Delta x}{x} = \sum_i \frac{\Delta x_i}{x} = \frac{p_1}{Y} - \nu\left(\frac{p_2}{Y} + \frac{p_3}{Y}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{z} = \sum_i \frac{\Delta y_i}{y} = \frac{p_2}{Y} - \nu\left(\frac{p_1}{Y} + \frac{p_3}{Y}\right)$$

$$\frac{\Delta z}{z} = \sum_i \frac{\Delta z_i}{z} = \frac{p_3}{Y} - \nu\left(\frac{p_1}{Y} + \frac{p_2}{Y}\right)$$

现考虑体积的变化，

$$\frac{\Delta V}{V} = (x + \Delta x)(y + \Delta y)(z + \Delta z) - xyz$$

$$\approx V\left(1 + \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{z} + \frac{\Delta z}{z}\right) = \frac{1 - 2\nu}{Y}(p_1 + p_2 + p_3)$$

- 当各个方向应力相同时，$p_1 = p_2 = p_3 = p$，体应变，

$$\Theta = \frac{\Delta V}{V} = 3p\frac{1-2\nu}{Y}$$

- 因此可以引入体积模量K，

$$p = K\Theta = K\frac{\Delta V}{V}$$

从而，

$$K = \frac{Y}{3(1-2\nu)}$$

- 一般材料受压力时体积会减小，因此$K > 0$，对应着泊松比

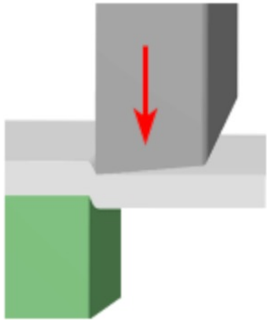
$$\nu < \frac{1}{2}$$

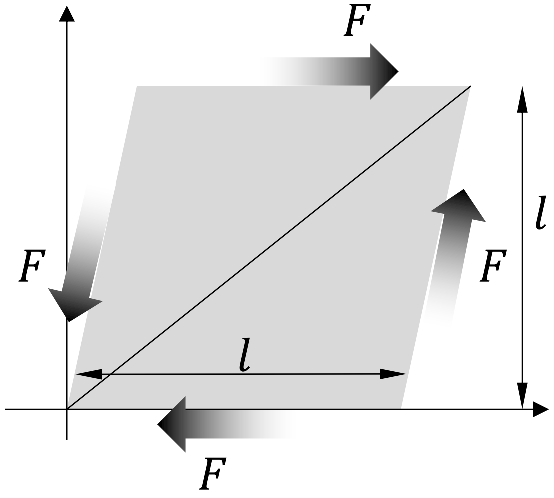
d. 剪切应变 (shear strain)

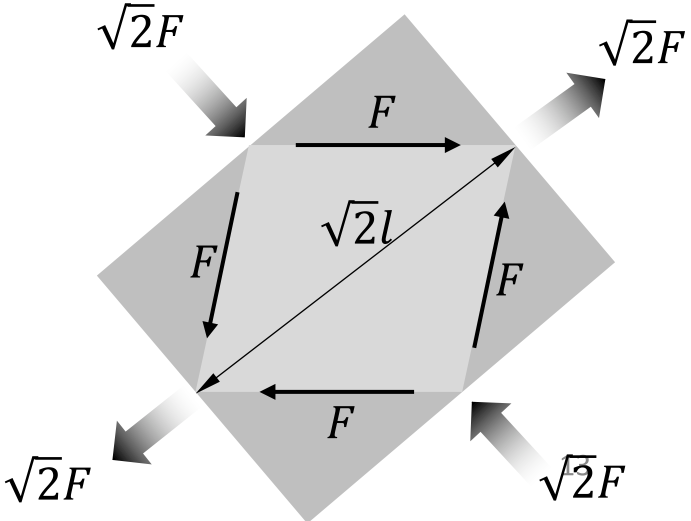
考虑一个立方体收到剪切力的作用，如图所示。

- 为了计算该剪切力可以将这个立方体嵌入到同样材料的大立方体中，如图所示
- 如果对与大立方体一个面提供压力另一个面提供拉力，则大立方体余下的部分对于原立方体的力等于原先的剪切力，

$$\frac{\Delta l}{l}=\frac{\sqrt{2}\Delta l}{\sqrt{2}l}=\frac{1}{Y}\frac{\sqrt{2}F}{\sqrt{2}S}+\nu\frac{1}{Y}\frac{\sqrt{2}F}{\sqrt{2}S}=\frac{1+\nu}{Y}\frac{F}{S}$$





