

# 第七章：流体力学

李 阳

中国科学技术大学近代物理系



力学A · 2024年秋

# §1. 流体模型

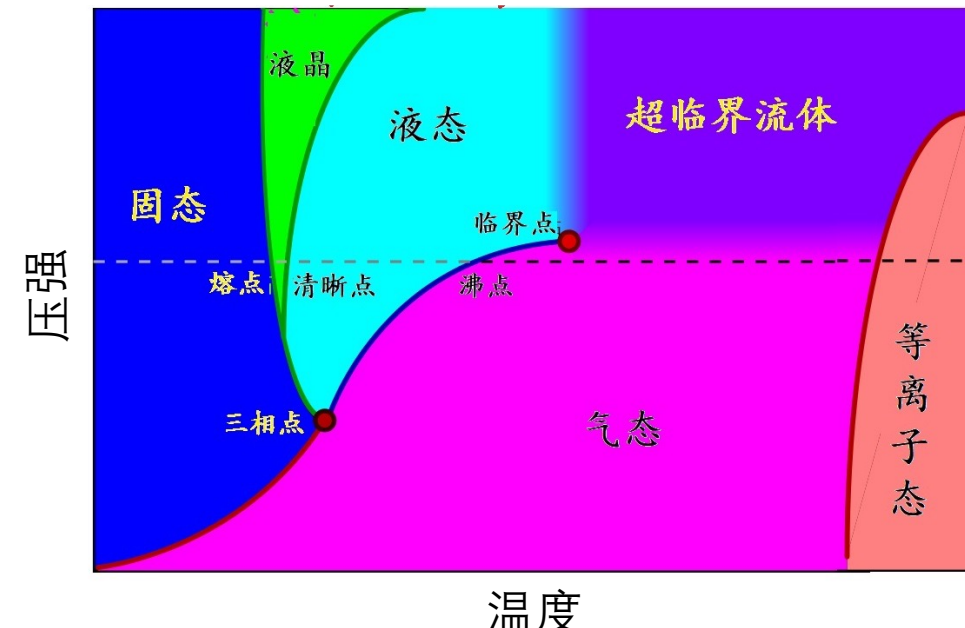
- 上一章我们讨论了弹性体模型。弹性体模型在刚体模型的基础上，允许物体有小的形变
- 但自然界中的大部分物质很容易发生大的形变

例子：水、空气、泥巴、牙膏、沙子

- 流体与弹性体的主要区别在于不能维持剪切力，如果对流体施加一个切向力，它将会沿着力的方向流动



- 即使是固体，在超过断裂极限以后也会发生大的形变；反过来，有些流体，如沥青，在剪切力的作用下的流动非常缓慢，常常被视为固体
- 一般而言，物质在不同温度和压强下可能呈现为不同的物质状态，叫做物相，不同的相具有不同的性质
- 现代物理用对称性和序来区分不同的相，尤其是固体相和流体相
- 流体的密度在流体形变过程中可能会发生变化，据此可以将流体分为两类：
  - 不可压缩流体：密度在运动过程中变化不大 —— 液体
  - 可压缩流体：密度在运动过程中可以改变 —— 气体



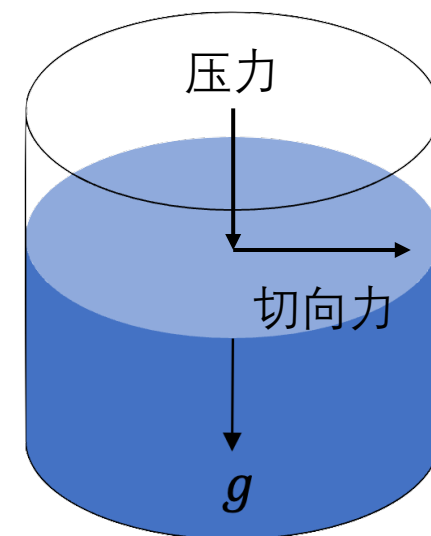
## a. 流体静力学

由于流体不能维持剪切，因此静止状态的流体不可能存在任何的剪切力，否则流体将会流动。换句话说，

- 流体的应力总是垂直于流体内任何一个面，叫做压强

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

- 流体的另外一个特点是，其压强是各向同性的



- 在重力的作用下，液体的压强

$$p = p_0 + \rho gh$$

其中， $h$ 是距离自然水平面的垂直距离， $p_0$ 为大气压强。 $\rho$ 是液体密度

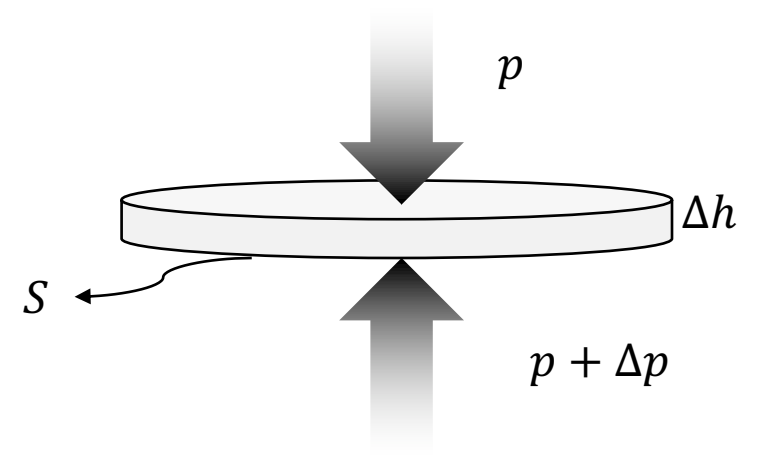
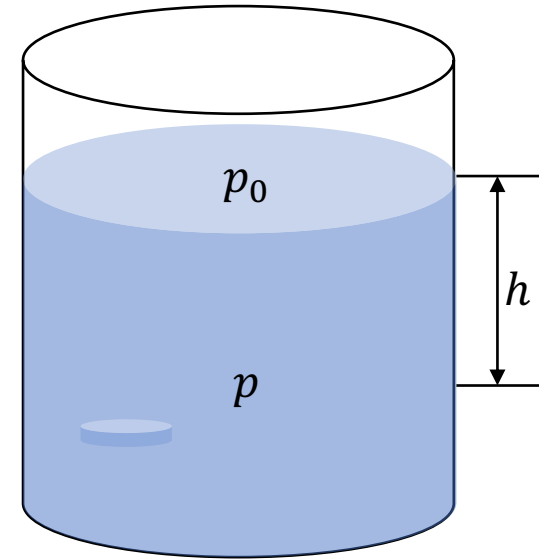
- 证明：

取液体中如图圆柱形液片，由于静力学平衡，

$$\Delta p S = \rho S \Delta h g$$

两边积分可以得到，

$$p - p_0 = \rho gh$$



阿基米德原理:

- 浸入液体中的物体会受到压强的作用, 从而产生浮力
- 液体的浮力满足阿基米德原理:

$$F = \rho g V$$

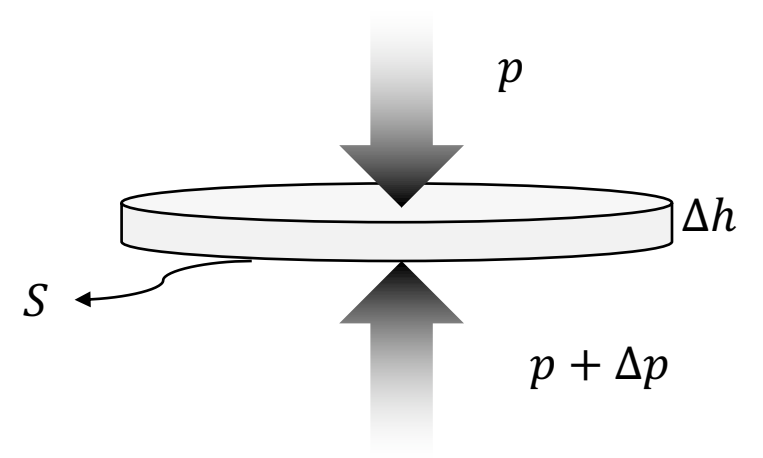
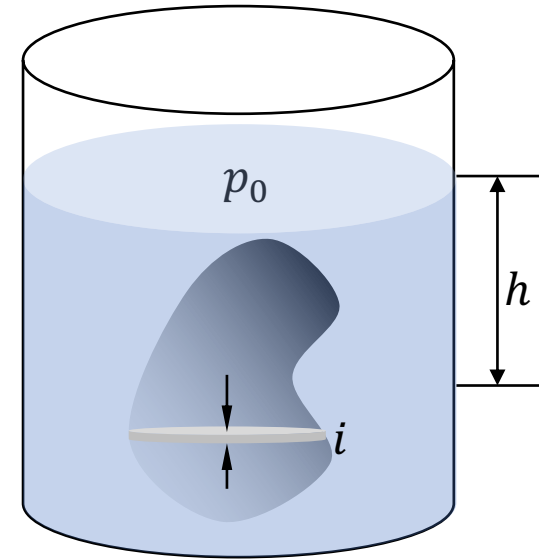
其中,  $V$  为浸入的体积即排开液体的体积

