

第三章：质点动力学

§ 1. 牛顿三大定律

牛顿在《自然哲学的数学原理》一书中，提出了运动的基本原理 (Newton's laws of motion) 如下：

第一定律：每个物体将保持静止或匀速直线运动，除非有外力改变其运动状态。

第二定律：运动状态（动量）的改变，正比于所加外力的大小，并发生在所加外力的直线方向上。

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

第三定律：反作用与作用大小相等、方向相反；两个物体之间的相互作用永远相等、方向相反。

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

1. 惯性定律 牛顿第一定律又叫做惯性定律 (law of inertia)。牛顿指出，惯性是物质的抵抗能力，即由物质构成的物体具有保持其静止或匀速直线运动状态的趋势。惯性定律首先是由伽利略发现的，因此又叫做伽利略惯性定律 (Galileo's law of inertia)。伽利略通过研究斜面运动指出，如果不受阻力的影响，即不考虑改变运动的特殊情况，物体将永远保持水平的匀速直线运动。而若要改变这一运动状态，则需要外界的影响。牛顿第一定律澄清了外界影响是改变物体运动状态的原因而非维持物体运动状态的原因。

亚里士多德：不推不动（没有合理分离研究对象，本质上在研究一个非常复杂的问题）

伽利略的推演过程：

- 自然科学研究方法：不研究引起运动的隐藏原因，仅考虑描述运动的客观事实。
- 提出假设、逻辑推理、实验检验
- 伽利略提出瞬时速度的概念，并假定： $v \propto t$ ，并最终得到， $v = gt, s = \frac{1}{2}gt^2, v^2 = 2gs$ 。从而得到了加速度的概念。这些研究结果可以推广到光滑斜面的运动。
- 伽利略进一步假定：物体若以等同于落体速度 v 反向运动，可以回复到相同的下落高度。【反射对称】

- 伽利略进一步考虑：一个物体沿光滑斜面下滑到底部，再沿着不同的斜面返回。如果物体返回到不同的高度，则可以认为，不同高度的下落的速度是相同的。这与 $v^2 \propto s$ 相违背。因此物体沿着不同斜面下落的速度仅与下落高度相关。【逻辑推理】
- 伽利略利用钟摆对上面的假设进行了检验。
- 伽利略进一步考虑：考虑一个物体沿着光滑斜面 AB 下滑到底部，再沿着不同的斜面 BC 、 BD 、……返回。物体将回复到相同的高度。当斜面越平缓时，物体到静止所花的距离和时间越长。当斜面变成水平面时，物体运动的时间和距离将变成无限长。【逻辑推理】

2. 惯性 惯性的本质是什么？有人认为，惯性是物质的基本属性（通过质量来度量），惯性定律与牛顿第二定律相互独立。也有人认为，惯性定律是牛顿第二定律的部分表述。

我们上一节看到，运动是相对的，与参考系的选择有关。若在 K 参考系中，物体的运动满足惯性定律，在相对于 K 系均匀运动的 K' 系中，

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{d} \Rightarrow \vec{a}' = \vec{a} + \frac{d}{dt}\vec{u} = \frac{d}{dt}\vec{u}$$

可见，只有当 $\frac{d}{dt}\vec{u} = 0$ 时，惯性定律才在 K' 系满足。这样的两个参考系是具有相对匀速直线运动的。我们将满足惯性定律的参考系叫做惯性参考系。可见，惯性参考系是一系列相互之间匀速直线运动的参考系。那么什么情况下惯性参考系是存在的？几何研究表明，如果时间是均匀的、空间是均匀及各向同性的（四维仿射空间），惯性参考系是存在的。因此，惯性定律以及牛顿定律也是对时空性质的描述。**牛顿第一定律（惯性定律）操作性地定义了惯性参考系，只有在惯性参考系牛顿力学定律才成立。**

对描述日常现象而言，地球是个近似的惯性参考系。在研究天体运动中，可以以远处恒星作为惯性参考系。随着测量精度的提高，我们可以采用不同的参考系作为惯性系。然而，现代物理观测表明，我们的宇宙并不是均匀且各向同性的时空——换句话说，真正的惯性系并不存在。

与牛顿第一定律不符合的情况：

- 弯曲时空中的测地线运动
- 电磁波、物质波
- 自由夸克的运动

3. 质量 牛顿用动量 $\vec{p} = m\vec{v}$ 来度量物体的运动，其中， \vec{v} 是物体的速度，通过长度与时间测量得到， m 是物体的质量 (mass)。质量是物体的内禀属性，与物体的机械运动状态无关。