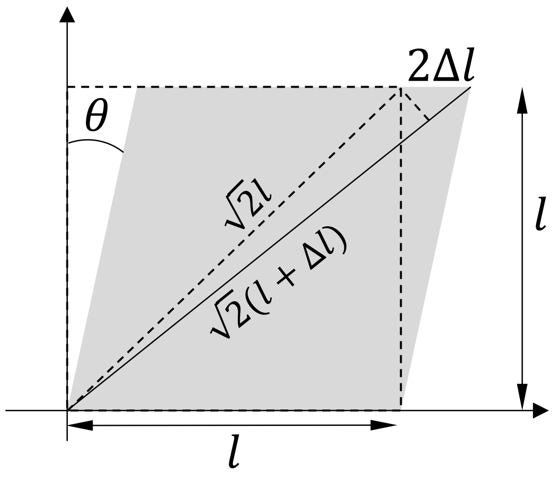


- 原立方体在剪切力的作用下的应变定义为，

$$\theta = \frac{2\Delta l}{l} = \frac{2(1+\nu)}{Y}\frac{F}{S}$$

- 切应力定义为，

$$\tau = \frac{F}{S}$$

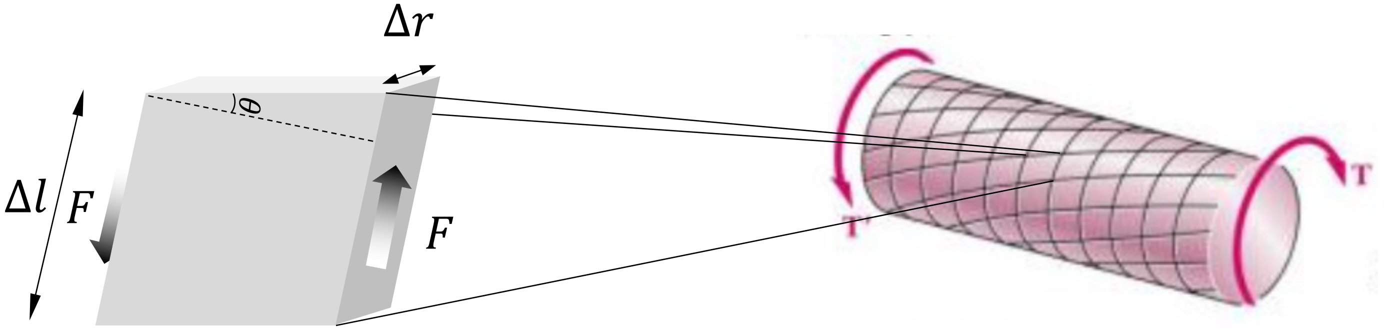


并引入剪切模量：

$$G = \frac{\tau}{\theta} = \frac{Y}{2(1+\nu)}$$

由这个式子可以得到，泊松比必须大于-1否则可以通过剪切变形的物体获得能量

【例子】考虑圆棒在扭转作用下的力矩。设圆棒长度为L, 端面半径为R，若圆棒外力矩M的作用下发生小角度扭曲。求圆棒的扭曲角φ。



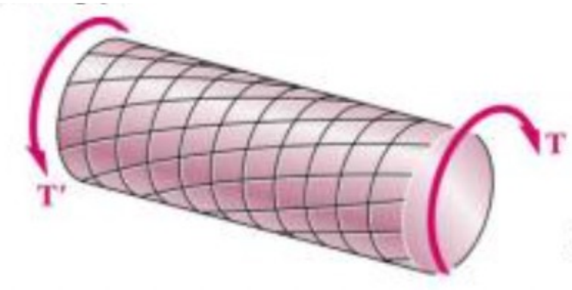
求解:

