第九章：狭义相对论

李 阳

中国科学技术大学近代物理系

力学A・2024年秋

§1. 历史背景

- 牛顿力学的巨大成功（本课程1-9章以及99%的物理学...）
- 牛顿力学的哲学挑战
  - 马赫原理：远处的大质量分布，影响局域的物理定律
  - 牛顿力学允许超距作用：例如，万有引力
  - 牛顿认为存在绝对时空：
    - 伽利略相对性原理：绝对惯性参考系不具有可测量效应 —— 不需要绝对惯性系
    - 惯性系与非惯性系的物理规律不同：水桶实验

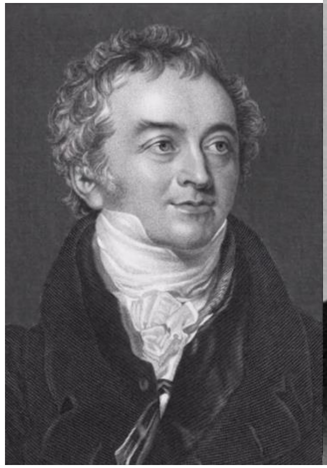
- 电磁学规律在伽利略变换下不是不变的
  - 法拉第定律和高斯定律是伽利略不变的
  - 库伦定律和安培定律不是伽利略不变的
    - 例如：$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}$
  - 与强形式的伽利略相对性原理相违背

> - 弱形式伽利略相对性原理：力学定律在惯性参考系中保持相同的形式
> - 强形式伽利略相对性原理：所有物理定律在惯性参考系中保持相同的形式

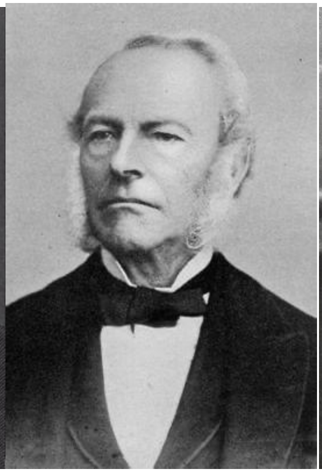
- 电磁学规律在伽利略变换下不是不变的：解决方案
  - 电动力学即麦克斯韦方程(1871)有错误 —— 正确的电动力学理论应该满足伽利略不变性
  - 强形式的伽利略相对性原理不正确 —— 电磁学规律定义在一个特殊参考系(介质)，类似于声波和水波 —— 以太
  - 强形式的伽利略相对性原理正确，但伽利略变换不(完全)正确

- 电磁学规律在伽利略变换下不是不变的：解决方案
  - 电动力学即麦克斯韦方程(1871)有错误 —— 正确的电动力学理论应该满足伽利略不变性
  - 强形式的伽利略相对性原理不正确 —— 电磁学规律定义在一个特殊参考系(介质)，类似于声波和水波 —— 以太
  - 强形式的伽利略相对性原理正确，但伽利略变换不(完全)正确
- 1900年以前，绝大多数物理学家笃信第二种解决方案
  - 实际上，当时绝大多数人只关心应用，不关心这些形而上的哲学讨论
  - 牛顿力学和电动力学的巨大成功第一、三种可能性几乎不被考虑
  - 需要测量地球相对于以太的速度来确定地球上的电磁学规律

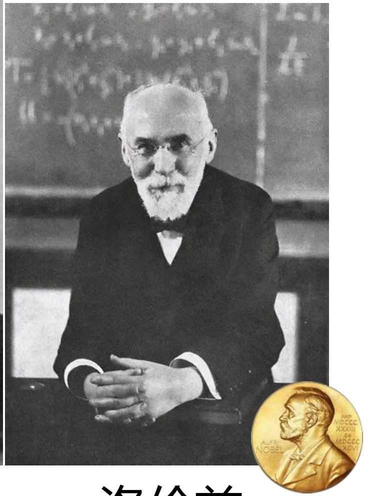
- 电磁学规律在伽利略变换下不是不变的：解决方案
  - 电动力学即麦克斯韦方程(1871)有错误 —— 正确的电动力学理论应该满足伽利略不变性
  - 强形式的伽利略相对性原理不正确 —— 电磁学规律定义在一个特殊参考系(介质)，类似于声波和水波 —— 以太
  - 强形式的伽利略相对性原理正确，但伽利略变换不(完全)正确



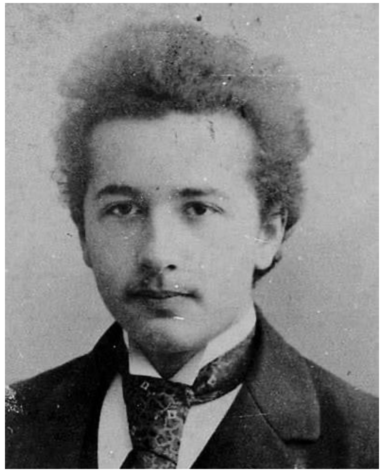
菲涅尔
(1852)



斯托克斯
(1850)

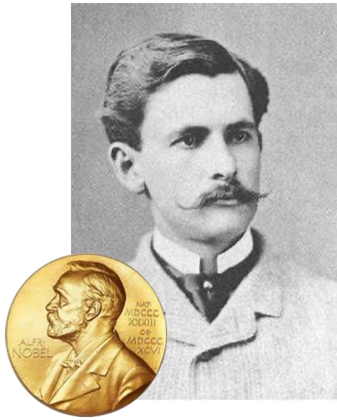


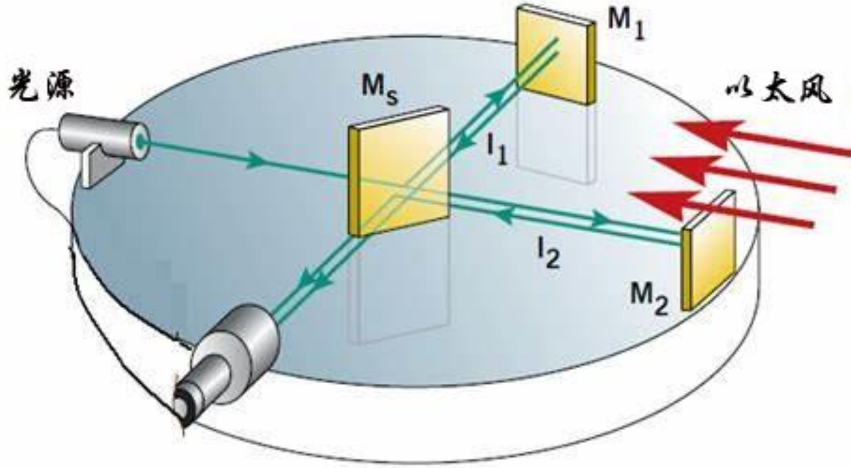
洛伦兹
(1895年)



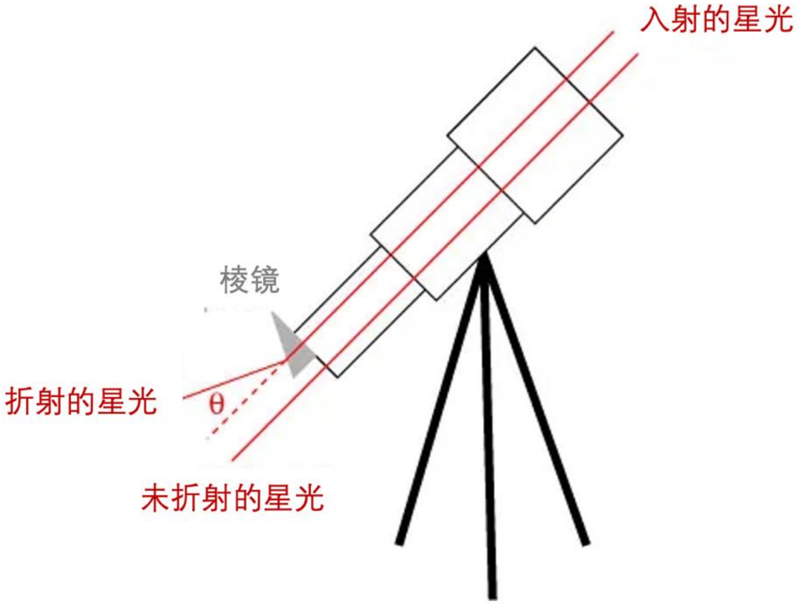
爱因斯坦 (1905年)

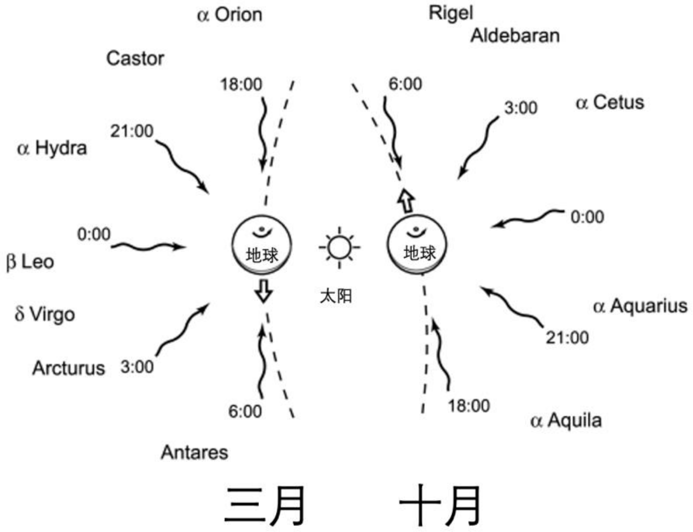
- 实验测量：
  - 阿拉果实验(1810年)：利用光行差测量光在介质中的速度的改变
  - 菲索实验(1851年)：测量光在高速运动介质中的速度
  - 迈克尔逊-莫雷实验(1887年)：测量地球相对于以太的速度
  - 汤姆逊(1897)、卡弗曼(1901)等测量高速运动的电子的质能关系
- 迈克尔逊-莫雷实验:
  - 测量光速在垂直于平行于以太风方向的差别
  - 迈克尔逊干涉仪：现代高精度实验的基础(量子光学、引力波)
  - 迈克尔逊获得了1907年的诺贝尔物理学奖
  - 实验结果：光速不变！



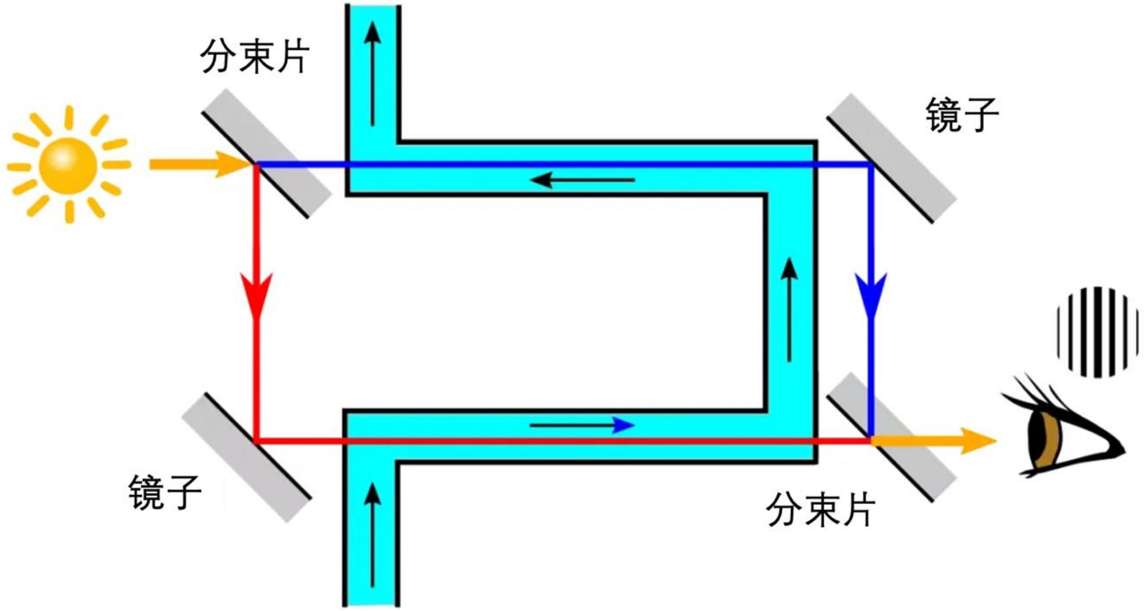


- 阿拉果实验(1810年)：利用光行差测量光在介质中的速度的改变
  - 阿拉果考虑在望远镜中加入一块玻璃棱镜
  - 不同方向的星光进入棱镜时，光的速度为以太的速度与棱镜相对于以太速度的叠加，棱镜中光速的改变会体现在折射角的改变上
- 实验结果：未观察到任何方向上光速的不同
  - 解释：以太被移动的介质所部分拖拽，速度为：$v_{drag} = (1 - n^{-2})V$



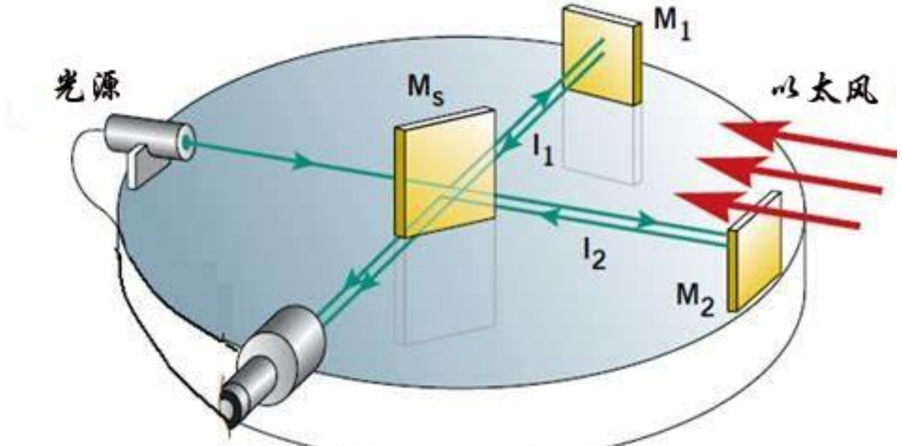


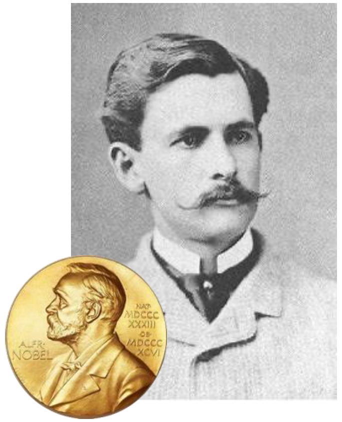
- 菲索实验(1851年)：测量光在高速运动介质中的速度
  - 根据菲涅尔的以太曳引理论，以太会被高速运动的介质所拖拽
  - 在干涉光路中引入相反方向运动的介质，会引起光程差，产生干涉
  - 干涉条纹的移动与以太拖拽速度有关
- 实验结果：与菲涅尔的以太曳引理论的预言一致