证明: 可以将物体视为不同薄圆柱片组成, 圆柱片两端的压力差为,

$$\Delta F_i = \Delta p S_i = \rho g \Delta h S_i$$

总的浮力为,

$$F = \sum_i \Delta F_i = \sum_i \rho g \Delta h S_i = \rho g V$$



- 如果将重力替换成一般的力 $F$ ，流体的静力学平衡可以写成，

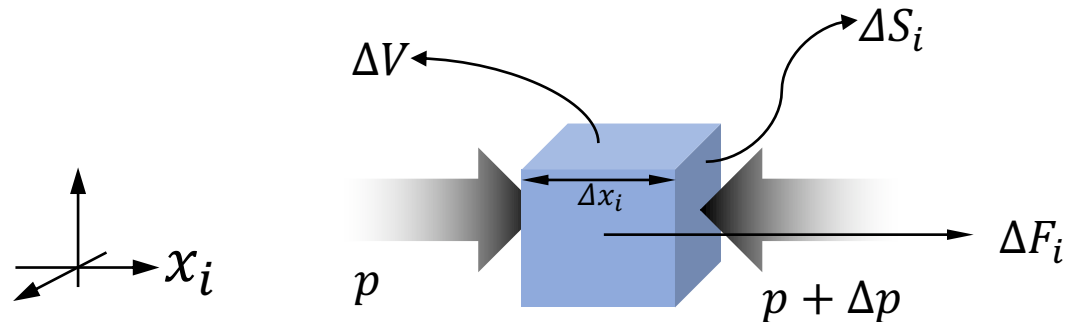
$$\frac{dp}{dx_i} = \frac{dF_i}{dV}$$

$x_i$ 为 $x, y, z$ 任意一个方向， $\frac{dF_i}{dV}$ 为 $i$ 方向上单位体积的力

- 证明方法与重力类似：取液体中如图液体元，由于静力学平衡，

$$\Delta p \Delta S_i = F_i \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta x_i} \Delta V = F_i$$

从而可以得到： $\frac{dp}{dx_i} = \frac{dF_i}{dV}$



- 在数学上，可以定义一个矢量，

$$\nabla p \equiv \sum_i \frac{dp}{dx_i} \vec{e}_i = \sum_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \vec{e}_i$$

称为压强梯度矢量。同时为了区分不同方向的导数，将微分符号改成  $\frac{dp}{dx_i} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x_i}$  叫做偏微分

- 单位体积的力，可以写成，

$$\frac{dF_i}{dV} \equiv -\rho \frac{d\varphi}{dx_i} \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dV} = -\rho \nabla \varphi$$

其中  $\varphi$  是单位质量的势能函数， $\rho$  是液体密度，例如对于重力来说，  
 $\varphi = gz$



- 因此静力平衡方程可以写成,

$$\nabla p + \rho \nabla \varphi = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dp}{dx_i} + \rho \frac{d\varphi}{dx_i} = 0$$

- 如果液体密度 $\rho$ 变化不大, 如典型液体, 从上式可以得到,

$$p + \rho\varphi = \text{const.}$$

**【例子】** 证明旋转液面是一个抛物面

【例子】证明旋转液面是一个抛物面

解：在木桶静止参考系，惯性力为，

$$\Delta \vec{F}_C = \Delta m \omega^2 \vec{r} = \rho \Delta V \omega^2 \vec{r}_\perp$$

$$\Rightarrow \varphi = -\frac{1}{2} \omega^2 r_\perp^2$$

$$\Rightarrow p = -gz + \frac{1}{2} \omega^2 r_\perp^2$$

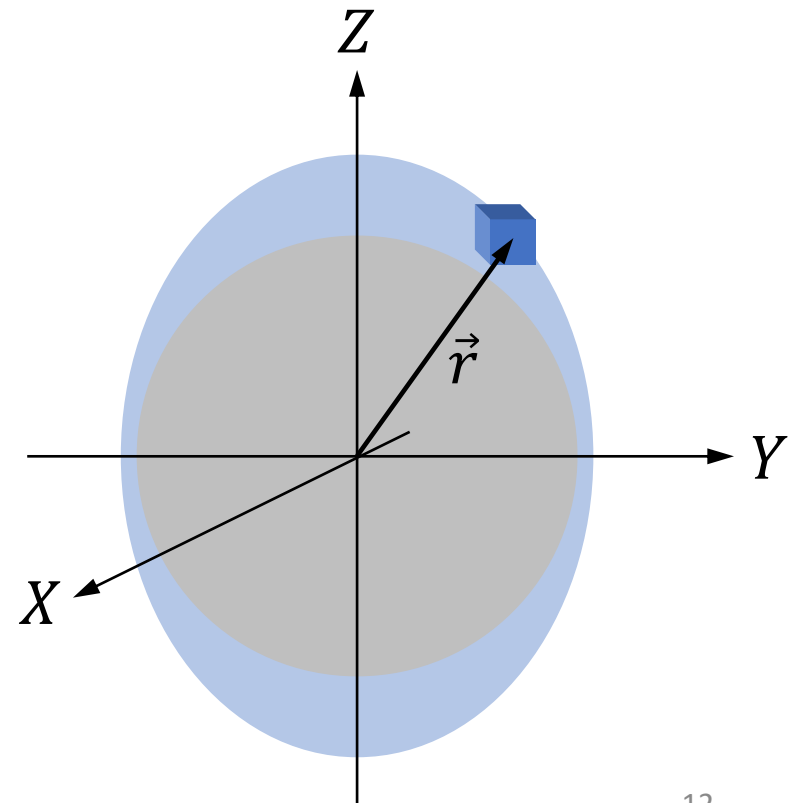
根据流体的性质可以知道，压力一定垂直于液面，即液体表面一定是一个等压面，因此，旋转的液体表面形状为一个抛物面

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r_\perp^2 - p_0/g$$

【例子】 已知月球对地球表面潮汐力的表达式 ( $r \ll R$ ),

$$\vec{F}_{\text{tidal}} = -\frac{GM\Delta m}{R^3} [\vec{r} - 3\vec{z}]$$

其中,  $R$  为地球和月球之间的距离。  $z$  方向取地球和月球连线的方向。  
求地球上海洋的形状。



【例子】 已知月球对地球表面潮汐力的表达式( $r \ll R$ )，

$$\vec{F}_{\text{tidal}} = -\frac{GM\Delta m}{R^3} [\vec{r} - 3\vec{z}]$$

其中， $R$  为地球和月球之间的距离。 $z$  方向取地球和月球连线的方向。  
求地球上海洋的形状。

求解： 单位质量的潮汐力加引力为，

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{\Delta m} = -\frac{GM}{R^3} (\vec{r} - 3\vec{z}) - \frac{GM}{r^2} \vec{r}$$