- 牛顿将质量定义为物质含量的多少，并表示为体积乘以密度。然而密度在测量上定义为单位体积的质量。因此，这是一个循环定义【除非我们有其他方法来定义质量或密度】。牛顿的描述仅表明：质量是物体的内禀属性，与物体的机械运动状态无关。另外一个隐含的条件是，质量是可以相加，也就是说，由多个物体组成的物体的质量等于其组分质量之和。这一点有时候又被称为牛顿第零定律、拉瓦锡质量守恒定律（1777年）。
- 结合牛顿第一、第二定律，质量定量度量了物体惯性的大小。现代物理研究表明，惯性与时空均匀性和各向同性有关。同样地，质量也起源于物体在时空变换下的表现。
- 质量可以通过牛顿第二定律测量。在相同的力的作用下，通过测量不同物体的加速度，根据牛顿第二定律，可以得到其质量的比值：

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

相同的力，可以通过唯象物理规律得到，例如相同压缩程度的弹簧，也可以通过牛顿第三定律得到。

- 利用牛顿第二定律以及自由落体理论及相关实验，还可以通过测量重力的方法测量质量。这是因为重力加速度 g 与物体质量无关，仅与高度有微弱的依赖关系（可以通过单摆测量）。这也是牛顿的初衷，因为牛顿时代，密度是通过天平（重力）来定义的。
- 质量的现代定义：
 - 依赖于平直时空中的时间、空间平移不变性
 - 粒子物理——粒子不变质量 $m = \sqrt{E^2/c^4 - p^2/c^2}$ （相对论），需要测量动能 E （量能器）和动量 p （磁谱仪）
 - 化学——原子质量

4. 力 牛顿第一定律将改变物体运动状态的外因抽象为力。牛顿第二定律则定量给出了外力与运动状态改变的关系。

力：象形。甲骨文字形，象耒形，有柄有尖，用以翻地。用耒表示执耒耕作需要花费力气。“力”是汉字部首之一。本义：体力，力气。《说文》。筋下曰：肉之力也。二篆为转注。筋者其体，力者其用也。

例子：力大无穷

Force: (Oxford) strength or energy as an attribute of physical action or movement. : (Merriam-Webster) strength or energy exerted or brought to bear : cause of motion or change : active power.

Examples: the forces of nature. Air force. force of the blow.

力是某个主体能力的效能。换句话说，力不是实施的主体，或者说力本身不是造成改变的原因。并且，力是用来刻画实施主体能力的，而不是用来刻画客体-被改变对象的。

- 在牛顿之前，尤其是伽利略以前，运动状态的改变被认为是外界物质的影响（例如，笛卡尔认为以太的涡旋是造成天体做圆周运动的原因）。**牛顿将物体运动状态的改变抽象为外力，不对背后隐藏的原因做进一步的假设 *Hypotheses non fingo***。牛顿的定义可以定量测量、可以通过数学与逻辑推演来预测物体的运动，这是牛顿、伽利略科学方法的集中体现。

是否所有运动状态的改变都可以抽象为力？

天体运动（引力）、落体（重力）、阻力作用下小球停止滚动、体育运动、化学中分子形成（原子力——范德瓦尔斯力、库仑力）、几乎所有机械、人的运动？

- 量子纠缠：2022 年诺贝尔奖
- 电磁波的传播不需要电磁力（电磁感应）对比机械波的传播
- *Norton's dome*
- 流体中的运动，与物体形状、运动状态有关，甚至与流场状态有关

- 牛顿指出，力是个有大小和方向的量，它的合成满足平行四边形法则。换句话说，力是个矢量。
物体所受的力，等于其各个部分受力之和 → 分割物体，直到质点模型适用，力的形式变得简单（微元方法）→ 还原论。
- 力的测量来自于牛顿第二定律。换句话说，对于同一的物体而言，可以通过测量其加速度来确定作用起其上的外力。特别地，一旦确定了物体质量的单位，外力的值可以通过测量加速度得到。不需要额外确定外力的标准。