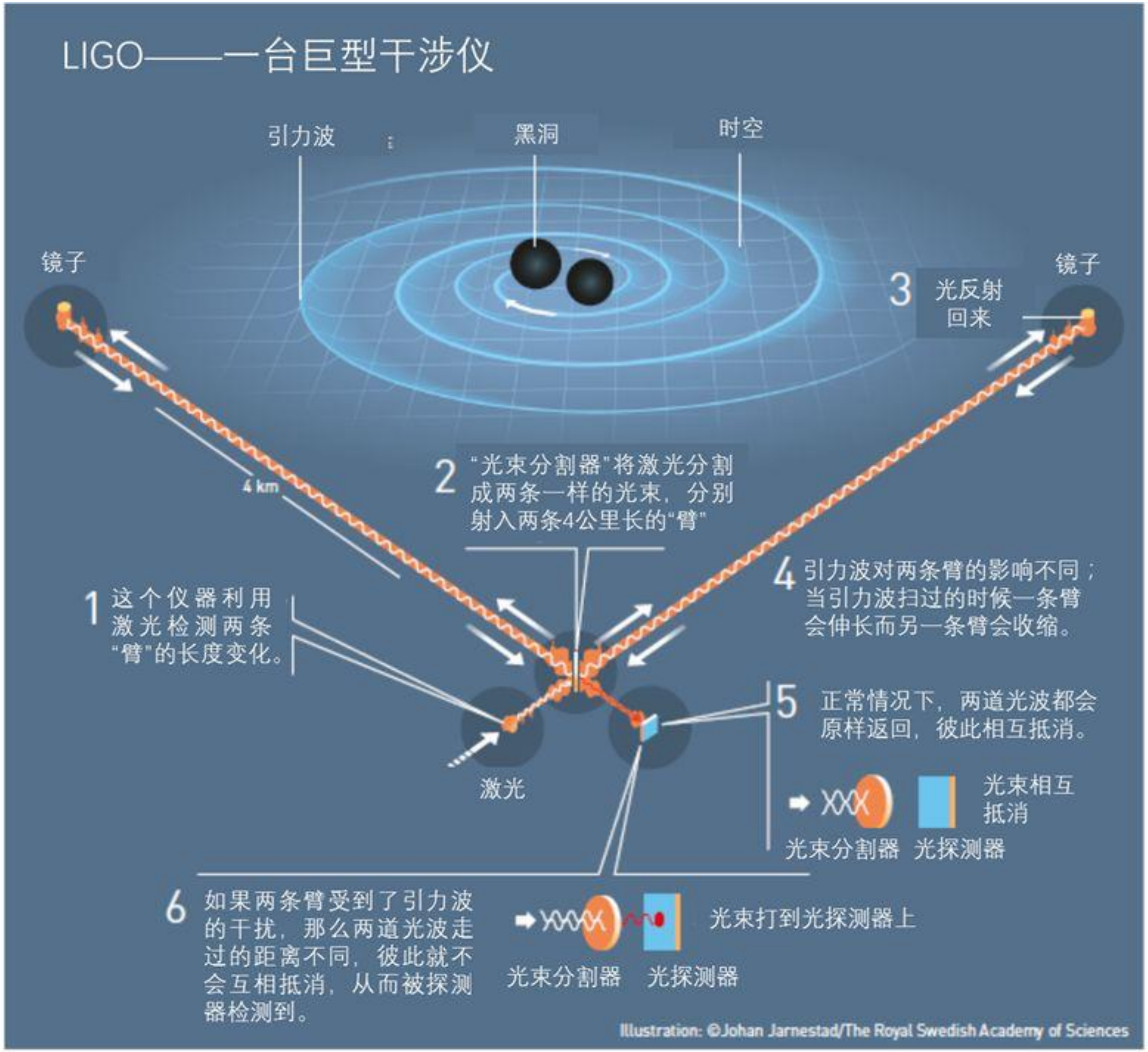


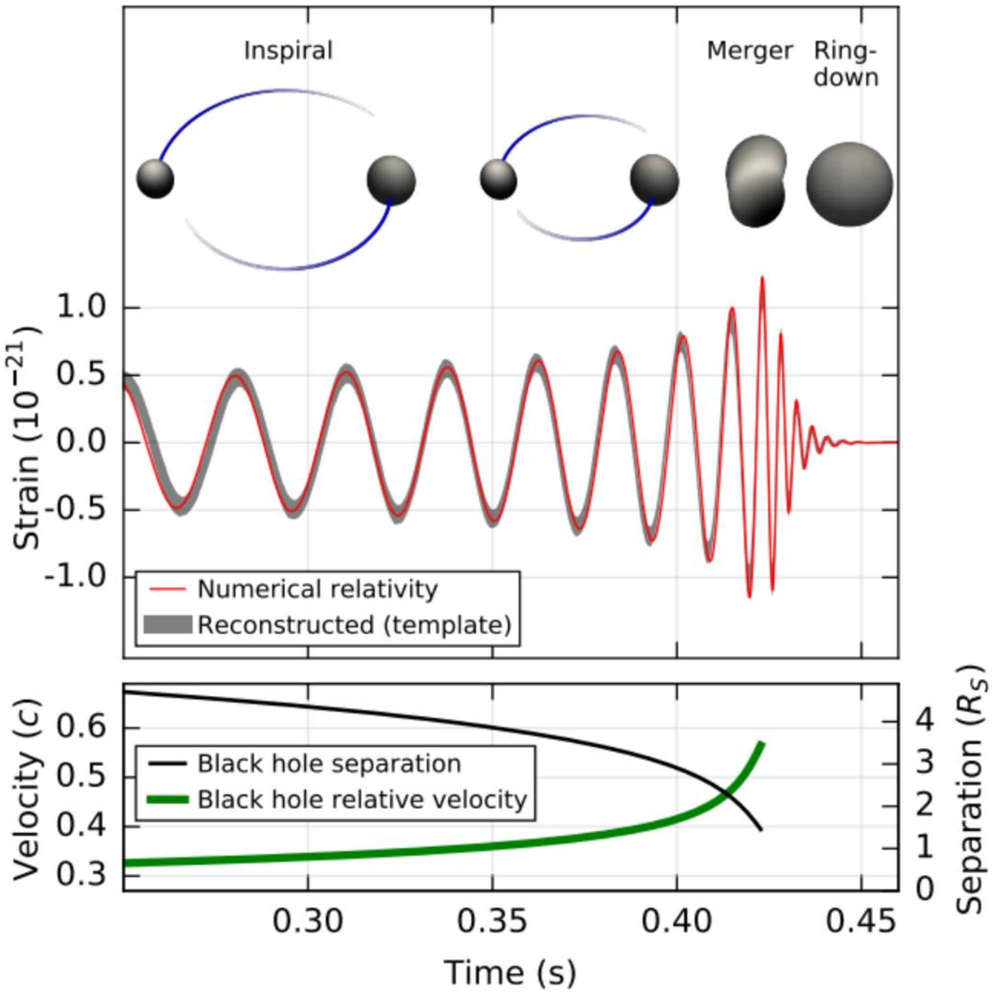
- 迈克尔逊-莫雷实验(1887年)：测量地球相对于以太的速度
  - 迈克尔逊-莫雷大大提高了菲索干涉仪的精度，并确认了菲索的结果
  - 测量了光速在垂直于平行于以太风方向的差别

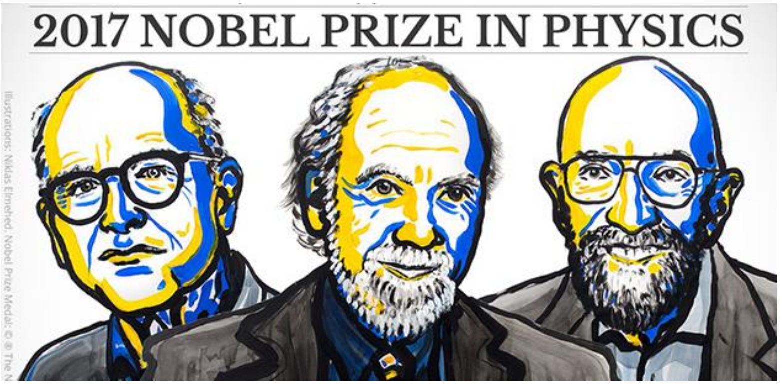
- 实验结果：光速不变！
  - 迈克尔逊干涉仪：现代高精度实验的基础 (量子光学、引力波)，迈克尔逊因改进干涉仪获得了1907年的诺贝尔物理学奖



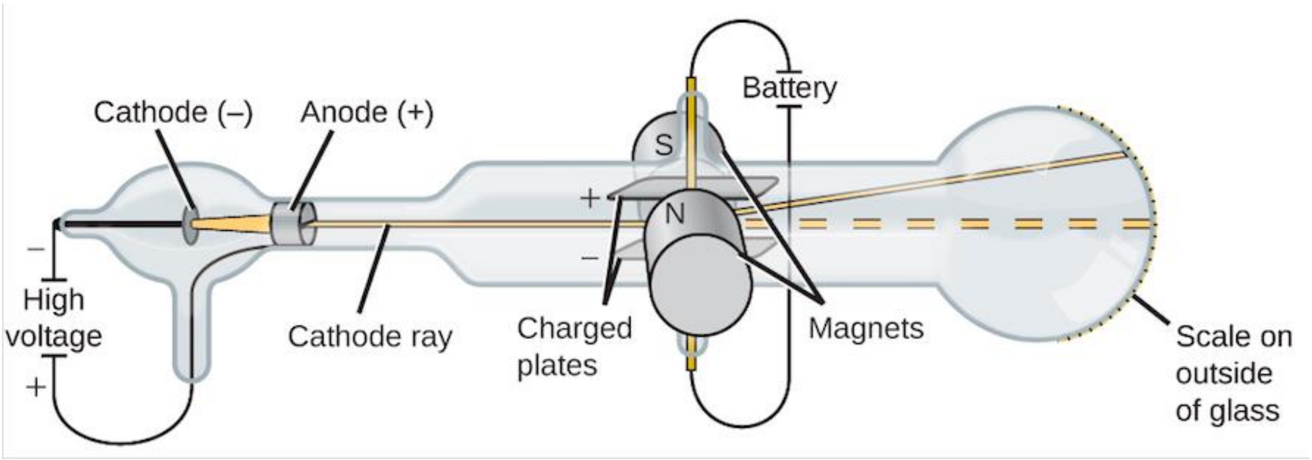


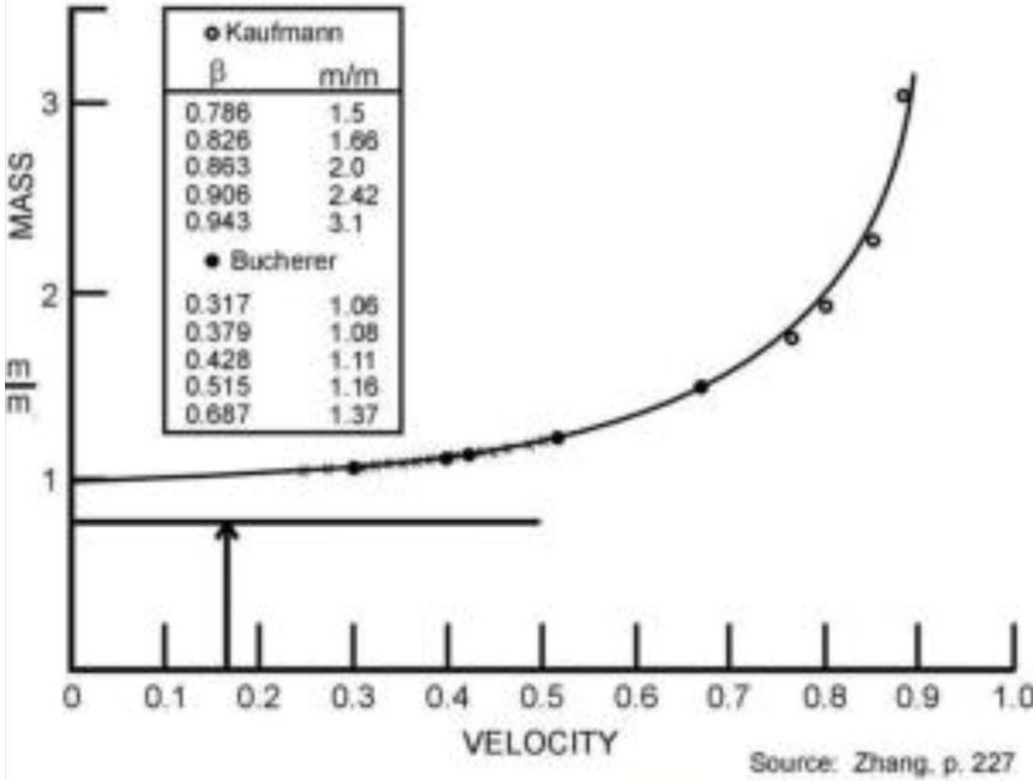

LIGO——一台巨型干涉仪
引力波
黑洞
时空
镜子
镜子
3 光反射回来
4 km
2 "光束分割器"将激光分割成两条一样的光束，分别射入两条4公里长的"臂"
1 这个仪器利用激光检测两条"臂"的长度变化。
4 引力波对两条臂的影响不同；当引力波扫过的时候一条臂会伸长而另一条臂会收缩。
5 正常情况下，两道光波都会原样返回，彼此相互抵消。
激光
光束相互抵消
光束分割器
光探测器
6 如果两条臂受到了引力波的干扰，那么两道光波走过的距离不同，彼此就不会互相抵消，从而被探测器检测到。
光束打到光探测器上
光束分割器
光探测器
Illustration: ©Johan Jarnestad/The Royal Swedish Academy of Sciences


Inspiral
Merger
Ring-down
Strain (10^{-21})
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
Numerical relativity
Reconstructed (template)
Velocity (c)
0.6
0.5
0.4
0.3
Black hole separation
Black hole relative velocity
Separation (R_S)
4
3
2
1
0
0.30
0.35
0.40
0.45
Time (s)


2017 NOBEL PRIZE IN PHYSICS

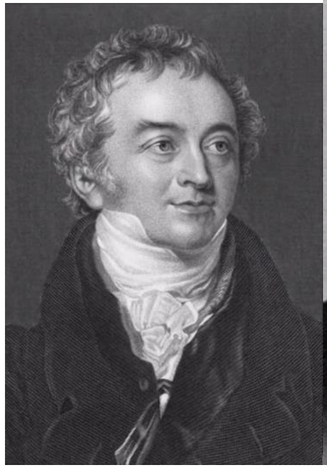
• 汤姆逊(1897)、卡弗曼(1901)等测量高速运动的电子质量随着速度改变而改变



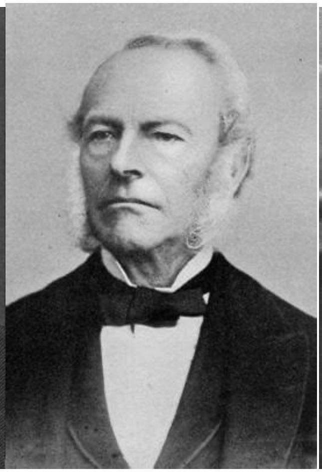


- 电磁学规律在伽利略变换下不是不变的：解决方案
  - 电动力学即麦克斯韦方程(1871)有错误 —— 正确的电动力学理论应该满足伽利略不变性
  - 强形式的伽利略相对性原理不正确 —— 电磁学规律定义在一个特殊参考系(介质)，类似于声波和水波 —— 以太
  - 强形式的伽利略相对性原理正确，但伽利略变换不(完全)正确

