

# 第八章：振动与波动

李 阳

中国科学技术大学近代物理系



力学A · 2024年秋

## §33. 简谐振动(simple harmonic motion)

胡克定律：弹簧的弹性力与其长度变化成正比：

$$F = -kx$$

质点在弹性回复力的作用下的运动，根据牛顿第二定律，

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

可以验证，这个方程的通解为，

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

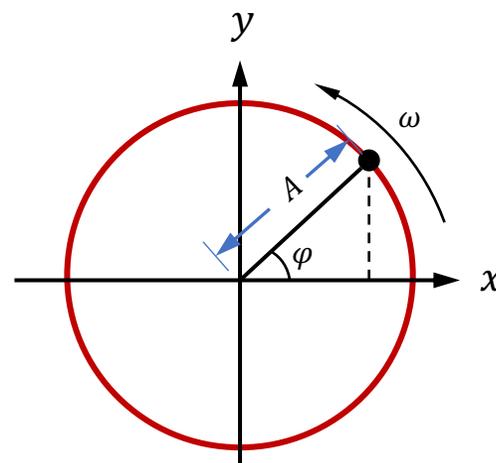
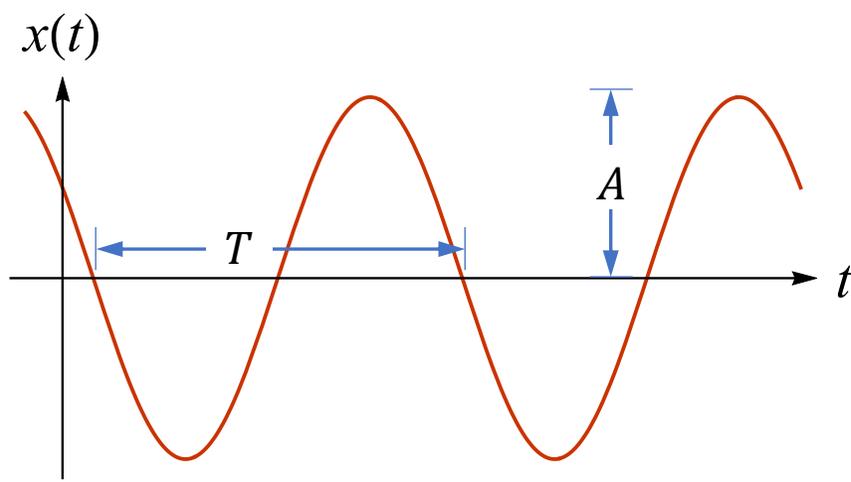
其中， $\omega = \sqrt{k/m}$ 。  $A, \varphi$  是两个常数，由两个初始条件决定：初始位置和初始速度

- 函数图像

- 周期性运动(periodic motion): 周期(period)为,  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$   
与振幅无关 —— 计时

- 频率(frequency): 单位时间内振动的次数,  $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

- 角频率/圆频率(angular frequency):  $\omega = \sqrt{k/m}$



- 速度,  $v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$
- 加速度,  $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\frac{k}{m}x$
- 初始位置和速度:

$$x_0 \equiv x(0) = A \cos \varphi,$$

$$v_0 \equiv v(0) = -\omega A \sin \varphi$$

因此, 简谐振动的解也可以写成,

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \tan \varphi = -v_0 / \omega x_0, A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 / \omega^2}$$

- 谐振子的能量：

- 动能：  $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$

- 势能：  $V = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$

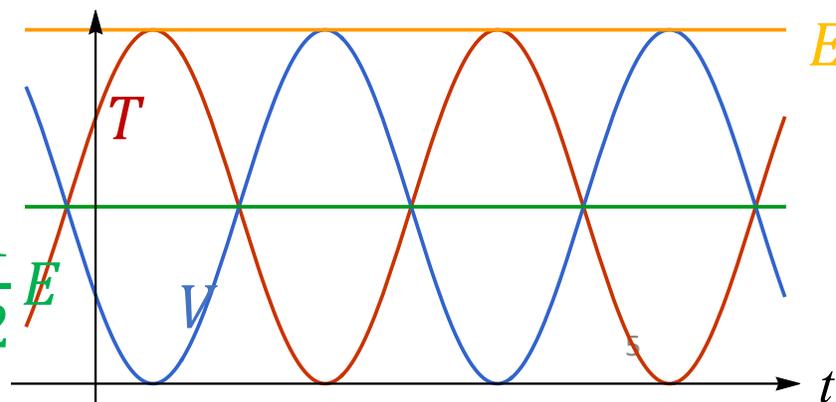
- 总能量：  $E = T + V = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2$

- 平均能量：

$$\bar{T} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} T(t) dt = \frac{E}{\tau} \int_0^{\tau} \sin^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2}E$$

$$\bar{V} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} V(t) dt = \frac{E}{\tau} \int_0^{\tau} \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2}E$$

$$\bar{T} = \bar{V} = \frac{1}{2}E$$



# a. 摆

- 单摆 (pendulum):

运动方程:

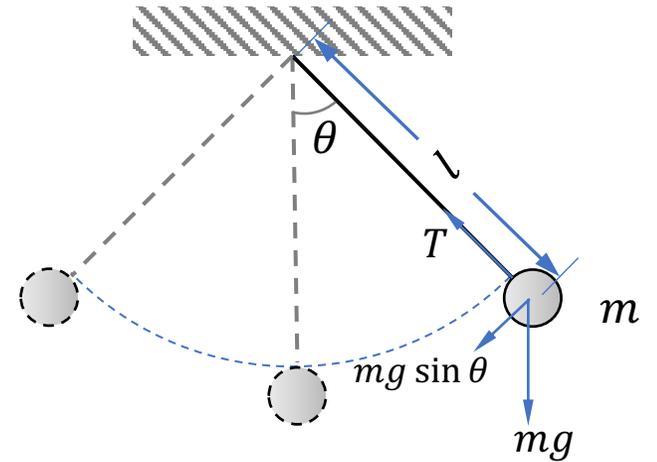
$$\begin{aligned} T - mg \cos \theta &= ml\dot{\theta}^2 \\ -mg \sin \theta &= ml\ddot{\theta} \end{aligned}$$

其中,  $F_t = -mg \sin \theta$  为切向回复力。在摆角  $\theta \ll 1$  非常小的时候, 可以引入近似  $\sin \theta \approx \theta$ , 即  $F_t \approx -mg\theta$ 。因此切向运动方程:

$$-mg\theta = ml\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

这是一个谐振子运动方程, 角频率为  $\omega = \sqrt{g/l}$ , 周期为,

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}$$



泰勒展开:

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{3!}\theta^3 + \dots$$

注意这个关系时在角度用弧度表示时才成立。<sup>6</sup>

注意，单摆的周期与质点的质量无关 —— 应用：钟摆

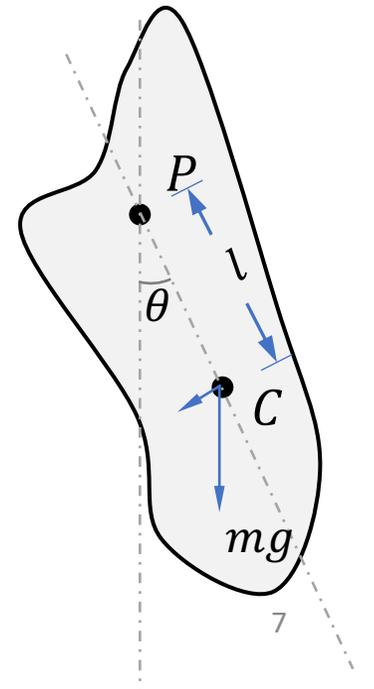
- 复摆 (compound pendulum)/物理摆：

复摆为一个刚体绕某一个固定轴垂直悬挂，并在平衡位置附近自由做小角度摆动。设 $P$ 与质心 $C$ 之间的距离为 $l$ ，刚体绕 $P$ 轴转动时的转动惯量为 $I$ ，则刚体偏离平衡位置角度为 $\theta \ll 1$ 时，动力学方程为：

$$mgl \sin \theta = -I\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgl}{I} \theta = 0$$

这是一个谐振子运动方程，角频率为 $\omega = \sqrt{mgl/I}$ ，周期为

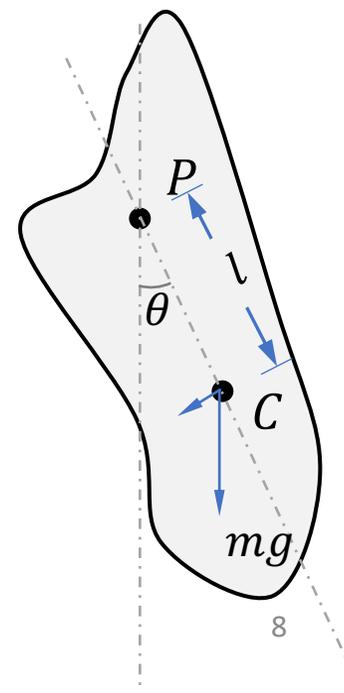
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$$



注意，这个周期实际与刚体的质量无关，因为刚体的转动惯量正比于其质量。若刚体过平行于P且过质心的转动惯量写成 $I_C = mR^2$ 其中 $R$ 叫做刚体的回旋半径。则复摆的周期可以写成，

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l + \frac{R^2}{l}}{g}}$$

当 $l = R$ 时，复摆的周期最小，为 $T_m = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$



## b. 一维势能曲线

考虑一个质点在外力作用下的运动，设外力对应的势能为 $V(x)$ ，运动方程为，

$$m\ddot{x} + V'(x) = 0$$

总能量为，

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$$

当外力为0时，质点处于平衡，即，

$$F(x_0) = -V'(x_0) = 0$$

其中， $x_0$ 是平衡点的位置

考虑质点在平衡位置附近的运动。此时可以将势能 $V$ 在 $x_0$ 附近进行泰勒展开，

$$V(x) = V(x_0) + \cancel{V'(x_0)}^0(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

总能量可以写成,

$$E = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0) \xi^2$$

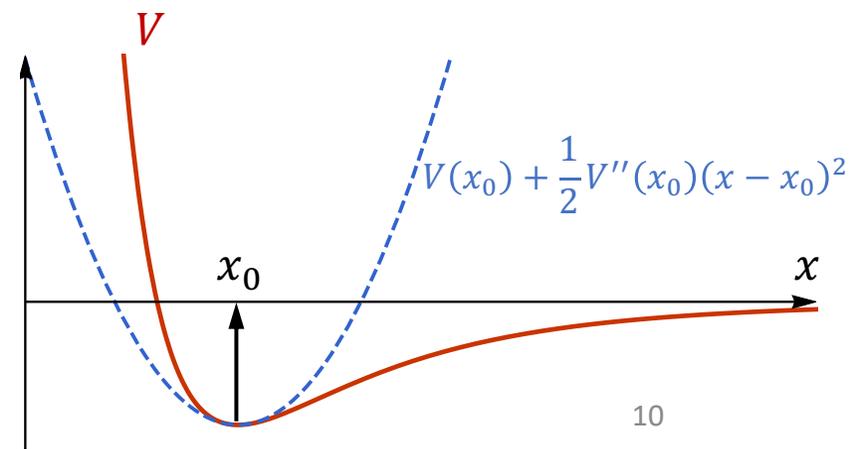
其中, 偏离平衡位置的位移  $\xi = x - x_0$ ,  $V(x_0), V''(x_0)$  都是常数。对应的力为

$$F(\xi) = -V''(x_0) \xi$$

如果  $V''(x_0) > 0$ , 则该力为回复力, 且质点处于稳定平衡。如果  $V''(x_0) < 0$ , 则质点处于非稳定平衡。因此, 在稳定平衡位置附近的运动, 都可以近似为简谐振动, 其中的等效弹簧系数

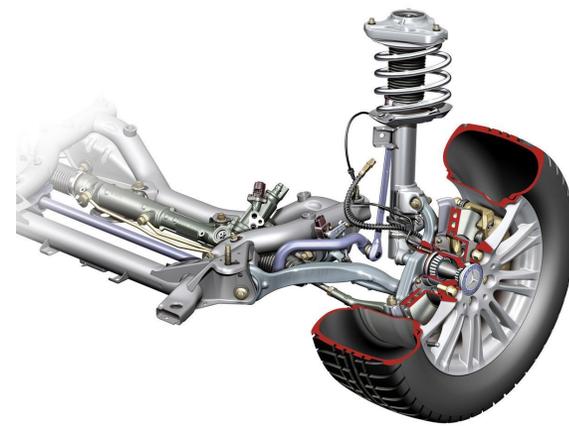
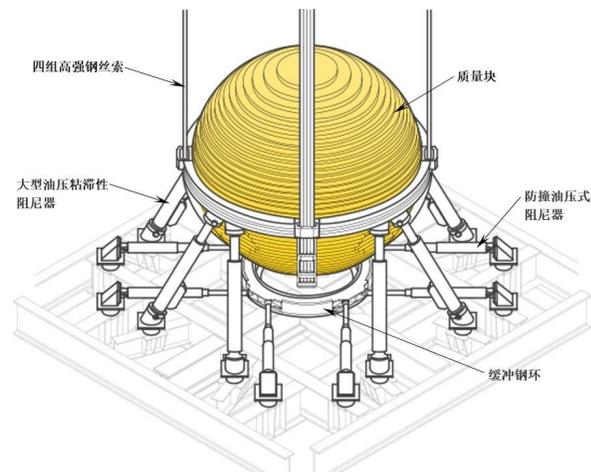
$$k = V''(x_0)$$

角频率:  $\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}$ , 周期:  $T = 2\pi \sqrt{m/V''(x_0)}$



## §32. 阻尼振动与受迫振动

- 谐振子的运动没有能量损失。在实际应用中，谐振子在运动过程中，往往由于摩擦影响损失能量
  - 如果摩擦力为常数，则谐振子的运动仍然为简谐振动，只不过振幅减小
- 与此同时，在生活实践中也往往需要增加阻尼来“减震”
  - 例子：汽车减震、摩天大厦阻尼器、闭门器、减震台……



## a. 阻尼振动

- 比较实际的情况是摩擦阻尼为速度的函数，特别是在速度不是特别大时，阻尼正比于速度，

$$f = -Cv$$

- 质点在弹性回复力和阻尼的作用下的运动，根据牛顿第二定律，

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -kx - Cv \\ \Rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \end{aligned}$$

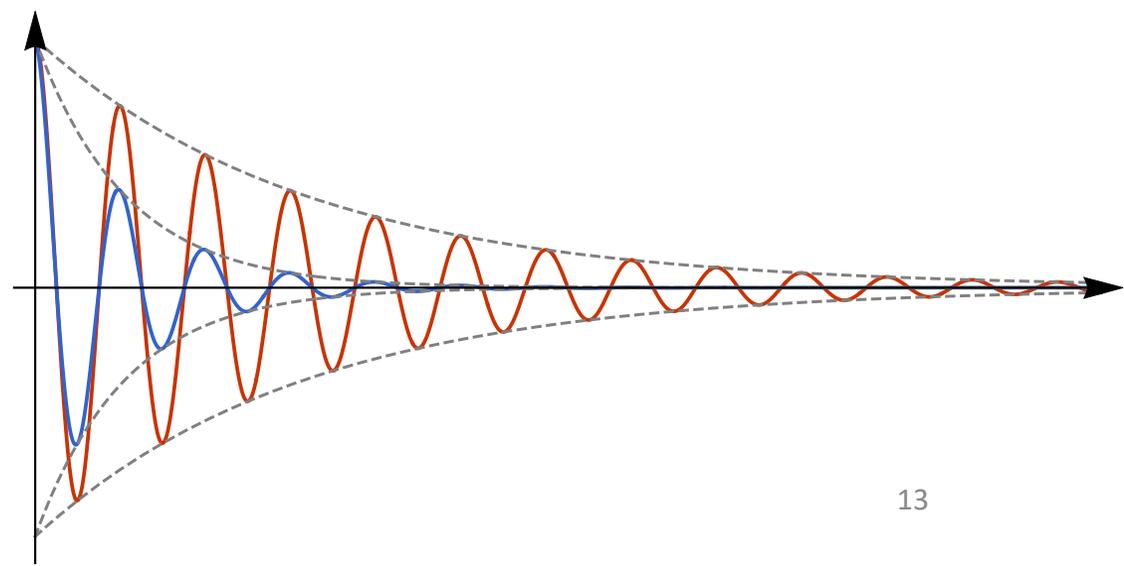
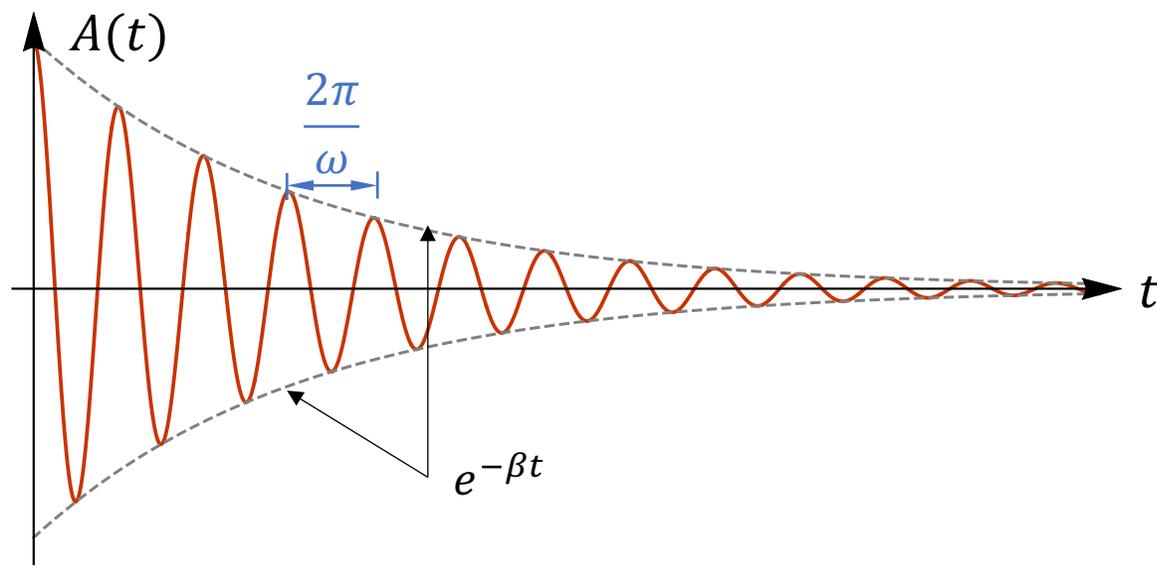
其中， $\omega_0^2 = k/m$ ， $\beta = \frac{c}{2m}$ 是一个正实数

- 当阻尼较小时（欠阻尼）：即  $\beta < \omega_0$ ，这个方程的解为，

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

其中，  $\omega^2 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

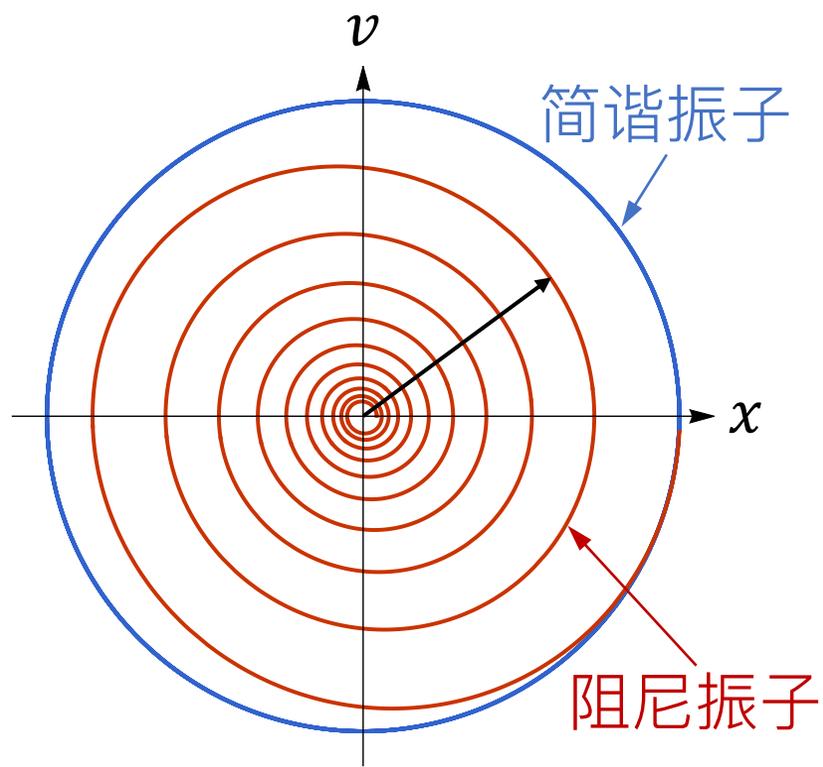
- 特点：振幅随时间指数衰减



- 速度,

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A_0 e^{-\beta t} [\omega \sin(\omega t + \varphi) - \beta \cos(\omega t + \varphi)]$$

- 相空间

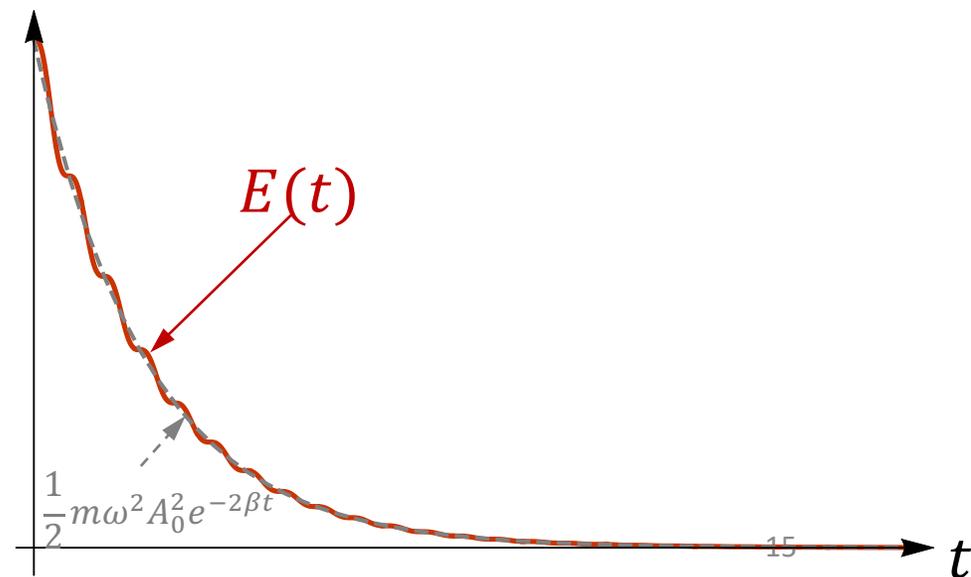


- 在阻尼非常小时  $\beta \ll \omega_0$ , 可以求得能量近似为

$$E(t) \approx \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 e^{-2\beta t} = E_0 e^{-2\beta t}$$

- 品质因子: 定义为一个周期内谐振子损失的能量在总能量中的占比乘以  $2\pi$ :

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} \approx \frac{\omega}{2\beta}$$



- 当阻尼较大时（过阻尼）：即  $\beta > \omega_0$ ，这个方程的解为，

$$x(t) = A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t}$$

其中，  $\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \leq 0$

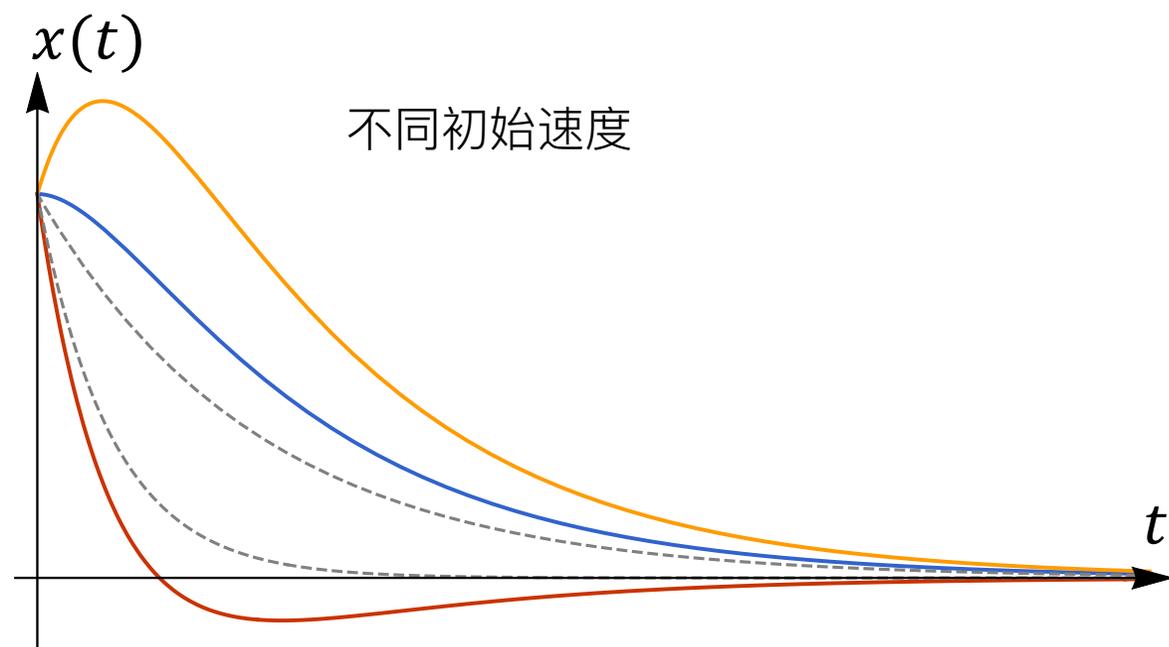
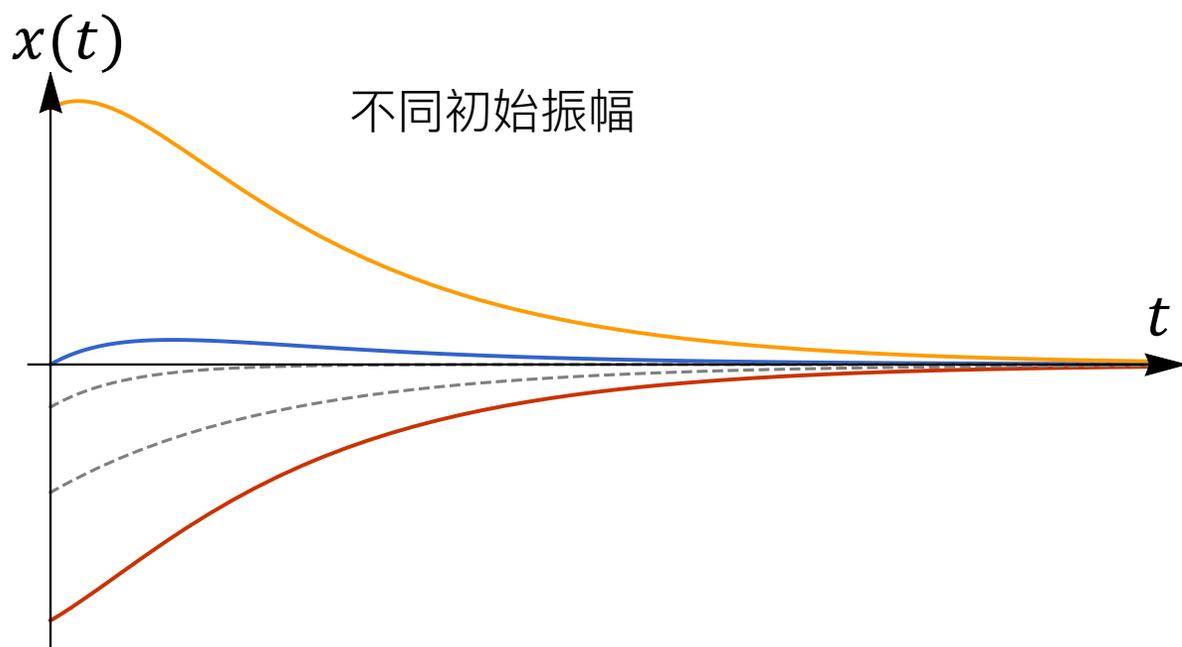
- 速度

$$v(t) = \lambda_+ A_+ e^{\lambda_+ t} + \lambda_- A_- e^{\lambda_- t}$$

- 初始速度和初始位置：

$$x(t) = e^{-\beta t} \left[ A_0 \cosh \omega t + \frac{A_0 \beta + v_0}{\omega} \sinh \omega t \right]$$