5. 牛顿第二定律

- 力与加速度的关系： $\vec{F} = m\vec{a}$
 - 为什么不定义为： $\vec{F} = m\vec{v}$ ？与牛顿第一定律不符合（没有外界干涉的情况下，物体可以保持匀速运动）
 - 为什么不定义为： $\vec{F} = m\dot{\vec{a}}$ ？“外力”为 0 时，质点运动状态可以改变，即无法完全刻画外界的影响。落体、弹簧
 - 为什么不定义为 $F = ma^3$ 或者 $F = ma^{2.5}$ ——完全可以，但是不好用，动能定义（守恒律）用起来不方便

- 质点运动的描述

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \vec{v}(t) \\ m\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \vec{F}, \\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0, \vec{v}(0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

任何一个瞬间，外力能否决定质点的位置和速度？

例子：开车变绿灯有人猛踩油门，是否能让你更快？加速度与速度是独立的

已知外力 \vec{F} ，质点运动状态是否存在且唯一？显然不唯一，例如质量相同的落体。缺少：初始位置和初始速度信息。如果已知初始位置和初始速度和外力，质点运动状态是否存在且唯一？例如，是否需要知道更高阶的导数，如 $\vec{a}, \dot{\vec{a}}, \dots$

- 牛顿决定论 (Newtonian determinism)，又叫做经典决定论：只要确定了初始条件，体系的状态由动力学方程（牛顿方程）唯一确定。

拉普拉斯 1814 年在其作品《关于概率的哲学随笔》 (*Essai philosophique sur les probabilités*) 中提到，“假若一位智者会知道在某一时刻所有促使自然运动的力和所有组构自然的物体的位置，假若他也能够对这些数据进行分析，则在宇宙里，从最大的物体到最小的粒子，它们的运动都包含在一条简单公式里。对于这位智者来说，没有任何事物会是含糊的，并且未来只会像过去般出现在他眼前。”

这样的智者被后人称为拉普拉斯妖 (*Laplace's Demon*)。哲学上的引申：自由意志是否存在？

- 牛顿决定论的数学基础：柯西-利普希茨定理

柯西-利普希茨定理：对于一阶微分方程

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), t)$$

如果函数 f 满足利普希茨条件 (Lipschitz condition)，即，存在正实数 κ ，使得对于任意 t ， $|f(x, t) - f(y, t)| \leq \kappa|x - y|$ ，那么对于给定的初始条件，微分方程的解局部存在且唯一。

物理意义：力仅为速度、位置和时间的函数，且满足利普希茨条件时，质点的运动状态由位置 \vec{r} 和速度 \vec{v} 决定，加速度（运动状态的改变）由外力决定。

- 牛顿决定论的反例：

- 混沌现象 (chaos)：短期可以预测，长期不可预测
天气预报、三体问题（太阳系的稳定性）……
- 力的形式不满足柯西-利普希茨定理，如带电粒子的辐射自阻尼

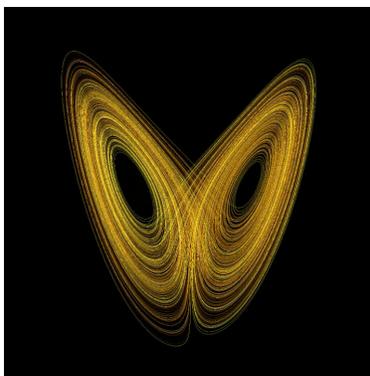


图 1. 混沌现象

【例子】带电粒子运动时由于辐射产生的电磁阻尼力（阿布拉罕-洛伦兹力）为，

$$\vec{F} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\vec{a}} \quad (1)$$

联立运动方程会发现，带电粒子会发生非物理的自加速现象。

$$v(t) = v_0 + a_0 \tau (e^{t/\tau} - 1) \quad (2)$$

$\tau = q^2 / (6\pi m \epsilon_0 c^3)$ 。此外，带电粒子还会发生预加速现象，即在外力发生改变之前做出响应。假设外力依赖于时间 t ，

$$m(a - \tau \dot{a}) = F_{ext}(t) \quad (3)$$

这个一阶线性微分方程的解为，

$$a(t) = \frac{1}{m} \int_t^\infty F_{ext}(t') e^{-\frac{t'-t}{\tau}} dt' \quad (4)$$