它所对应的势能 $\varphi$ 满足， $d\varphi/dx_i = -f_i$ ， 即

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{GM}{R^3} x, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{GM}{R^3} y, \quad \frac{d\varphi}{dz} = -2 \frac{GM}{R^3} z$$

因此，  $\varphi(x, y, z) = \frac{GM}{2R^3} (x^2 + y^2 - 2z^2) - \frac{GM}{r}$

【例子】 已知月球对地球表面潮汐力的表达式( $r \ll R$ )，

$$\vec{F}_{\text{tidal}} = -\frac{GM\Delta m}{R^3} [\vec{r} - 3\vec{z}]$$

其中， $R$  为地球和月球之间的距离。 $z$  方向取地球和月球连线的方向。  
求地球上海洋的形状。

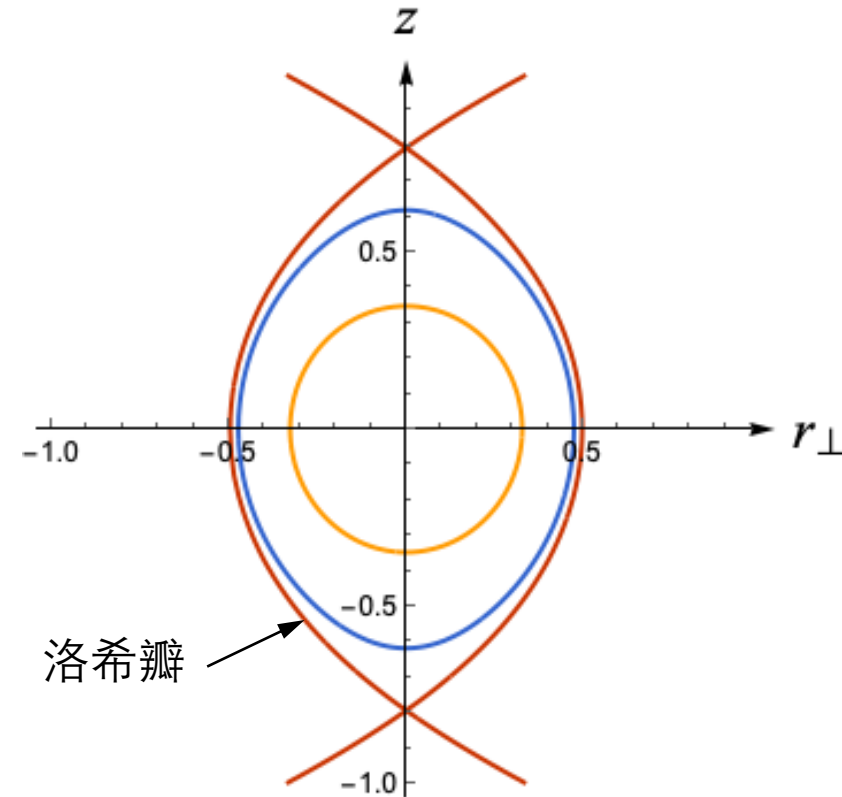
根据液体静力学平衡方程，

$$p + \rho\varphi = \text{const}$$

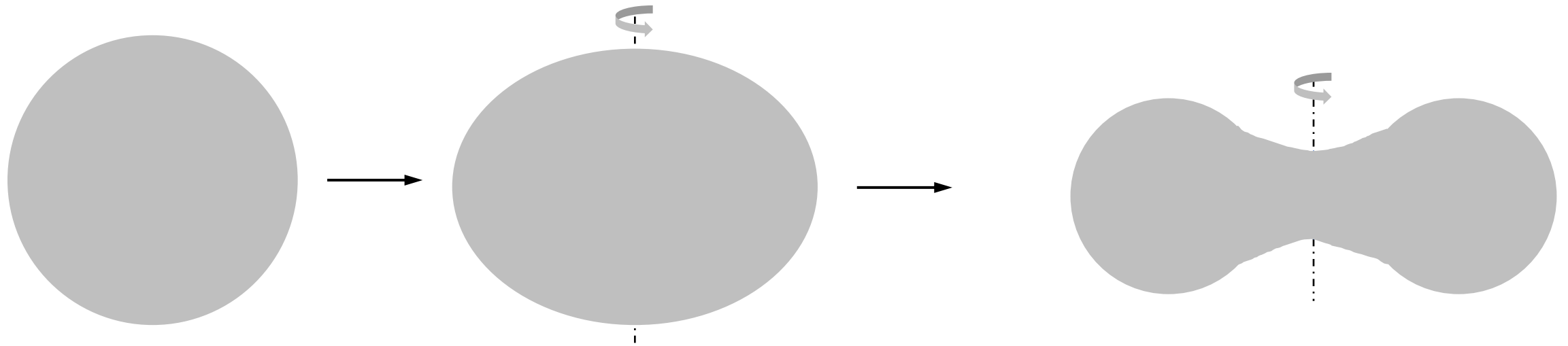
另一方面，液体表面为等压强面，取海洋表面压强为  $p_0$ ，则，海洋表面各处满足，

$$\varphi(x, y, z) = c$$

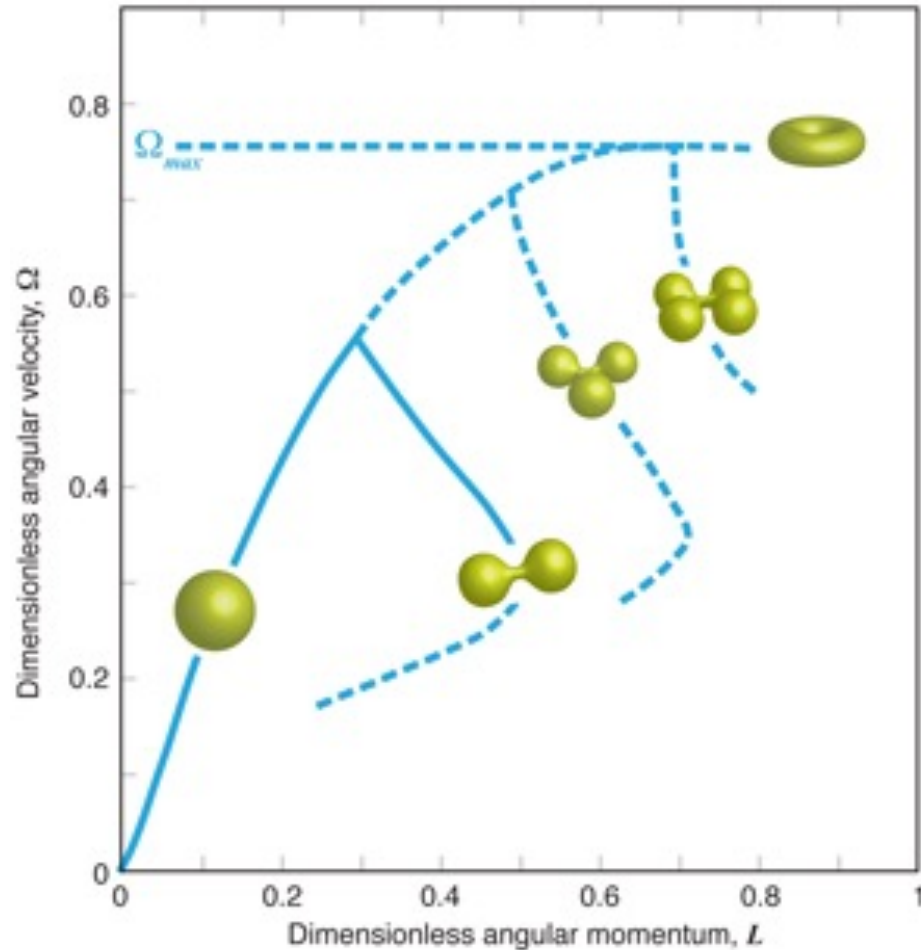
对于不同的压强画出的曲线如图所示。当压强小到一定程度，等压面开始与外界连通。这表示星球表面的物质可以在潮汐力作用下脱离星球



【例子】考虑一个流体构成的星球，质量为 $M$ ，密度为 $\rho$ ，已知星球的角动量为 $L$ ，角速度为 $\Omega$ ，不考虑其他天体的影响，分析星球的形状。