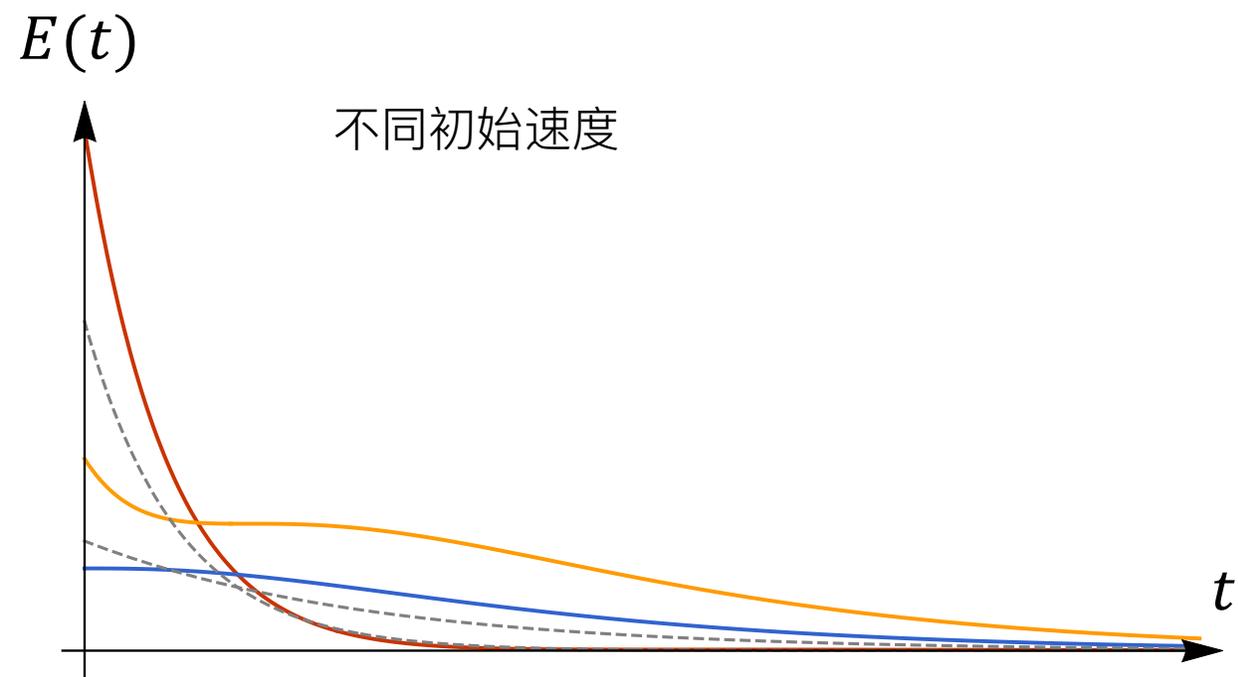
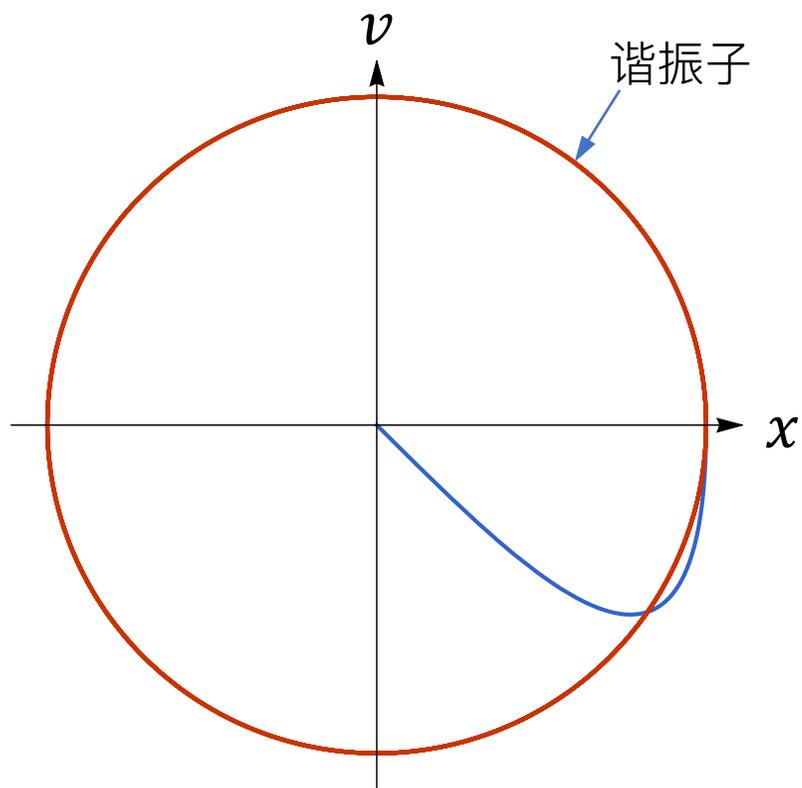
- 运动过程与初始振幅 $A_0$ 和初始速度 $v_0$ 有关



• 速度:

$$v(t) = e^{-\beta t} \left( v_0 \cosh \omega t - \frac{v_0 \beta + x_0 \omega_0^2}{\omega} \sinh \omega t \right)$$

• 能量:

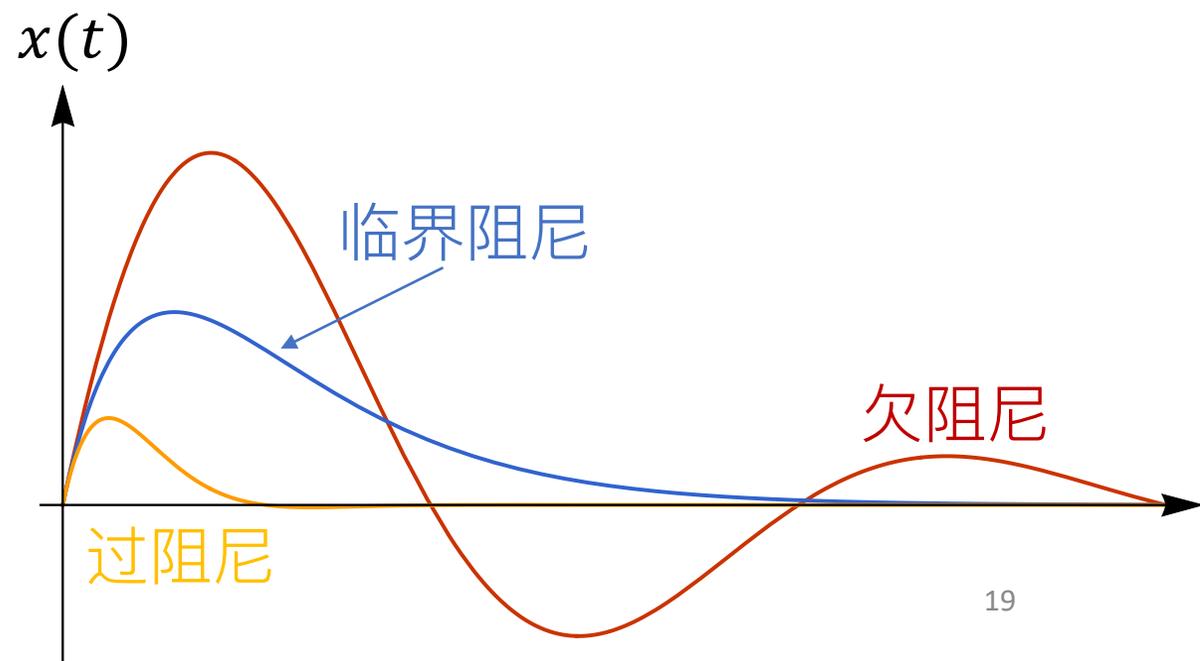
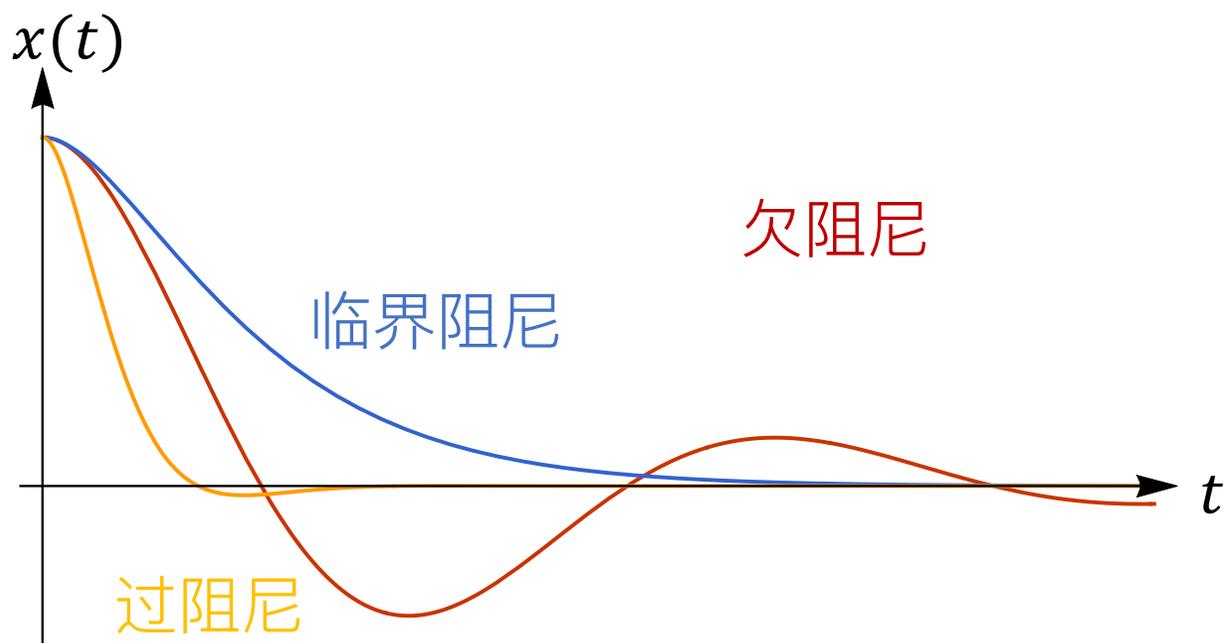


- 临界阻尼, 即  $\beta = \omega_0$ , 这个方程的解为,

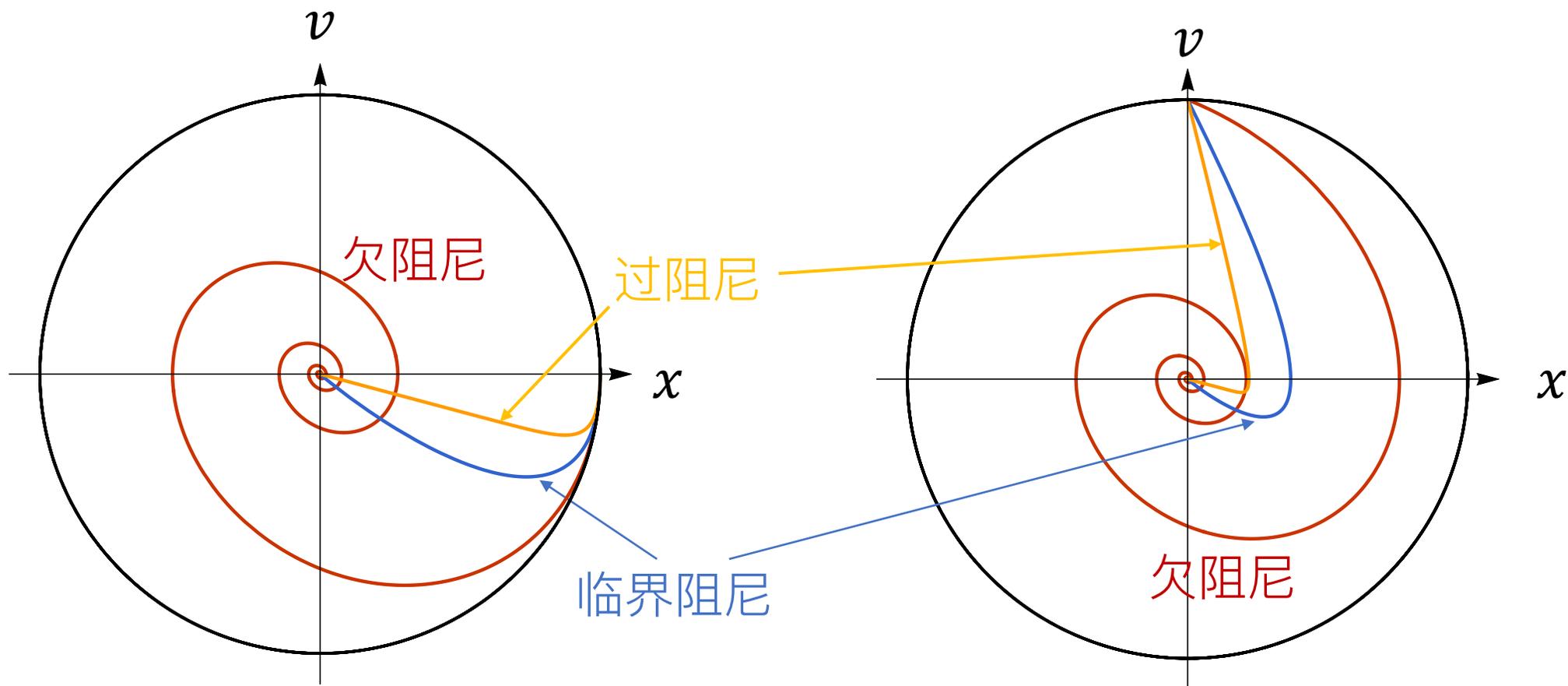
$$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}$$

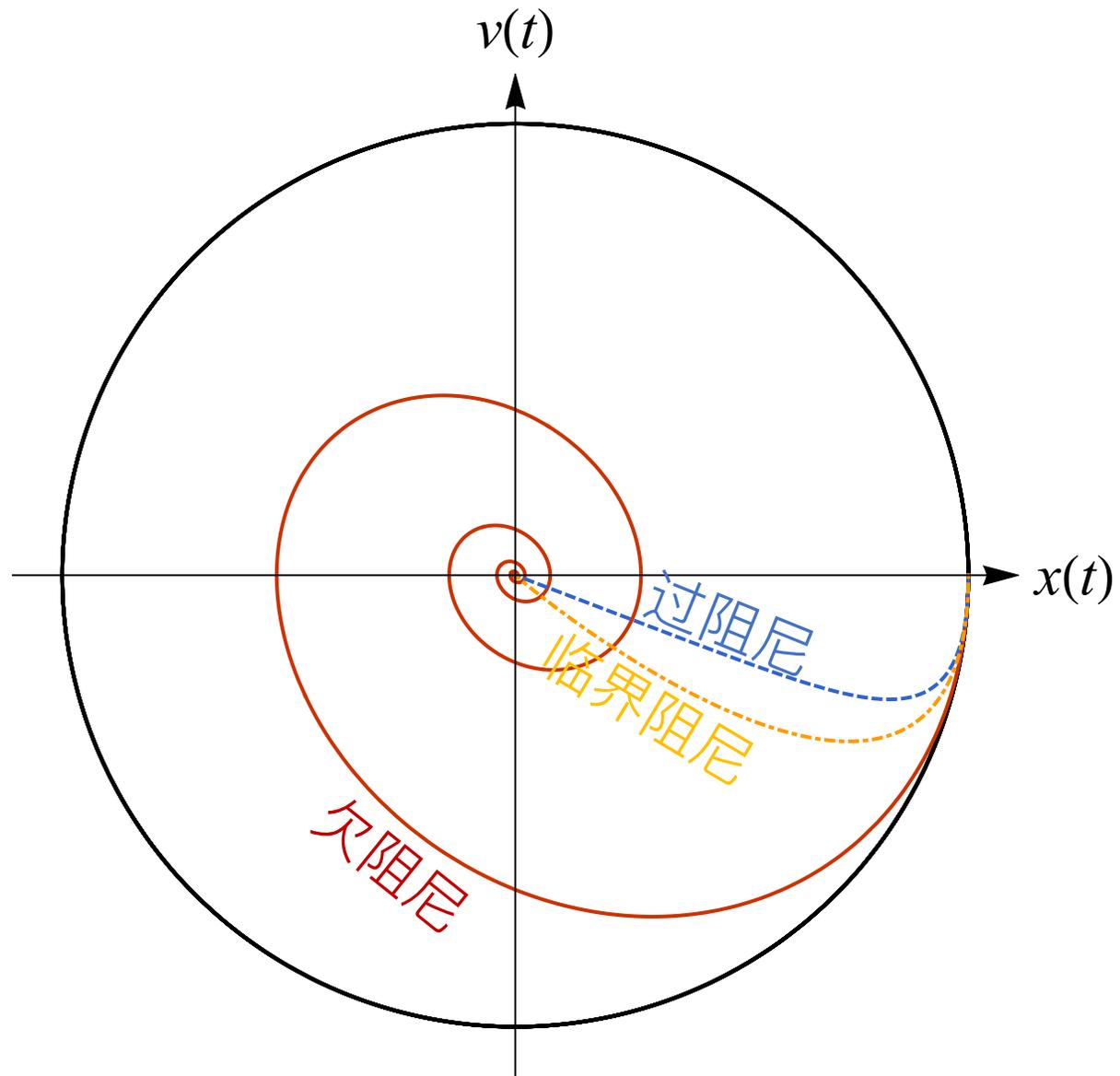
或者按照初始条件,

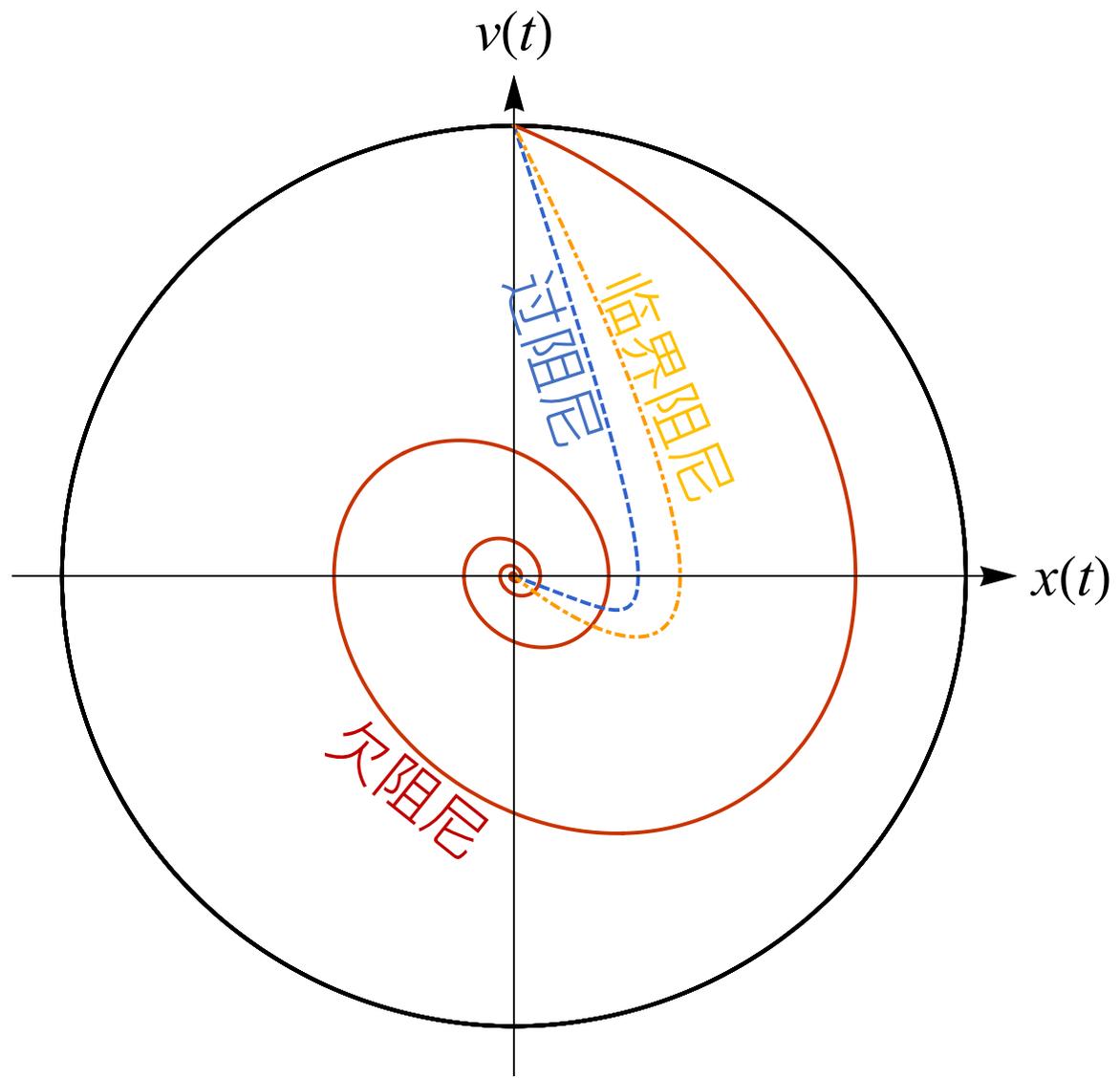
$$x(t) = [A_0 + (v_0 + \beta A_0)t]e^{-\beta t}$$