扭力的本质是剪切力，在外力矩的作用下圆棒不同部分发生不同程度的剪切应变，其中中心轴的形变为0。可以将圆棒视为一系列同轴圆柱形薄壳的叠加，每一根柱形薄壳贡献力矩$\Delta M = r\Delta F$。在这一个力的作用下，薄壳上的小立方体发生剪切形变，

$$\theta = \frac{\varphi r}{L}$$

对应的应力，$\tau = \frac{\Delta F}{\Delta S} = G\theta = \frac{G\varphi r}{L}$。其中，$\Delta S = \Delta r\Delta l$

【例子】考虑圆棒在扭转作用下的力矩。设圆棒长度为L, 端面半径为R，若圆棒外力矩M的作用下发生小角度扭曲。求圆棒的扭曲角φ。



因此薄壳上的力矩为，

$$\Delta M = r\sum \frac{\Delta F}{\Delta l}\Delta l = r\,\frac{\Delta F}{\Delta l \Delta r}\Delta r\, 2\pi r = 2\pi r^2 \frac{G\varphi r}{L}\Delta r$$

因此圆棒的总力矩为，

$$M = \sum \Delta M = \int 2\pi r^2 \frac{G\varphi r}{L}\mathrm{d}r = G\,\frac{\pi R^4}{2L}\varphi$$

即，对于圆柱形棒来说，转矩与半径的4次方成正比。因此为了测量非常微小的力，卡文迪什采用了非常细的金属扭丝。扭丝目前也是精密测量的主要工具之一。

e. 弹性波 (elastic wave)

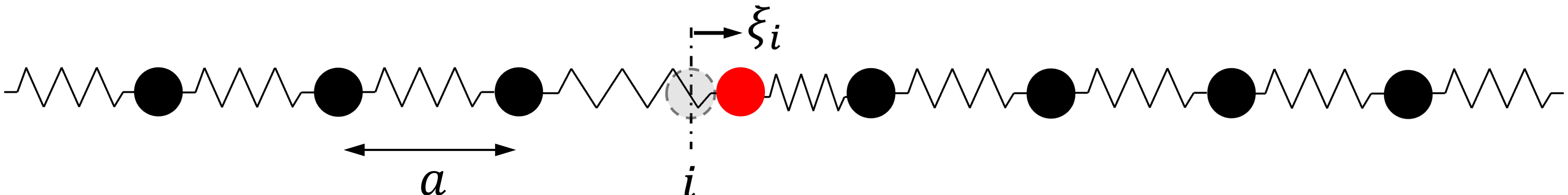
考虑一个一维弹簧-质点链。第i个质点的运动根据牛顿第二定律为，

$$m\ddot{\xi}_i = -k(\xi_i - \xi_{i-1}) + k(\xi_{i+1} - \xi_i)$$

其中，ξ_i为第i个质点偏离平衡位置的位移。$\ddot{\xi}_i = a_i$为该质点的加速度。在质点非常稠密时，可以用质点的平衡位置x来标记质点，上述方程变成，

$$m\ddot{\xi}(x,t) = -k[\xi(x,t) - \xi(x-a)] + k[\xi(x+a,t) - \xi(x,t)]$$

$$\Rightarrow \frac{m}{a^2}\ddot{\xi}(x,t) = k\frac{\xi(x+a,t) + \xi(x-a) - 2\xi(x,t)}{a^2}$$