【例子】考虑一个流体构成的星球，质量为 $M$ ，密度为 $\rho$ ，已知星球的角动量为 $L$ ，角速度为 $\Omega$ ，不考虑其他天体的影响，分析星球的形状。



VFTS 352 是一颗花生形状的双星

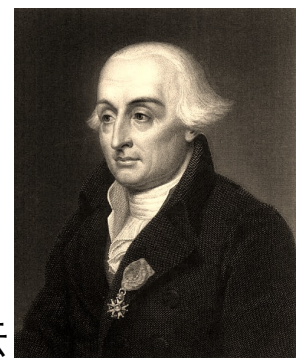
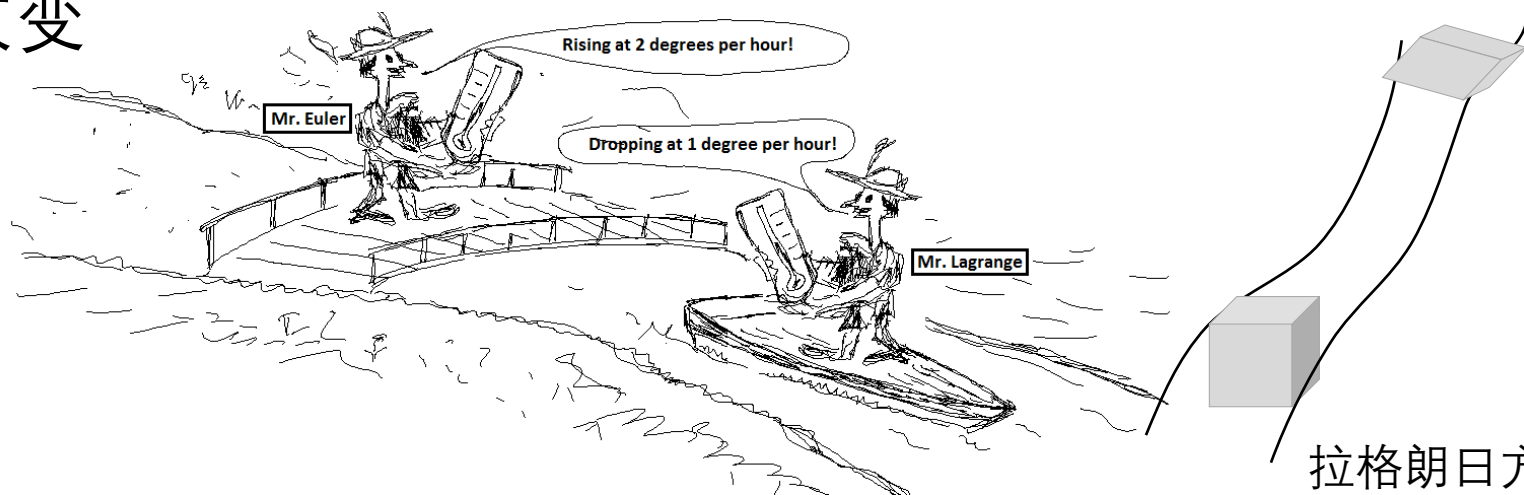
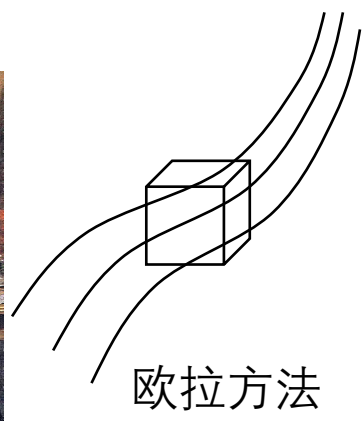




## b. 流场

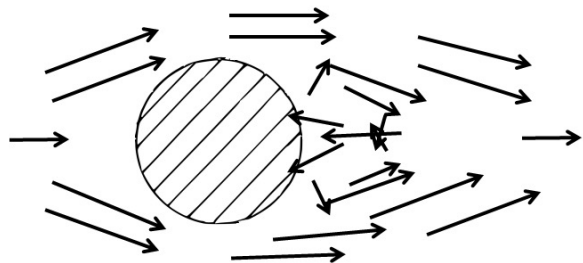
流体动力学研究流体流动时的动力学规律。描述流体运动的第一步是描述流体的速度。主要有两种方法，

- 拉格朗日方法(Lagrangian): 将流体分割成许多无穷小的微元, 然后追踪并研究它们各自的运动规律
- 欧拉方法(Eulerian): 研究经过每个空间点 $\vec{r}$ 的流速 $\vec{v}$ , 寻求其随时间和空间的改变

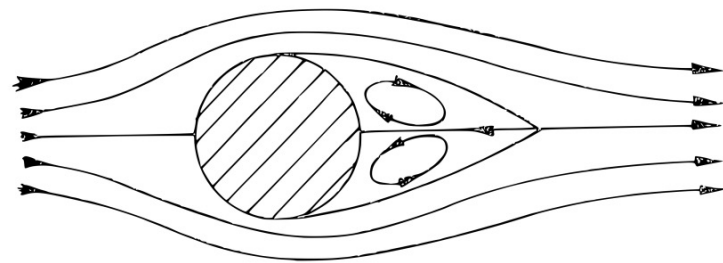


- 由于流体元的一般运动比较复杂，欧拉方法不需要追踪每一个流体元轨迹，因此数学形式上较为简单。也是流体、电磁学等的常用表述
- 拉格朗日方法能够追踪流体元的运动，因此对于处理可变液体边界问题、各向异性材料比较方便
- 欧拉方法和拉格朗日方法的主要区别在于用于描述物理量的坐标系不同：欧拉方法采用固定的坐标系；拉格朗日方法采用随着物质点移动的坐标系（随体坐标系）。基于此，人们还开发了任意欧拉-朗格朗日（AEL），结合两者的优缺点，采用独立演化的坐标系，在数值计算中比较有用

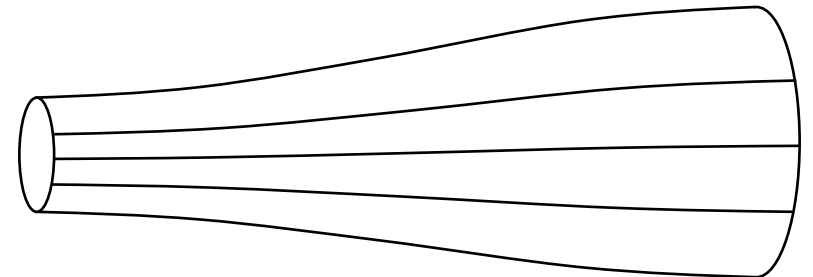
- 考虑欧拉方法，每一时刻空间每一个点都存在一个流体速度，构成一个流速场
- 更方便的方法是用一系列曲线来表示流速场，其中曲线的切线方向是流速的方向
- 由于流速场的速度是唯一的，流线不能交叉
- 相邻的一束流线形成一个管道叫做流管。由于流线不能交叉，因此流体不会穿越流管壁



流体速度



流线

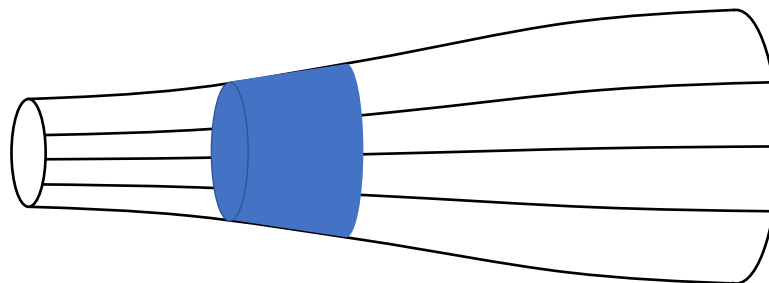


流管

## c. 定常流动 (steady flow)

定常流动是一种简单且常见的流动方式。所谓定常流动，是指空间各个点的流速 $\vec{v}$ 不随时间变化的情形

- 注意，流体做定常流动时，流速仍然可能随着空间改变
- 如果追踪一个流体元的运动，其速度仍然会发生改变，因此定常流动时流体元仍然具有加速度
- 在定常流动中，流线和流管是静止不动的，流体在流管中运动