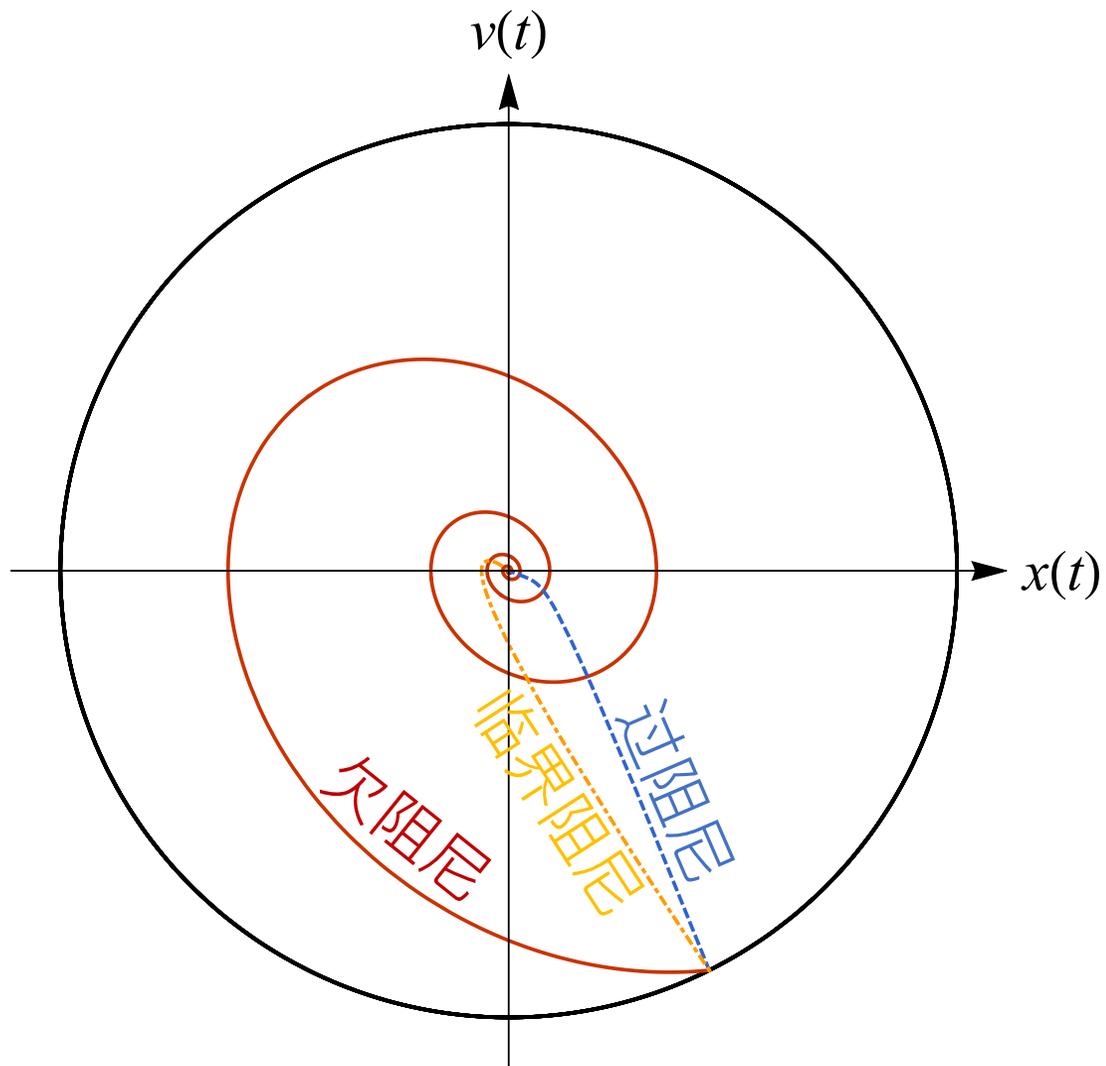


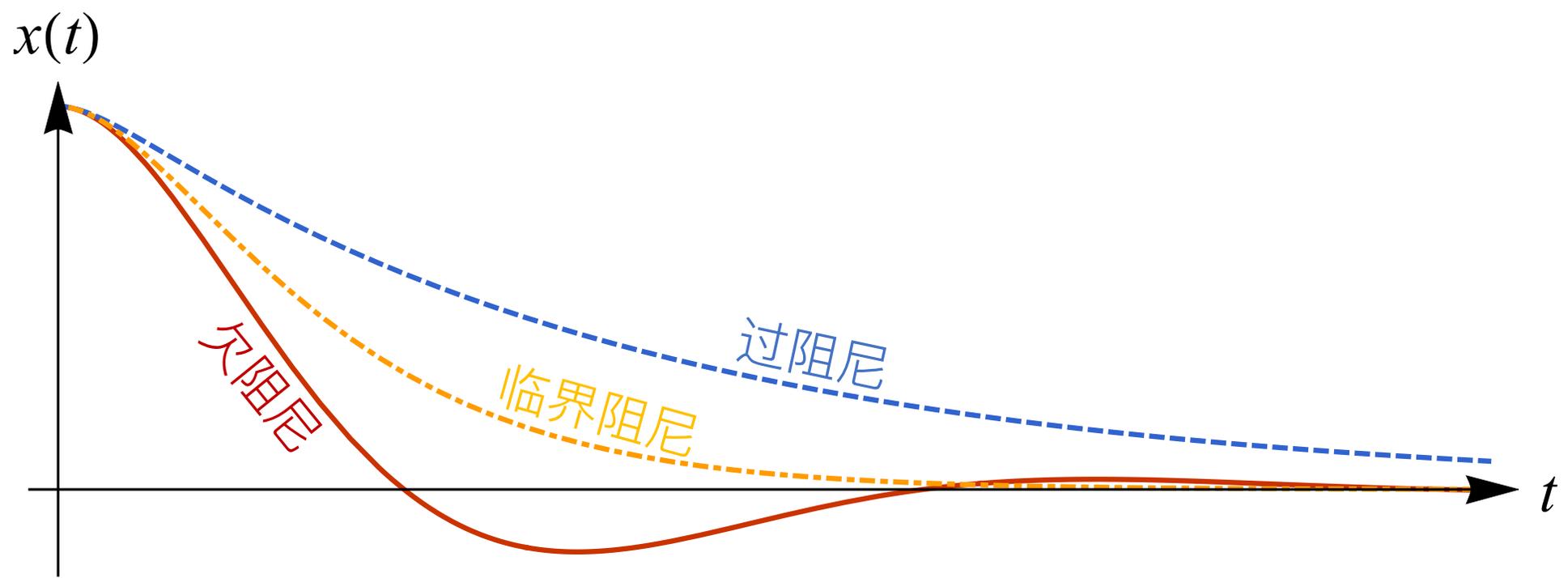
- 相空间

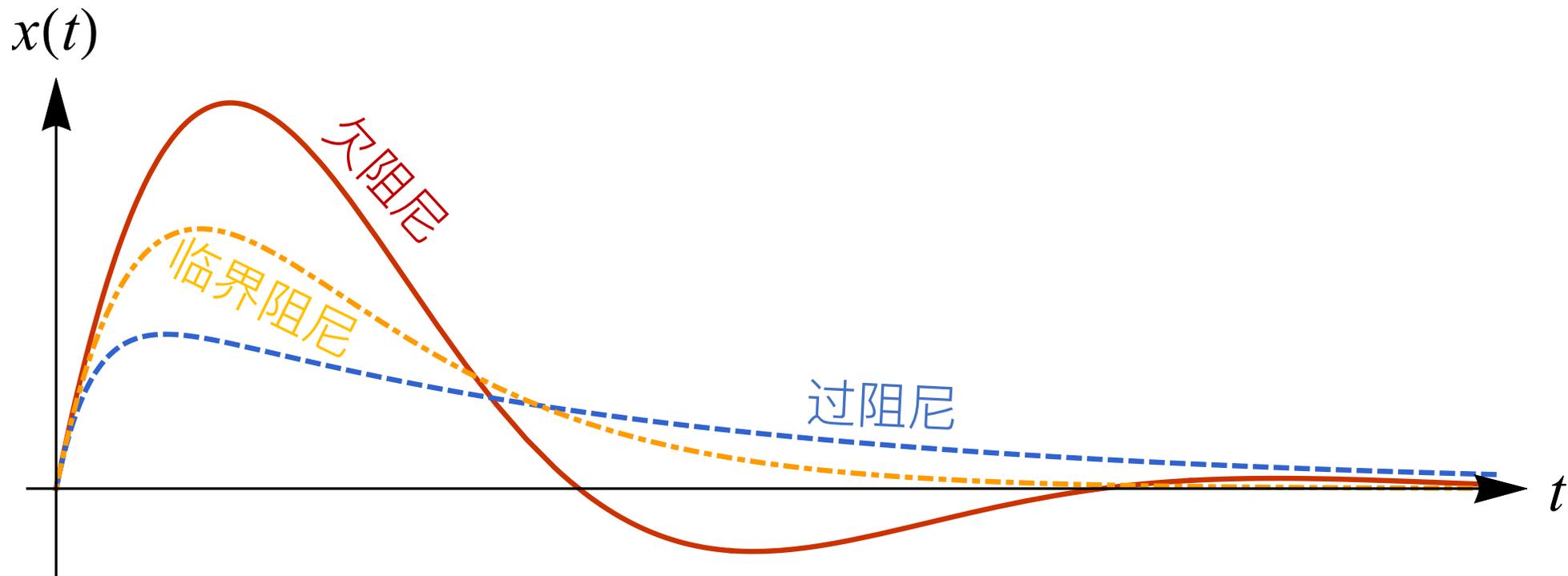


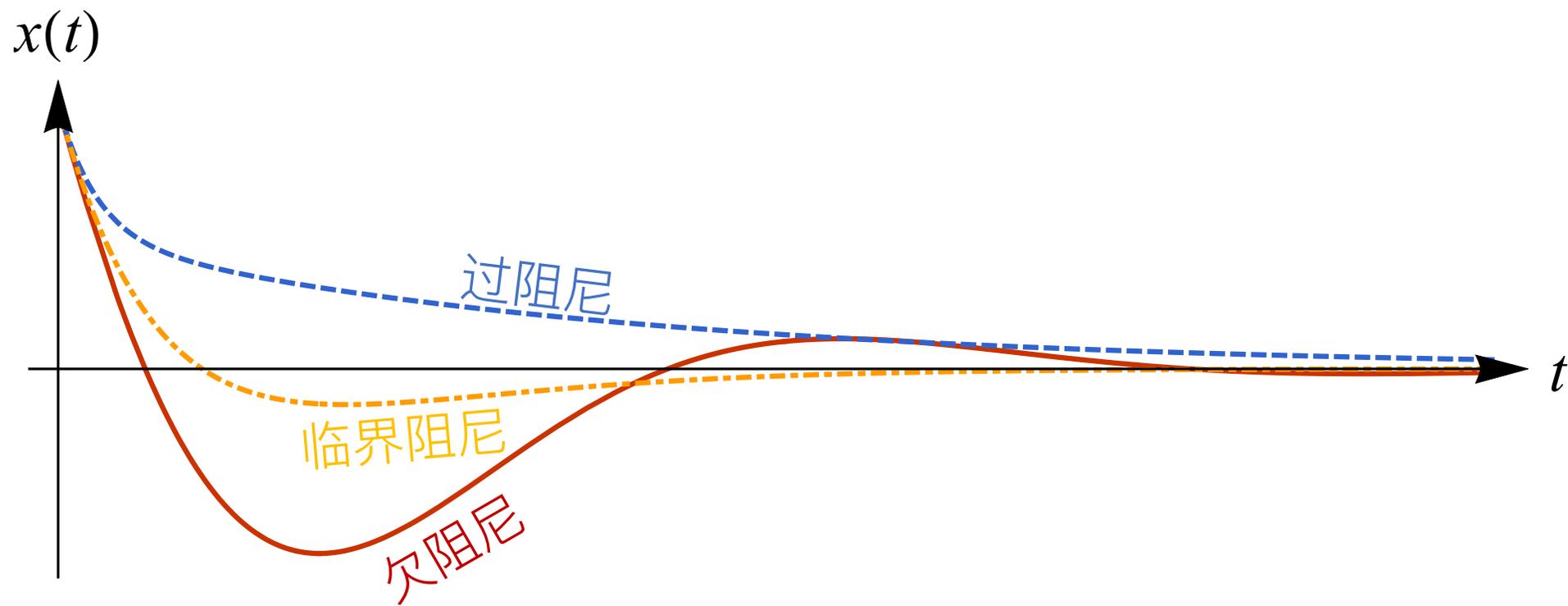












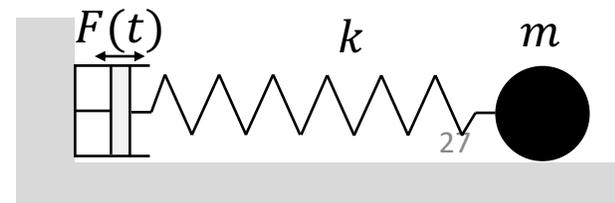
## b. 受迫振动



- 在有阻力时，振子的振动能量是衰减的；因此为了使阻尼振子系统保持运行需要补充能量，也就是增加外力。这种振动运动形式叫做受迫振动；用于驱动振子运动的外力叫做驱动力或策动力
- 为了有效馈入能量，策动力也应该是随时间改变的；常数形式的策动力，如重力，在一个完整的振动周期内的做功近似为零，因此无法直接向系统馈入能量
- 为了明确起见，我们考虑一个周期性策动力，

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t + \phi)$$

其中， $\omega$ 是策动力的周期



考虑受迫振子在回复力、阻尼和策动力共同作用下的运动，

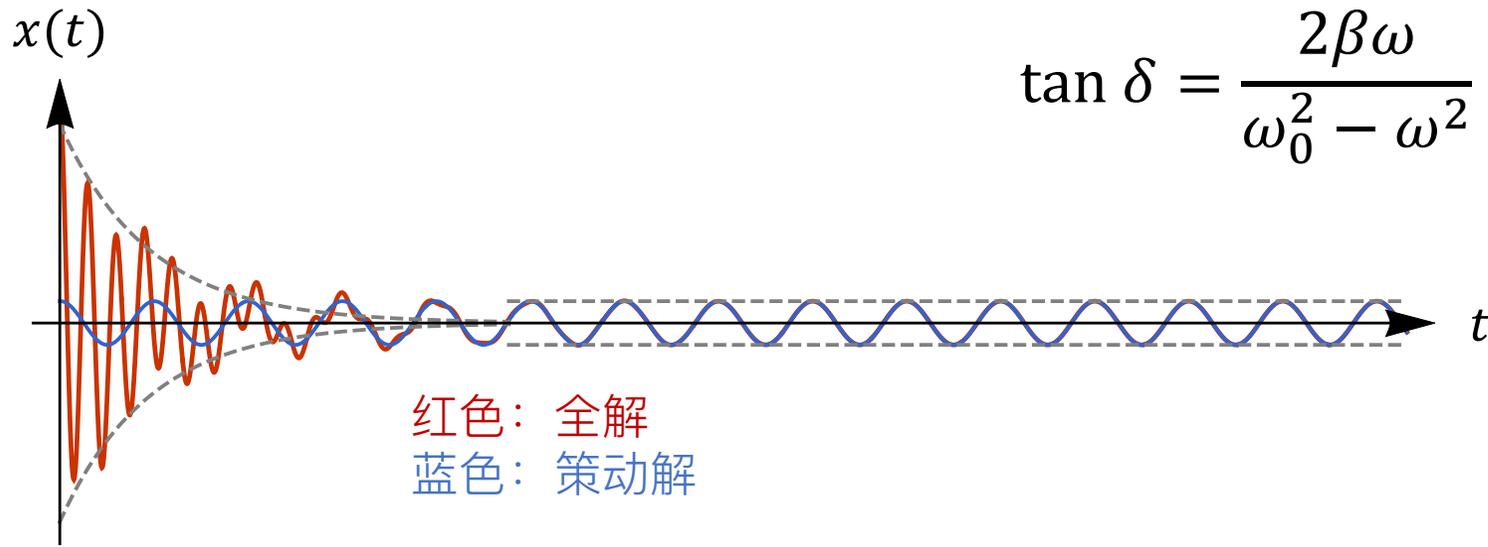
$$ma = -kx - Cv + F(t) \Rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t + \phi)$$

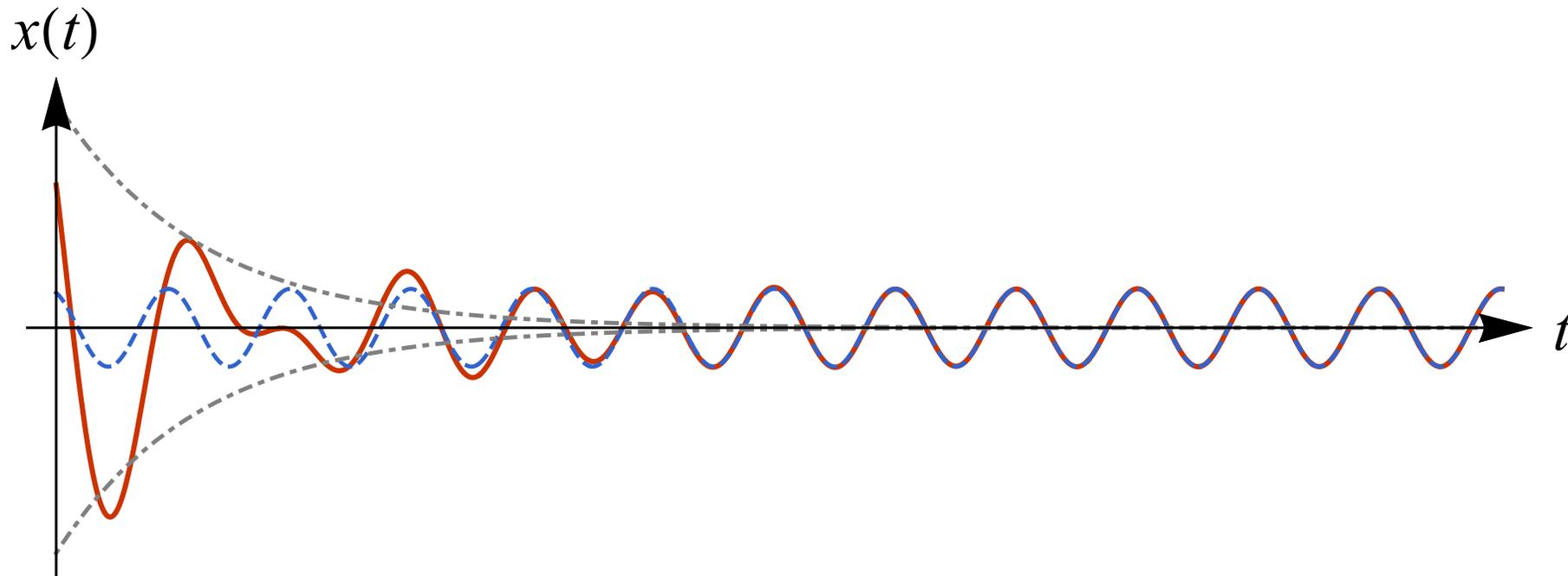
这个方程的解为，

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \phi - \delta)$$

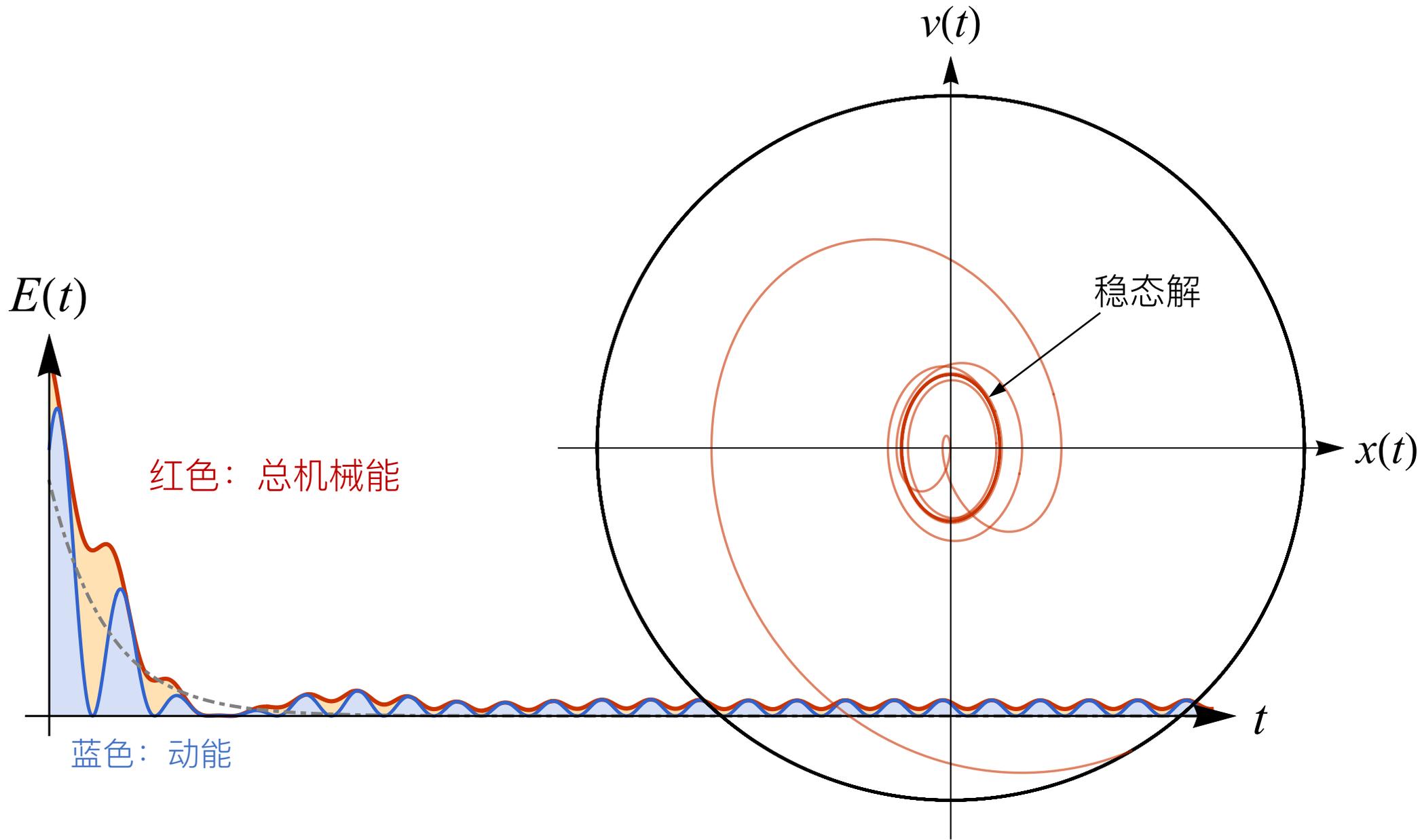
其中， $A, \varphi$ 为两个待定常数，可由初始位置和速度确定，相位 $\delta$ 满足，

$$\tan \delta = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$





红色：全解  
蓝色：策动解



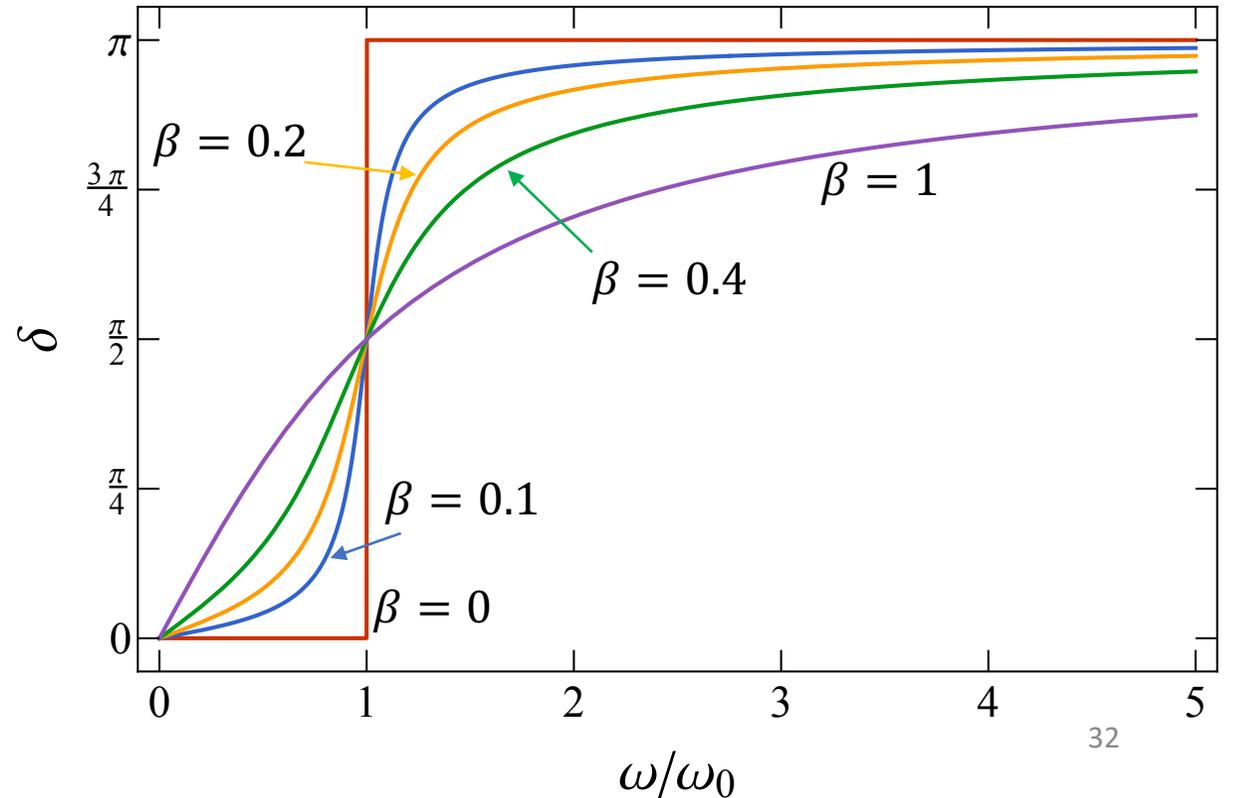
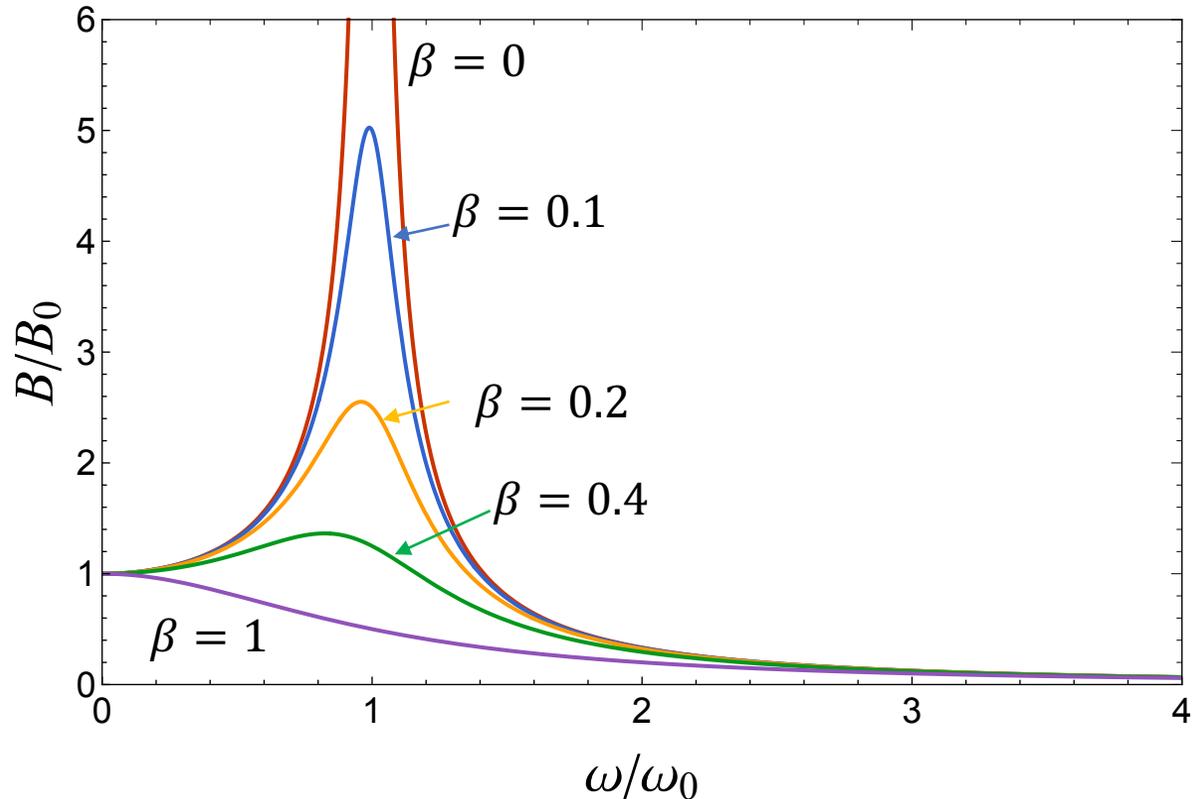
- 可见振子的运动分为两部分：
  - 一部分是带阻尼的谐振子运动，这一部分随着时间的推移逐渐衰减为零，因此又称为暂态解
  - 另一部分是策动力驱动的解，系统经过长时间演化以后收敛到策动解，因此又称为稳态解
- 稳态解：

$$\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t + \phi - \delta)$$

- 稳态解的特点是它与策动力频率相同
- 并且存在一个相位的移动  $\delta$ ，即位移落后于力——原因是阻尼，不是惯性！
- 稳态解的振幅与策动力的频率有关

$$B = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad B_0 = B(\omega = 0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