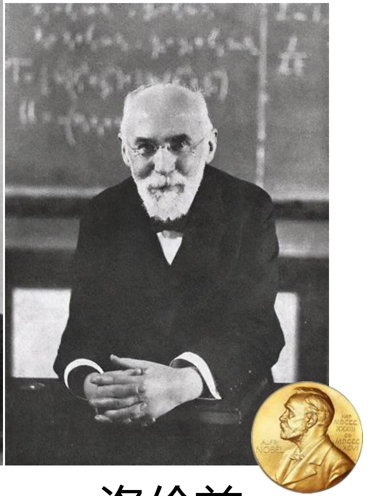
洛伦兹变换



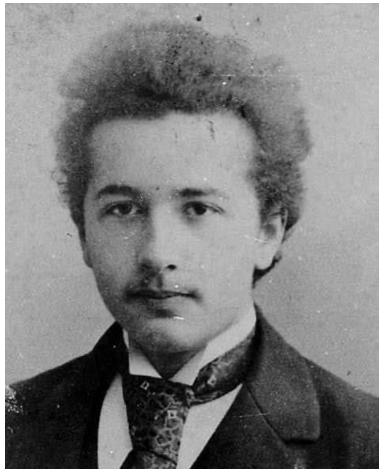
菲涅尔
(1852)



斯托克斯
(1850)



洛伦兹
(1895年)



爱因斯坦 (1905年)

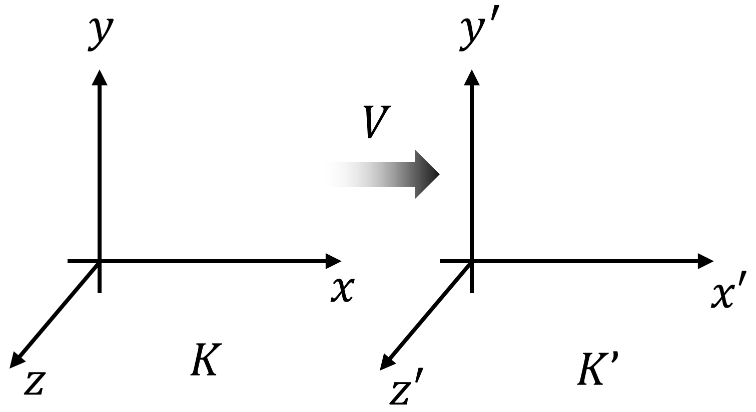
注记:

- 从数学的角度看，满足时空平移不变、以及参考系变换不变的时空对称性并非伽利略变换一种 —— 一共有11种，包括伽利略变换以及洛伦兹变换
- 如果进一步要求变换是线性的，则一共有两种，分别是伽利略变换

和洛伦兹变换

- 爱因斯坦最初的想法是解决牛顿力学的哲学困难，狭义相对论只是其中的第一步
- 继1905年提出狭义相对论以后，爱因斯坦继续寻找相对论性的引力理论，以消除所有参考系——包括惯性系——的特殊性。最终在1915年得到了广义相对论
- 本章主要讨论狭义相对论，即要求所有物理定律在惯性参考系中保持相同的形式(强形式的伽利略相对性原理)，时空对称变换为洛伦兹变换

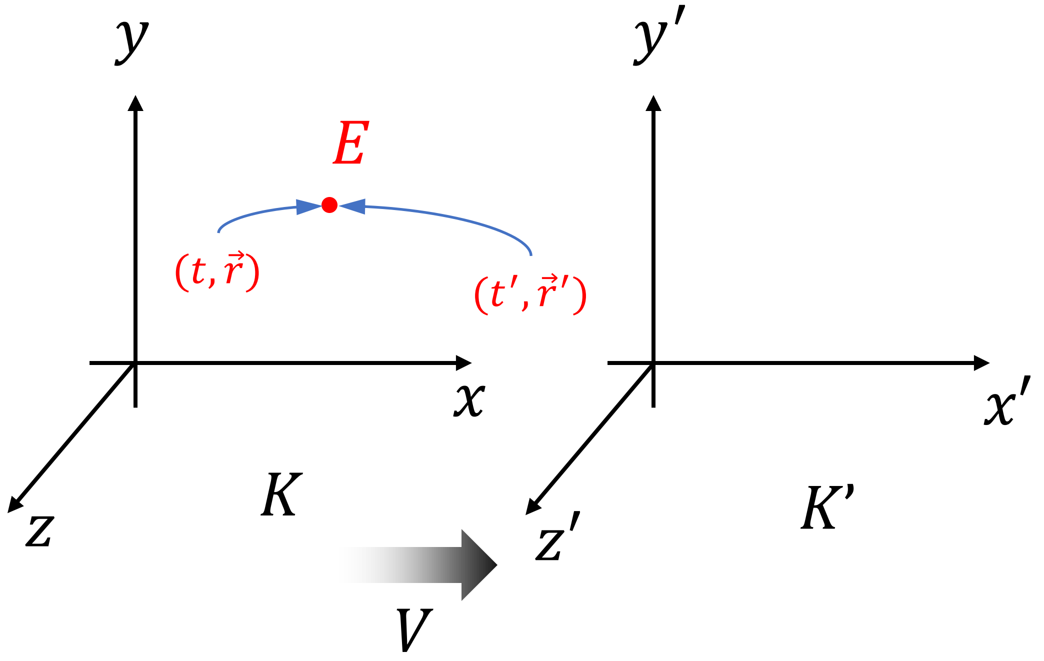
§2. 洛伦兹变换

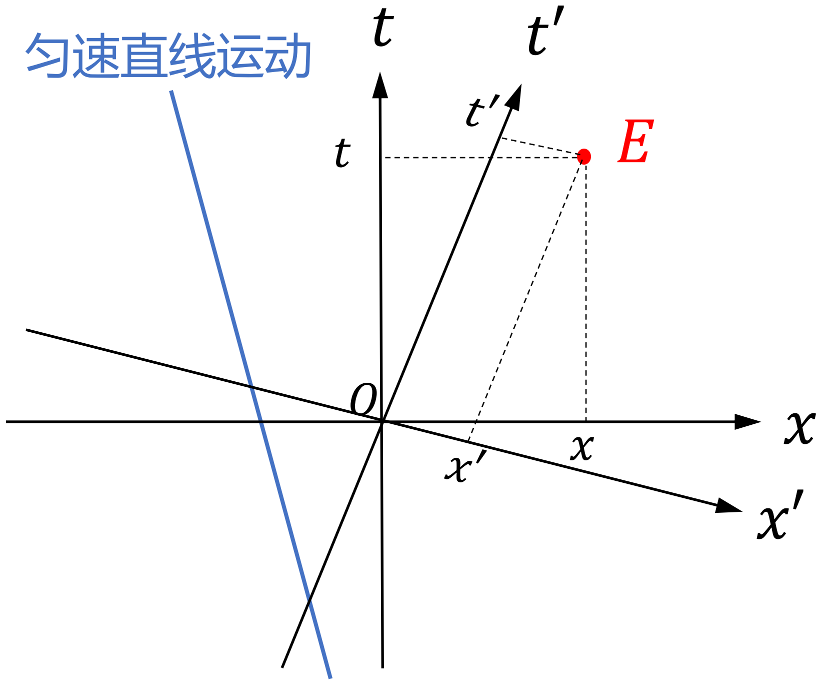


- 爱因斯坦狭义相对论的基本假设
  - **相对性原理：物理定律在惯性参考系中保持相同的形式**
  - **光速不变：光在任何惯性参考系的速度都是相同的**
- 伽利略相对性原理采取了加强的形式，即所有物理定律，包括力学和电磁学在惯性参考系中保持相同的形式
- 光速不变与伽利略变换相矛盾，因此惯性系之间的时空变换需要新的形式
- 这一新的变换叫做洛伦兹变换，所有物理学规律需要在洛伦兹变换下保持相同的形式

洛伦兹变换的推导：

- 洛伦兹变换仍需要保持惯性定律成立，即在洛伦兹变换下，做匀速直线运动的质点仍然做匀速直线运动；即洛伦兹变换将时空图中的直线变换为直线
- 根据几何学的知识，这样的变换必然是线性的



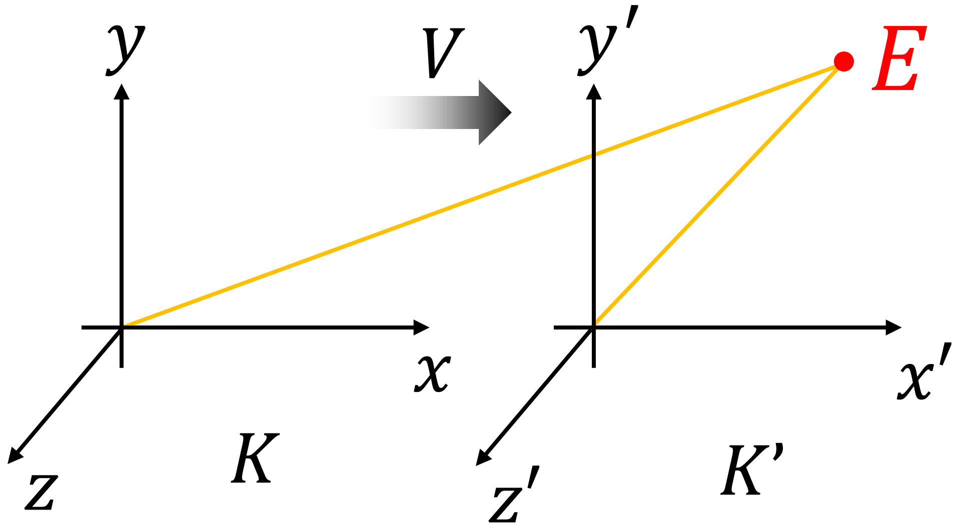


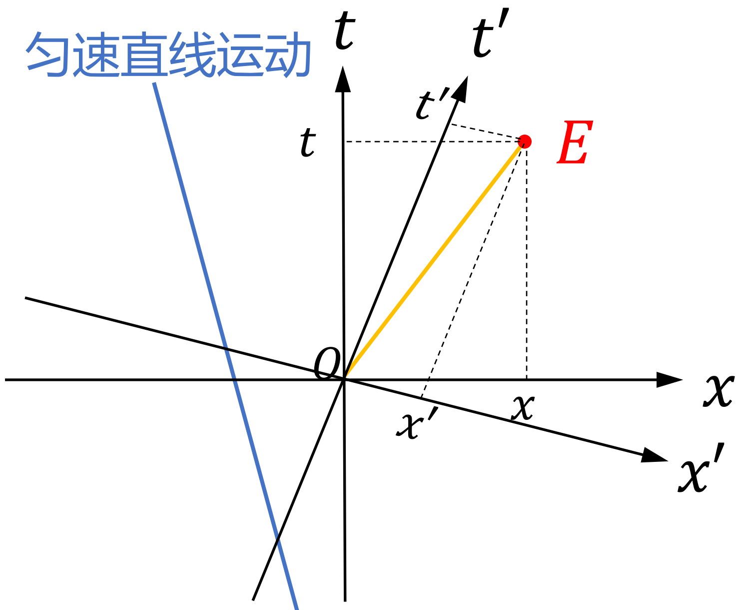
- 下面考虑光速不变的约束：设有两个惯性坐标系K、K'，在$t = t' = 0$时刻，两个坐标系原点重合，这一点可以通过时间、空间的平移做到。K'相对于K以V的速度沿运动。设在$t = t' = 0$时刻从坐标原点发出一束光信号。由于光速不变，在两个参考系中，光都是以原点为球心的球面，因此，

$$r - ct = r' - ct' = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$$

其中，c是个常数，为真空中的光速。

- 因此，为了保持光速不变，洛伦兹变换需要保持$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$不变





- 设K'相对于K沿x方向匀速运动，速度为V，根据运动独立性，y、z方向的坐标不受影响，因此$y = y, z = z$
- 由于洛伦兹变换的线性性，可以设坐标变换为，

$$t' = At + Bx, \qquad x' = Ct + Dx$$

根据$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2$，

$$\Rightarrow\ t^2(-A^2c^2 + c^2 + C^2) + 2t\,x(CD - ABc^2) + x^2(-B^2c^2 + D^2 - 1) = 0$$

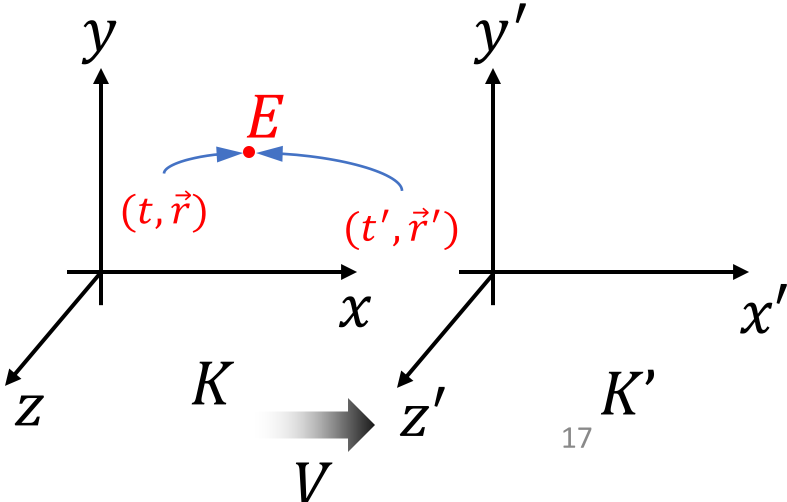
- 变换对于任意坐标都成立，因此，

$$C^2 = c^2(A^2 - 1), \qquad ABc^2 - CD = 0, \qquad D^2 = 1 + c^2B^2$$

$$\Rightarrow C = \pm c\sqrt{A^2 - 1}, B = \pm\frac{1}{c}\sqrt{A^2 - 1}, D = \pm A$$

- 正负号来自于速度的方向，为了确定起见，我们取

$$D = +A, C = -c\sqrt{A^2 - 1}, B = \frac{1}{c^2}C = -\frac{1}{c}\sqrt{A^2 - 1},$$



$$t' = At - \frac{1}{c}\sqrt{A^2 - 1}x, \qquad x' = -c\sqrt{A^2 - 1}t + Ax$$

- 如果引入$A = \cosh\theta$，上述变换还可以写成更加简单的形式，

$$t' = \cosh\theta\, t - \frac{1}{c}\sinh\theta\, x, \qquad x' = -c\sinh\theta\, t + \cosh\theta\, x$$

- 下一步，我们需要将A或θ与参考系相对速度联系起来。K'的原点在K系的速度为V，因此

$$-c\sqrt{A^2 - 1}t + Ax = 0 \;\Rightarrow\; V = \frac{x}{t} = \frac{c\sqrt{A^2 - 1}}{A} = V$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