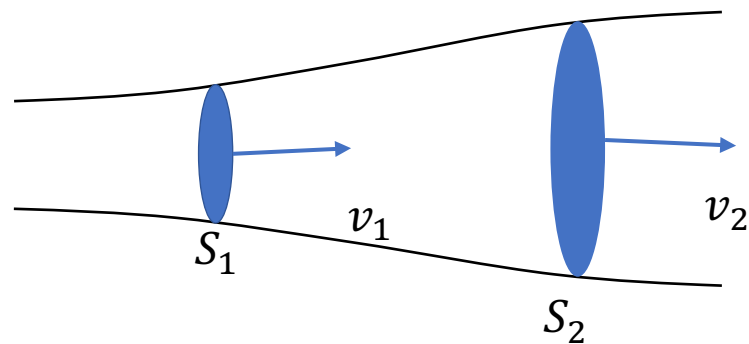
## 连续性原理

- 考虑定常流动下一段流管。设其两端的垂直截面积分别为 $S_1, S_2$ 。流体从 $S_1$ 进入流管，从 $S_2$ 穿出流管。如果流体没有损失，则单位时间内穿过 $S_1$ 、 $S_2$ 的流体质量不变：

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$$

- 即，沿着任意流管

$$\rho v S = \text{const.}$$



# 伯努利原理

- 考虑一段流管中的流体做定常流动。根据动能定理，外力所做的功等于动能的改变：经过 $\Delta t$ 时间流体从  $A + C$  段运动到  $C + B$  段，

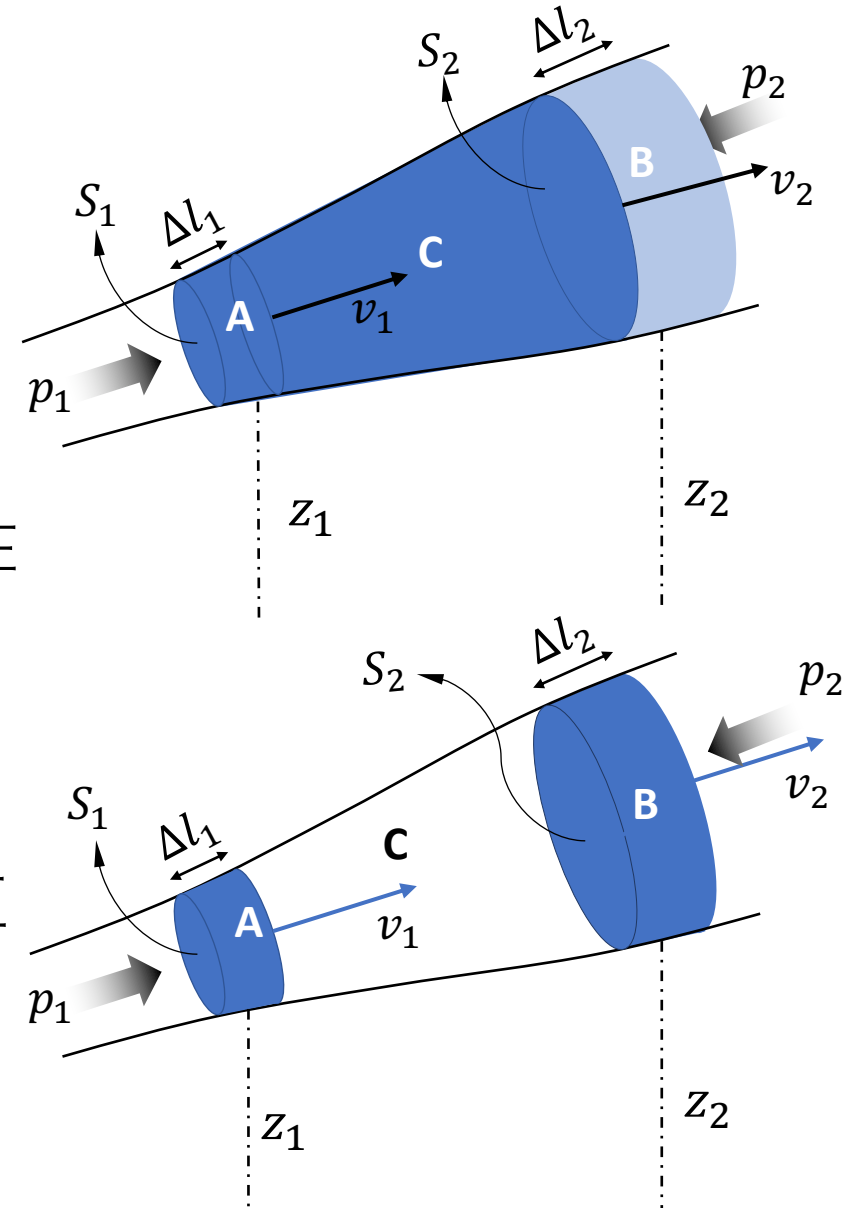
$$\Delta T = W$$

由于流体做定常流动， $C$ 段的流体分布不变因此差别在于 $A$ 、 $B$ 两段，从而动能的改变为，

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{2} \rho_2 \Delta V_2 v_2^2 - \frac{1}{2} \rho_1 \Delta V_1 v_1^2$$

类似地，外力来自两部分：重力 $mg$ 以及其他流体的压力 $F_i = p_i S_i$ ，

$$\begin{aligned} W &= p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 - \Delta m g (z_2 - z_1) \\ &= p_1 \Delta V_1 + \rho_1 \Delta V_1 g z_1 - p_2 \Delta V_2 - \rho_2 \Delta V_2 g z_2 \end{aligned}$$



根据动能定理,

$$\left(\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \rho_1 g z_1 + p_1\right) \Delta V_1 = \left(\frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 + \rho_2 g z_2 + p_2\right) \Delta V_2$$

再根据连续性方程,  $\rho_1 \Delta V_1 = \rho_2 \Delta V_2$ ,

$$\frac{1}{2} v_1^2 + g z_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} v_2^2 + g z_2 + \frac{p_2}{\rho_2}$$

换句话说, 在任意一个流管中,

$$\frac{1}{2} v^2 + g z + \frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

这个方程叫做伯努利方程

- 推导伯努利方程的过程中, 我们忽略了流体内部摩擦所损耗的能量, 这样的流体叫做理想流体
- 如果流体密度不变, 上面的方程还可以写成,  $(1/2)\rho v^2 + \rho g z + p = \text{const}$

【例子】文丘里管是一种测量流体流量的装置。如图所示，当流体流经较窄的管道2时，由于流量守恒速度会增大，

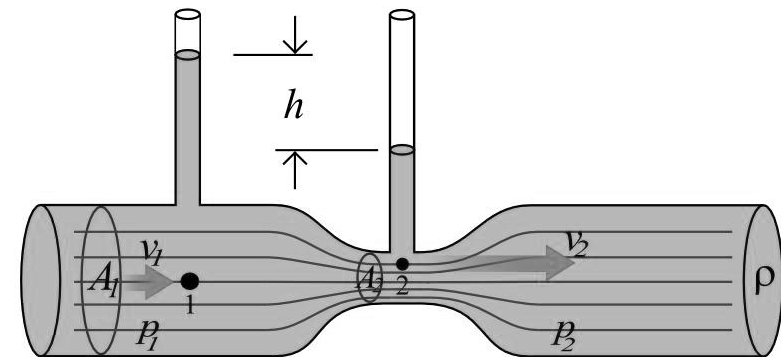
$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = Q$$

根据伯努利原理，流体会产生压力差，

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 \Rightarrow gh_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = gh_2 + \frac{1}{2} v_2^2$$