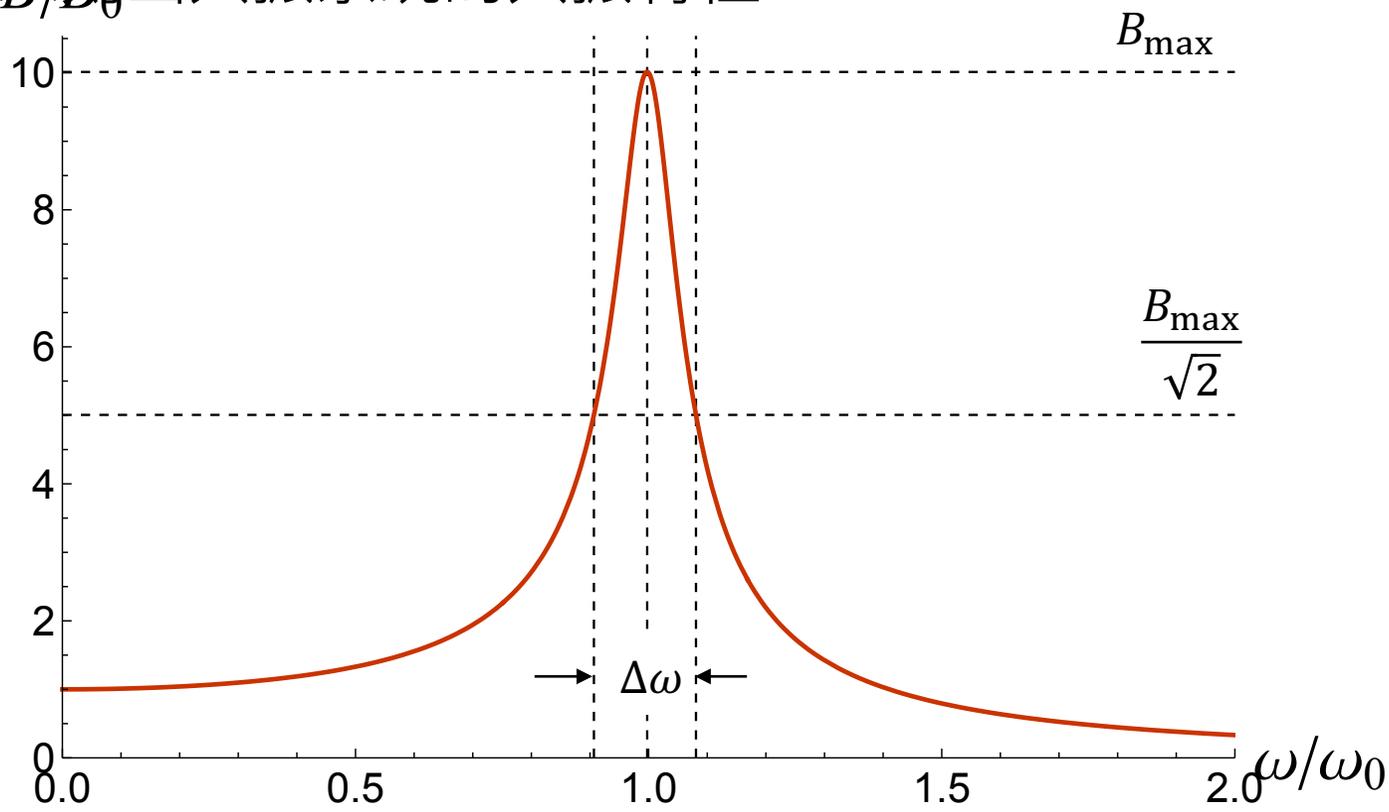
- 若阻尼较小( $\beta < \omega_0$ ), 稳态解的振幅极大值出现在 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ 时, 此时称策动力与振子系统发生了共振(resonance)
- 速度极大值出现在 $\omega = \omega_0$



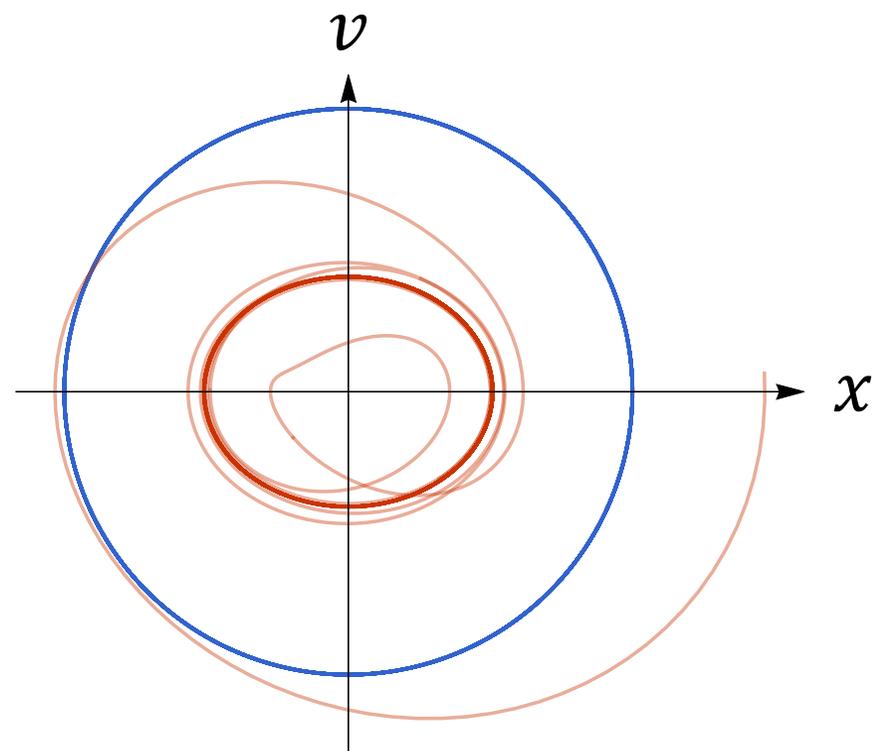
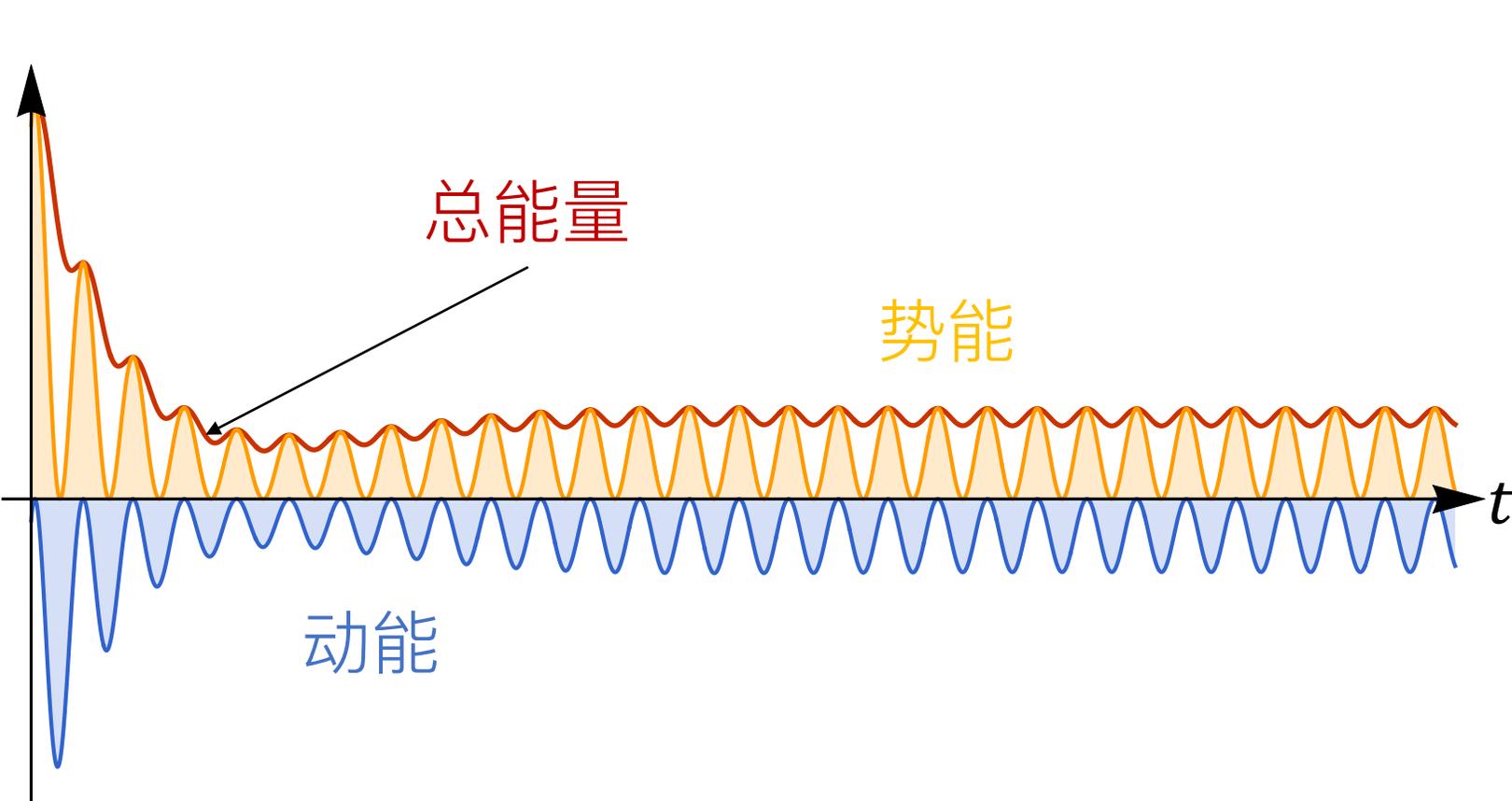
为了刻画共振的特征，还可以引入锐度的概念。锐度定义为共振曲线的共振频率比上共振宽度，

$$S = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

其中，共振宽度定义为 $2\beta$ ，为共振曲线上振幅降到峰值 $1/\sqrt{2}$ （能量降到 $1/2$ ）时的频率范围。不难发现，锐度恰好等于品质因子 $Q$ ，因此也常常直接用品质因子来刻画共振系统的共振特征



- 能量：
  - 总能量在稳态区域呈震荡趋势，平均值基本保持不变
  - 平均动能与平均势能不一定相等，与策动频率有关



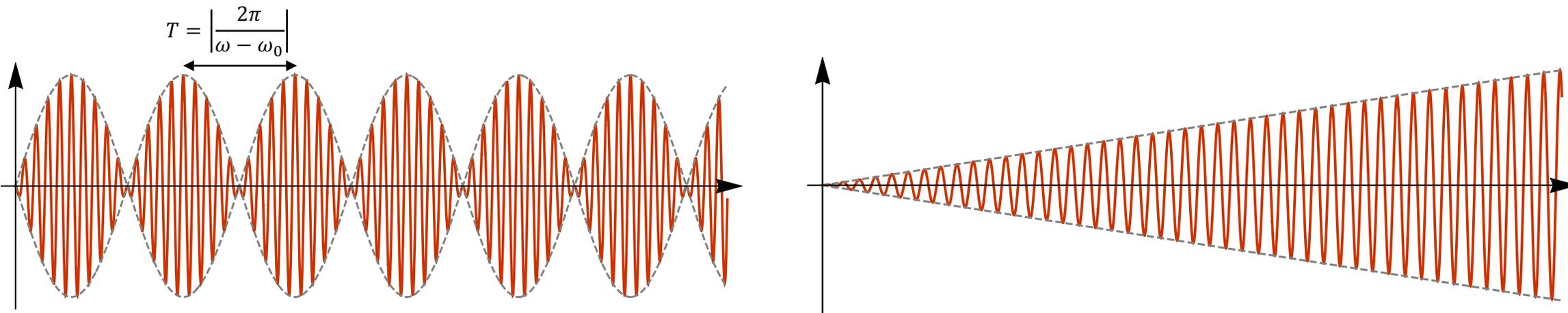
一个特殊的情形是阻尼为0时，此时，振子系统的解为两个正弦函数的叠加。为了明确起见，考虑一个初始时刻速度为零、停留在平衡位置的谐振子，在策动力的作用下运动。其解为，

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) = \frac{2F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \frac{\omega + \omega_0}{2} t \sin \frac{\omega - \omega_0}{2} t$$

函数图像如下，这样的现象叫做拍，拍的频率为  $\nu_b = \frac{1}{T_b} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ 。当策动力频率与振子产生共振时，系统解为，

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega} t \sin \omega_0 t$$

即振子的振幅线性增加，直到弹簧达到偏离线性弹性区间甚至断裂。



## c. 振动的叠加

- 简谐振动是一种最简单的周期运动，也是最基本的周期运动
- 傅立叶在研究热传导理论的过程中提出，一般周期运动可以视为简谐振动的叠加，这种方法叫做傅立叶分析，在现代数学物理、信息处理中有着非常核心的地位
  - 例子：信息传输
- 首先考虑两个相同频率振动的叠加。考虑一个质点同时参与两个振动，方程分别为，

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

则质点的总位移为， $x = x_1 + x_2$

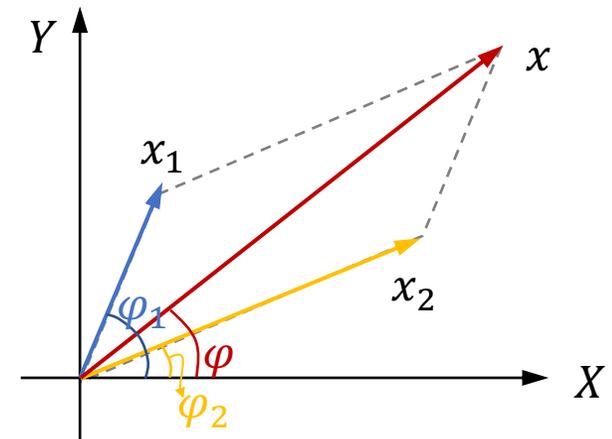
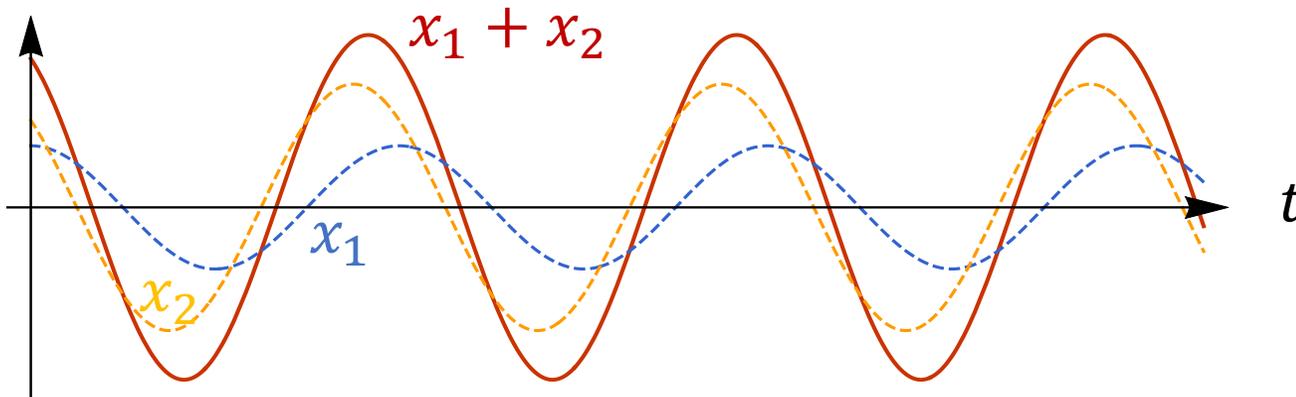
$$\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos (a + b)$$

- 利用三角函数的关系，可以得到

$$\begin{aligned}x &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\&= A_1 \cos \omega t \cos \varphi_1 - A_1 \sin \omega t \sin \varphi_1 + A_2 \cos \omega t \cos \varphi_2 - A_2 \sin \omega t \sin \varphi_2 \\&= (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \cos \omega t - (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) \sin \omega t \\&= A(\cos \varphi \cos \omega t - \sin \varphi \sin \omega t) = A \cos(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

其中  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$ ,  $\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$

- 两个频率相同的简谐振动的叠加仍然为一个简谐振动
- 矢量方法



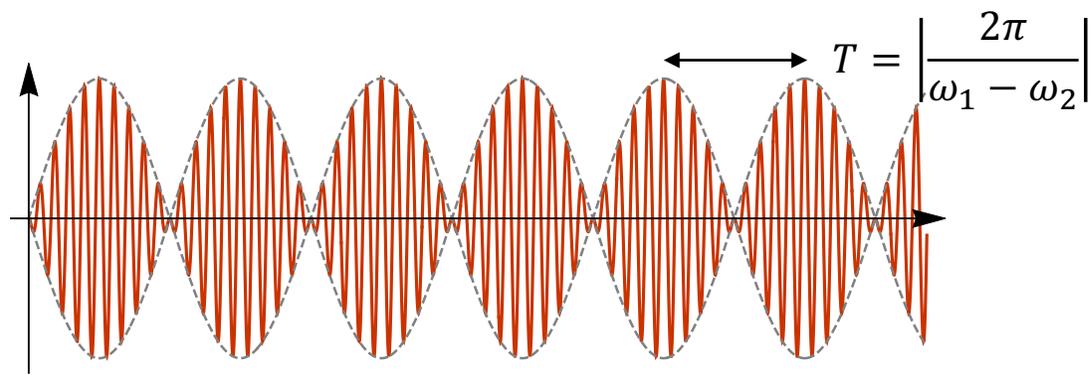
- 考虑振幅相位相同、频率接近( $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1$ )的两个振动相加:

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega_1 t + \varphi) + A \cos(\omega_2 t + \varphi) \\ &= 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi \right) \\ &\approx 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos(\omega_1 t + \varphi) \end{aligned}$$

得到的结果为一个振幅随时间缓慢地做周期性变化的振动, 叫做拍(beat)。拍

的周期为,  $T = \frac{\pi}{\left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right|} = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$ , 拍频为两个振动的频率之差:

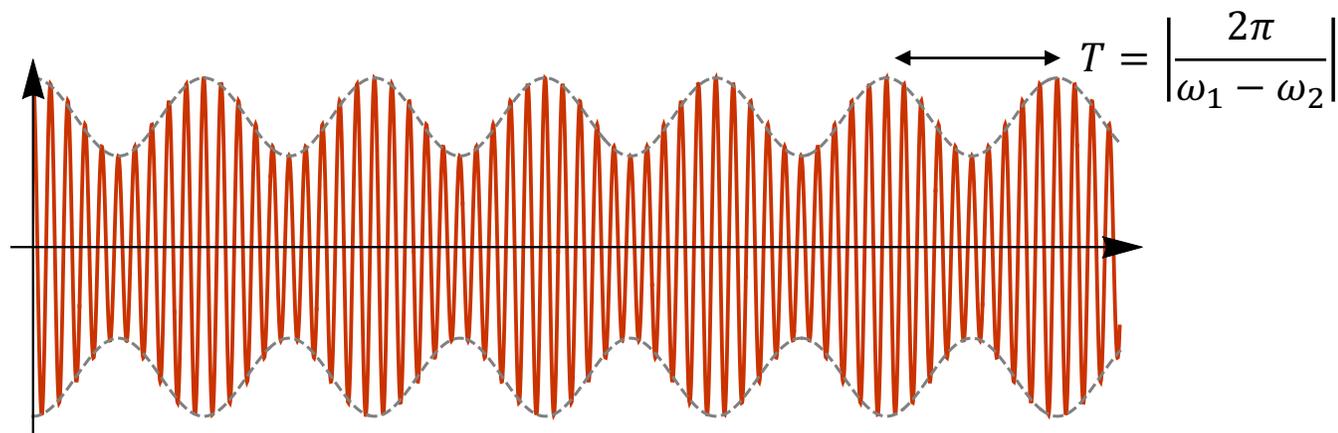
$$\nu = 1/T = |\nu_1 - \nu_2|$$



- 如果两个简谐振动频率接近( $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1$ )、但振幅不同时, 利用三角函数的加法,

$$\begin{aligned}x &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi) \\&= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) - A_2 \cos(\omega_1 t + \varphi) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi) + A_2 \cos(\omega_1 t + \varphi) \\&= (A_1 - A_2) \cos(\omega_1 t + \varphi) + 2A_2 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi \right) \\&\approx \cos(\omega_1 t + \varphi) \left[ A_1 - A_2 + 2A_2 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right]\end{aligned}$$

得到的结果仍然为一个拍(beat), 只不过拍的最小振幅不为零



音叉利用拍调音

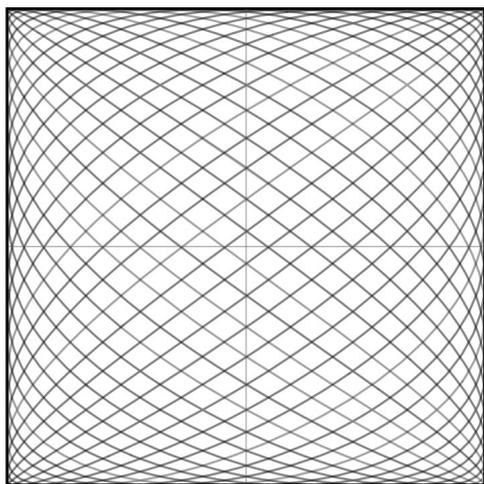


- 根据运动独立性原理，互相垂直的振动也可以叠加，得到的结果在X-Y平面看是一组形状复杂的曲线，叫做李萨如图形

$$\begin{cases} x = A \cos \omega_x t \\ y = A \cos(\omega_y t + \varphi) \end{cases}$$

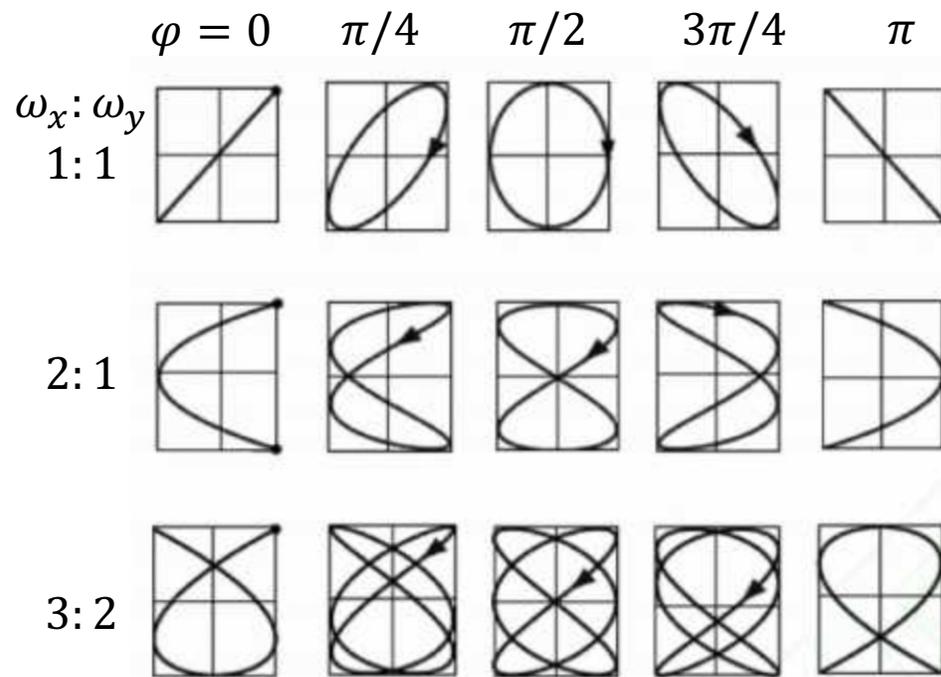
- 曲线的形状与振动的频率比值、相对相位都相关

- 如果 $\omega_x:\omega_y = 1:1$ ，曲线的形状为椭圆（包含圆和直线）
- 如果频率之比为有理数，得到的曲线为封闭曲线



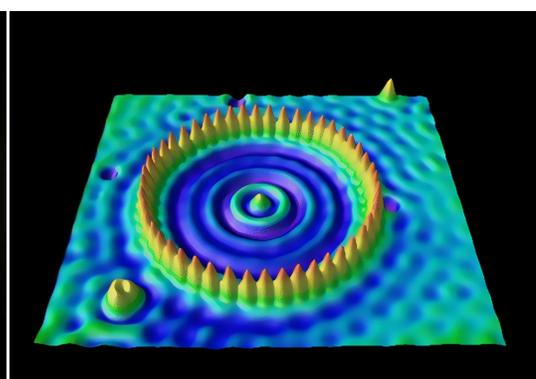
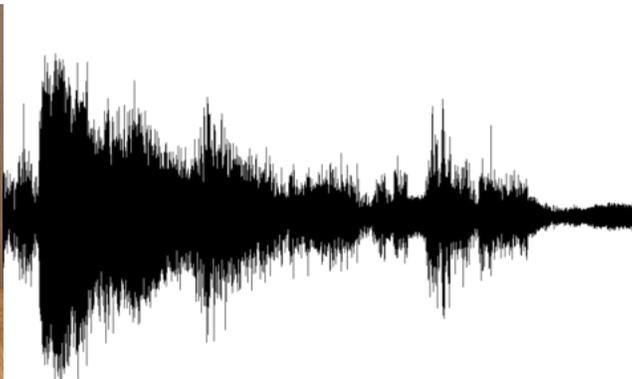
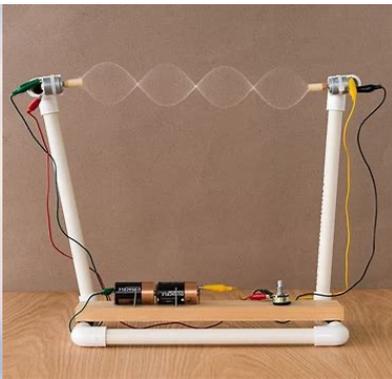
$$\omega_x:\omega_y = 17:23,$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