这样以来，完整的洛伦兹变换可以写成，

洛伦兹变换，

$$\begin{cases} t' = \dfrac{t-(V/c^2)x}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ x' = \dfrac{x-Vt}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

洛伦兹变换的逆变换（$V \to -V$），

$$\begin{cases} t = \dfrac{t'+(V/c^2)x'}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ x = \dfrac{x'+Vt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

- 为了方便，常常引入几个量 $\beta = \frac{V}{c}, \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$
- 快度 (rapidity)： $\phi = \operatorname{arctanh}\beta = \ln\frac{c+v}{c-v} \Rightarrow \cosh\phi = \gamma, \sinh\phi = \gamma\beta$

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct-\beta x) \\ x' = \gamma(x-\beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} ct' = \cosh\phi\, ct - \sinh\phi\ x \\ x' = \cosh\phi\ x - \sinh\phi\ ct \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

若参考系K'相对于K以任意的速度$\vec{v}$匀速运动，则相对应的洛伦兹变换沿平行和垂直方向分别为，

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \vec{\beta}\cdot\vec{x}\right) \\ \vec{x}'_{||} = \gamma(\vec{x}_{||} - \vec{\beta}t) \\ \vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp} \end{cases}$$

考虑$\vec{x}_{||} = \left(\vec{\beta}\cdot\vec{x}\right)\vec{\beta}/\beta^2, \vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{||}$，上述变换可以写成矢量形式

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \vec{\beta}\cdot\vec{x}\right) \\ \vec{x}' = \vec{x} + \dfrac{\gamma - 1}{\beta^2}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{x}\right)\vec{\beta} - \gamma\vec{\beta}t \end{cases} \xrightarrow{V \ll c} \begin{cases} t' = t \\ \vec{x}' = \vec{x} - \vec{V}t \end{cases}$$

洛伦兹变换的性质：

- 在参考系之间的相对速度远小于光速的时候 $V \ll c$，洛伦兹变换退化到伽利略变换
- 在实际测量中，时间间隔、空间间隔才具有意义。在伽利略变换下，时间间隔和空间间隔不变。在洛伦兹变换下两者都改变：

$$\begin{cases} \Delta t' = \dfrac{\Delta t - (V/c^2)\Delta x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ \Delta x' = \dfrac{\Delta x - \mathrm{V}\Delta t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ \Delta y' = \Delta y, \Delta z' = \Delta z \end{cases}$$

不变的是时空间隔：$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{r}^2 = \Delta s'^2$

- 参考系之间相对速度远小于光速时，时间的变换保留到一阶$O\left(\frac{V}{c}\right)$为$\Delta t' \approx \Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x = \Delta t\left(1 - \frac{V\Delta x}{c^2\Delta t}\right)$。第二项在时间间隔不是特别短或者距离间隔不是特别远$\frac{\Delta x}{\Delta t} \ll c$时，可以忽略

$$\begin{cases} t' = \dfrac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - V/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \xrightarrow{v \ll c} \begin{cases} t' = t - \left(\dfrac{V}{c^2}\right)x \approx t \\ x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

- 矢量形式:

§3. 相对论时空观

物理定律 → 对称性 → 时空几何

例子：

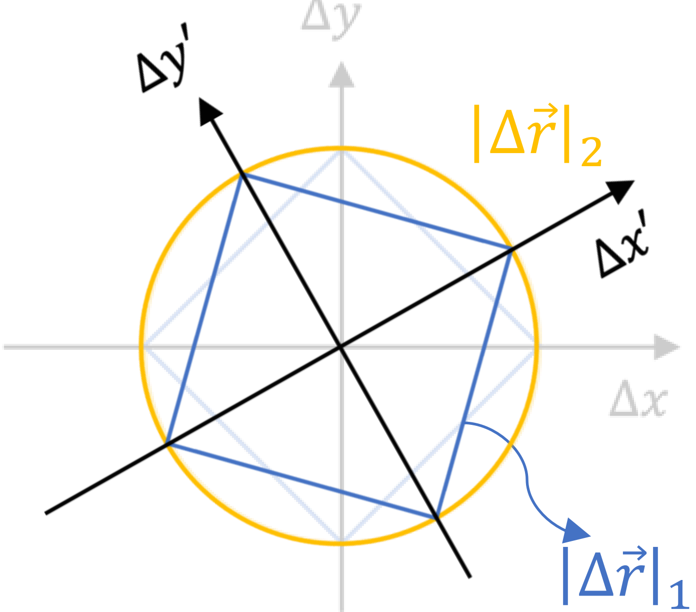
牛顿第二定律在空间转动变换下不变，要求空间距离定义为

$$|\Delta\vec{r}|_2 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

其他距离的定义，如

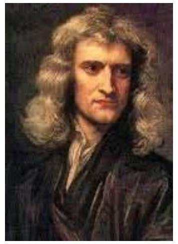
$$|\Delta\vec{r}|_1 = |\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|$$

则无法保持物理定律的空间转动不变性。



$$\begin{cases} x' = \cos\theta x + \sin\theta y \\ y' = -\sin\theta y + \cos\theta x \end{cases}$$

物理定律 ⟺(相对性原理) 对称性 ⟺(数学) 时空几何



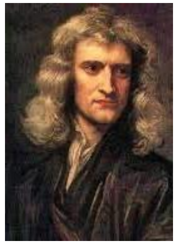
- 物理定律：牛顿第二定律、电动力学(麦克斯韦方程组)
- 对称性：保持物理学规律不变的时空变换 ——~~伽利略变换~~庞加莱变换
  - 庞加莱变换=洛伦兹变换+时间平移+空间平移+空间旋转
- 时空几何: 时空坐标(x, y, z, t)以及时空间隔的度量

$$\cancel{d(\Delta\vec{r}, \Delta t) = \begin{cases} \Delta t, & \text{如果}\Delta t \neq 0 \\ |\Delta\vec{r}|, & \text{如果}\Delta t = 0 \end{cases}}$$

$$d(\Delta t, \Delta\vec{r}) = \sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{r}^2}$$

- (伽利略)相对性原理：所有物理定律在惯性参考系中保持相同的形式

$$\text{物理定律} \xleftrightarrow{\text{相对性原理}} \text{对称性} \xleftrightarrow{\text{数学}} \text{时空几何}$$



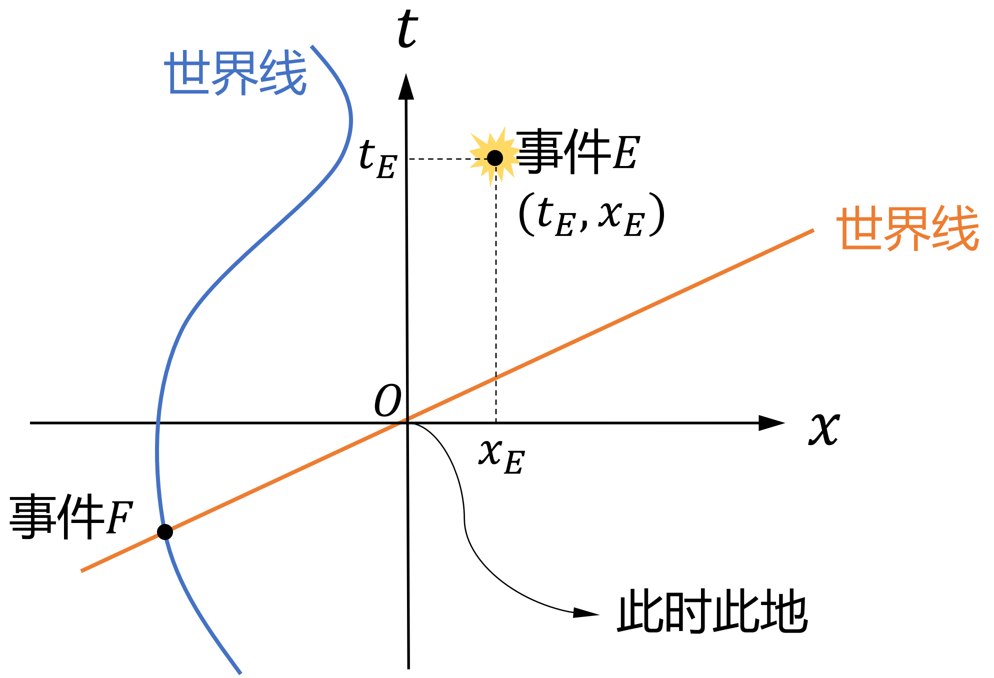
- 物理定律：牛顿第二定律、电动力学(麦克斯韦方程组)
- 对称性：保持物理学规律不变的时空变换 ——庞加莱变换
  - 庞加莱变换=洛伦兹变换+时间平移+空间平移+空间旋转
- 时空几何: 时空坐标(x, y, z, t)以及时空间隔的度量

$$d(\Delta t, \Delta\vec{r}) = \sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{r}^2}$$

- (伽利略)相对性原理：所有物理定律在惯性参考系中保持相同的形式

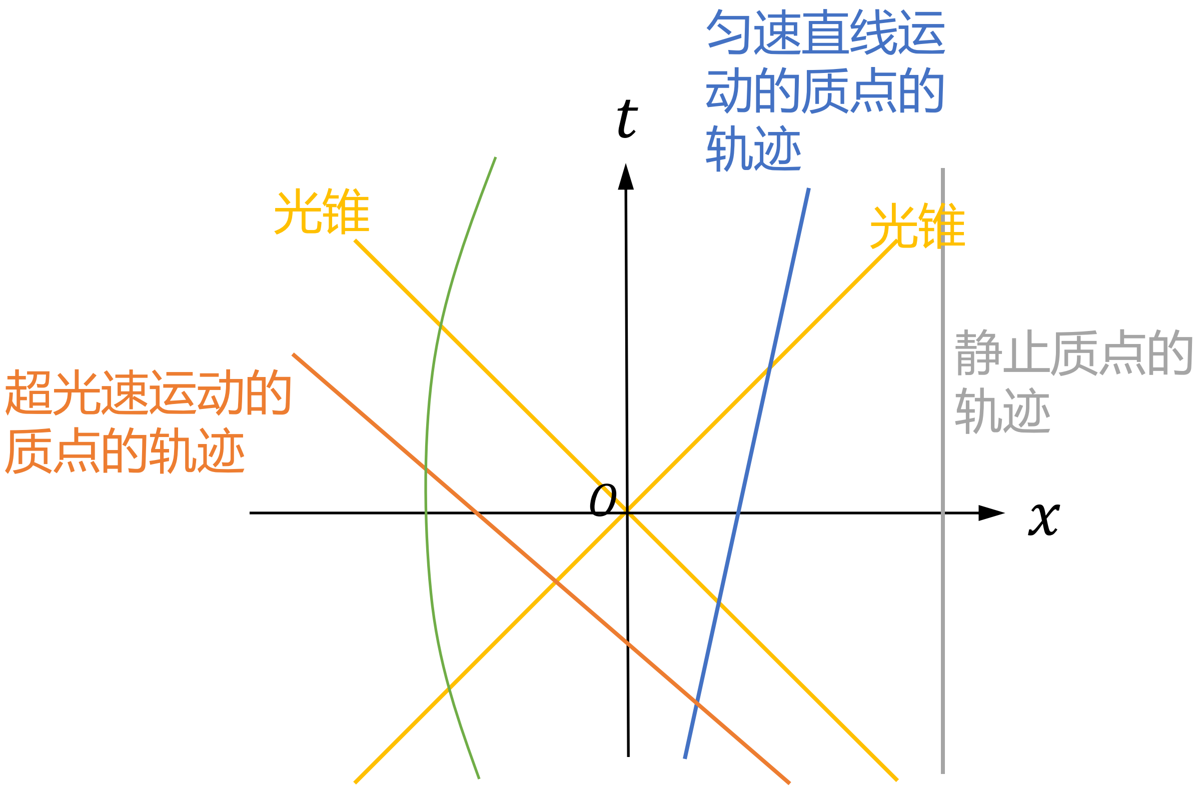
时空图：

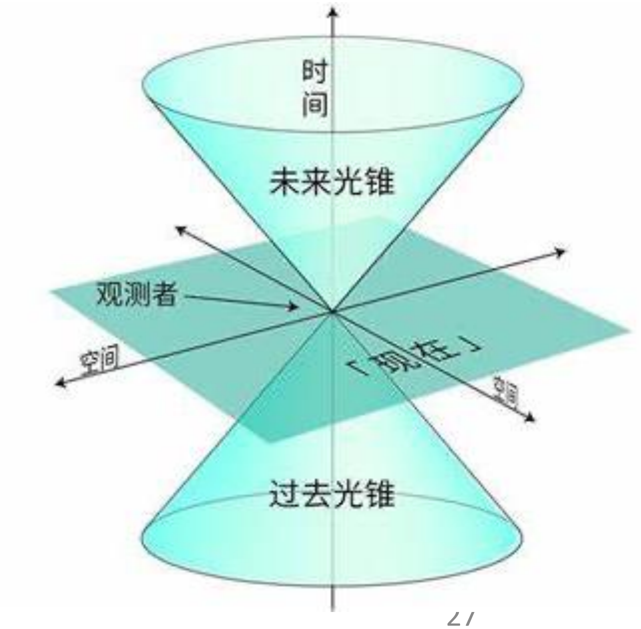
- 事件 (event)：时空图中的点叫做事件，事件可由时空坐标$(t,\vec{r})$所标记
- 时空间隔 (spacetime interval): $d_{EF}=\sqrt{c^2(t_E-t_F)^2-(\vec{r}_E-\vec{r}_F)^2}$，时空间隔在洛伦兹变换下是不变的
- 世界线 (worldline): 一系列事件的集合构成一条世界线。典型的世界线：一个质点的时空轨迹，完全描述了质点的运动