通过检测该压力差  $h = h_1 - h_2 = \frac{1}{2g} (v_2^2 - v_1^2)$ ，可以确定流体的流量：

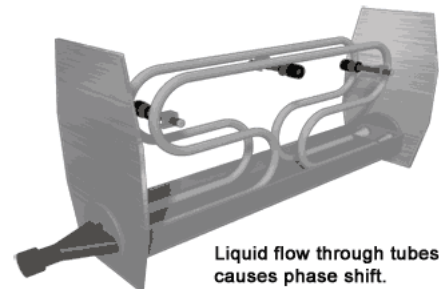
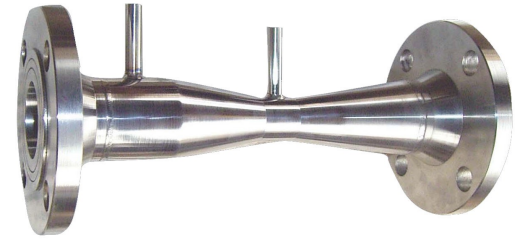
$$Q = \sqrt{2gh} \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}}$$



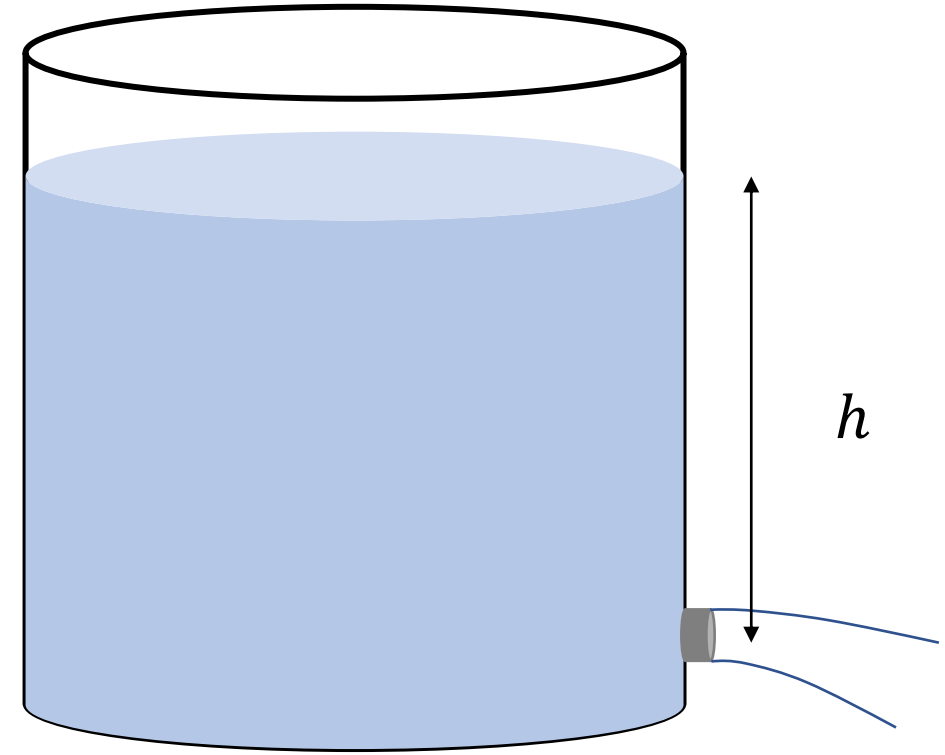


文丘里管和科里奥利流量计是两种基于不同原理的流量计：

- 文丘里管：基于压力差，
  - 优点：结构简单，机构牢固，性能稳定可靠
  - 缺点：测量精度普遍偏低，测量范围窄
- 科里奥利流量计：基于科里奥利力
  - 优点：测量精度高，重复性好，测量范围大，可以直接测量质量流量
  - 缺点：重量和体积较大、噪声大、对外界振动比较敏感



【例子】托里拆利定理：一个顶部开口的水箱中，水面的高度为 $h$ ，底部有一个小孔，求小孔中出水的速度。

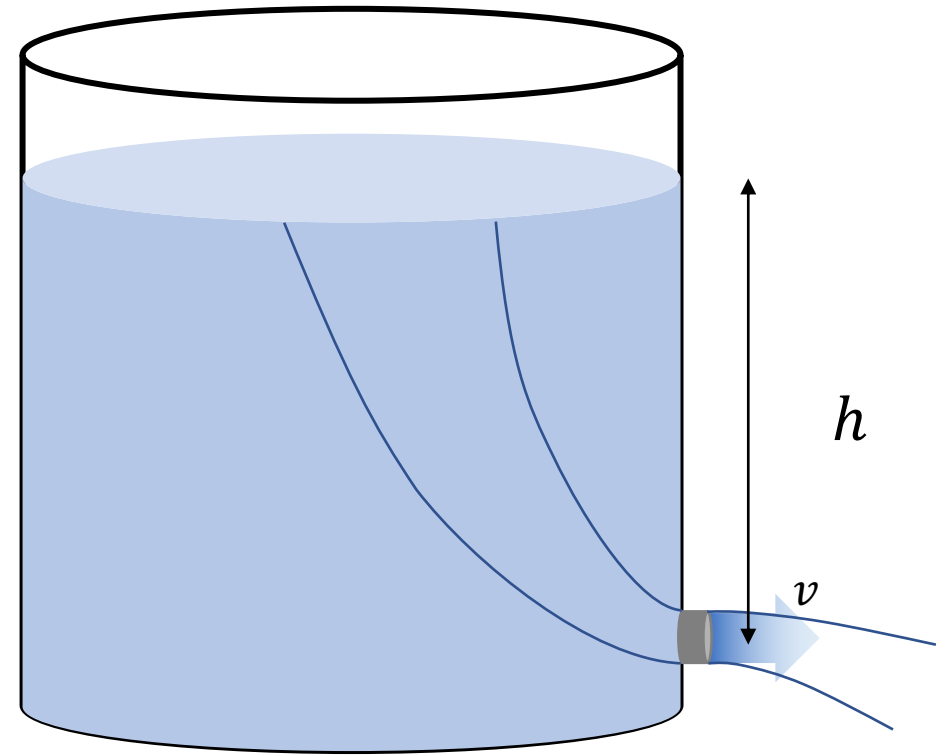


【例子】托里拆利定理：一个顶部开口的水箱中，水面的高度为 $h$ ，底部有一个小孔，求小孔中出水的速度。

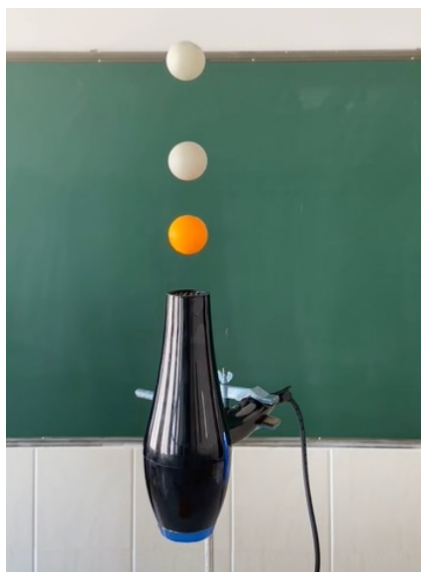
解：假设水箱足够大，小孔流出水时水位几乎没有影响。水箱的出水仍视为定常流动。

取如图一个流管，伯努利方程为，

$$p_0 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2} \rho v^2$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$