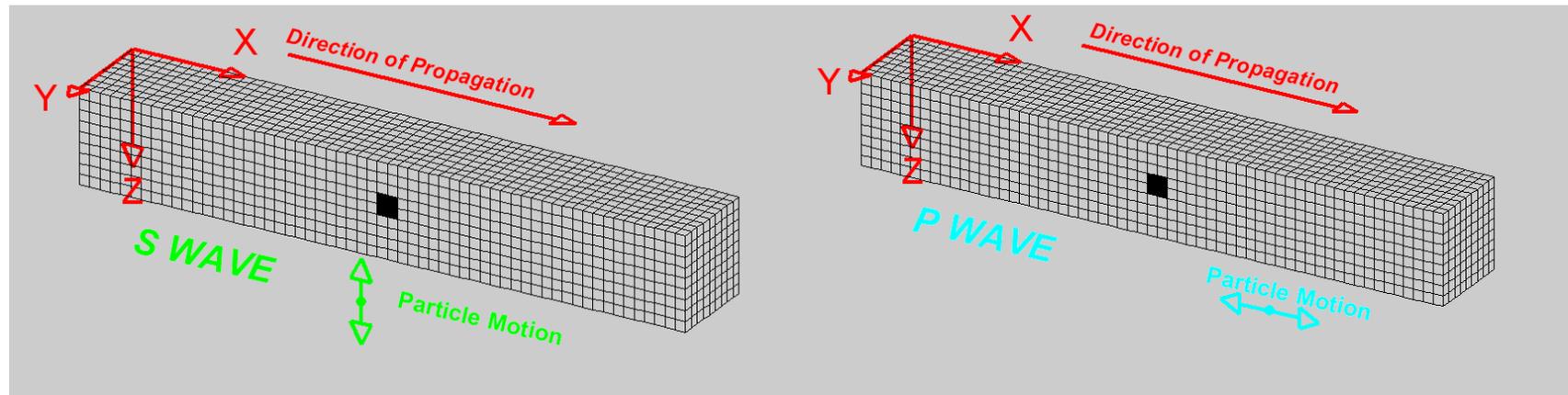
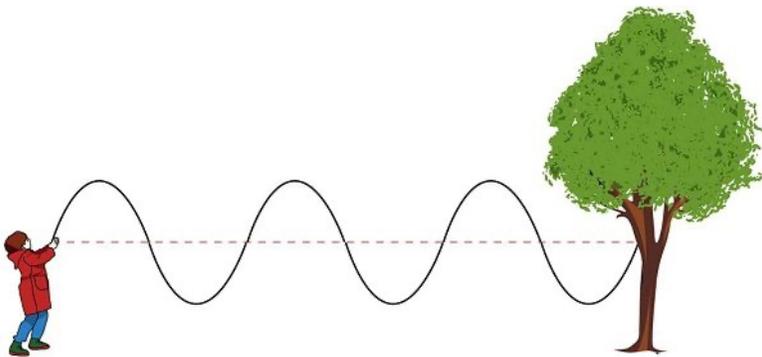


# §34. 波动 (wave)

- 波动现象在物理学中广泛存在
  - 例子：水波、弹性波、声波、电磁波(光)、物质波
  - 空间某处发生扰动，以一定的速度向其他地方传播
- 不同形式的波起因和传播机制不同，但物理规律上具有共同之处
  - 波是能量和动量传递的一种方式
  - 波具有干涉、衍射等效应



- 机械波(mechanical wave): 机械振动在介质中的传播
  - 例子: 弹性波、声波、弦波
- 机械波形成的条件:
  - 扰动(disturbance), 即波源
  - 介质(medium): 即可以发生形变的物质 (弹性体、流体.....)





# a. 简谐波

- 波动方程:

$$\xi''_t + c^2 \xi''_x = 0$$

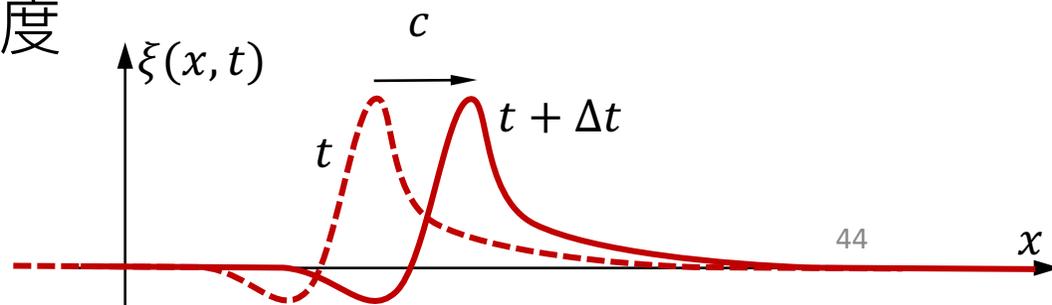
其中,  $\xi(x, t)$  为介质中质点的位移,  $c$  为一个常数, 由介质性质决定

- 例子: 弹性波(S-波、P-波)、1维质点-弹簧链、表面波、弦波
- 行波解(达朗贝尔解):

$$\xi = f(x \pm ct)$$

其中,  $f(x)$  为任意二阶可导的函数, 正负号分别表示沿反向和正向传播的波。

$c = \frac{dx}{dt}$  | 相位 为行波的相位传播的速度, 即相速度



【例子】 弹性波 (S-波) :

$$\rho \theta_t'' = G \theta_x''$$

【例子】 弹性波 (P-波) :

$$\rho \xi_t'' = Y \xi_x''$$

【例子】 声波:

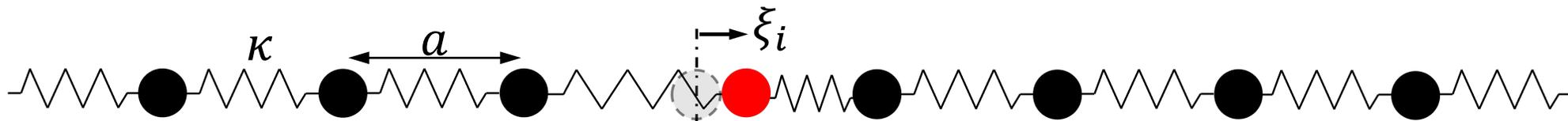
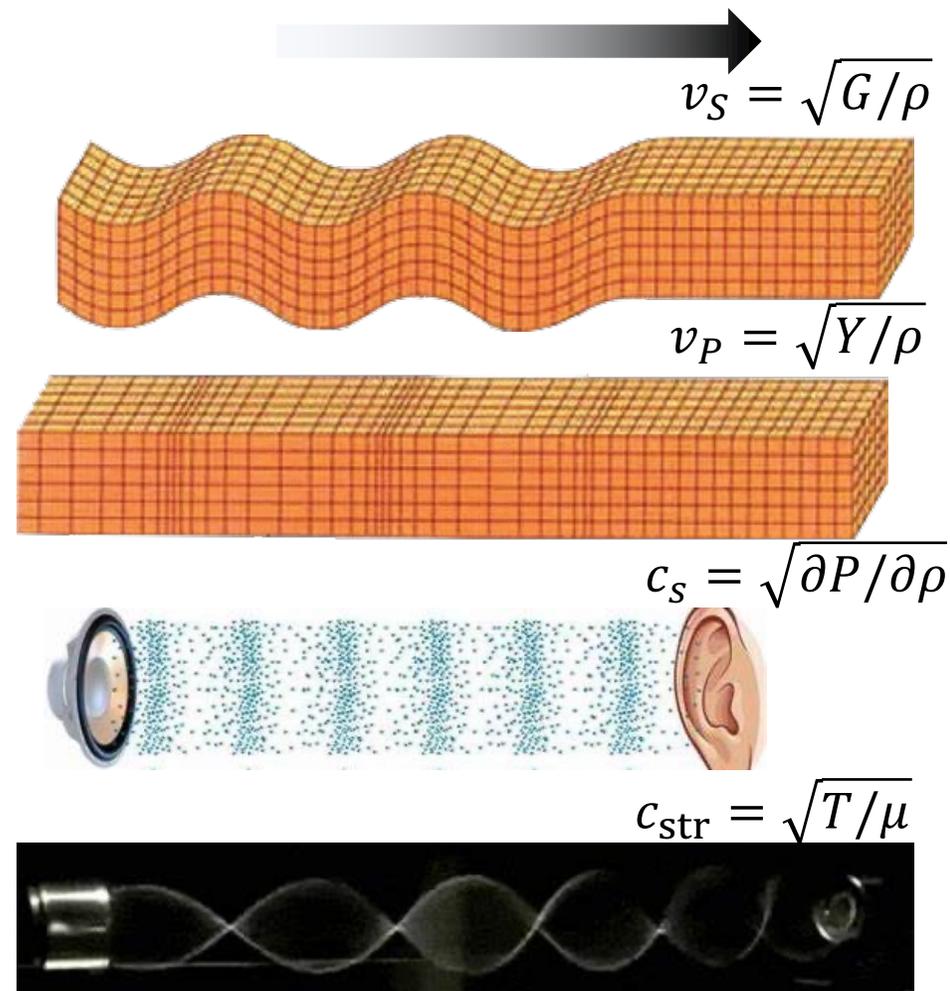
$$\xi_t'' = P'(\rho) \xi_x''$$

【例子】 弦波:

$$\mu \xi_t'' = T \xi_x''$$

【例子】 1维质点-弹簧链:

$$m \xi_t'' = a^2 \kappa \xi_x''$$



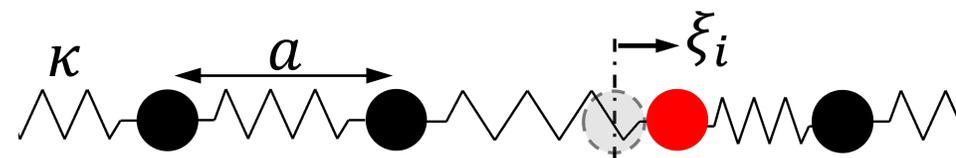
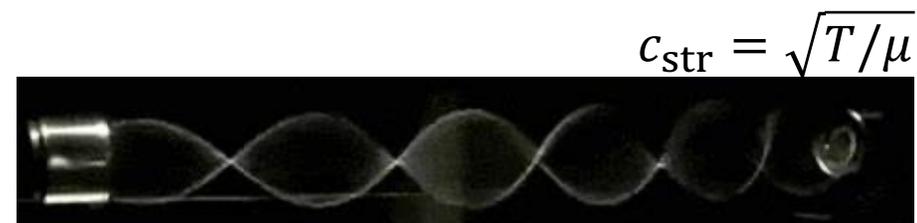
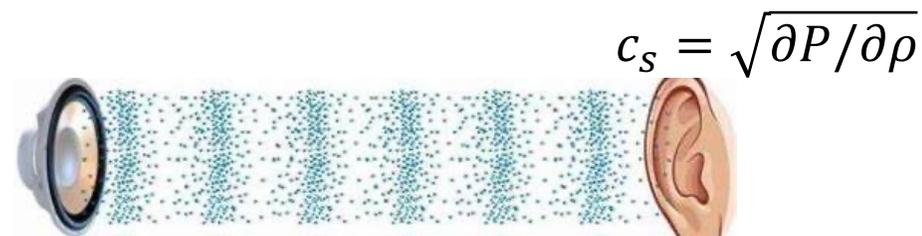
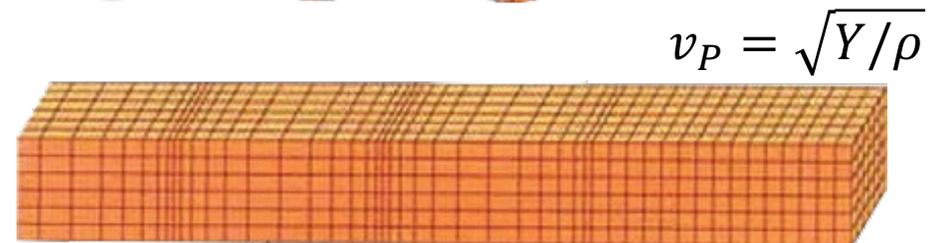
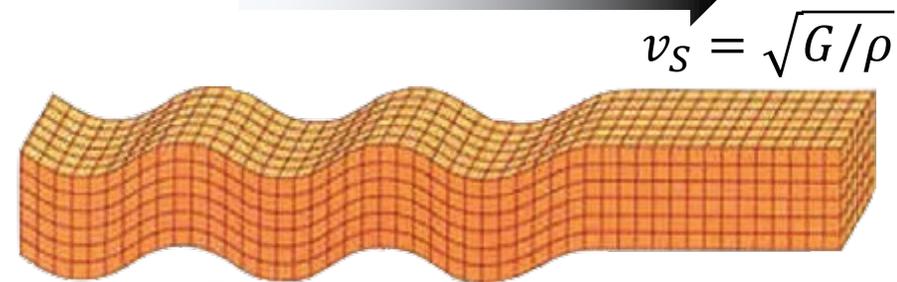
弹性波 (S-波) :  $\rho\theta_t'' = G\theta_x''$

弹性波 (P-波) :  $\rho\xi_t'' = Y\xi_x''$

声波:  $\xi_t'' = P'(\rho)\xi_x''$

弦波:  $\mu\xi_t'' = T\xi_x''$

1维质点-弹簧链:  $m\xi_t'' = a^2\kappa\xi_x''$

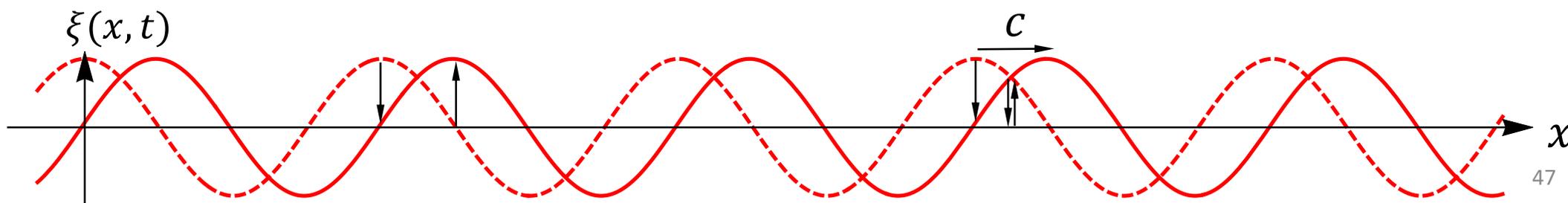


- 简谐波：

$$\xi(t, x) = A \cos(\omega t \pm kx)$$

其中， $k$ 叫做波数

- 简谐波的波列上任意一个质点都做简谐振动，频率 $\omega$ 由波源决定
- 任意一个瞬间，简谐波的波列具有空间周期性， $\lambda = 2\pi/k$
- 波数与角频率的关系叫做色散关系，对于简谐波来说 $\omega = ck$ ，因此 $c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$ 为波的相速度。色散关系由介质性质决定
- 任意行波可以视为简谐波的线性叠加



- 简谐波的能量与能流:

$$\xi(t, x) = A \cos(\omega t \pm kx)$$

- 以一维质点-弹簧链为例( $c = a\sqrt{\kappa m}$ ,  $\omega = ck$ ), 每个质点的能量,

$$E = T + V = m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

其中, 动能和势能分别为,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\xi}_i^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

$$V = \frac{1}{2} \kappa (\xi_i - \xi_{i-1})^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

- 注意势能与动能相等且同相位 —— 与简谐振动不同
- 总能量不守恒 —— 波传递能量 (能量来源: 波源)

- 定义能量密度为单位体积的波的能量：

$$w = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \rho \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

其中， $\rho$ 为弹性体体密度。平均能量密度，

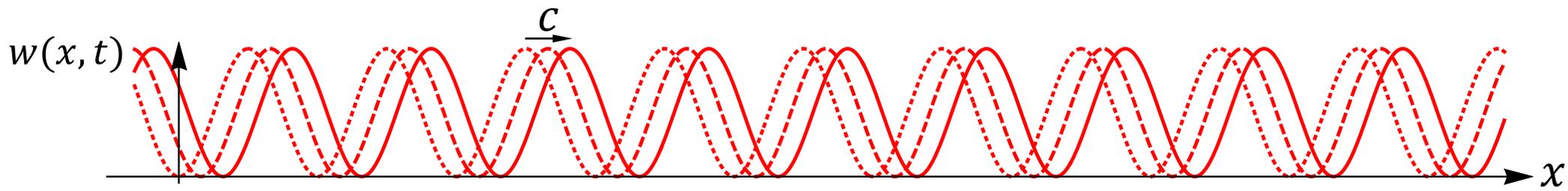
$$\bar{w} = \frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

- 能流密度：单位时间内通过垂直于波线的单位面积的能量

$$I = wc = \rho c \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

这里 $c$ 表示波的速度

平均能流能流密度(强度)： $\bar{I} = \bar{w}c = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 A^2$



- 在声学中用对数表示声音的强度，叫做声强级，单位为贝尔(Bel)

$$IL = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

其中，参考声强为(临界听觉) $I_0 = 1.0 \times 10^{-12} \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ 。更常用的单位是分贝(dB)，即 $10\text{dB} = 1 \text{ Bel}$ 。声强是对数坐标。因此，增加10db，声音的强度增加10倍。

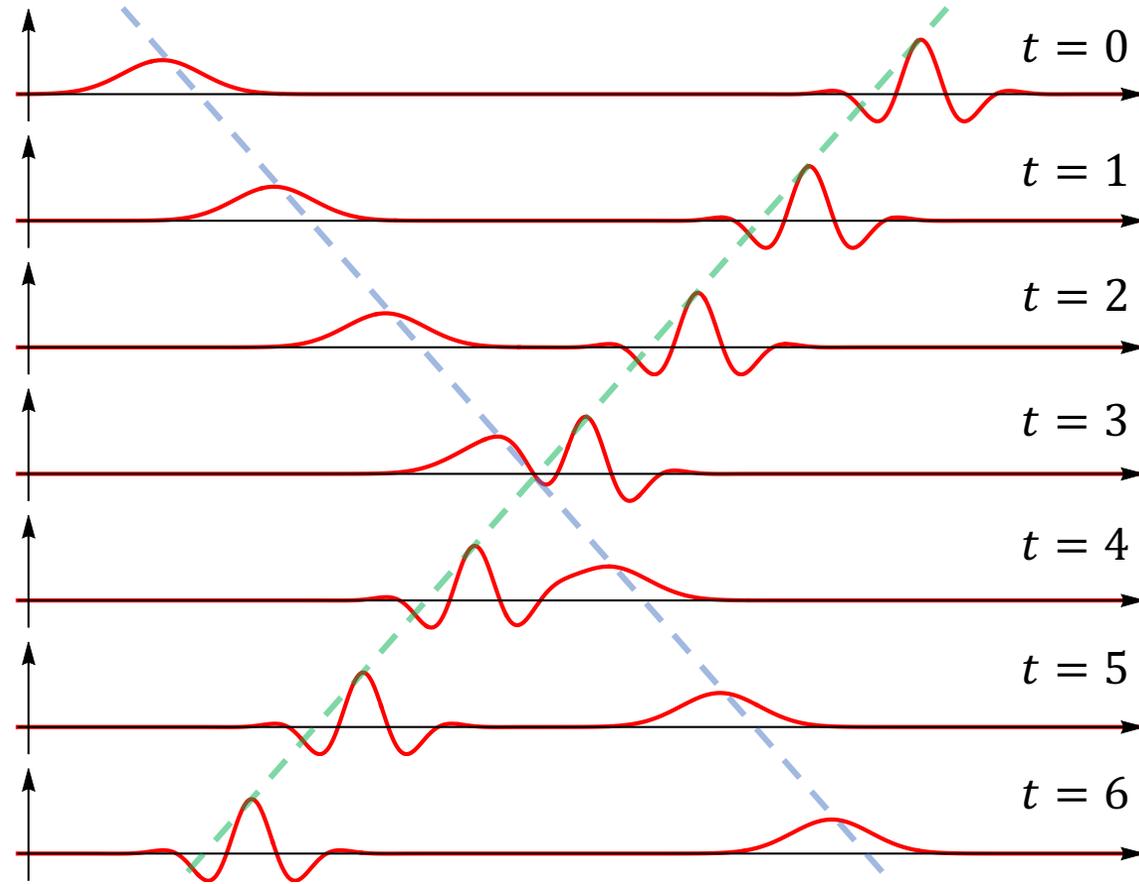
- 声压： $\bar{P} = \rho c \omega A$

这里c表示波的速度



## b. 波的叠加

- 考虑两列波同时在介质中行进并相遇，如果介质的扰动为线性的，则两列波相遇以后的振幅为两列波振幅的线性叠加



- 考虑两列简谐波的叠加，设其振幅相同频率接近  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1$  ，

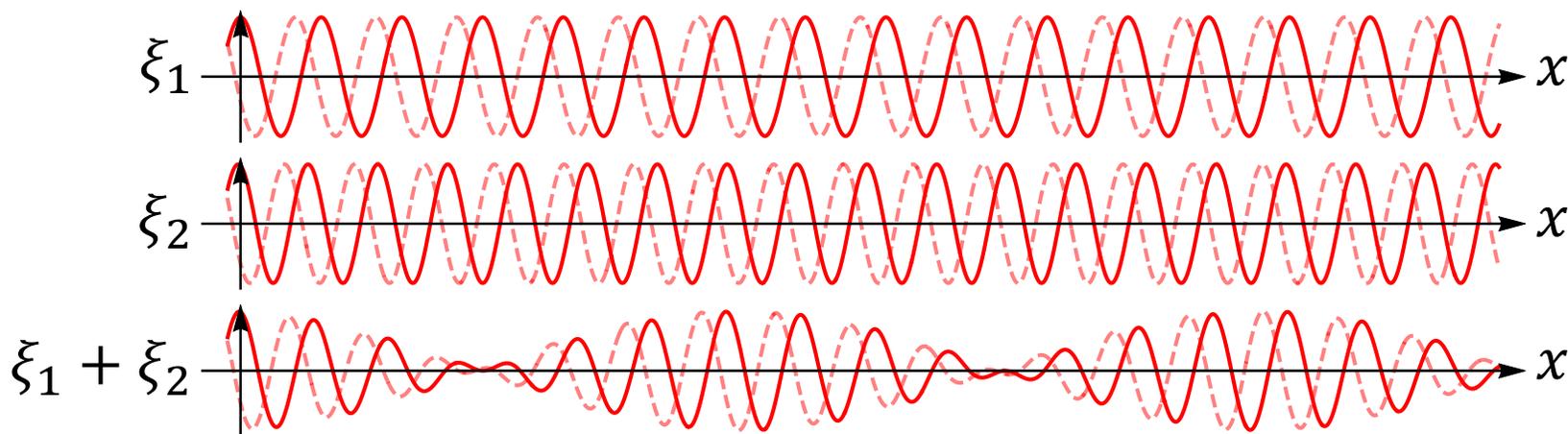
$$\xi(t, x) = A \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

$$= 2A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right)$$

$$\approx 2A \cos(\omega_1 t - k_1 x) \cos\frac{1}{2}(\Delta\omega t - \Delta k x)$$

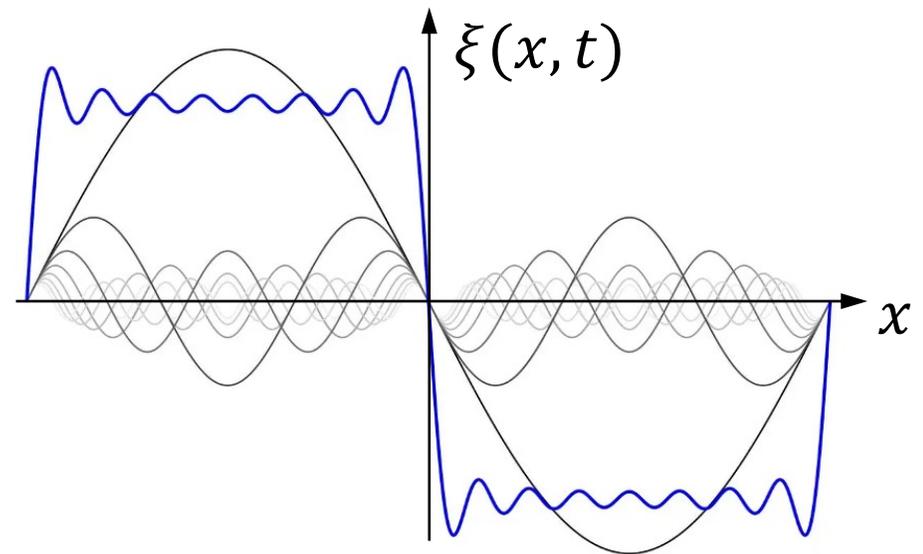
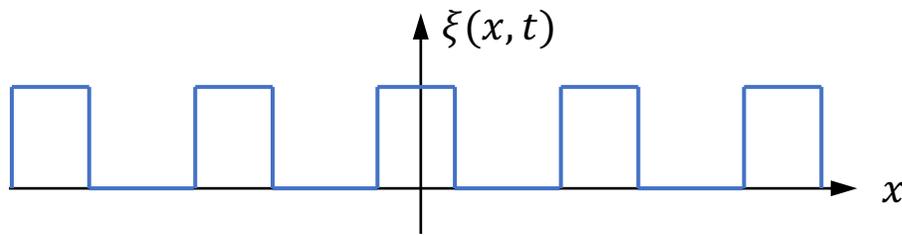
- 得到的结果为振幅受到调制的波叫做波包，波包传播的速度为

$$v_g = \Delta\omega / \Delta k = d\omega / dk$$



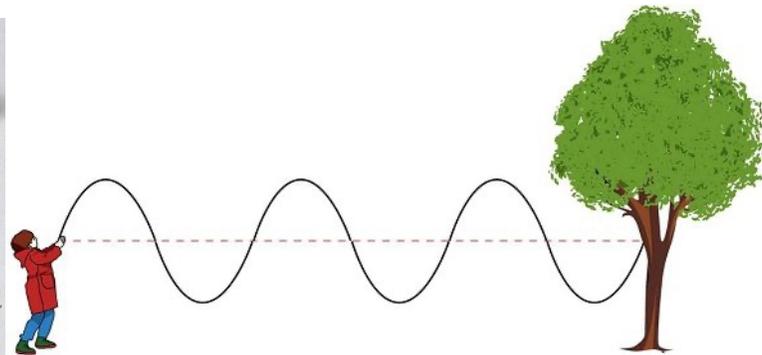
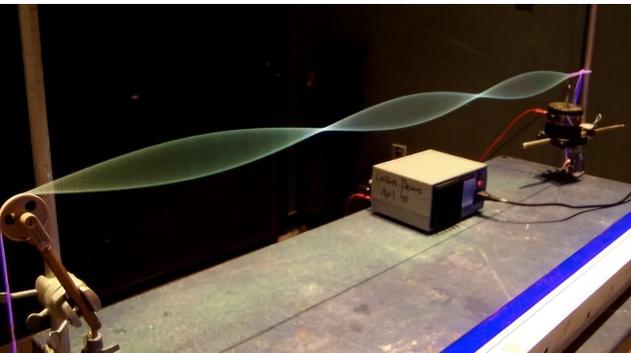
$$\begin{aligned} & \cos a + \cos b \\ &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