世界线：

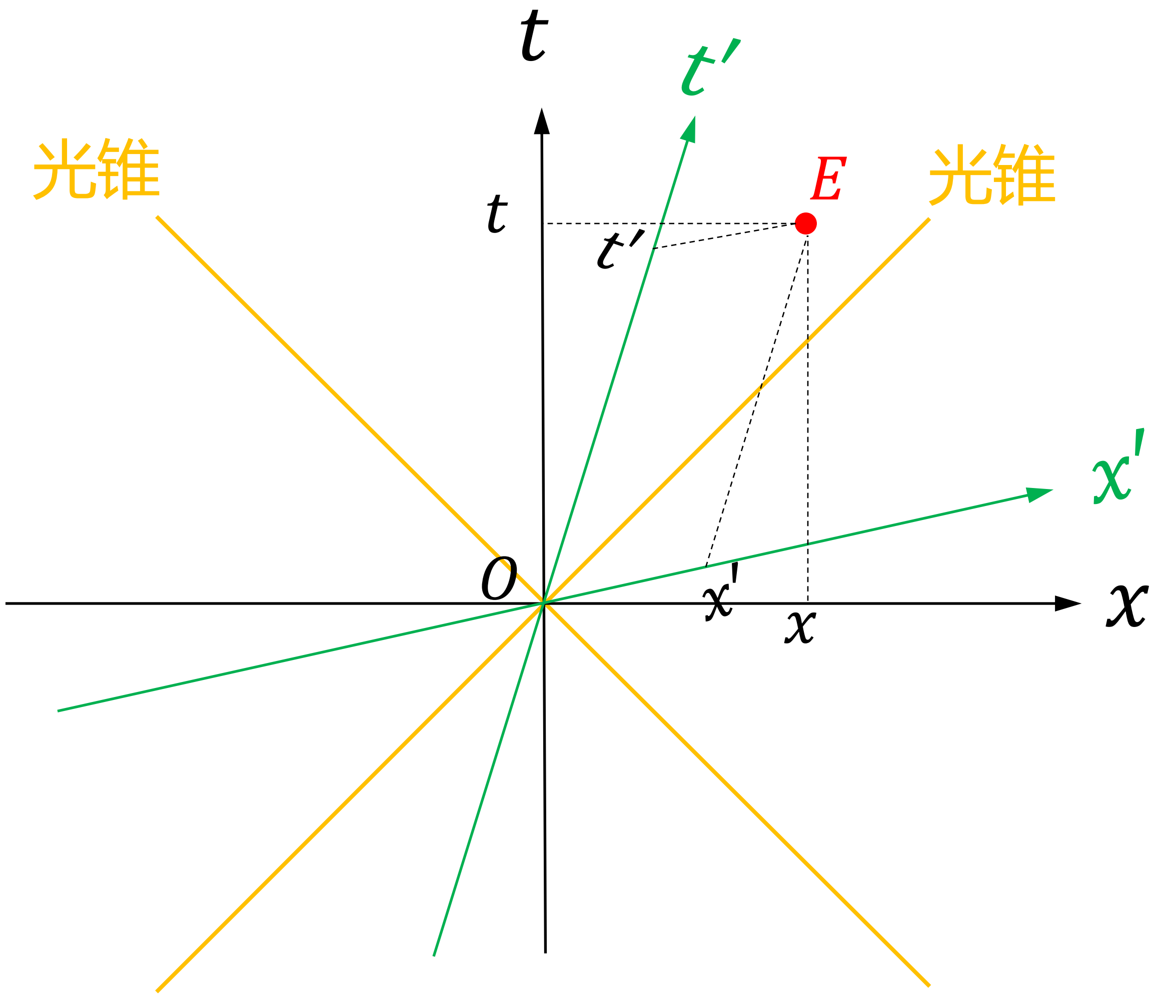
- 匀速直线运动的质点的世界线是直线
- 世界线的斜率：速度的倒数
- 光锥：光的轨迹 —— 斜率永远为$1/c$的直线





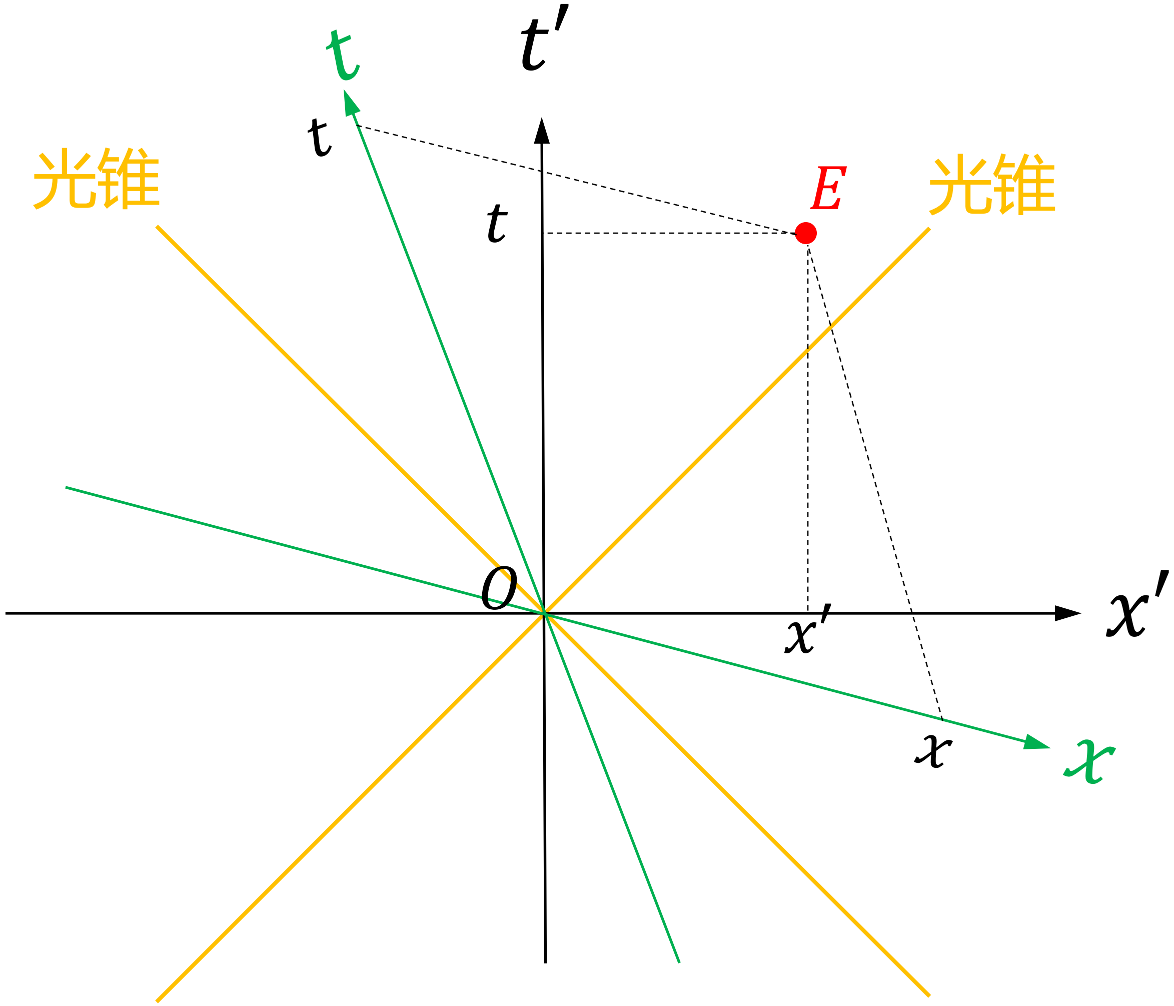
洛伦兹变换：

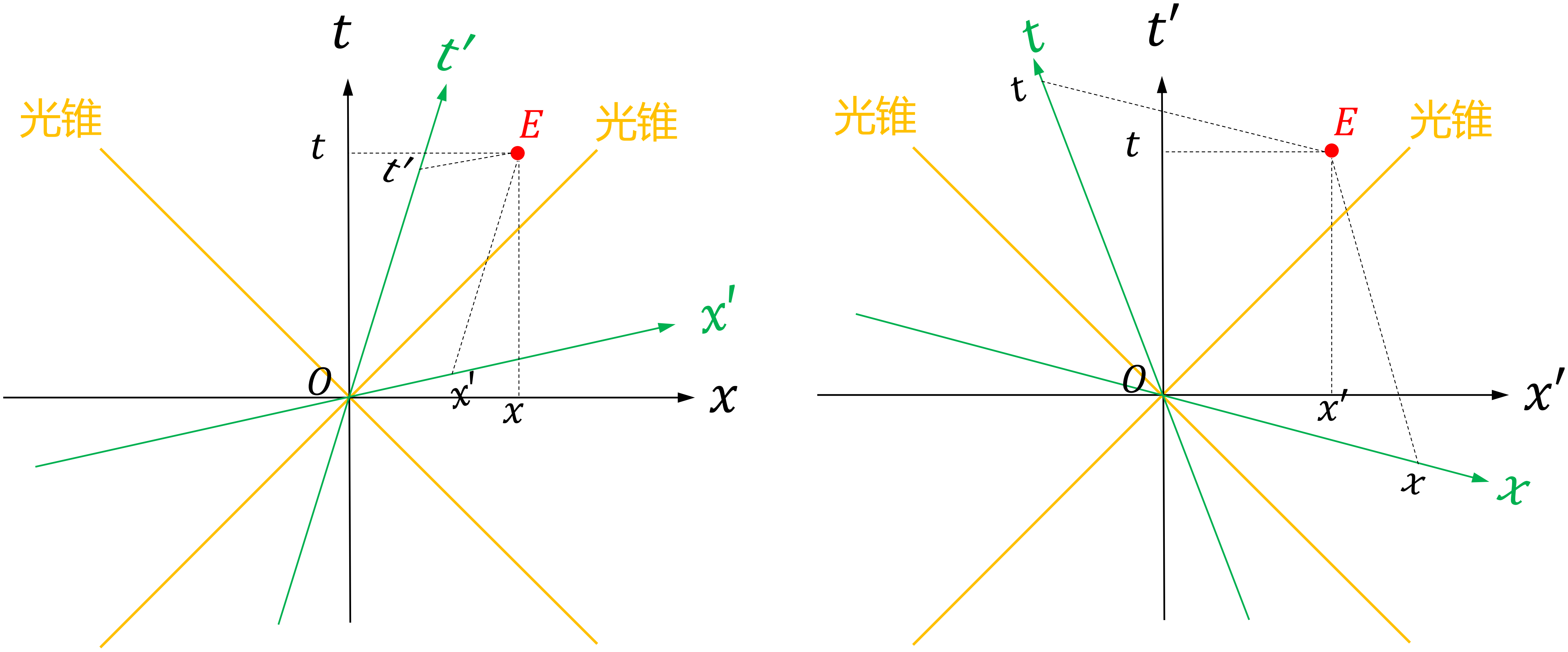
$$\begin{cases} t' = \dfrac{t-(V/c^2)x}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ x' = \dfrac{x-Vt}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$



洛伦兹逆变换：

$$\begin{cases} t = \dfrac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ x = \dfrac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

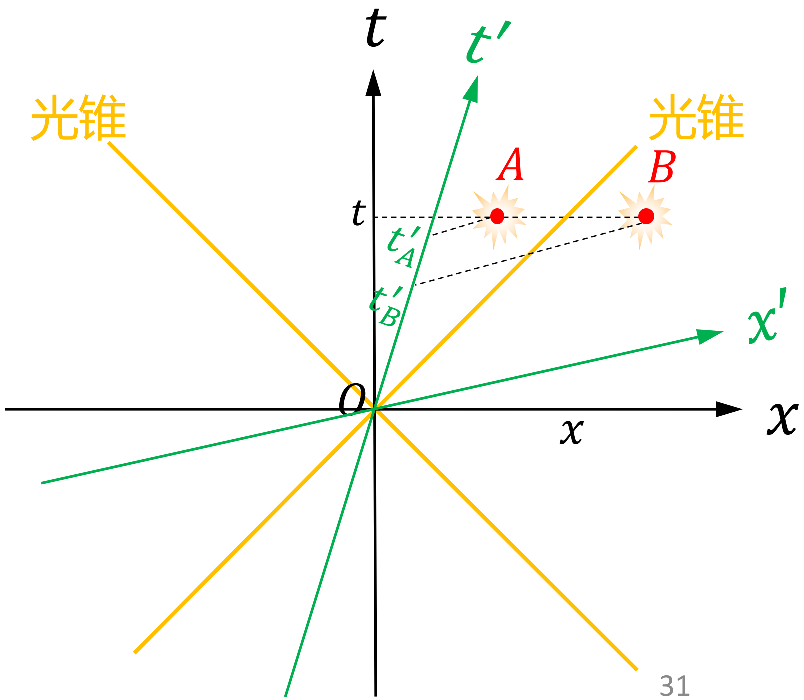



t
t′
光锥
光锥
E
t
t′
O
x′
x
x′
x
t
t′
t
光锥
光锥
E
t
O
x′
x′
x
x

a.同时(simultaneity)的相对性

考虑参考系K中发生在同一时间、不同地点的两个事件A、B，设其空间间隔为Δx。设参考系K'相对于K以V的速度匀速运动。在参考系K'中，两个事件发生的时间间隔为，

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \frac{t_B - \frac{V}{c^2}x_B}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t_A - \frac{V}{c^2}x_A}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{-\frac{V}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

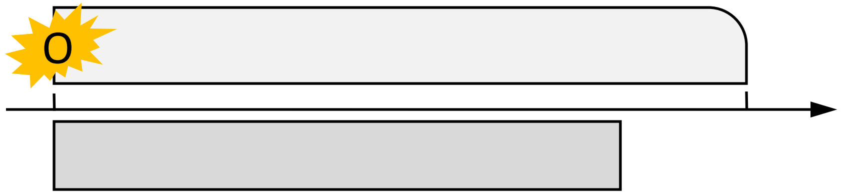


换句话说，在一个参考系同时发生的两个事件，在另一个参考系未必是同时发生的！

【例子】爱因斯坦的火车。一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以$0.6c$匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。火车车尾刚进入站台时车尾发出一道闪光；车头刚出站台时也发出一道闪光。问在列车上的人与站台的人分别看来，这两道闪光是否同时发生?