## 【例子】 其他应用



## d. 粘滞流体 (viscos fluid)

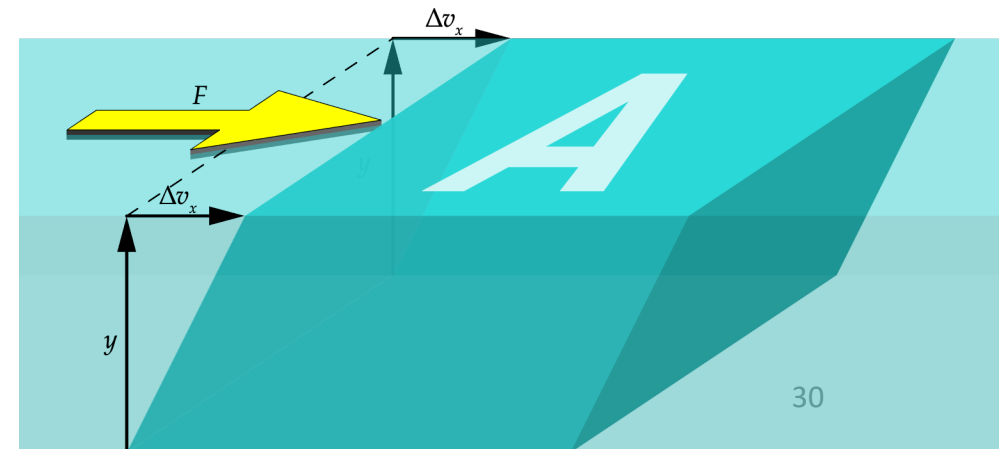
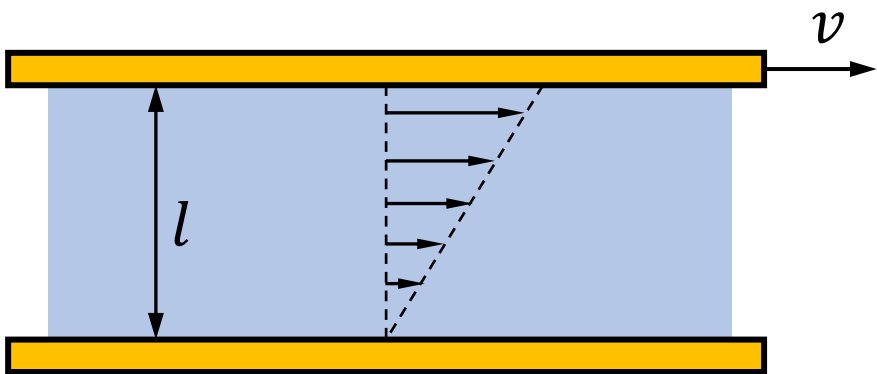
- 上一节我们讨论了流体模型，但是忽略了流体内部的摩擦，即所谓的理想流体。但是很多时候实际流体的内部摩擦不可忽略，流体的这些内部摩擦效应叫做粘滞效应
- 粘滞流体的例子：

水、蜂蜜、机油、沥青……
- 粘滞流体不仅仅是为了更精确地描述实际流体，它得到的很多定性结论与理想流体也是完全不同的
- 例如，根据流体理论，理想流体无法对在其中匀速运动的固体施加任何力 —— 飞机无法在空中飞行、轮船无法在海中行驶！

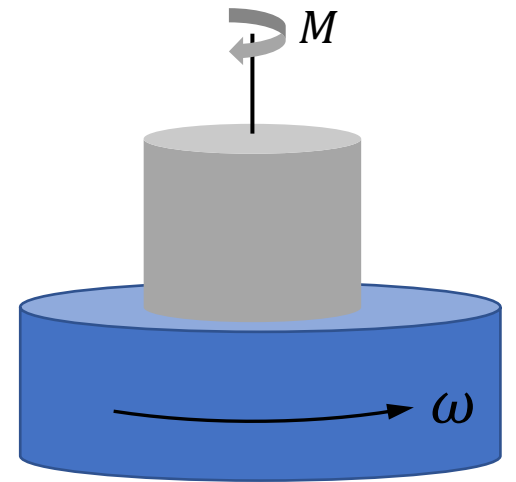
## 粘滞(viscosity)的定义

- 考虑一个2维的流体。假设我们对液体垂直于 $y$ 方向的表面施加一个沿 $x$ 方向的剪切力 $F$ ，在这个力的作用下表面的流体将会流动，速度为 $v_x$
- 由于层与层之间存在摩擦，其他层的流体在摩擦力的作用下也会开始流动
- 最终不同层的流体会维持一个速度差 $\Delta v_x$ ，层间距越大，速度差也越大
- 速度差还与单位面积的剪切力有关，比例系数定义为粘滞系数，

$$\frac{F_x}{A_y} = \eta \frac{\Delta v_x}{\Delta y}$$



【例子】考虑如图测量液体粘滞系数的方法。装置包含半径分布为  $a$ 、 $b$  的两个同轴桶。内桶悬挂在扭丝下，外桶以角速度  $\omega$  旋转，两桶之间充满待测液体，液体高度为  $l$ 。在系统处于稳定状态时，通过扭丝测得内桶收到液体的力矩为  $M$ 。求液体粘滞系数  $\eta$ 。



【例子】考虑如图测量液体粘滞系数的方法。装置包含半径分布为  $a$ 、 $b$  的两个同轴桶。内桶悬挂在扭丝下，外桶以角速度  $\omega$  旋转，两桶之间充满待测液体，液体高度为  $l$ 。在系统处于稳定状态时，通过扭丝测得内桶收到液体的力矩为  $M$ 。求液体粘滞系数  $\eta$ 。

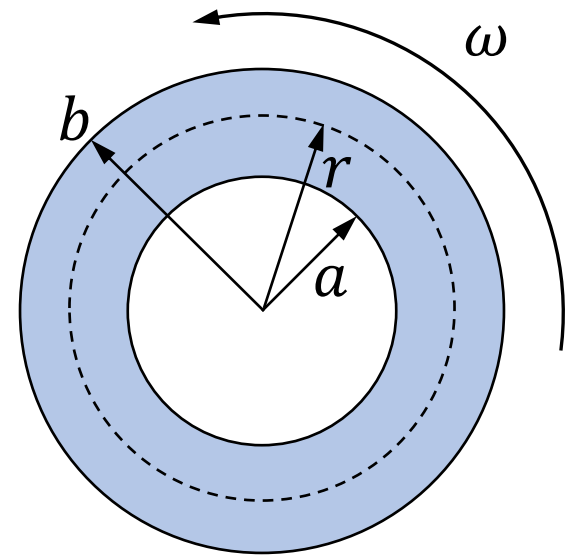
求解：设液体粘滞系数为  $\eta$ 。考虑半径为  $r$  处厚度为  $\Delta r$  的液体所受到的内外层液体的粘滞力，

$$\frac{F(r)}{2\pi r l} = \eta r \frac{d\omega}{dr}$$

由于液体层做定常运动，切向加速度为0，因此液体层所受到的总力矩为0，即

$$M(r) = rF(r) = M$$

$$\Rightarrow M = 2\pi r^3 l \eta \frac{d\omega}{dr}$$

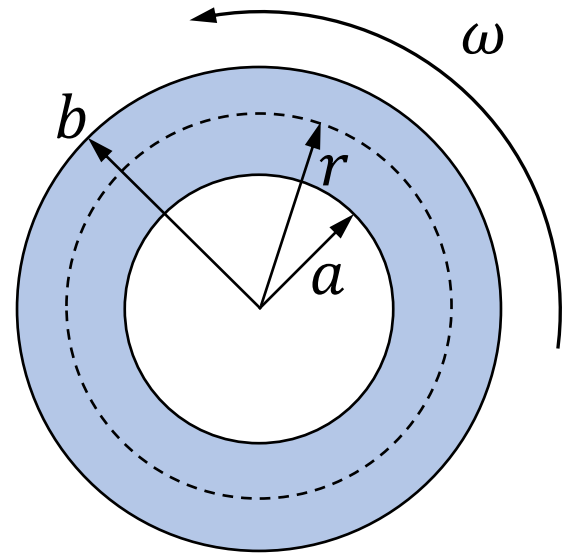




【例子】考虑如图测量液体粘滞系数的方法。装置包含半径分布为  $a$ 、 $b$  的两个同轴桶。内桶悬挂在扭丝下，外桶以角速度  $\omega$  旋转，两桶之间充满待测液体，液体高度为  $l$ 。在系统处于稳定状态时，通过扭丝测得内桶收到液体的力矩为  $M$ 。求液体粘滞系数  $\eta$ 。