- 频率单一的波叫做单色波，真正的单色波必须是无穷长的
- 实际的波都是有限长的，可以视为不同单色波的叠加，即波包
- 波包传播速度叫做群速度  $v_g = d\omega/dk$
- 群速度与相速度在没有色散的情况  $\omega = ck$  下两者相同，在有色散时  $\omega = \omega(k)$  两者未必相同
- 波的群速度代表信号和能量传播的速度



## c. 驻波 (standing wave)

- 前面主要讨论了波动方程： $\xi_t'' + c^2 \xi_x'' = 0$ 的行波解 $\xi = f(x \pm ct)$ ，特别是简谐波解，并未考虑边界问题
- 在很多实际应用中，边界条件对于解的形式也有较大影响，这尤其在乐器中有比较重要的应用
  - 例子：琴弦的振动
- 行波解允许各种频率的波通过，而乐器则有不同的频率



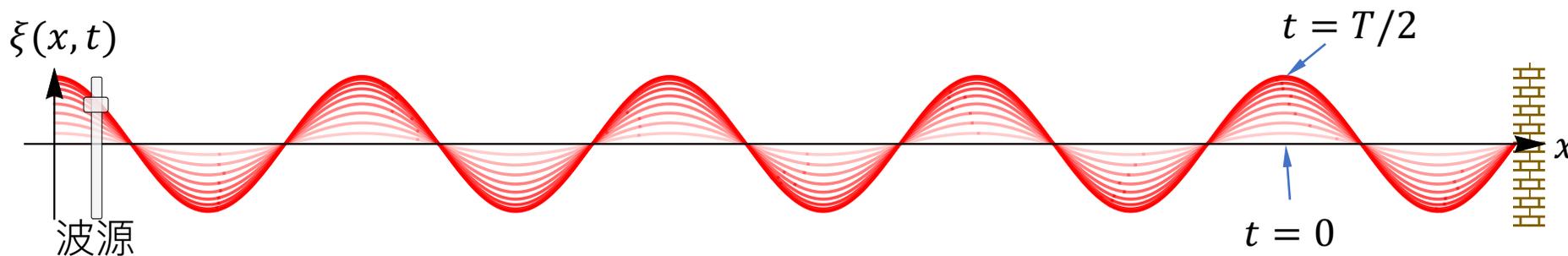
- 首先考虑一端固定的弦上的正弦函数波的传播。设固定点位置为  $x = L$ ，因此边界条件要求

$$\xi(t, L) = 0$$

简谐波本身无法满足这个边界条件，但是如果将正反方向行进的简谐波进行组合，得到可以得到满足边界条件的解，

$$\begin{aligned}\xi(t, x) &= A\{\cos[\omega t - k(x - L)] - \cos[\omega t + k(x - L)]\} \\ &= 2A \sin \omega t \sin[k(x - L)]\end{aligned}$$

得到的解在半个周期内的运动如图所示，可见弦的振动不再传播，这样的波叫做驻波

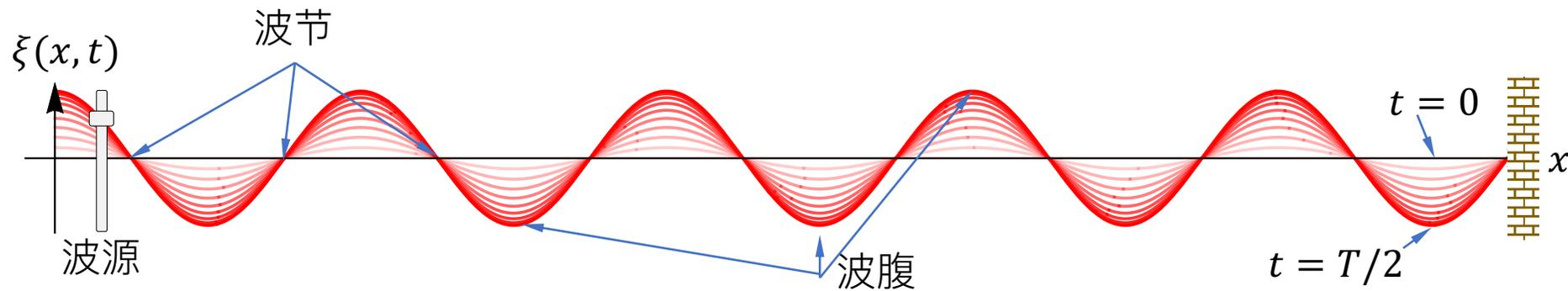


- 驻波可以视为沿正反方向传播的两列简谐波的叠加
- 驻波上的质点的最大振幅由质点位置决定。其中最大振幅为0的点叫做波节(node)，最大振幅为驻波的极大值的点叫做波腹(antinode)。墙(边界)的位置为波节

- 相邻波节或波腹的距离为半个波长，因此波节的位置为，  

$$\sin k(x - L) = 0 \Rightarrow x = L - (n/2)\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

类似地，波腹的位置为， $x = L - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}$



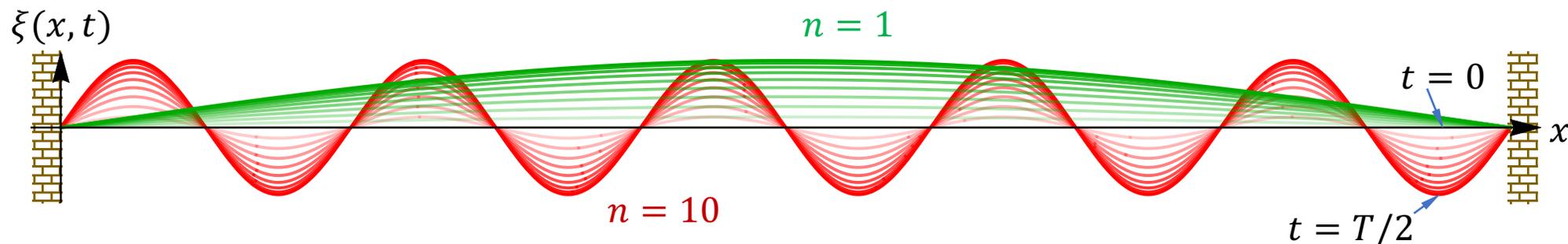
现在考虑波的两端的边界条件。令两个端坐标分别为 $x = 0, L$ 。

- 如果弦的两端都是固定的，如琴弦，则两端都是波节，即

$$0 = L - (n/2)\lambda \Rightarrow L = (n/2)\lambda, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

换句话说，只有特定波长的驻波才能在弦上传播，这些振动模式叫做简正模

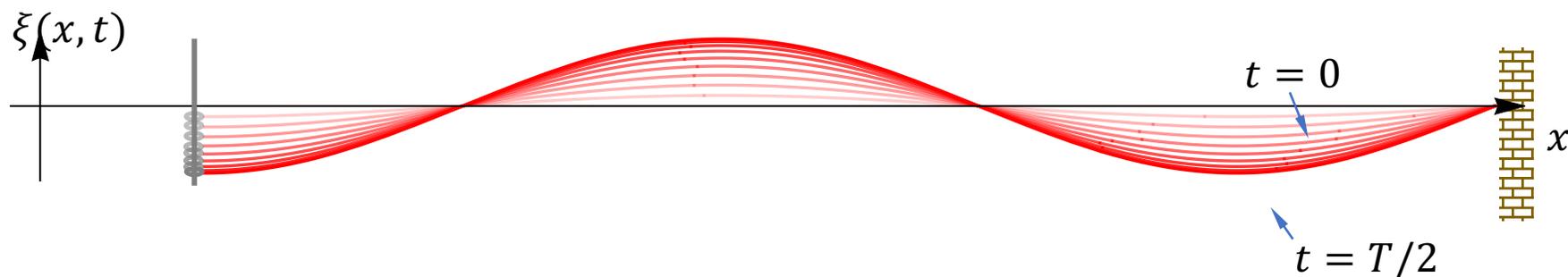
- 其中频率最低( $n = 1$ )的驻波 $L = \lambda/2$ ，在声学里这一模式叫做基频
- 弦的实际振动可能是不同简正模的叠加，不过一般而言，频率越低越容易被激发



- 如果弦的一端都是自由的，则该处应为波腹，即

$$0 = L - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow L = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- 其中频率最低( $n = 0$ )的驻波 $L = \lambda/4$
- 如果弦的两端都是自由的，则两端皆为波腹



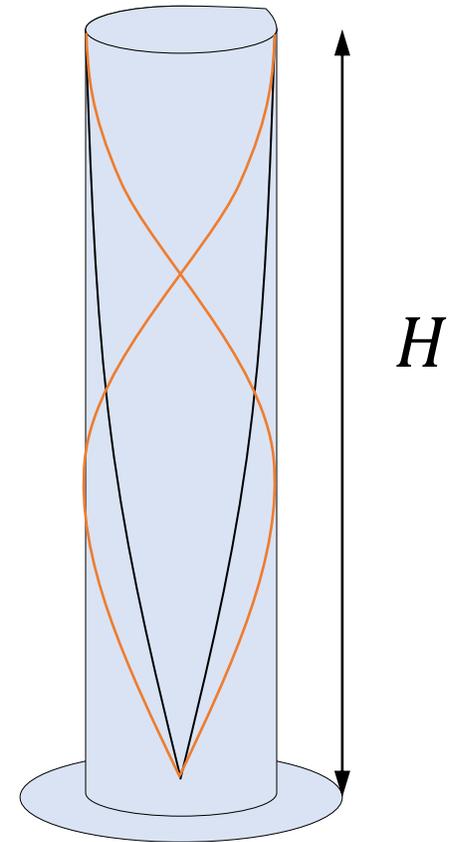
【例子】一只试管高 $H = 10\text{ cm}$ ，对着管口吹气试管会发出声音。  
求发声的最低频率。

求解：空气振动，在试管中形成驻波。管底为固定端，因此为波节。管口为开放端，因此为波腹。

因此，最低频率对应的波长满足，

$$\lambda = 4H = 40\text{ cm}$$

频率： $\nu = v_s/\lambda$ ，其中 $v_s \approx 330\text{ m/s}$ 为声速，可以得到， $\nu = 825\text{ Hz}$



## d. 波在3维空间的传播

- 上面讨论的情形都是1维的。这些概念也可以直接推广到3维。例如波动方程推广到三维，只需要将空间导数改为，

$$\xi''_x \rightarrow \xi''_x + \xi''_y + \xi''_z \equiv \nabla^2 \xi$$

从而，波动方程变成，

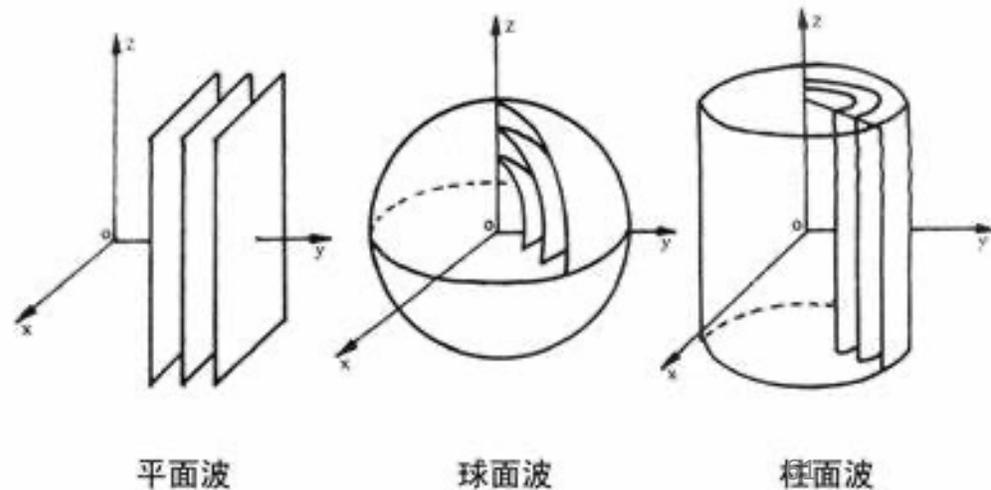
$$\xi''_t = c^2 \nabla^2 \xi$$

- 类似地，3维简谐波为，

$$\xi(t, \vec{x}) = A \cos(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{x})$$

- 能量密度与能流密度等概念与1维类似

- 波在3维空间的传播时，还需要考虑波阵面的形状
  - 常见的波阵面的形状有：平面波、球面波、柱面波
  - 由能量守恒，球面波的能量密度按照距离平方反比衰减
- 当存在边界时，波的传播比较复杂
  - 常见的边界包括：障碍物、小孔、介质的交界面
  - 原则上可以通过求解波动方程得到 —— 比较复杂
  - 近似理论：基尔霍夫定理、菲涅尔定理（物理光学讲）
  - 定性描述：惠更斯原理
  - 现象：衍射、干涉、反射、折射





## 干涉:

- 根据惠更斯原理，波通过狭缝时可以视为点源。空间某一点的振幅为两个点源发出的波的叠加:

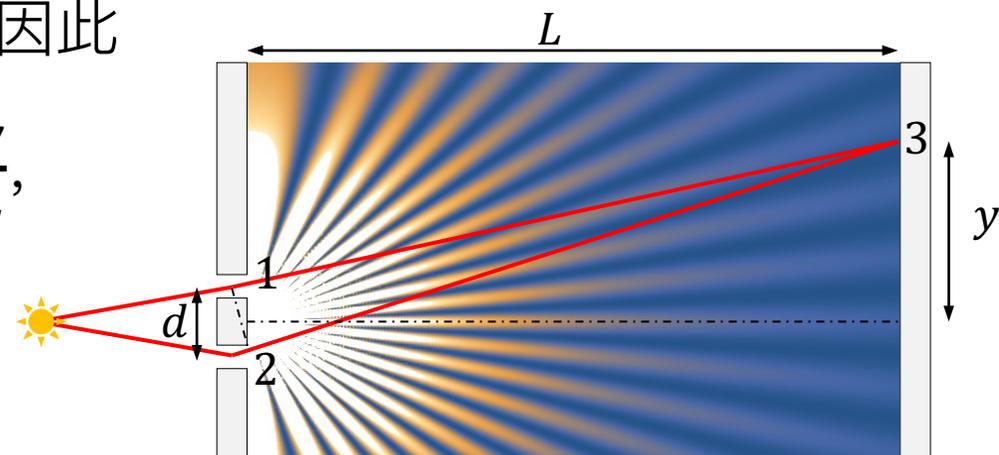
$$\xi(t, \vec{r}) = \frac{A_1}{r_{13}} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_{13}) + \frac{A_2}{r_{23}} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_{23}) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

其中,  $A = \sqrt{\frac{A_1^2}{r_{13}^2} + \frac{A_2^2}{r_{23}^2} + \frac{2A_1A_2}{r_{13}r_{23}} \cos[k(r_{13} - r_{23})]}$

- 波的强度  $I \propto A^2$ , 在远处屏幕上会观察到干涉花样
- 考虑双缝干涉的情形,  $A_1 = A_2, d \ll L, y \ll L$ , 因此

屏幕上干涉极大峰满足  $k\Delta r = 2\pi n$ 。考虑到  $\frac{\Delta r}{d} = \frac{y}{L}$ ,

观测到的干涉条纹的间距为  $\Delta y = \frac{L}{d} \lambda$



## 回忆：同频率振动的叠加

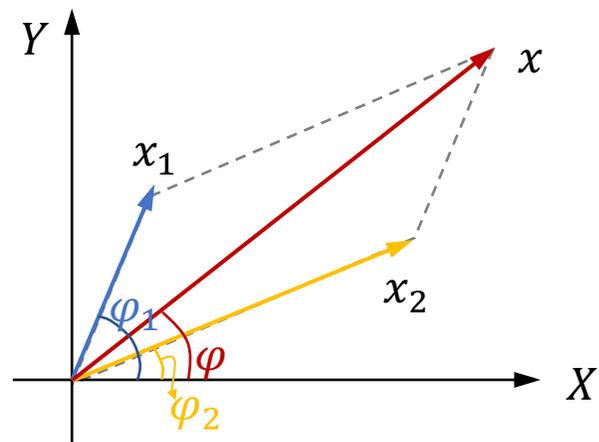
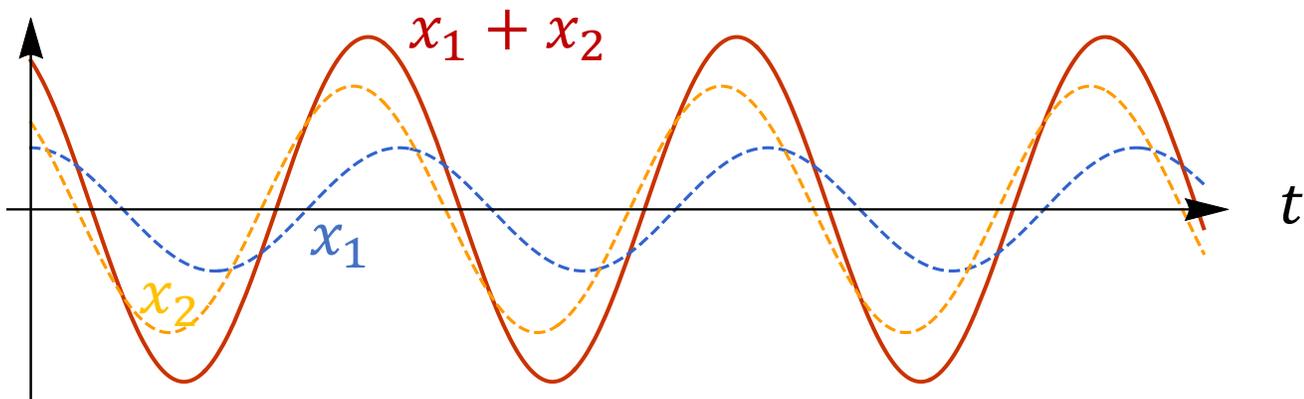
$$\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos (a + b)$$

- 利用三角函数的关系，可以得到

$$\begin{aligned}x &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\&= A_1 \cos \omega t \cos \varphi_1 - A_1 \sin \omega t \sin \varphi_1 + A_2 \cos \omega t \cos \varphi_2 - A_2 \sin \omega t \sin \varphi_2 \\&= (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \cos \omega t - (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) \sin \omega t \\&= A(\cos \varphi \cos \omega t - \sin \varphi \sin \omega t) = A \cos(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

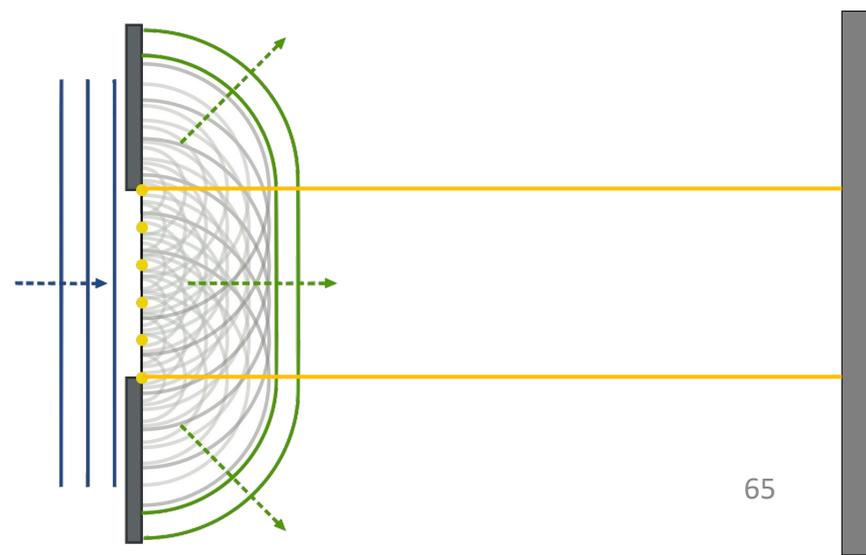
其中  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$ ,  $\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$

- 两个频率相同的简谐振动的叠加仍然为一个简谐振动
- 矢量方法



衍射：是指波遇到障碍物时偏离原来直线传播的物理现象。用惠更斯原理同样可以解释波的衍射。

- 如图所示，波在遇到衍射孔以后，在孔面各点都会形成次级波源。孔面边缘附近的波面是球面波，这可以解释波偏离直线传播、绕过障碍物的现象
- 同时，孔径越小，球面波占的比例越大，衍射现象越明显



## e. 多普勒效应 (Doppler effect)

- 当观察者与波源做相对运动时，所观测到的波的频率会发生改变，这个效应首先是由奥地利科学家多普勒注意到并研究的，称为多普勒效应
- 一个很显著的现象是当汽车从轰鸣而过的过程中，能够明显感受到汽车声调由高到低的变化
- 设波速为 $c$ ，波长为 $\lambda$ ，波的周期为波传播一个波长的时间： $T = \lambda/c$ ，波的频率为单位时间内接收到的波长的数目： $N = \nu\Delta t = \Delta t/T = c\Delta t/\lambda \Rightarrow \nu = c/\lambda$
- 设波源的速度为 $u$ ，观察者的速度为 $v$