可见， t 时刻加速度取决于 $t' > t$ 时刻的外力的形式。

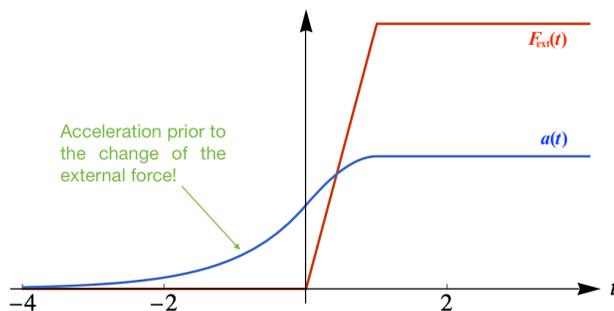


图 2. 阿布拉罕-洛伦兹辐射阻尼力产生的预加速现象。

– 力的形式不满足利普希茨条件：诺顿的穹顶 (Norton's dome)

考虑一个穹顶，由参数方程

$$z = -\frac{2s_0}{3} \left[1 - \left(1 - \frac{3}{2s_0} r \right)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}}$$

来描述，其中 $r \in [0, \frac{2}{3}]$, $z \in [0, \frac{2}{3}]$ 。初始时刻，一个质点静止在穹顶的顶端 $r = 0$ 处。可以验证，下面解是运动方程的解：

$$s(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_0, \\ \frac{g^2}{144s_0} (t - t_0)^4, & t \geq t_0 \end{cases}$$

其中 t_0 是任意一个大于等于 0 的实数。

首先，我们将参数方程写成 $z = \frac{2}{3\sqrt{s_0}} s^{\frac{3}{2}}$ ，其中， s 是穹顶的径向弧长， $s = \int \sqrt{dr^2 + dz^2} = 1 - (1 - \frac{3}{2}r)^{\frac{2}{3}}$ 。利用能量守恒，

$$\frac{1}{2} m \dot{s}^2 - mgz = \text{const}$$

求导可以得到， $\ddot{s} = g\sqrt{s/s_0}$ 。初始时刻， $s(0) = 0, \dot{s}(0) = 0$ 。

很容易验证，上面的解确实是上述运动方程的解。下面来讨论一下这个解的含义。首先质点受到的合外力为： $F = g\sqrt{s/s_0}$ 。在 $s = 0$ 这一点，也就是 $r = 0$ 这一点，质点收到的合外力为 0。但是上面的解表明，质点可以自发运动，并且自发运动的时间 t_0 是未知的。这与牛顿决定论截然不符。

问题的关键在于，上面的微分方程不满足利普希茨条件。因此，这个二阶微分方程的解不具有唯一性。也就是说，初始位置和初始速度无法唯一确定质点的动力学演化。

实际上，我们可以进一步得到： $\ddot{s}(t_0) = 0$ ，以及 $\ddot{\ddot{s}}(t_0) = \frac{1}{6}$ 。换句话说，质点的运动是由于速度的 4 阶导数在 t_0 时刻具有了非零的初始值。

注意到，在质点运动过程中一直满足牛顿第二定律， $f_t = ma_t$ ，以及牛顿第一定律 $f_t(0) = 0, a_t(0) = 0$ 。因此，这个质点运动仍然是满足牛顿力学的。只不过，力不是引起质点运动的原因，而是刻画质点运动状态改变的量。

6. 牛顿第三、第四定律 结合牛顿第二定律，牛顿第三定律意味着，在相互作用前后，

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{const}$$

两体体系的动量守恒。对于处于多个质点体系的两个质点，可以将质点之间的相互作用两两分别考虑。因此，牛顿第三定律等价于动量守恒。

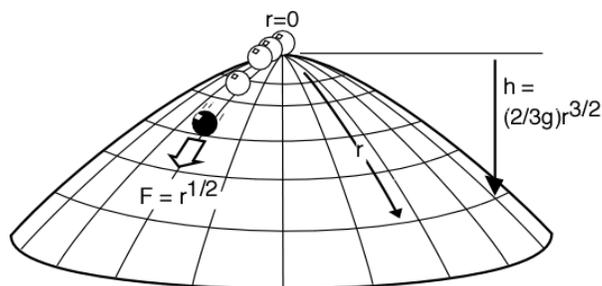


图 3. 诺顿的穹顶

如果若干质点之间存在三体乃至多体相互作用（如图 4 所示，核子之间便存在三体核力），牛顿第三定律将会失效。但动量守恒将会仍然成立。因此动量守恒是更普遍的规律。而我们后面会看到，动量守恒来源于时空对称性。