$$\Rightarrow \frac{m}{a}\xi_t''(x,t) = ak\xi_x''(x,t)$$

这里，ξ_t''为关于时间的二阶导数， ξ_x''为关于坐标的二阶导数。下面将弹簧-质点系统的弹簧系数与质点质量与材料联系起来。根据杨氏模量的定义，

$$F = -\frac{SY}{l}\Delta l$$

另一方面，一维弹簧-质点链为N_l个弹簧串联其中$N_l = l/a$，因此，

$$F = -\frac{k}{N_l}\Delta l = -\frac{SY}{l}\Delta l$$

因此，$k = SY/a$。同时，$\frac{m}{aS} = \rho$为弹簧-质点链的体密度。

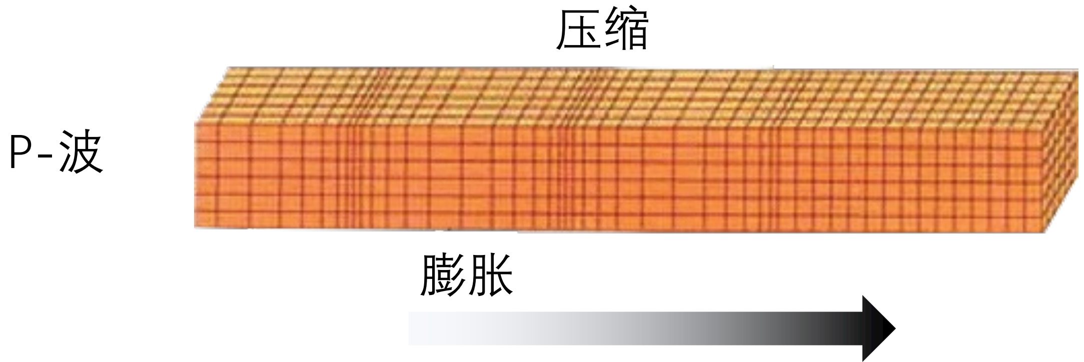
最终可以得到，

$$\rho\xi_t''(x,t) = Y\xi_x''(x,t)$$

这个方程描述了在弹性材料由于内部质点偏离平衡位置所引起的运动。这样形式的方程叫做波动方程，其中，波的速度为，

$$v = \sqrt{Y/\rho} = a\sqrt{k/m}$$

由于质点运动方向与波的传播方向一致，因此这种波叫做纵波(P-wave)，又叫做胀缩波(compressional wave)。固体中的声波(acoustic wave)就是这种波的的一种表现。



除了纵波之外，弹性体内部还可以传播横波(S-wave)，即剪切波(shear wave)。如下图所示，1维弹簧链中，质点可以垂直于链的方向运动。根据牛顿第二定律，第i个质点的垂直位移，

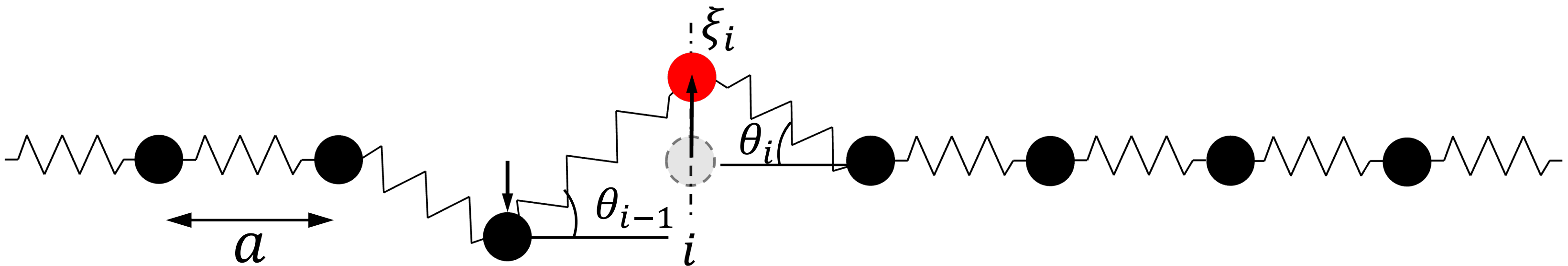
$$m\ddot{\xi}_i = -GS\frac{\xi_i - \xi_{i+1}}{a} - GS\frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{a}$$