- 波源不动  $u = 0$ 、观察者运动：

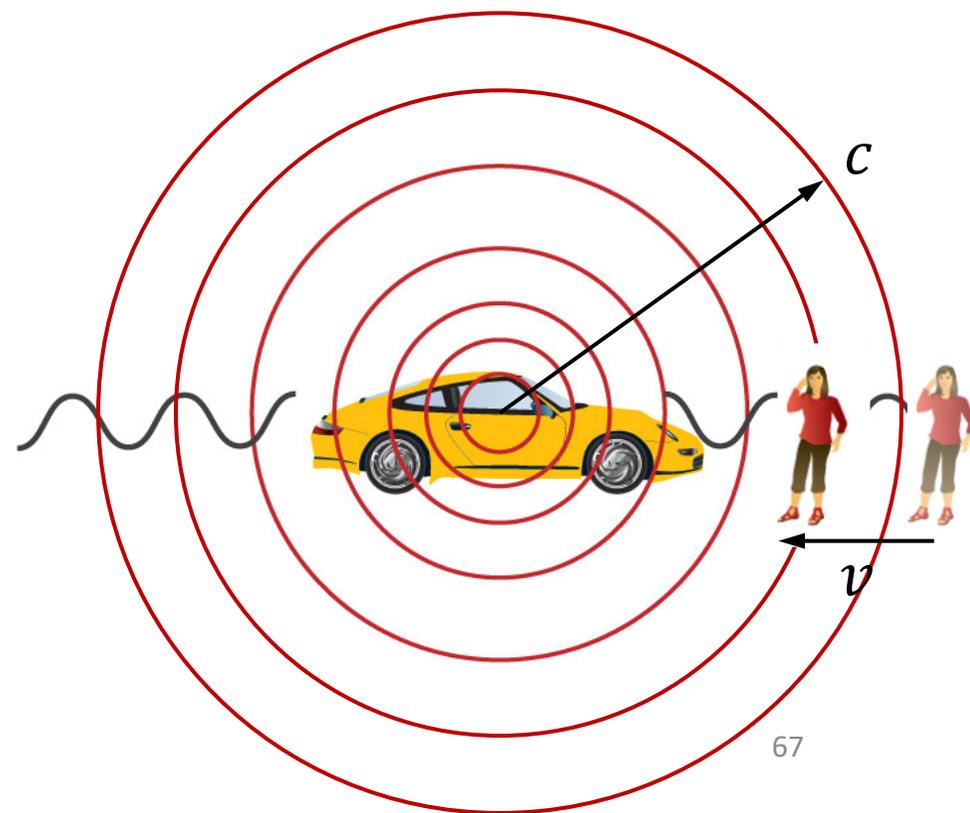
设观察者相对于波源运动，速度为  $v$ 。 $\Delta t$  时间内观察者接收到的波长的数目为

$$(c + v)\Delta t / \lambda = \nu' \Delta t$$

考虑到  $\nu = c / \lambda$ ，可以得出，

$$\nu' = \nu(1 + v/c)$$

可见，当观察者相对于波源运动时，观测到的波的频率会增加；反过来，当观察者远离波源运动时，观测到的波的频率会降低



- 观察者不动  $v = 0$ 、波源运动：

设波源运动速度为  $u$ ，此时由于波源的运动，其发出的波的波长变短为，

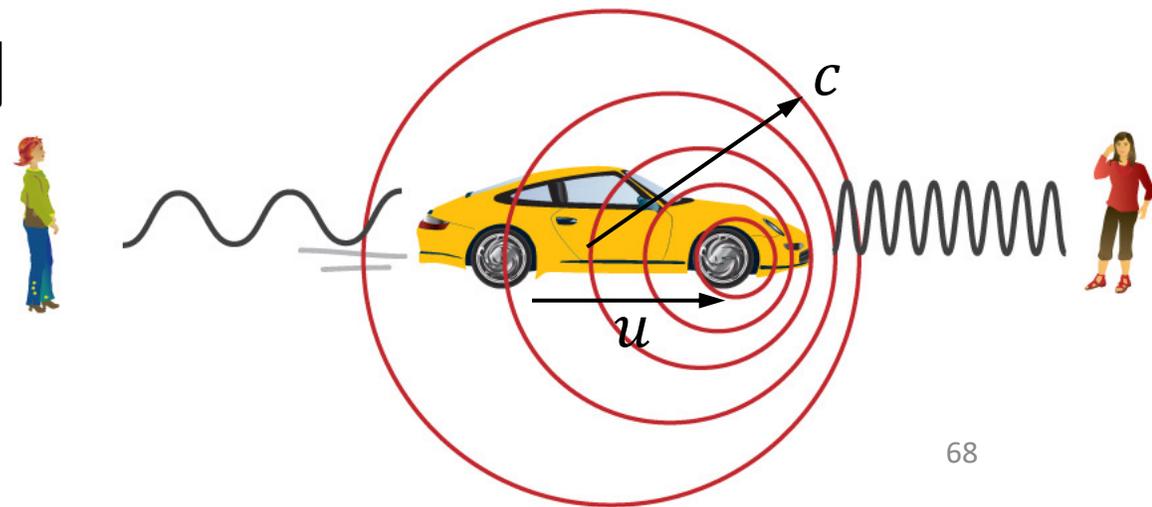
$$\lambda' = \lambda - uT$$

考虑到  $v = c/\lambda$  以及  $T = 1/v$ ，可以得出，

$$v' = v/(1 - u/c)$$

可见，当波源相对于观察者运动时，观测到的波的频率会增加；

反过来，当波源远离观察者时，观测到的波的频率会降低

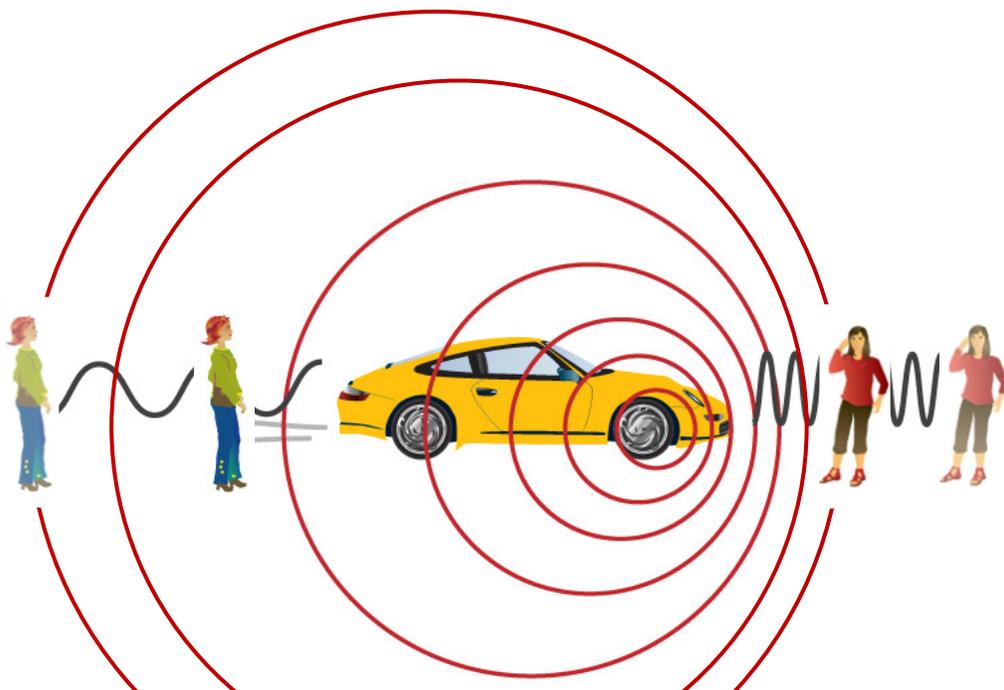


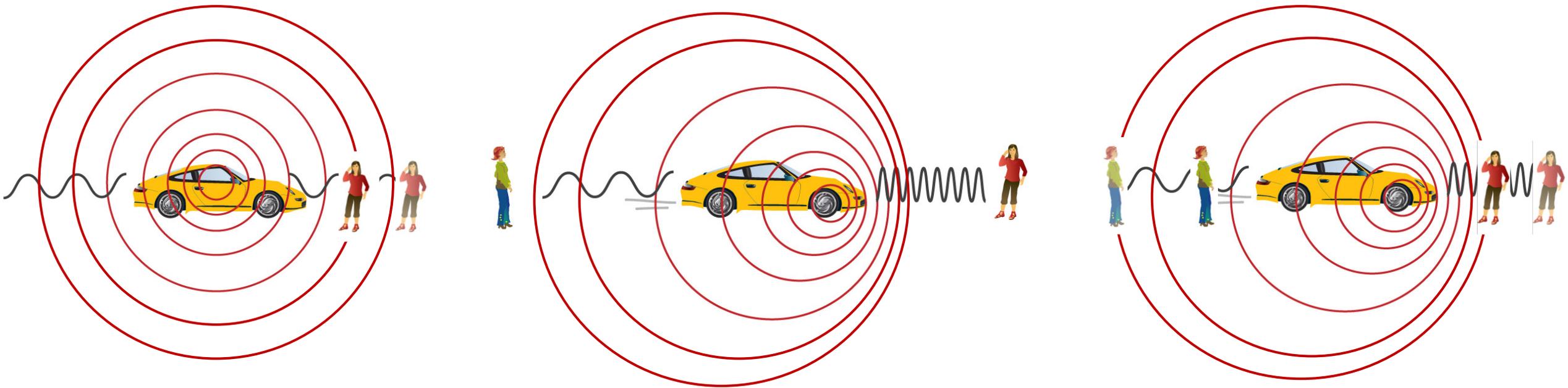
- 观察者与波源都运动时：

观测到的波的频率为两个效应的叠加：

$$\nu' = \frac{c + v}{c - u} \nu$$

- 如果运动速度不在波源与观察者的连线上，则只需要考虑连线方向的速度分量
- 注意如果波源与观察者的相对速度是变化的，则还需要考虑波传播的延迟效应
- 波源与观察者速度的不对称性是由于波本身是相对于介质运动的





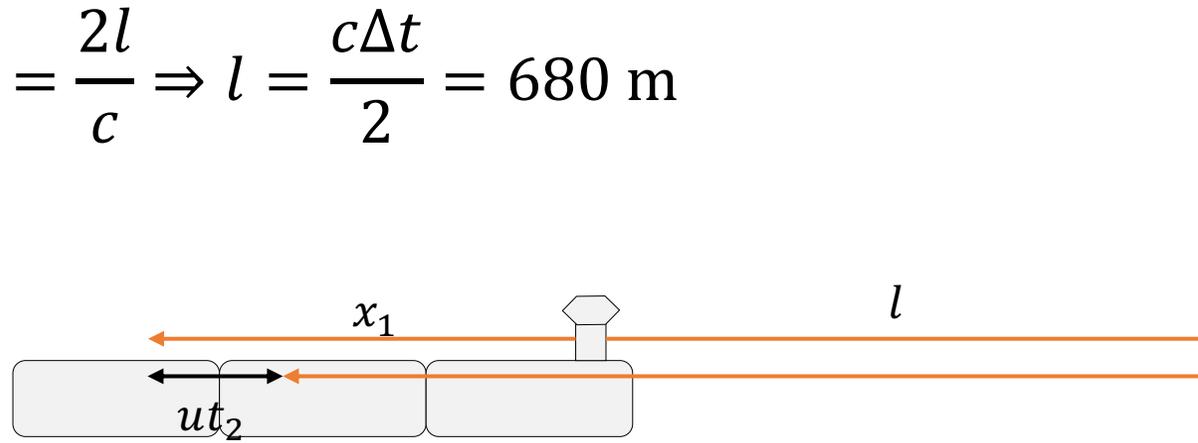
**【例子】** 火车在进入隧道前鸣笛，频率为 $200\text{Hz}$ 。一位乘客注意到火车鸣笛开始后 $4$ 秒钟能听到频率为 $10\text{Hz}$ 的拍。已知声音在空气中的速度为 $340\text{m/s}$ ，求火车开始鸣笛时到悬崖的距离与火车的速度。



【例子】火车在进入隧道前鸣笛，频率为200Hz。一位乘客注意到火车鸣笛开始后4秒钟能听到频率为10Hz的拍。已知声音在空气中的速度为340m/s，求火车开始鸣笛时到悬崖的距离与火车的速度。

求解：拍的形成是由于汽笛声与反射的声波的叠加。时间差来自于直接传播与经过反射的路径之差。考虑到火车速度远比声速慢， $\frac{u}{c} \ll 1$ ，

$$t_1 = \frac{x_1}{c}, t_2 = \frac{2l + x_1 - ut_2}{c}$$
$$\Delta t \approx t_2 - t_1 = \frac{2l}{c} \Rightarrow l = \frac{c\Delta t}{2} = 680 \text{ m}$$

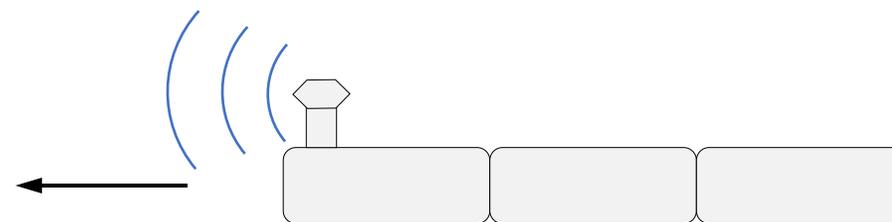


【例子】火车在进入隧道前鸣笛，频率为200Hz。一位乘客注意到火车鸣笛开始后4秒钟能听到频率为10Hz的拍。已知声音在空气中的速度为340m/s，求火车开始鸣笛时到悬崖的距离与火车的速度。

拍频 $\Delta\nu = \nu' - \nu$ 。乘客相对于火车静止，因此频率不变。反射的声波相当于波源与观察者都在运动，因此多普勒频移为，

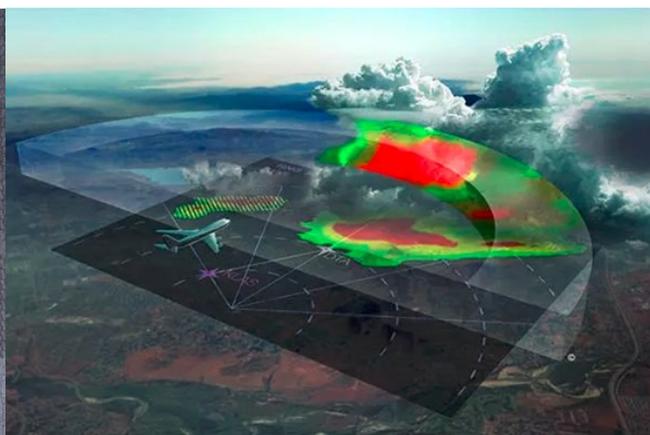
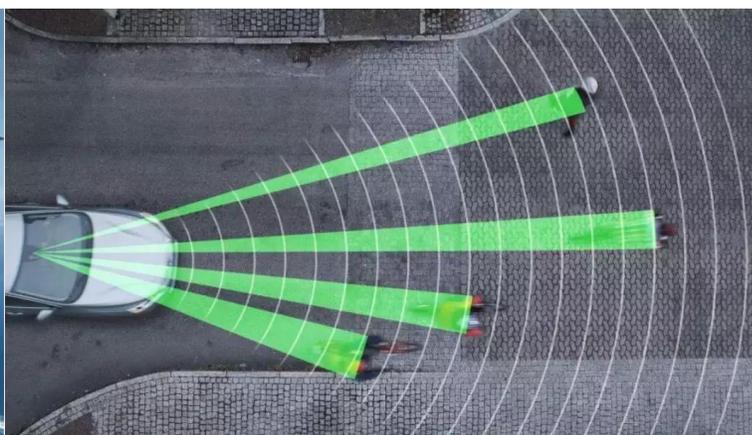
$$\nu' = \frac{1 + u/c}{1 - u/c} \nu \approx \left(1 + \frac{2u}{c}\right) \nu$$

$$\Rightarrow u = \frac{\Delta\nu}{2\nu} c = 8.5 \text{ m/s}$$



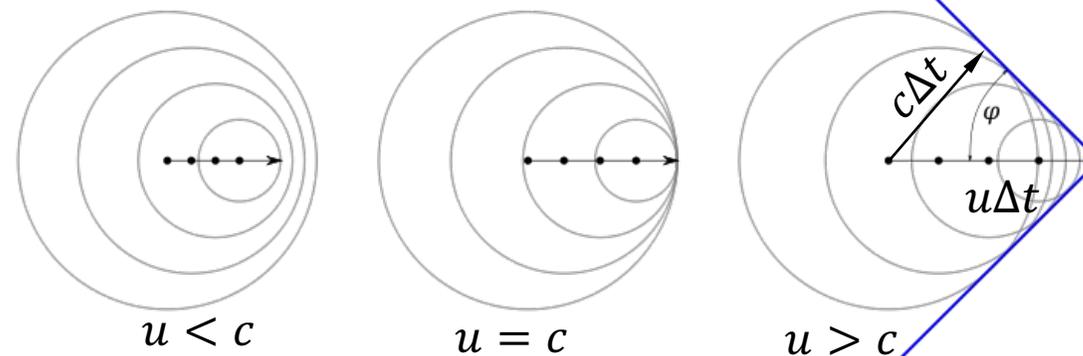
- 多普勒效应的应用：

- 多普勒超声（彩超）：利用多普勒效应测血液流动速度，
- 超声测速仪：车辆速度监控
- 天体物理、宇宙学：测量天体的移动速度 —— 哈勃定律
- 等离子体诊断：高温气体中的分子做高速运动，方向杂乱无章，其发射的谱会由于多普勒效应发生移动展宽，通过测量展宽可以确定温度
- 动目标显示雷达和脉冲多普勒雷达：利用多普勒效应，从强背景杂波中提取运动目标的信号 —— 军事、气象、辅助/自动驾驶.....

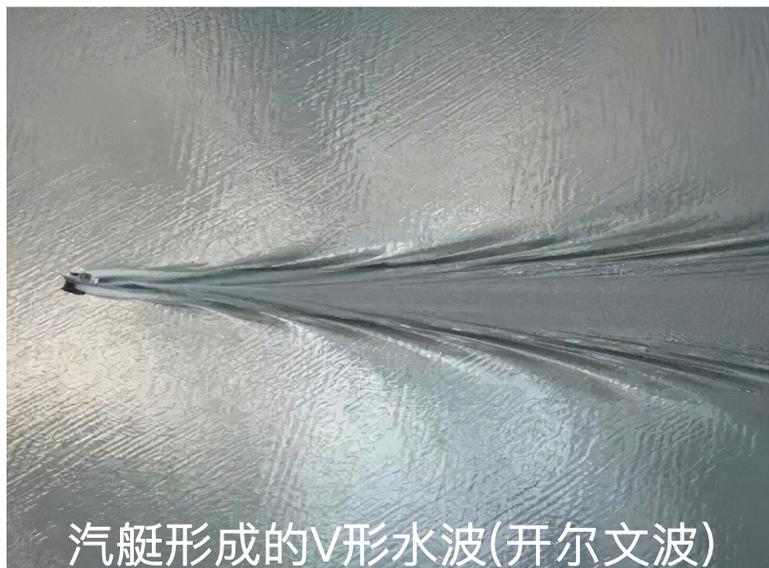


## 激波(shockwave)与马赫锥

- 当波源的速度大于波速时，上面的公式不再适用
- 当波源速度达到波速时，波阵面在介质中堆积，形成冲击波（激波）
- 当波源速度进一步增加时，质点的激波的波阵面呈圆锥形，且以运动的物体为圆锥的顶点，叫做马赫锥。马赫锥的顶角  $\sin \varphi = c/u$ ，其中  $Ma = u/c$  叫做马赫数
- 电磁学：切连科夫辐射 —— 测量粒子速度



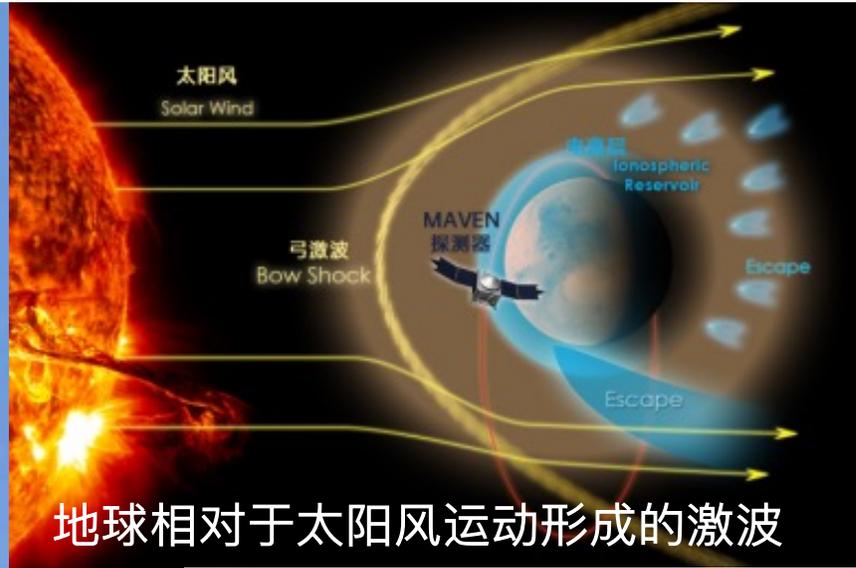
# 激波的例子



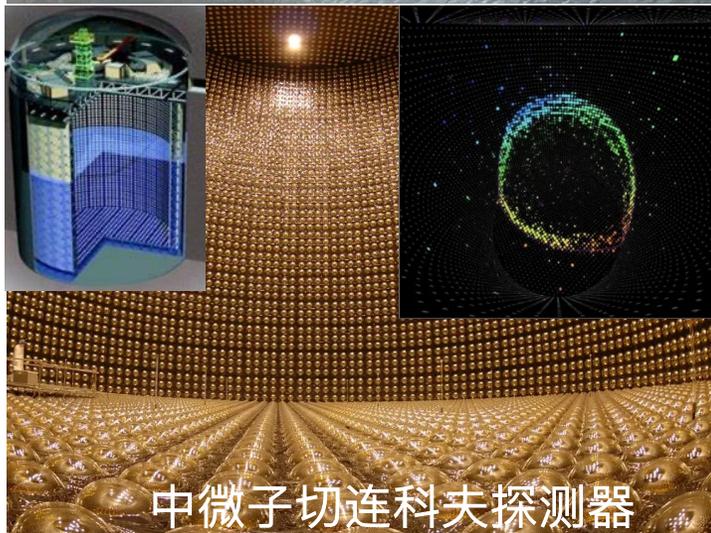
汽艇形成的V形水波(开尔文波)



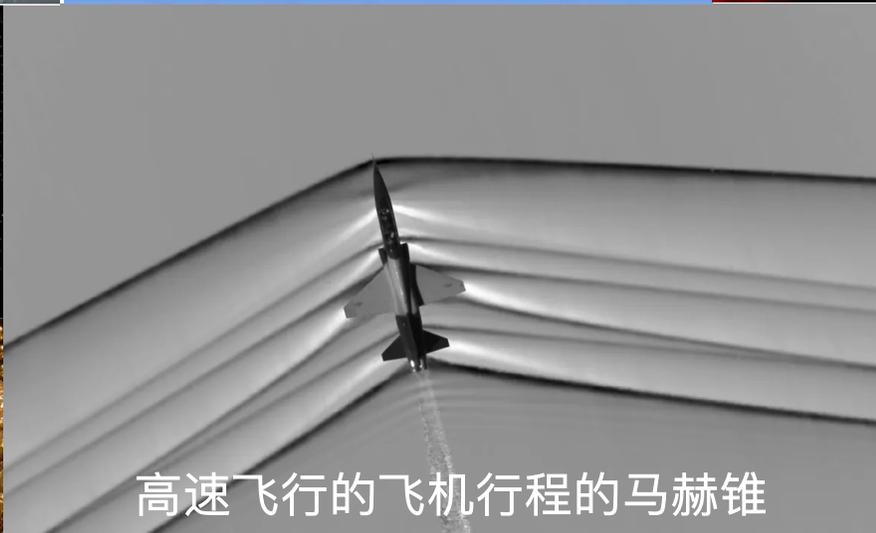
歼20突破音障瞬间



地球相对于太阳风运动形成的激波



中微子切连科夫探测器



高速飞行的飞机行程的马赫锥



东风-17高超音速导弹

## §35. 多质点耦合体系

- 上一节我们通过研究一维势能曲线，揭示了简谐振动的普遍性。那么，这一结论是否可以推广到相互作用的多个质点体系呢？
- $N$ 质点体系的总能量

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + V(r_1, r_2, \dots, r_N)$$

将势能 $V$ 在平衡位置做泰勒展开，

$$V = V(0) + \sum_i \cancel{V'_i(0)} \xi_i + \sum_{ij} \frac{1}{2} V''_{ij}(0) \xi_i \xi_j + \dots$$

这里， $\xi_i = r_i - r_{i0}$ 为偏离平衡位置的位移

- 对应的力为,

$$F_i = -V_i' = -\frac{1}{2} \sum_j V_{ij}''(0) \xi_i$$

这是 $N$ 个线性回复力之和, 因此我们仅需要考虑 $N$ 个弹簧耦合的质点的运动

- 换句话说, 对于在平衡态附近做微小振动的 $N$ 质点体系, 其运动可以近似视为线性回复力
- 这一图像也解释了为什么弹性体会广泛存在
- 进一步, 我们将看到对于弹簧耦合的 $N$ 质点体系, 其运动可以视为 $N$ 个独立的简谐振动的叠加

- 首先考虑一个 $N$ 质点体系，其中所有质点质量相等为 $m$ 。任意两个质点 $i$ 与 $j$ 之间的相互作用力为，

$$\vec{F}_{ij} = -k(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

对应的总能量为，

$$\begin{aligned} E &= \sum_i \frac{1}{2} m \vec{v}_i^2 + \sum_{i,j (i < j)} \frac{1}{2} k (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m \vec{v}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{1}{2} k (\vec{r}_i^2 + \vec{r}_j^2 + 2\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j) \\ &= \sum_i \left( \frac{1}{2} m \vec{v}_i^2 + \frac{Nk}{2} \vec{r}_i^2 \right) + \frac{Nk}{2} \vec{r}_{\text{cm}}^2 \end{aligned}$$

这是 $N$ 个独立运动的谐振子的总能量，谐振子频率为 $\omega^2 = Nk/m$ 。

- 也可以从力的角度,

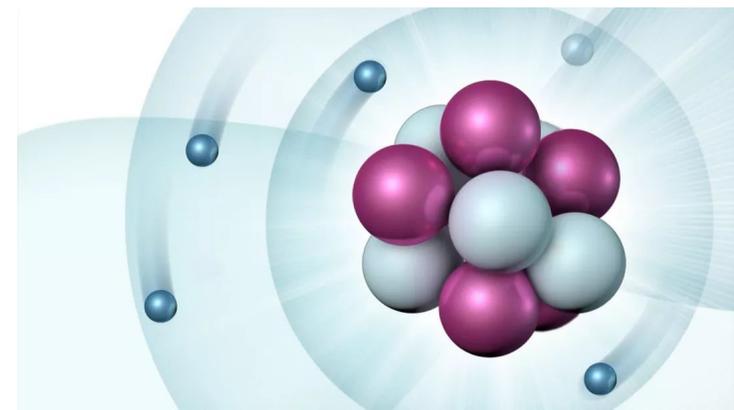
$$m\vec{a}_i = -\sum_j k(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -Nk(\vec{r}_i - \vec{r}_{\text{cm}})$$

根据质心定理,  $\vec{r}_{\text{cm}}$  保持静止。取质心为原点, 上述方程可以写成,

$$m\vec{a}_i = -Nk\vec{r}_i$$

因此, 每个质点以  $\omega^2 = Nk/m$  的频率做简谐振动

- 在这个例子中, 其他质点对第  $i$  个质点的作用类似于一个平均场的作用。最终所有质点做独立简谐振动。这里的模型叫做壳层模型, 是原子核的基本模型
- 对于质点之间的弹性系数不同的情形, 这里的方法不再适用, 我们需要寻找新的解耦系统的方法



- 我们下面首先以两个质点组成的弹簧-质点体系为例来讨论弹簧耦合体系的运动。注意这个例子与上面例子的区别

- 如图 $x_{1,2}$ 为两个质点偏离平衡位置的位移，体系总能量为，

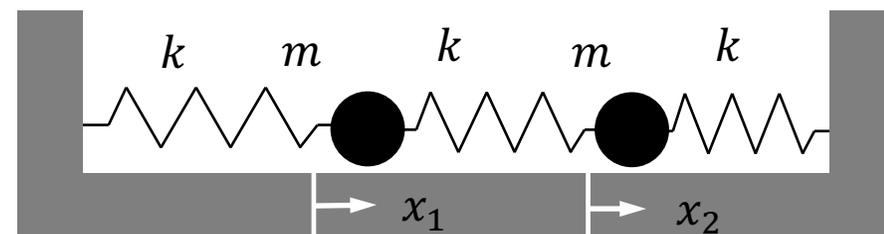
$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$$

对应的动力学方程为，

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2) = k(x_2 - 2x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k(x_1 - x_2) = k(x_1 - 2x_2)$$