积分可以得到，

$$\begin{aligned} \int M \frac{dr}{r^3} &= \int 2\pi\eta l d\omega \\ \Rightarrow -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) M &= 2\pi\eta l \omega \\ \Rightarrow \eta &= \frac{M}{4\pi l \omega} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \end{aligned}$$



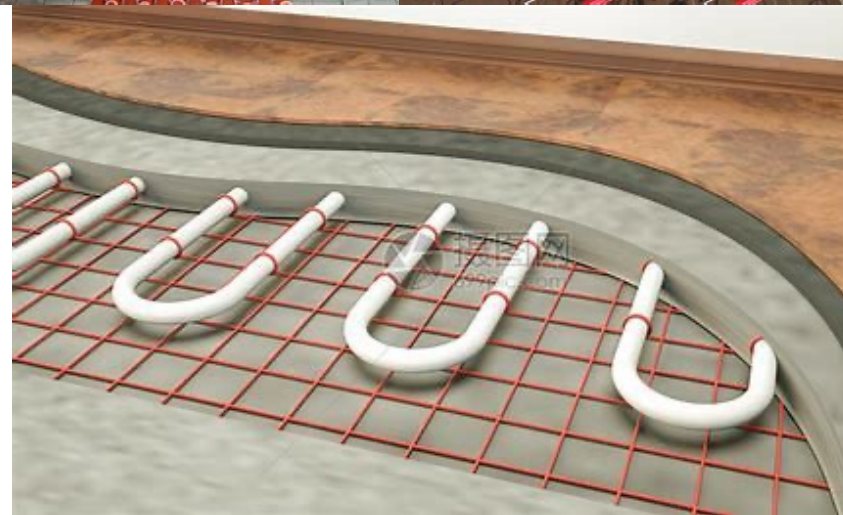
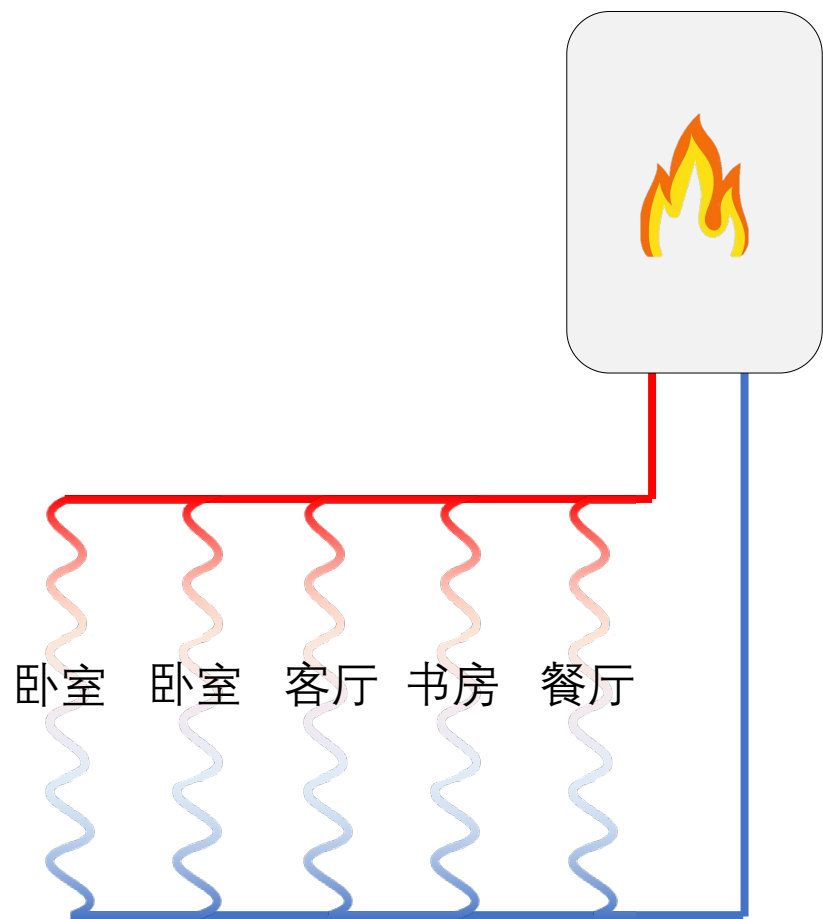
根据伯努利原理，理想流体不需要压力即可流过均匀的水平管道。但是由于流体的粘滞效应，流体在管道中流动时需要一定压力差。泊肃叶定理描述了圆形管道中不可压缩流体的流量与管道两端压力差之间的关系，

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\eta l}$$

其中， $\eta$ 为流体粘滞系数， $r$ 为管道半径， $l$ 为管道长度， $\Delta p$ 为管道两端压力差

- 应用：
  - 血液在血管中的流动，血栓
  - 管道采暖

# 【例子】地暖



斯托克斯定理描述了低速运动的小球在粘滞流体中运动所收到的阻力，

$$f = 6\pi\eta r v$$

其中， $\eta$ 为流体粘滞系数， $r$ 为小球半径， $v$ 为流体速度

- 应用：
  - 密立根油滴实验

## e. 流体力学 (fluid dynamics)

- 首先考虑理想流体:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p - \rho \nabla \varphi$$

这里, 我们采用的是拉格朗日方法, 即对于某一个流体元进行了追踪,

$$\nabla p = p'_x \vec{e}_x + p'_y \vec{e}_y + p'_z \vec{e}_z$$

是梯度导数。 $f = -\rho \nabla \varphi$  为保守外力。

- 拉格朗日方法需要追踪流体元体积, 如果采用欧拉方法, 体积元的速度的改变来自两方面, 一方面是速度随时间的改变, 另一项

是由于流体位置的改变（流动）引起的速度的改变，即

$$\begin{aligned}\frac{D\vec{v}}{Dt} &= \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t) - \vec{v}(x, y, z, t)}{\Delta t} \\ &= \vec{v}'_x \frac{\Delta x}{\Delta t} + \vec{v}'_y \frac{\Delta y}{\Delta t} + \vec{v}'_z \frac{\Delta z}{\Delta t} + \vec{v}'_t \equiv \vec{v}'_t + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}\end{aligned}$$

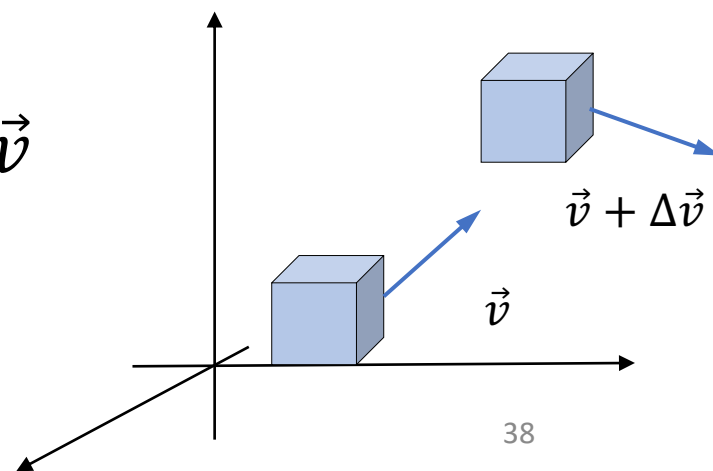
由此，我们得到了理想流体的动力学方程：

$$\rho\vec{v}'_t + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla p - \rho\nabla\varphi + \eta\nabla^2\vec{v}$$

• 对于一般流体，还需要考虑粘滞力的作用

$$\vec{v}'_t + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\varphi + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\vec{v}$$

这个方程叫做纳威-斯托克斯方程



## 流体运动的一般特征：

- 流体的运动与一个无量纲的数有关， $Re = \rho v L / \eta$ ，叫做雷诺数，其中， $\rho$ 是流体的密度， $v$ 是流体的速度， $L$ 是体系的特征长度， $\eta$ 是粘滞系数。
- 雷诺数比较低时，流体的流动为层流，特征为各个流体层之间不会混杂
- 当雷诺数增大时，会出现涡旋
- 当雷诺数进一步增大时，开始出现湍流现象