【例子】爱因斯坦的火车。一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以$0.6c$匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。火车车尾刚进入站台时车尾发出一道闪光；车头刚出站台时也发出一道闪光。问在列车上的人与站台的人分别看来，这两道闪光是否同时发生？

$t = t' = 0$

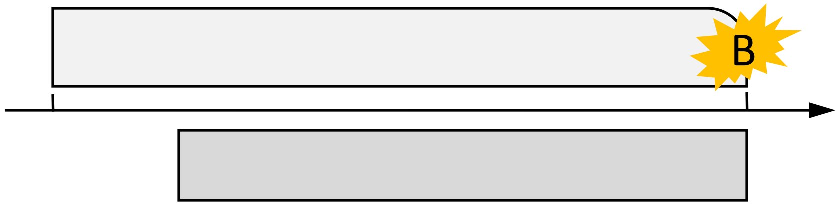


$x = x' = 0$

解：以车尾为原点、车尾闪光为0时刻，建立相对于列车静止的坐标系T。并设相对站台静止的参考系S的时空坐标的原点与T重合，S相对于T以$V = -0.6c$的速度匀速运动。

这样以来，车尾闪光事件O发生在坐标原点。这个问题的难点在于车头闪光事件B，我们只知道发生在两个参考系的$x_B = x'_B = x = 100\text{m}$处，不知道时间。

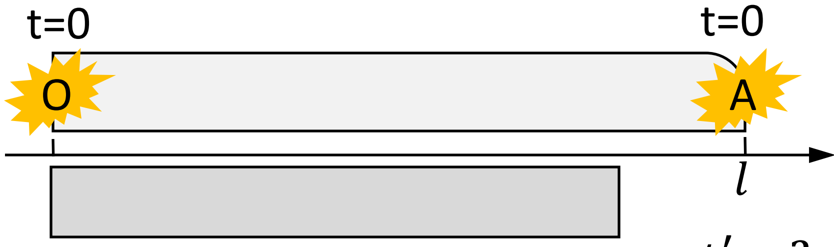
$t = ?, t' = ?$



$x = x' = l$

考虑$t = 0$时刻，车头也发出一道闪光。在T系，这个

【例子】爱因斯坦的火车。一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以$0.6c$匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。火车车尾刚进入站台时车尾发出一道闪光；车头刚出站台时也发出一道闪光。问在列车上的人与站台的人分别看来，这两道闪光是否同时发生？



事件发生的时空坐标为$(0, l)$，在S系，这一事件的坐标(t'_A, x'_A)根据洛伦兹变换为，

$$t'_A = \gamma\left(0 + \frac{\beta l}{c}\right) = \frac{\gamma\beta l}{c}, x'_A = \gamma(l+0) = \gamma l$$

现在再考虑车头闪光事件B。根据刚才的计算，事件A发生时，在参考系S中，车头的坐标是$\gamma l > l$，因此事件B必定发生在这之前：

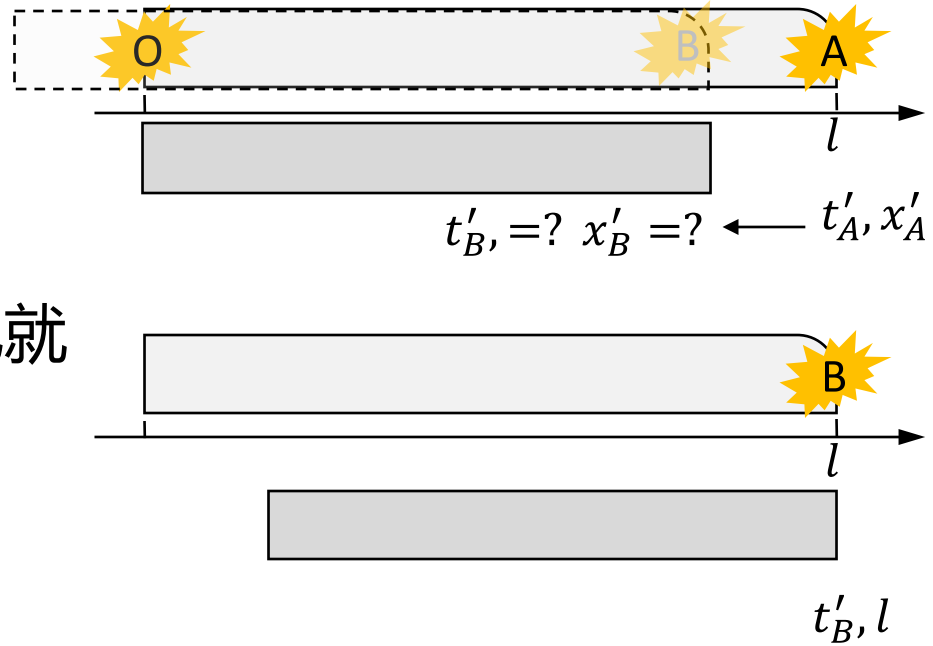
$$t'_B = t'_A - \frac{(\gamma-1)l}{V} = \frac{(\gamma-1)l}{\gamma V} > 0, x'_B = l$$

【例子】爱因斯坦的火车。一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以$0.6c$匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。火车车尾刚进入站台时车尾发出一道闪光；车头刚出站台时也发出一道闪光。问在列车上的人与站台的人分别看来，这两道闪光是否同时发生？

根据洛伦兹变换，这一事件在T参考系坐标为，

$$t_B = \gamma\left(t_B' - \frac{\beta x_B'}{c}\right) = \frac{l(1-\gamma)}{\gamma\beta c} < 0$$

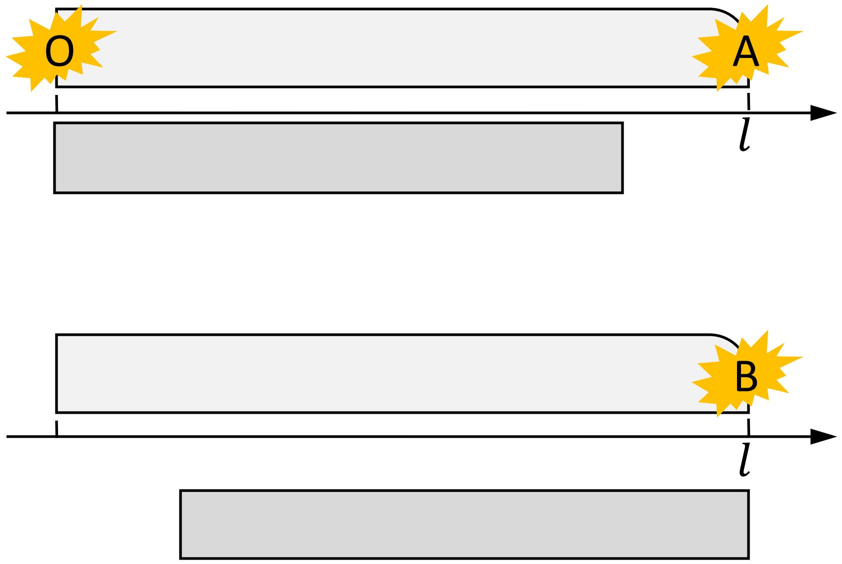
同时作为验证可以得到$x_B = \gamma(x_B' - \beta c t_B') = l$，也就是说，$B$事件在$T$中的坐标确实是车头。



【例子】爱因斯坦的火车。一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以$0.6c$匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。火车车尾刚进入站台时车尾发出一道闪光；车头刚出站台时也发出一道闪光。问在列车上的人与站台的人分别看来，这两道闪光是否同时发生?

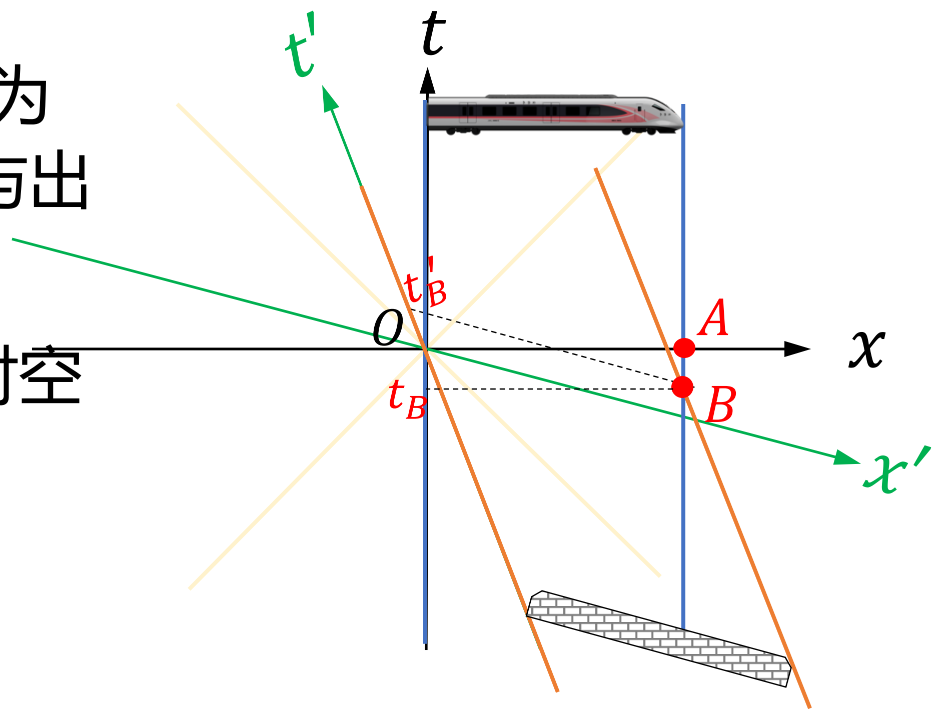
总结一下：

- 列车参考系T：
  - 车尾闪光发生在$t_O = 0$时刻，
  - 车头闪光发生在$t_B = \frac{l(1-\gamma)}{\gamma V} = -0.2l/V$时刻；
- 站台参考系S：
  - 车尾闪光发生在$t_O' = 0$时刻，
  - 车头闪光发生在$t_B' = \frac{l(\gamma-1)}{\gamma V} = +0.2l/V$时刻；



【例子】爱因斯坦的火车。一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以0.6c匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。火车车尾刚进入站台时车尾发出一道闪光；车头刚出站台时也发出一道闪光。问在列车上的人与站台的人分别看来，这两道闪光是否同时发生？

从时空图上来看这个问题：



- 仍以火车为参考系，取车尾与入站相遇的事件为时空坐标原点。车头闪光事件为B，这是车头与出站相遇。
- 火车车头的时空轨迹为：$x_T(t_T)=l$；出站的时空轨迹为：$x'_S(t'_S)=l$; 进行洛伦兹变换，

$$x_S=\gamma(x'_S-\beta ct'_S)=\gamma(l-\beta ct'_S),$$
$$t_S=\gamma(t'_S-\beta x'_S/c)=\gamma(t'_S-\beta l/c)$$

- 车头与站台相遇的条件是：$t_T=t_S, x_S=x_T$

【例子】爱因斯坦的火车。一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以$0.6c$匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。火车车尾刚进入站台时车尾发出一道闪光；车头刚出站台时也发出一道闪光。问在列车上的人与站台的人分别看来，这两道闪光是否同时发生?

即，

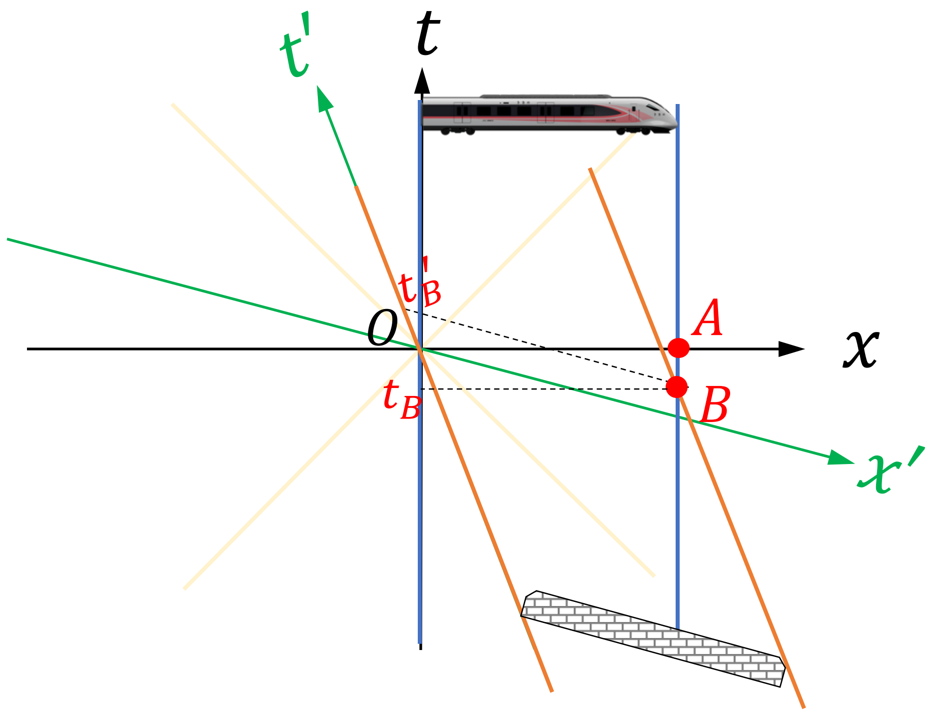
$$\gamma(l-\beta c t_S') = l,$$
$$\gamma(t_S' - \beta l c) = t_S$$

从第一个方程可以得到，

$$t_S' = \frac{(\gamma-1)l}{\gamma\beta c} \equiv t_B'$$

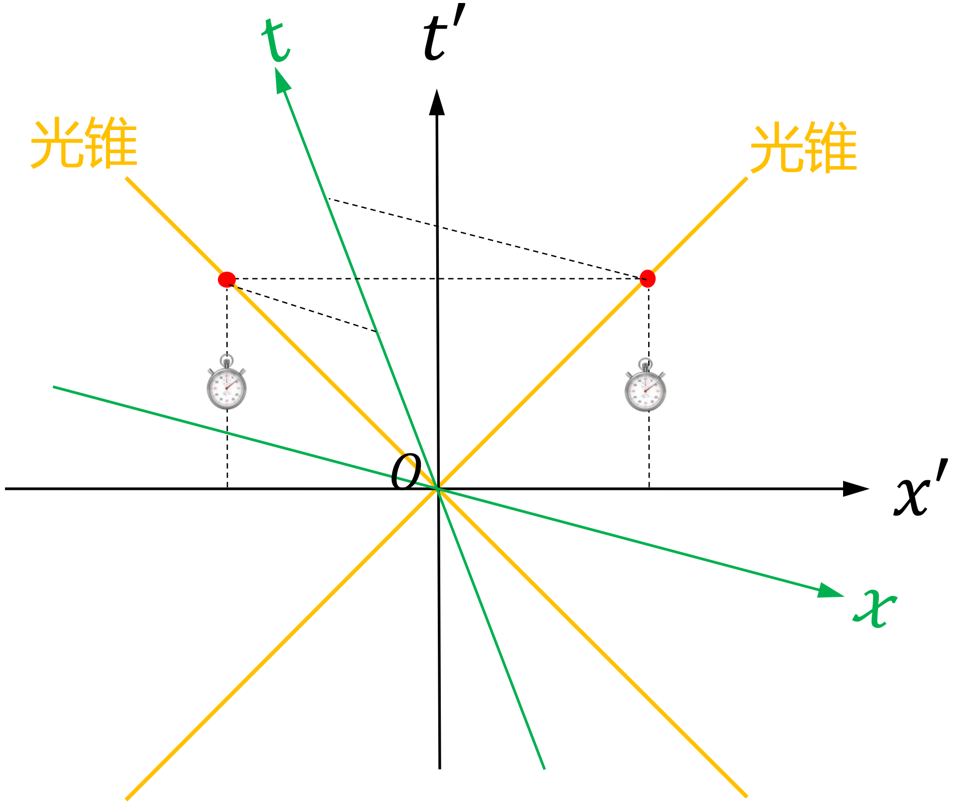
从第二个方程可以得到，

$$t_S = -\frac{(\gamma-1)l}{\gamma\beta c} \equiv t_B$$



- 同时的相对性与我们自身的直觉非常悖逆，原因在于我们所熟悉的牛顿力学具有时间绝对性。这一点会带来一系列问题，需要我们去重新考虑
- **第一个问题是如何校准两个时钟？** 处在同一位置的两个时钟，不管双方是否具有相对运动，都可以通过对读数的方式校准，此后的演化由洛伦兹变换决定。对于处于不同位置的两个时钟，该如何校准?
- 一种办法是我们将时钟送到同一个位置校准之后再拿回去，为了避免洛伦兹变换带来的影响，我们取、还表的速度必须非常慢
- 另一种办法是借助光。在两个时钟的中心位置发射一个光信号，每个时钟收到光信号的时刻定为零时刻(或某个约定值)即可

- 当然，这样的两个时钟在其他参考系看来由于同时的相对性，实际上并没有对准
- 因此对钟只能针对于同一个惯性参考系而言
- 我们以后假定同一个惯性参考系的钟都是对准的