- 注意到，如果我们引入新的变量 $y_1 = x_1 + x_2$ ,  $y_2 = x_1 - x_2$ ，即将上面两式相加、相减可以得到，



对应的动力学方程为,

$$m\ddot{y}_1 = -ky_1, \quad m\ddot{y}_2 = -3ky_2$$

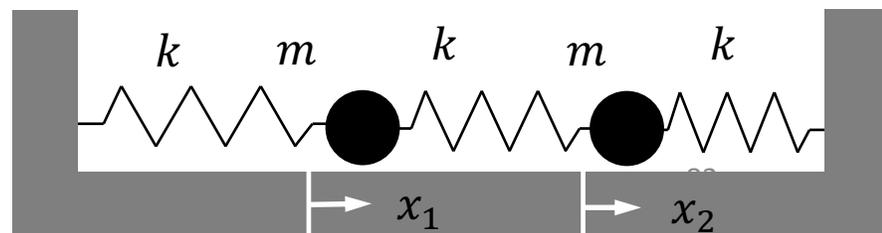
- 我们得到了两个独立的谐振子方程。这两个坐标的物理意义是明确的, 它们分别描述了两个振子中心和两个振子之间的相对距离之间的运动。其解为( $\omega^2 = k/m$ ),

$$y_1 = 2A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), y_2 = 2A_2 \cos(\sqrt{3}\omega t + \varphi_2)$$

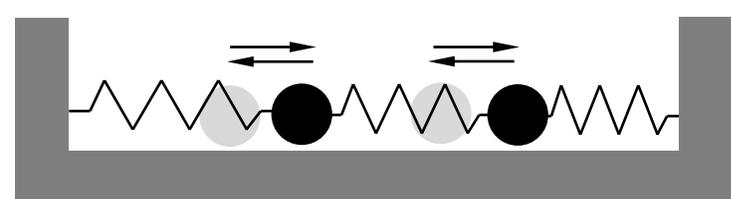
原始质点的运动可以通过线性组合得到,

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\sqrt{3}\omega t + \varphi_2)$$

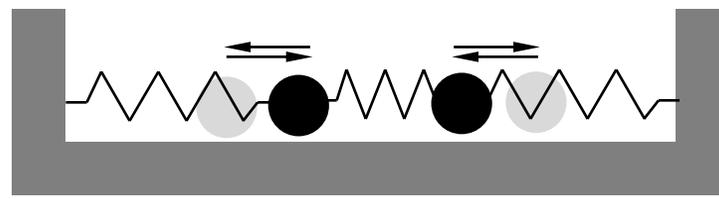
$$x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) - A_2 \cos(\sqrt{3}\omega t + \varphi_2)$$



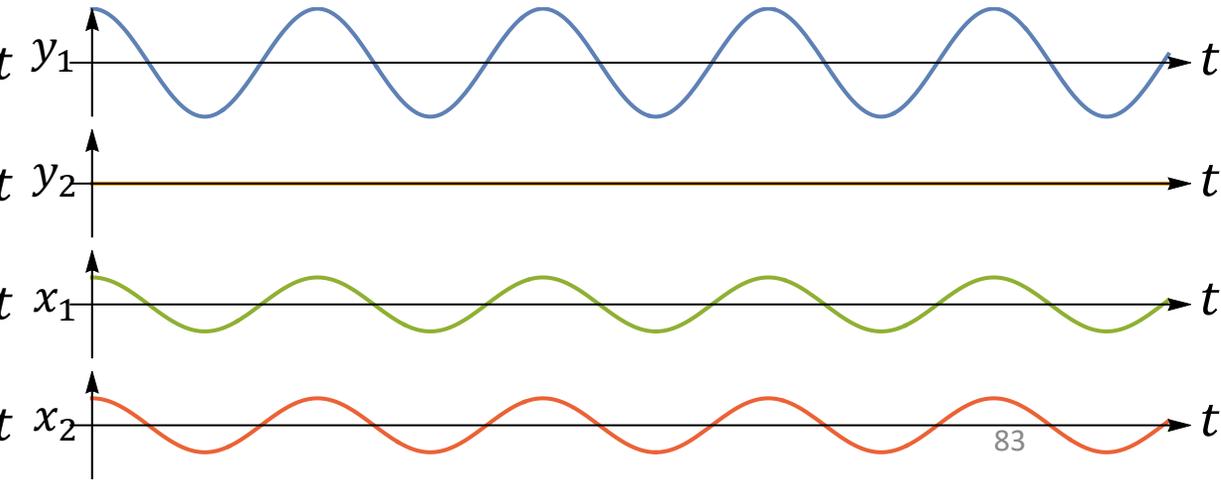
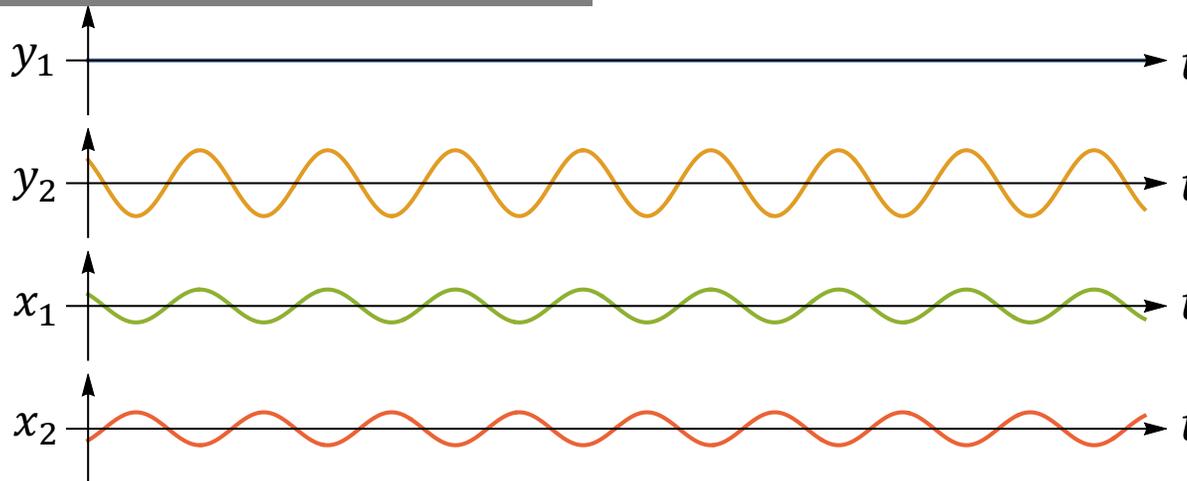
- 当  $A_1 \neq 0, A_2 = 0$  时，体系的两个质点都以相同的频率做简谐振动，且相位相同
- 当  $A_1 = 0, A_2 \neq 0$  时，体系的两个质点都以相同的频率做简谐振动，且相位相反
- 一般情况下，体系的两个质点的振动比较复杂(非简谐振动)



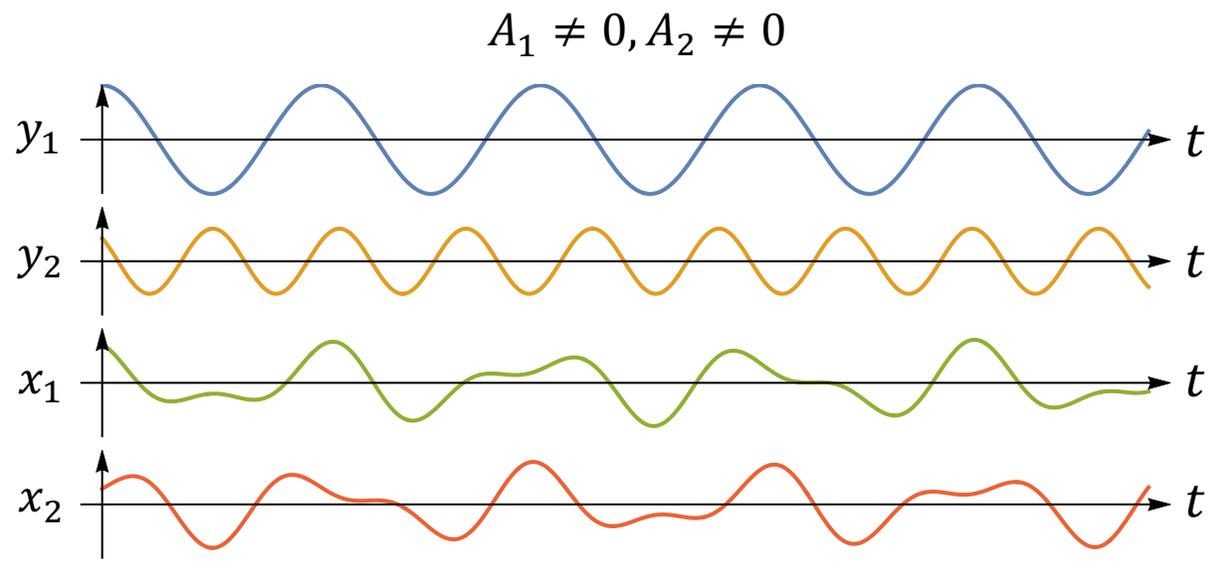
$$A_1 \neq 0, A_2 = 0$$



$$A_1 = 0, A_2 \neq 0$$

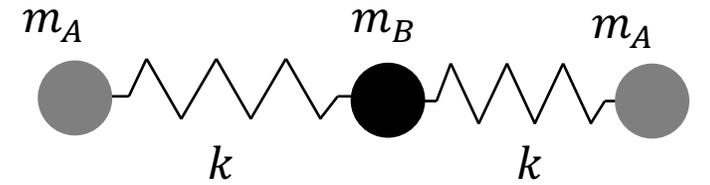


- 从这个例子可以看到，对于耦合振子体系，可以通过对坐标进行线性组合，寻找到合适的坐标，使得体系解耦为若干个独立的谐振子运动，这样的一组坐标叫做简正坐标 (normal coordinates)，相应的振动模式叫做简正模 (normal modes)
- 体系在某一简正模下，所有的坐标以相同的频率振动，即相位同步 (in phase)



- 对于一般的弹簧耦合的 $N$ 质点体系，可以利用线性代数的方法证明，可以找到 $N$ 组简正坐标，使得体系解耦为 $N$ 个独立的简谐振子的运动，即存在 $N$ 组简正模
- 对于任意一个简正模式的振动，所有质点的相位同步，即以相同的频率振动
- 这里的概念还可以推广到连续介质。我们后面通过例子可以看到，弹性体中的简谐波本质上就是弹性体体系的简正模
- 简正模的概念在现代物理中扮演着重要的角色。根据这一概念，体系的物理自由度未必是描述体系所引入的基本坐标。通过自由度的变换，可将复杂的动力学问题分解为简单的问题——这正是现代量子场论的基础

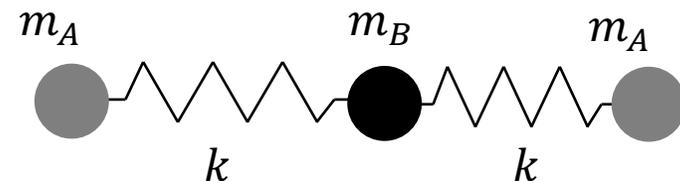
【例子】 考虑如图一个 $A_2B$ 型三原子分子的模型，求其简正频率。



【例子】考虑如图一个A<sub>2</sub>B型三原子分子的模型，求其简正频率。

解：动力学方程：

$$\begin{cases} m_A \ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) \\ m_B \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) \\ m_A \ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2) \end{cases}$$



考虑简正模  $x_i = A_i \cos \omega t$ ，带入上式可以得到，

$$\begin{cases} -\omega^2 m_A A_1 \cos \omega t = -k(A_1 \cos \omega t - A_2 \cos \omega t) \\ -\omega^2 m_B A_2 \cos \omega t = -k(A_2 \cos \omega t - A_1 \cos \omega t) - k(A_2 \cos \omega t - A_3 \cos \omega t) \\ -\omega^2 m_A A_3 \cos \omega t = -k(A_3 \cos \omega t - A_2 \cos \omega t) \end{cases}$$

整理一下，消去  $\cos \omega t$ ，可以得到

【例子】 考虑如图一个A<sub>2</sub>B型三原子分子的模型， 求其简正频率。

$$\begin{cases} (k - \omega^2 m_A)A_1 - kA_2 = 0 \\ -kA_1 + (2k - \omega^2 m_B)A_2 - kA_3 = 0 \\ -kA_2 + (k - \omega^2 m_A)A_3 = 0 \end{cases}$$

$A_1 = A_2 = A_3$ 是这个方程的一个解表示不发生振动的情况。我们关心有非零解的情形，也就是 $A_1, A_2, A_3$ 不完全为零的情形。

- 如果 $A_2 = 0$ ，上面的方程可以化简为  $(k - \omega^2 m_A)A_1 = 0, A_1 = A_3$ 。这个方程有非零解的条件是， $\omega^2 = k/m_A$ 。
- 如果 $A_2 \neq 0$ ，根据第一个方程， $A_1 = k/(k - \omega^2 m_A)A_2$ ，根据第三个方程， $A_3 = k/(k - \omega^2 m_A)A_2$ 。将这两个条件带入第二个方程可以得到，

【例子】考虑如图一个A<sub>2</sub>B型三原子分子的模型，求其简正频率。

$$-\frac{2k^2}{(k - \omega^2 m_A)} A_2 + (2k - \omega^2 m_B) A_2 = 0$$

这个方程具有非零振幅解的条件是，

$$-2k^2 + (2k - \omega^2 m_B)(k - \omega^2 m_A) = 0$$

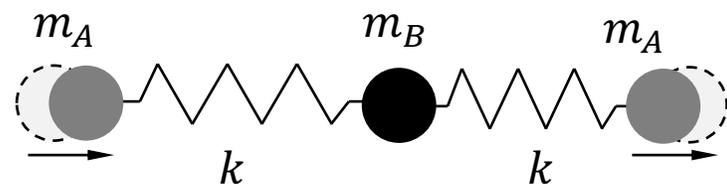
整理可以得到，

$$\Rightarrow \omega^2(2km_A + km_B - \omega^2 m_A m_B) = 0$$

因此我们一共得到了三个解（简正模）：

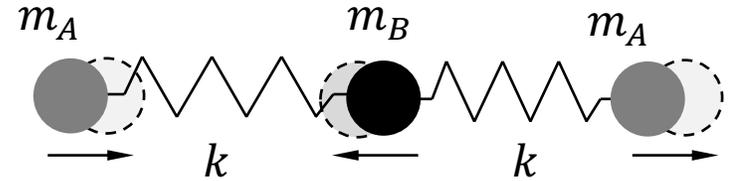
•  $\omega = 0$ ：表示无振动，分子整体做平动

•  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_A}}$ ：B不动，原子A运动



【例子】考虑如图一个A<sub>2</sub>B型三原子分子的模型，求其简正频率。

•  $\omega = \sqrt{\frac{k(2m_A+m_B)}{m_A m_B}}$  : A、B原子同时运动



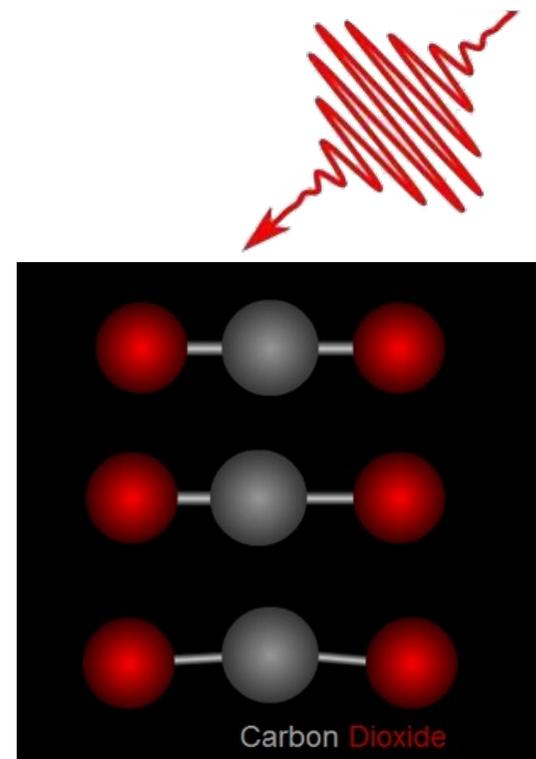
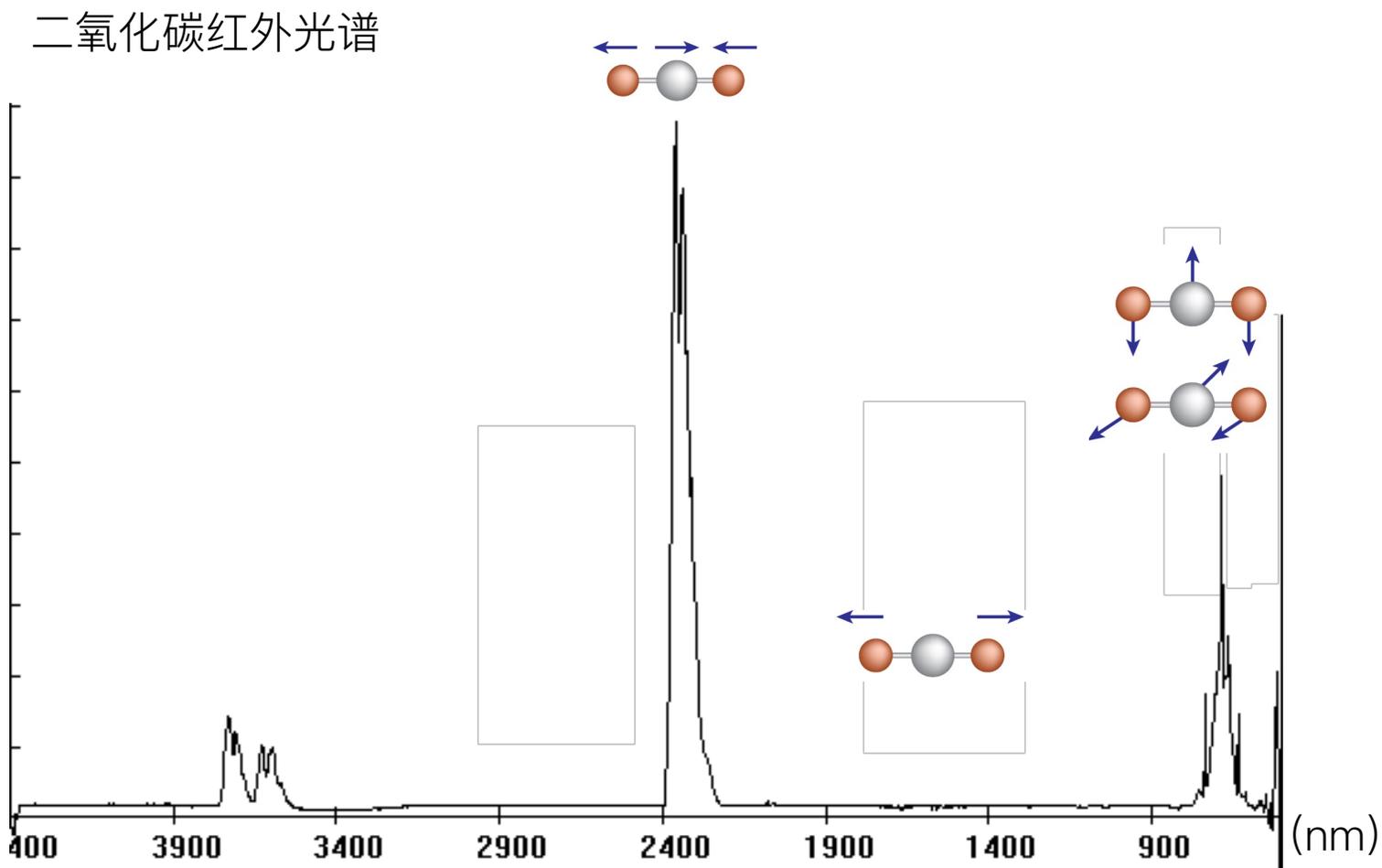
注：

还有一种方法可以直接求解线性方程组有非平凡解的条件，即考虑其系数行列式为零，因此，

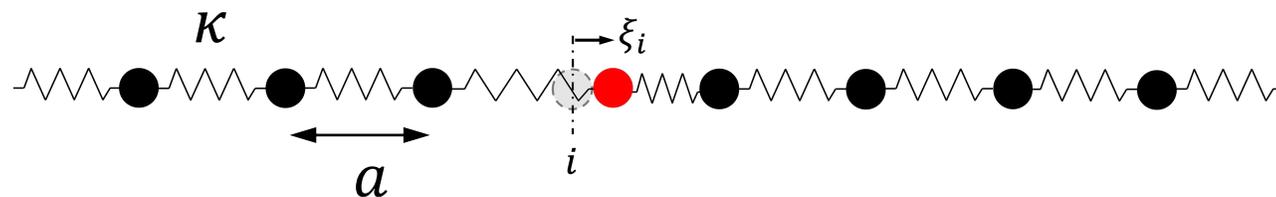
$$\det \begin{vmatrix} k - \omega^2 m_A & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 m_B & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m_A \end{vmatrix} = 0$$

从这个条件出发可以直接得到三个解满足的多项式。

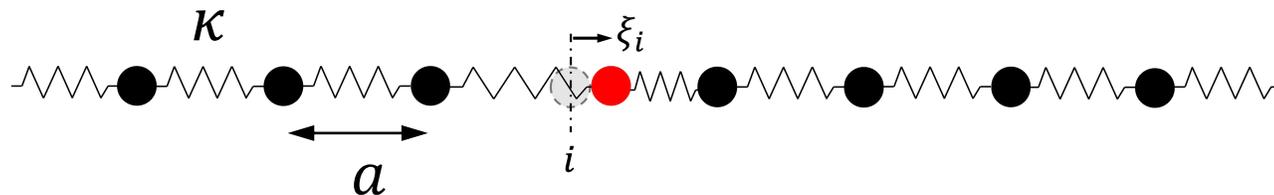
【例子】 考虑如图一个 $A_2B$ 型三原子分子的模型， 求其简正频率。



【例子】 求无限长1维弹簧-质点链的简正频率与简正模。



【例子】 求无限长1维弹簧-质点链的简正频率与简正模。



解：动力学方程，

$$m\ddot{\xi}_i = \kappa(\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1})$$

考虑简正模  $\xi_i = A_i \cos \omega t$ ,

$$-\omega^2 m A_i = \kappa(A_{i+1} - 2A_i + A_{i-1})$$

$$\Rightarrow A_{i+1} + \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 \right) A_i + A_{i-1} = 0$$

这里， $\omega_0^2 = \kappa/m$ 。在连续极限下弹簧质点链成为1维弹性体，其上传播简谐波形如  $\cos(\omega t - kx)$ 。因此我们可以猜测简正模的形式为

$$x_n(t) = C \cos(\omega t \pm nak) = C \cos nak \cos \omega t \mp C \sin nak \sin \omega t$$

【例子】 求无限长1维弹簧-质点链的简正频率与简正模。

换句话说，有两组简正模，其振幅分别满足，

$$A_i = C \cos ika, A'_i = C' \sin ika$$

其中， $C, C'$ 是常数， $k$ 是某个待定实数。两组解实际上是同一组解，因为它们只差一个共同的起始相位。带入原差分方程可以得到，

$$\cos k(i+1)a + \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 \right) \cos kia + \cos k(i-1)a = 0$$

这个方程可以通过三角函数的性质化简，例如 $\cos k(i \pm 1)a = \cos kia \cos ka \mp \sin kia \sin ka$ ，可以得到：

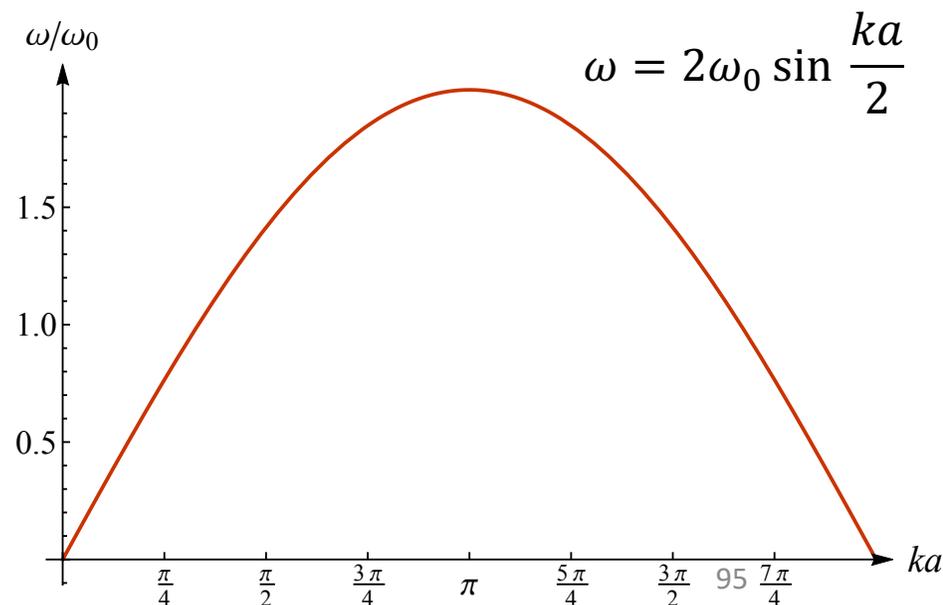
$$2 \cos ka + \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 \right) = 0 \Rightarrow \omega^2 = 2\omega_0^2 (1 - \cos ka) = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{ka}{2}$$

【例子】 求无限长1维弹簧-质点链的简正频率与简正模。

换句话说，只要满足这个色散关系(如图)的所有的  $k$  都给出一组简正模。其中，简正频率需要满足  $0 \leq \omega \leq \sqrt{2}\omega_0$ 。

讨论：

- 上面我们找到了一组解，但没有证明这是全部的解。对于  $N$  个质点来说，一共有  $N$  个简正模。如果有  $N$  个质点，不难验证上面构造的简正模一共是  $N$  个， $k_n a = \frac{n\pi}{N}$ , ( $n = 1, 2, \dots, N$ )
- 在  $k \ll 1/a$  时， $\omega = \omega_0 k a = ck$ ，这正是简谐波的色散关系。因此简谐波正是连续极限下的简正模



【例子】 求无限长1维弹簧-质点链的简正频率与简正模。

- 上面的差分方程

$$A_{i+1} + \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 \right) A_i + A_{i-1} = 0$$

也可以直接通过差分方法求解。根据这一理论，差分方程的解为，

$$A_i = \rho \cos i\theta, A'_i = \rho \sin i\theta$$

其中， $\rho(\cos \theta \pm i \sin \theta) = r_{\pm}$ 为特征方程的两个复数根，

$$r^2 + \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 \right) r + 1 = 0$$

【例子】 求无限长1维弹簧-质点链的简正频率与简正模。