类似地，有人把“物体之间的作用力沿着连接其的直线的方向”作为“牛顿第四定律”。通过“牛顿第四定律”可以推导出角动量守恒。但是在很多情况下，例如分子、原子之间的作用力中是不成立的，但角动量守恒仍然成立。因此角动量守恒是更普遍的规律。

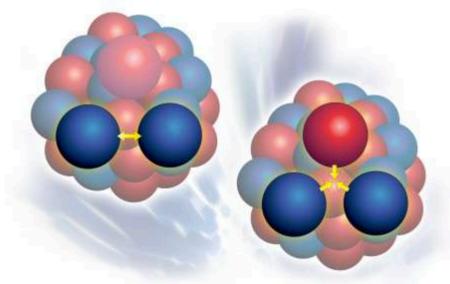


图 4. 核力

§ 2. 常见的力

牛顿三大定律把改变物体运动的外因抽象为力，因此，动力学接下来的任务便是寻找有关力的规律。这一任务一直延续到现代物理。

下面考虑物理中常见的几种力。

1. **弹性力** 当物体发生形变时，会产生弹性力。例如对于弹簧来说，弹性力 \vec{f} 与弹簧的形变位移 $\Delta\vec{x}$ 成正比，

$$\vec{f} = -k\Delta\vec{x}$$

两个固体接触时产生的支撑力也是弹性力的一种。

2. **压力** 气体或液体对于其接触面会产生压力，压力的大小正比于接触面积，方向垂直于接触面的法向向外，

$$\vec{F} = pS\vec{n} \quad (5)$$

其中，单位面积上的压力 p 叫做压强。气体或液体的压力起源于微观层面分子的运动，如图 5 所示。因此，压力是一种宏观的平均效应。当分子运动速度增加时（比如提高温度），压力便会增大。

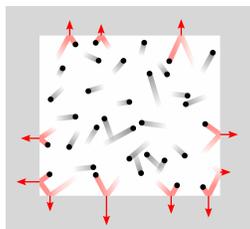


图 5. 压力起源于微观层面分子的运动

3. **阻力** 在流体（空气、液体等）中运动的物体会受到阻力的影响。阻力的大小与速度有关，也跟流体状态有关。实验研究表明，在物体运动速度比较大时，阻力可以近似表示为，

$$\vec{F}_d = -\frac{1}{2}\rho v^2 C_d A \hat{v} \quad (6)$$

其中， ρ 是流体密度， v 是物体相对流体的速度， A 是物体截面积， C_d 叫做阻力系数。这个公式是牛顿先发现的，又叫做牛顿阻力公式。

另一方面，当物体运动速度比较慢时，阻力可以由斯托克斯公式近似描述为，

$$\vec{F}_d = -6\pi\eta R\vec{v} \quad (7)$$

此处， η 为流体的粘滞系数， R 为物体的等效半径。

从阻力的例子可以看出，对于宏观物体来说，其受力一般是非常复杂的。

4. **摩擦力** 两个互相接触的固体表面之间阻止相对运动的力叫做干摩擦。干摩擦的摩擦力与相对运动方向相反，大小近似遵循阿蒙顿-库伦定律 (Amontons-Coulomb law)，

$$\begin{cases} F \leq \mu_s N & \text{物体相对静止} \\ F = \mu_k N & \text{物体相对滑动} \end{cases}$$

其中， N 为两个表面之间的支撑力。 μ_s 和 μ_k 分别叫做静摩擦系数和滑动摩擦系数，一般而言， $0.1 < \mu_k \lesssim \mu_s < 1.0$ ，但也不绝对。不同材料之间的摩擦系数可以参考表 I。

尽管摩擦现象很常见，其成因却很复杂。1950 年，Bowden 和 Tabor 给出了阿蒙顿-库伦定律的一个微观的解释。Bowden 和 Tabor 首先认为两个粗糙固体接触时，其表面并未