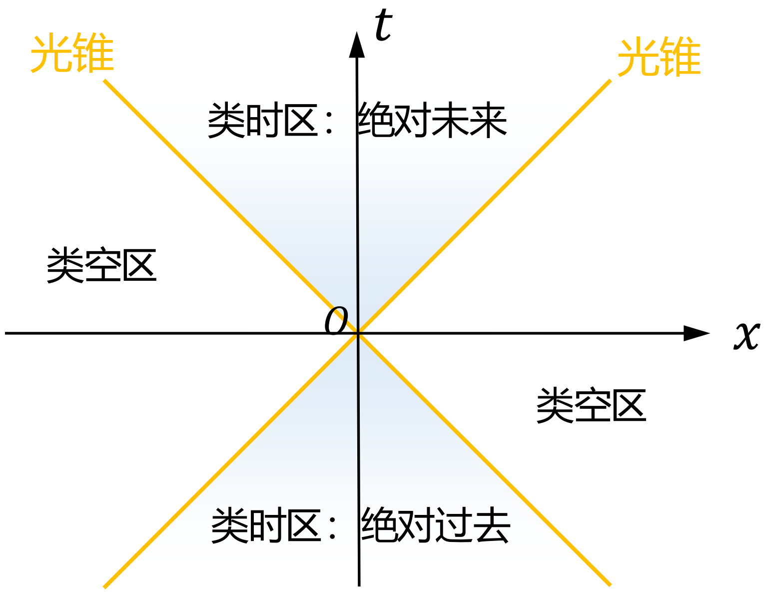
- **另外一个问题是因果性(causality)**
  - 例如，运动员投篮入篮，从时序上讲一定是抛球在先，入篮在后
- 事件的因果性是非常基本的一条自然哲学规律；因果性的丧失对于社会的基本秩序乃至人的理性具有毁灭性的打击
  - 例如，我们的生活建立在一些基本因果逻辑之上：学习好→好成绩；挨打→疼痛；如果因果性彻底丧失，任何手段的测试都会失去意义、任何基本生存本能也会失去意义
- 根据苏格兰哲学家休谟，因果相关的事件必然特定时序，即因发生的时间在先，果发生的时间在后
- 在相对论中，由于同时的绝对性的丧失，导致事件的时序不再确定。根据洛伦兹变换，事件的时间间隔满足变换，

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x\right) = \gamma\Delta t\left(1 - \frac{\beta\Delta x}{c\Delta t}\right)$$

其中，若K参考系中的事件具有时序$\Delta t > 0$，则$\Delta t' > 0$不一定仍然成立; 但是假如$\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| \leq c$，括号里的部分恒为正, $\Delta t' > 0$即时序不变

- 换句话说，因果相关的事件之间的时空间隔须满足$\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| \leq c$否则因果律有被违背之虞；这样的事件叫做类时分离的
- 两个事件之间的相互作用需要通过信息或能量传递。因此类时分离的要求，相当于是要求信息和能量传播的速度不能大于光速
- 从相对论动力学将会看道，我们永远无法将有限质量的物体加速到超过光速，因此相对论物理仍然保持了事件的因果性

- 所有与原点O的时空间隔$c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{r}^2 > 0$的事件构成的区域叫做类时区(time-like region)
  - 类时区的点与原点具有确定的时序，两者可以建立因果关系
  - 其中$t > 0$的事件组成的区域叫做绝对未来；$t < 0$的事件组成的区域叫做绝对过去未来
- 所有与原点O的时空间隔$c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{r}^2 < 0$的事件构成的区域叫做类空区(space-like region)
- 所有与原点O的时空间隔$c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{r}^2 = 0$的事件构成的区域叫做光锥(light cone)

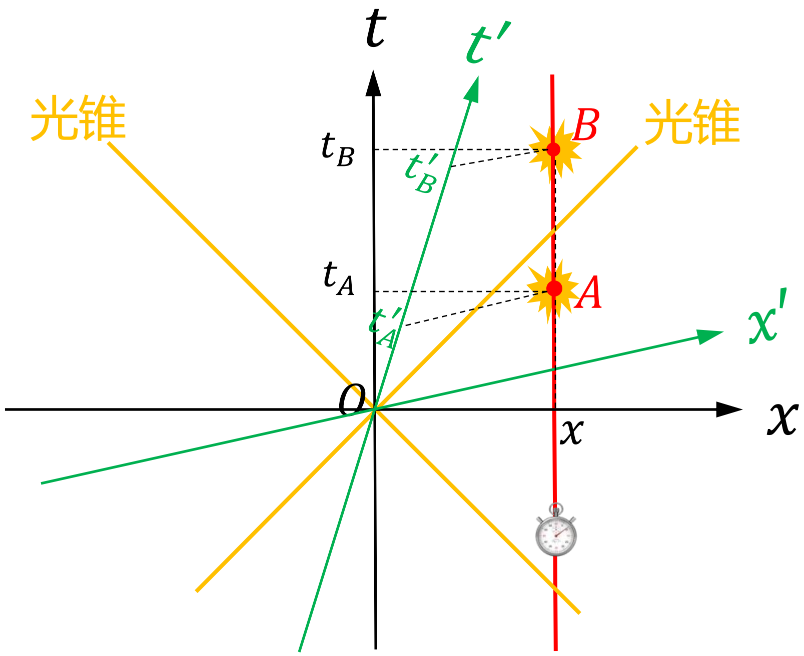


b. 时间膨胀 (time dilation)

- 考虑参考系K中发生在同一地点不同时间的两个事件（例如一个静止的时钟的两次读数），设其时间间隔为Δt。设参考系K'相对于K以V的速度匀速运动。在参考系K'中，两个事件的时间间隔为，

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \frac{t_B - \left(\frac{V}{c^2}\right)x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t_A - \left(\frac{V}{c^2}\right)x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$



换句话说，运动的时钟走的慢一些（钟慢）

【例子】宇宙射线在大气层顶部(~10 km)产生接近光速运动的缪子。已知静止的缪子的寿命为$\tau = 2 \times 10^{-6}\mathrm{s}$。按照牛顿力学，缪子在大气中最多能飞行$d = c\tau \sim 600\ \mathrm{m}$，无法穿过大气层到达地面。而实际中，我们在地面上能观测到缪子（这些缪子对于进化起到重要的作用）。原因在于相对论的时间膨胀效应，高速飞行的缪子的寿命远大于其静止时的寿命。

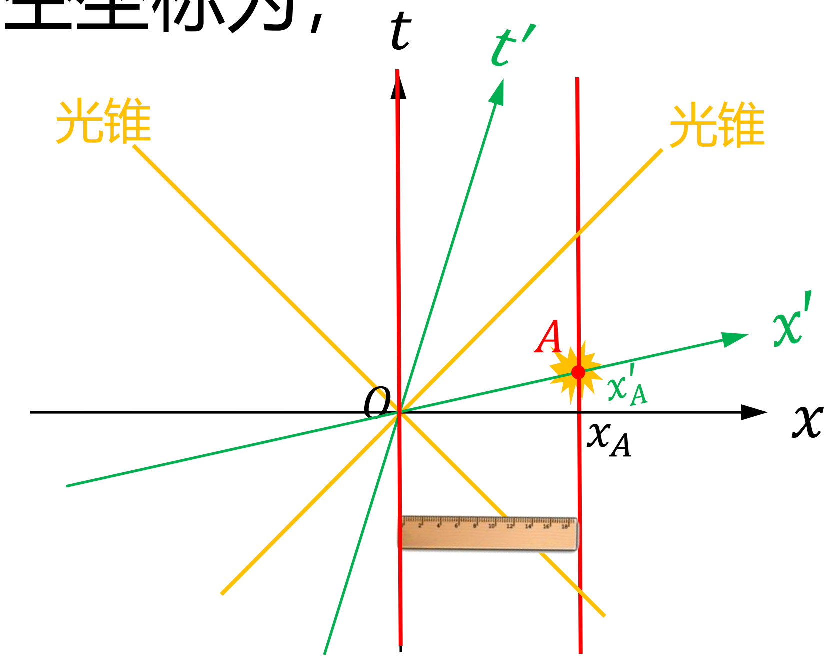
c. 长度收缩 (length contraction)

- 考虑参考系K中静止的两个质点（例如一把静止的直尺两端），设其空间间隔为Δl。设参考系K'相对于K以V的速度匀速运动。现在考虑参考系 K' 中测量这两个质点之间的距离。考虑 $t'=0$ 时刻，一个质点位于原点，另一个质点A在K'系的时空坐标为，

$$t'_A=\gamma\left(t_A-\frac{\beta}{c}x_A\right)=0\Rightarrow t_A=\frac{\beta\Delta l}{c}$$

$$\Delta l'=x'_A=\gamma(x_A-\beta c t_A)=\sqrt{1-\beta^2}\Delta l$$

换句话说，运动的尺子会短一些（尺缩）。



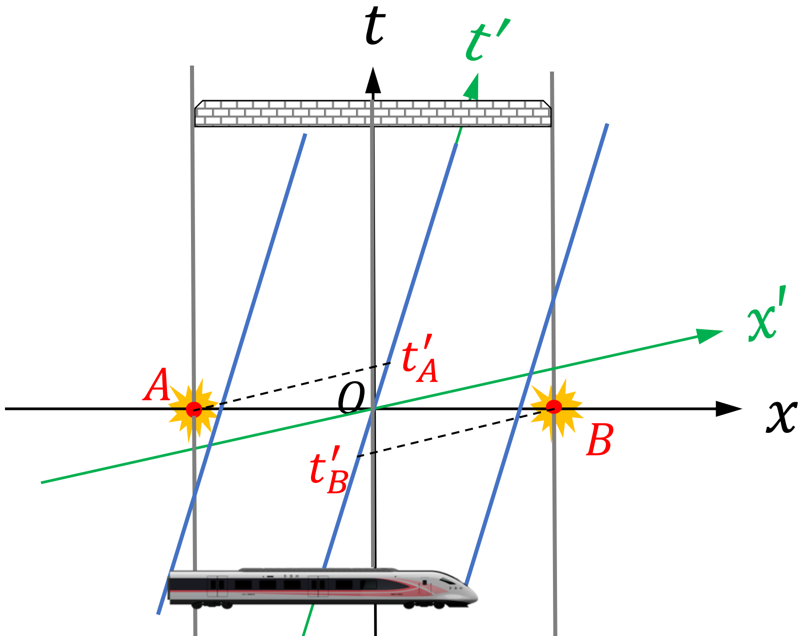
- 注意距离的测量必须是同时的，也就是说，测量距离时，尺子两端需要定义在同一时刻

【例子】火车佯谬。一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以$0.6c$匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。当火车中点与站台中点对齐的瞬间，站台进出站两端同时发出两道垂直于火车的闪电。

站台上的人认为，火车由于相对论尺缩效应变短为80米，因此闪电不会打在火车上。火车上的人认为，站台相对于火车运动，由于相对论效应发生尺缩，变短为80米，因此闪电会打在火车上。谁的分析是正确的?

【例子】火车佯谬。一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以$0.6c$匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。当火车中点与站台中点对齐的瞬间，站台进出站两端同时发出两道垂直于火车的闪电。

分析：首先两种说法中尺缩效应的分析都是对的。但是闪电是站台发出的，因此站台参考系才可以定义闪电的同时性。换句话说，火车看到的闪电并不是同时发生的。因此站台的分析是正确的。



§4. 相对论动力学

- 经典力学的动力学定律为牛顿三大定律
- 相对论与牛顿第一定律(惯性定律)相容
- 牛顿第二定律将物体运动状态的改变归因为外力，即给出了外力与加速度之间的关系；但是这个关系在相对论中需要重新考虑，原因在于：
  - 在牛顿力学中，加速度具有绝对性，即根据伽利略变换，不同惯性参考系中的加速度是相同的；而相对论将伽利略变换替换成了洛伦兹变换
- 这一节我们首先推导相对论速度和加速度变换公式，并在此基础上重新考虑牛顿第二定律在相对论中的推广

a. 相对论速度变换

- 设K和K'为两个惯性参考系，其中K'相对于K以V的速度沿x方向运动。若质点在K中的坐标为$(t,\vec{r})$，跟据速度的定义$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$；类似地质点在$K'$中的速度为$\vec{v}'=\frac{d\vec{r}'}{dt'}$，其中$(t',\vec{r}')$为其在$K'$中的坐标
- 质点在K'中的坐标可由洛伦兹变换得到：

$$\begin{cases} t'=\gamma\left(t-\frac{\beta}{c}x\right) \\ x'=\gamma(x-\beta ct) \\ y'=y \\ z'=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt'=\gamma\left(dt-\frac{\beta}{c}dx\right) \\ dx'=\gamma(dx-\beta cdt) \\ dy'=dy \\ dz'=dz \end{cases}$$

根据定义可以得到速度变换公式以及逆变换公式：

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2} \\ v'_y = \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{v_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - Vv_x/c^2} \\ v'_z = \dfrac{dz'}{dt'} = \dfrac{v_z\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - Vv_x/c^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v'_x + V}{1 + Vv'_x/c^2} \\ v_y = \dfrac{v'_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + Vv'_x/c^2} \\ v_z = \dfrac{v'_z\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + Vv'_x/c^2} \end{cases}$$

- 光速不变：若$v_x = c$,则$v_x' = c$；类似地，若$v_y = c, v_x = 0$,则$v_y' = c\sqrt{1 - V^2/c^2}, v_x' = V \Rightarrow v' = c$
- 光速为速度合成的上限：若$V < c, v_x' < c$，则

$$\left(1 - \frac{v_x'}{c}\right)\left(1 - \frac{V}{c}\right) > 0 \Rightarrow v_x = \frac{v_x' + V}{1 + V v_x'/c^2} < c$$

- 矢量形式：

$$\vec{v}' = \frac{\vec{v} + (\gamma - 1)\left(\hat{\beta} \cdot \vec{v}\right)\hat{\beta} - \gamma\vec{\beta}}{\gamma\left(1 - \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{v}}{c}\right)}$$

- 加速度变换：

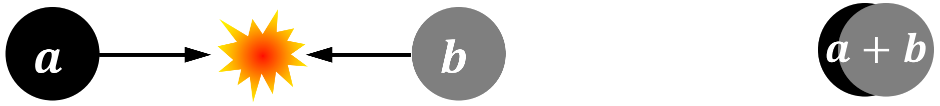
$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{\vec{a} + (\gamma - 1)\left(\hat{\beta} \cdot \vec{a}\right)\hat{\beta} + \gamma\left(\vec{\beta} \cdot \vec{a}\right)\vec{v}'/c}{\gamma^2\left(1 - \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{v}}{c}\right)^2}$$

可见，加速度不再不变。相对应的，牛顿第二定律在洛伦兹变换下不再不变

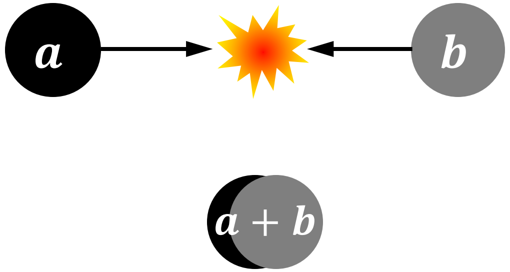
b. 相对论动量

- 能量与动量与时空平移对称性有关，因此是比动力学定律更基本的量
- 在相对论中，时空平移对称性仍然存在，因此能量与动量仍然是守恒的
- 首先检查动量守恒与相对论速度变换是否相容
- 考虑两个粒子对心碰撞的情况。设在参考系K，两个质量为m的全同粒子a、b以大小相等方向、相反的速度v进行对撞；总动量为0。对撞后两个粒子黏在一起，在参考系K保持静止