其中剪切力提供了恢复力$F = -GS\theta$，

$$\rho\xi_t'' = G\xi_x''$$

其中，$\rho = \frac{m}{aS}$是体密度。这个波动方程所对应的波速为

$$v = \sqrt{G/\rho}$$

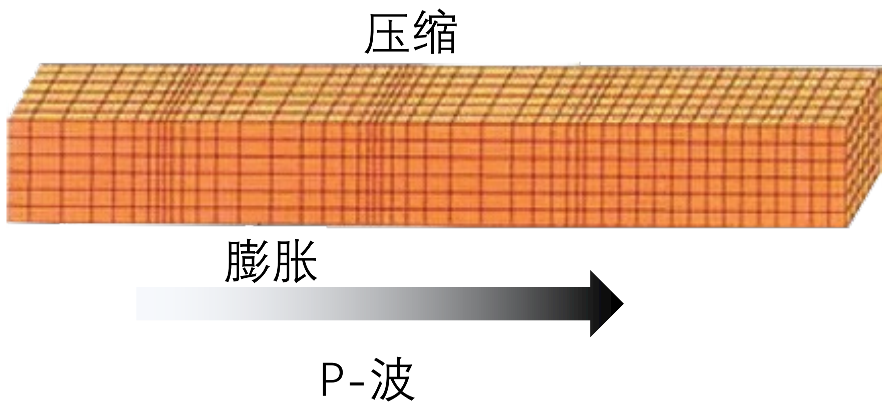


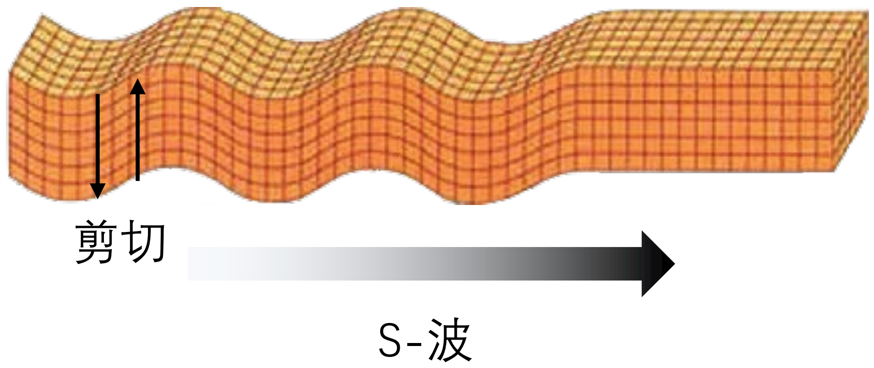
对比弹性体中的两种波：

- P-波：胀缩波，密度变化，纵波，波速$v = \sqrt{Y/\rho}$
- S-波：剪切波，密度不变，横波，波速$v = \sqrt{G/\rho}$

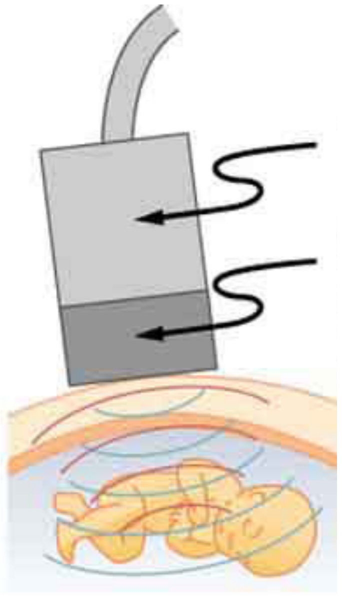
由于一般固体剪切模量比压缩模量小的多，P-波比S-波要快很多

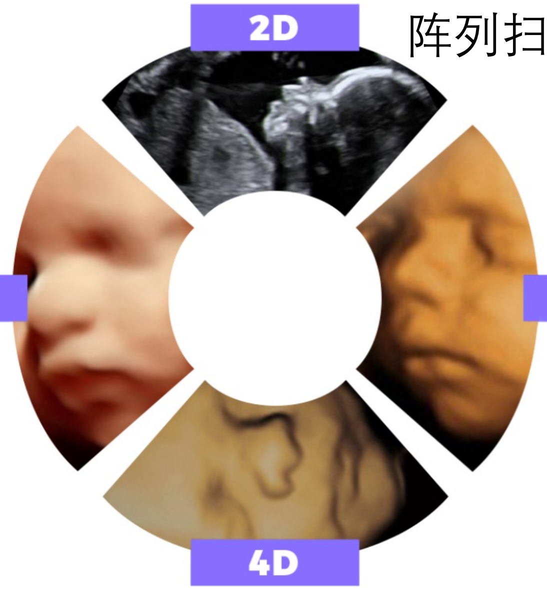
- 刚体可以视为$Y \to \infty, G \to \infty$的弹性体





- 应用：地震波、超声扫描（B-超）、超声无损探伤
  - 超声扫描：声波穿透弹性体内部，遇到界面会发生反射
  - 类型：A、B、C、M、D型
  - 其中用的最多的是B型（B超）和多普勒（彩超）





	原理	临床应用
A型	距离随时间的改变	
B型	探测器阵列显示2维断面扫描	
M型	A+B	
D型(多普勒)	利用多普勒效应显示血液流动速度