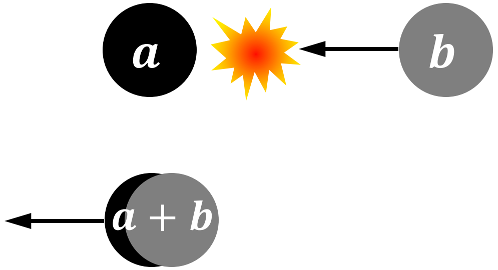
参考系K:



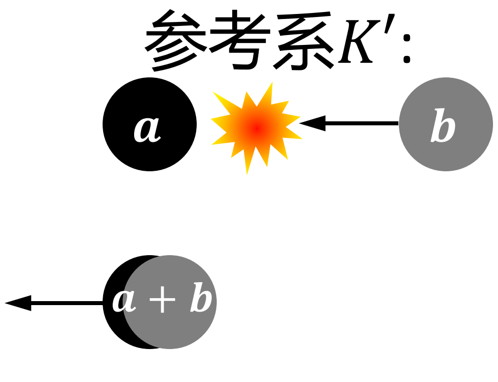
参考系K:



参考系K':



- 假设K'以v的速度相对于K运动，现在在K'中考察整个过程
- 粒子a在K'中静止；粒子b的速度为，



$$v_b' = -\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$$

- 对撞过后，两个粒子黏在一起。根据总动量守恒，可以得到黏在一起的ab粒子的速度，

$$mv_b' = -\frac{2mv}{1+\frac{v^2}{c^2}} = 2mv_{ab}'$$

$$\Rightarrow v_{ab}' = -\frac{v}{1+v^2/c^2}$$

- 另一方面， v'_{ab}也可以通过速度变换得到，考虑到$v_{ab}=0$；可以得到，

$$v'_{ab}=-v$$

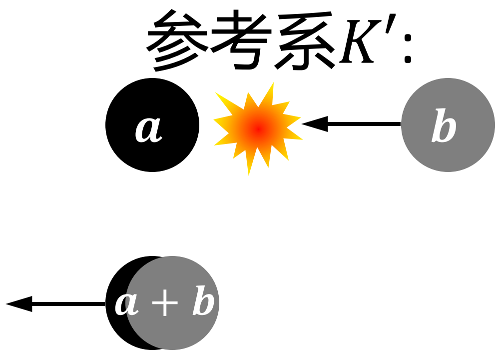
- 这个结果与用动量守恒求的的结果矛盾！这说明，速度变换与动量守恒是不相容的。
- 为此我们需要修改动量的定义。类似地，可以利用弹性散射得到动能也需要修改。
- 假定动量与速度满足关系，

$$\vec{p}=M(v)\vec{v}$$

其中，$M(v)$是速度的光滑函数。重新考察上面的过程。在K'中根据动量守恒，

- 粒子a在K'中静止；粒子b的速度为，

$$v_b' = -\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$$



- 对撞过后，两个粒子黏在一起。根据总动量守恒，可以得到黏在一起的$a+b$粒子的速度，

$$M(v_b')v_b' = M_{ab}(v_{ab}')v_{ab}'$$

这里$v_{ab}' = -v$可以根据速度变换求得。

- 需要注意的一点是$a+b$粒子的质量M_{ab}。在牛顿力学里质量是守恒的，因此$M_{ab} = 2m$。在这里如果我们也假设动质量守恒，则有$M_{ab} = M(v_b') + M(0)$，

这样以来可以得到，

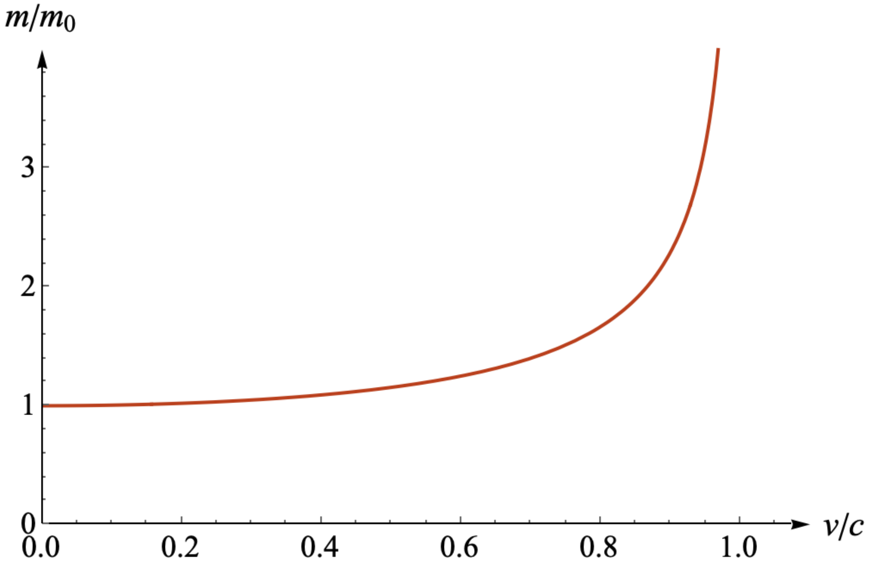
$$M\left(\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}\right)\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}=\left(M\left(\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}\right)+M(0)\right)v$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}\right)=M(0)\frac{1+v^2/c^2}{1-v^2/c^2}$$

做变量代换可以得到：

$$M(v)=\frac{M(0)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- $M(0)$叫做粒子的静止质量(rest mass)
- 动质量



$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

随着粒子速度增加而增大。当粒子速度接近光速时，动质量趋近于无穷大。

- 相对论动量：

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- 动质量的洛伦兹变换，

$$m(v') = m(v)\gamma_V\left(1 - \vec{\beta}_V \cdot \frac{\vec{v}}{c}\right)$$

此处，$\beta_V = \frac{V}{c}, \gamma_V = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_V^2}}$，$V$为惯性参考系之间的速度，要与粒子速度区分

- 相对论动量的洛伦兹变换

$$\vec{p}' = \vec{p} + (\gamma_V - 1)\big(\hat{\beta} \cdot \vec{p}\big)\hat{\beta} - \gamma_V\vec{\beta}\gamma m_0$$

动量的变换与坐标变换很类似

c. 相对论动力学与相对论动能

- 牛顿第一定律(惯性定律)在相对论中仍然成立
- 牛顿第二定律将运动状态的改变定义为力；具体而言，牛顿将运动状态定义为动量。上一节，我们重新定义了相对论动量，使得得动量守恒仍然成立。有了动量的合理的定义，现在考虑牛顿第二定律，仍然将动量的改变定义为力，

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$$

这样以来，牛顿第二定律与动量守恒仍然是相容的

- 牛顿第三定律：本质上是动量守恒，在相对论中仍然成立

- 注意，在相对论中，信息和能量传播的速度是有限的，因此这对于相对论力的形式提出了限制。在相对论力学中更常用的形式是势能的概念，并且势能的来源是场，而不是直接来自粒子（当然，场是由粒子产生的)
- 例子：电磁力(洛伦兹力)

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

取决于电磁场$\vec{E}, \vec{B}$，而电磁场由电荷与电流产生(麦克斯韦方程组)

- 例子：万有引力是超距作用，与相对论天然违背

- 冲量定理：在相对论中仍然成立
- 动能定理：与机械能守恒有关。能量守恒来自于时间平移对称性，因此在相对论中仍然成立。但由于我们修改了牛顿第二定律，必然需要修改动能的定义。考虑一个质点在力的作用下从静止加速到速度v，

$$W = \Delta T = T - T_0$$

其中，外力做功为$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$，下面利用牛顿第二定律计算相对论动能，

$$\Delta T = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int \frac{d}{\cancel{dt}} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \cdot \vec{v} \cancel{dt}$$

$$\int g df = gf - \int f dg$$

- 下一步利用分部积分，

$$\Delta T = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \int \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot d\vec{v} = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{2}\int \frac{m_0 d v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{c^2}{2}\int \frac{m_0 d\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$

- 初始时刻动能为0，因此这里得到的表达式是速度为v的质点的相对论动能：

$$T = m(v)c^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 = (\gamma - 1)m_0c^2$$

- 在质点速度比较低时，做泰勒展开可以得到牛顿力学的动能，

$$T \approx \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + \cdots$$

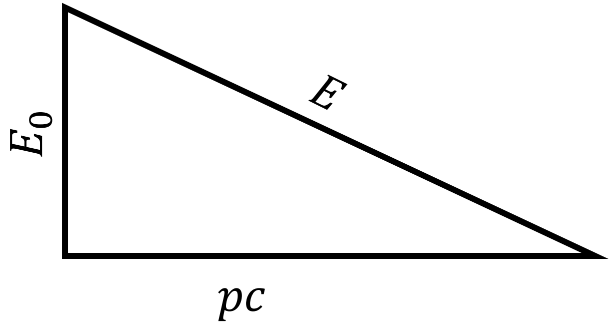
- 还可以定义静止能量$E_0 = m_0c^2$以及总能量$E = E_0 + T = m(v)c^2$，从这个角度讲，动质量守恒本质上是总能量守恒，即在相对论中，静止质量不守恒，总能量守恒

- 质能关系：

$$E = m(v)c^2$$

- 容易验证，能量与动量之间满足，

$$E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2$$



- 角动量：相对论角动量可以直接从牛顿力学推广，

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

角动量定理：

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

- 质点系动量：

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$$

但是质心定理不再成立：

$$M\frac{d\vec{r}_{\mathrm{cm}}}{dt} \neq \vec{p}$$

其中$M = \sum_i \gamma_i m_i$为总质量，$\vec{r}_{\mathrm{cm}}$为质心坐标

$$\vec{r}_{\mathrm{cm}} = \frac{\sum_i \gamma_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i \gamma_i m_i}$$

- 虽然无法定义质心参考系，但仍然可以定义动量中心(center of momentum)速度，

$$\vec{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{\sum_i \gamma_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i \gamma_i m_i}$$

- 质点系动能：

$$T = \sum_i (\gamma_i - 1) m_i c^2$$

但是柯尼希定理不再成立，亦即，质心在相对论理论中不再具有特殊的地位

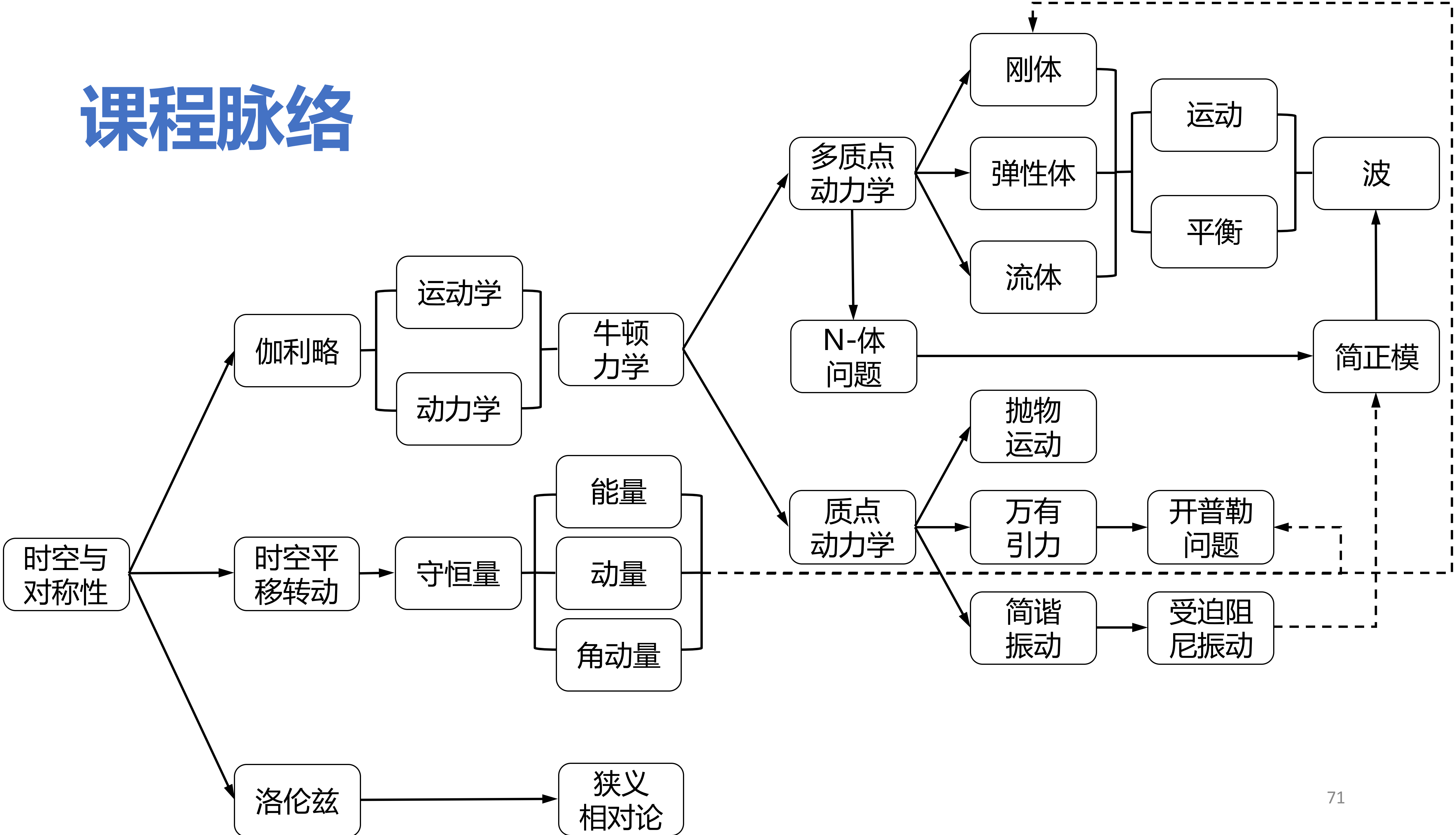
d. 时空与引力

- 广义不变性原理
  - 历史发展：马赫原理
  - 动力学方程在任何参考系形式不变 → 局域惯性参考系（狭义相对论）→ 牛顿定律
  - 数学工具的推广：（狭义相对论）四维矢量、（广义相对论）微分几何

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \to \quad f^{\mu} = \frac{dp^{\mu}}{d\tau} \quad \to \quad f^{\mu} = \frac{D}{D\tau} p^{\mu}$$

- 引力与时空本身的几何性质
  - 等效原理：引力质量与惯性质量
  - 时空弯曲、爱因斯坦场方程

课程脉络


时空与对称性
伽利略
运动学
动力学
牛顿力学
多质点动力学
刚体
弹性体
流体
运动
平衡
波
N-体问题
简正模
质点动力学
抛物运动
万有引力
开普勒问题
简谐振动
受迫阻尼振动
时空平移转动
守恒量
能量
动量
角动量
洛伦兹
狭义相对论