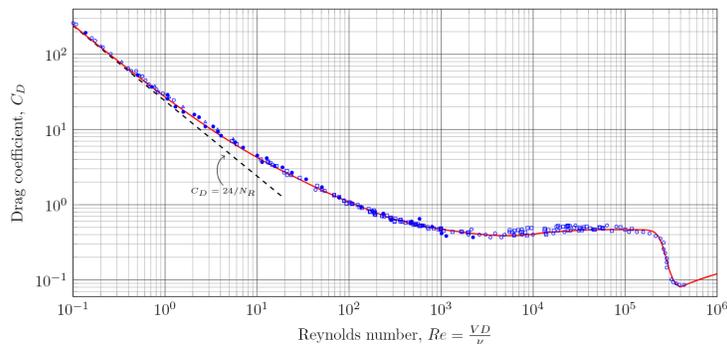


图 6. 光滑球在流体中的阻力系数作为雷诺系数 $Re = 2vR/\eta$ 的函数。当雷诺数较低时，阻力系数与雷诺数成反比，即阻力满足斯诺克斯公式 (7)。在雷诺数 $10^3 \sim 10^5$ 时，阻力系数近似为常数，即阻力满足牛顿阻力公式 (6)。在雷诺系数超过 2×10^5 时，阻力系数会突然下降，这一现象叫做阻力危机，又叫做埃菲尔现象，在运动、航空等领域具有重要的应用。

表 I. 常见材料的摩擦系数。来源: <https://hypertextbook.com>

材料 1	材料 2	μ_s	μ_k	备注
橡胶	混凝土	1.0	0.8	干
橡胶	混凝土	0.3	0.25	湿
橡胶	冰		0.15	
木头	木头	0.25–0.5	0.48	
木头	金属	0.5	0.3	
木头	砖	0.6		
铝	铝	1.05–1.35	1.4	
玻璃	玻璃	0.9–1.0	0.4	
钢	钢	0.7	0.6	
冰	冰	0.1	0.02	0°C
冰	钢	0.04	0.02	
石墨	石墨	0.1		
金刚石	金刚石	0.1	0.05	
关节	关节	0.01	0.003	

完全贴合，而仅仅是其表面的很多凹凸颗粒接触，如图 7 所示。因此，实际接触面积 S_r 远小于表观接触面积 S_a 。这意味着，这些凹凸颗粒所承受的压力 $\sigma = N/S_r$ 远大于物体表面的平均压力 N/S_a 。因此，这些凹凸发生弹性形变。Bowden 和 Tabor 假定压力 $\sigma = H$

是个常数，且由材料表面的硬度 H 决定，因此接触面积正比于压力：

$$S_r = \frac{N}{H} \quad (8)$$

这可以解释摩擦力正比于压力，而与（表观）接触面积 S_a 无关。进一步，Bowden 和 Tabor 假定这些被压缩的凹凸颗粒“焊接”在一起形成一个个“接头”。为了破坏这些接头、产生滑动，需要一个临界剪切应力 τ_c 。这样以来，总摩擦力，

$$f = \tau_c S_r = \frac{\tau_c}{H} N \quad (9)$$

因此，摩擦系数 $\mu = \tau_c/H$ 。

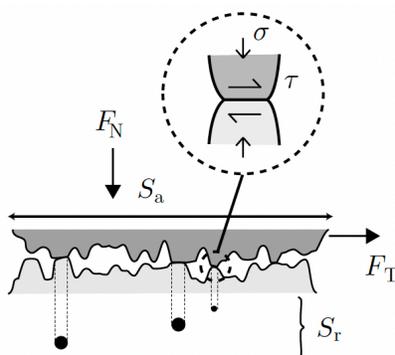


图 7. 两个粗糙固体表面的接触。

摩擦力在生活中有重要的应用。

【思考】请列举摩擦力在生活中起到重要作用的地方。

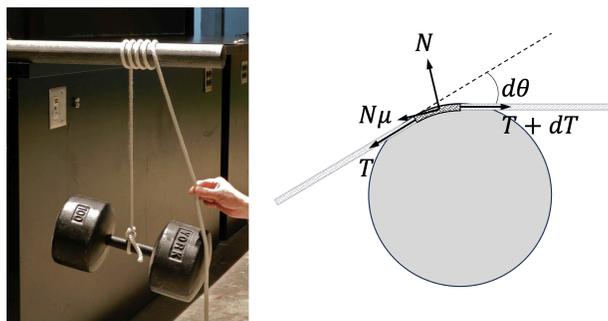


图 8. 分析缠在柱子上的绳索的摩擦力

【例子】计算缠在柱子上的绳索的摩擦力，如图 8 所示。

$$\begin{cases} \text{张力:} & T + N\mu = T + \Delta T \\ \text{压力:} & N = 2T \sin \frac{\Delta\theta}{2} + o(\Delta\theta) \end{cases}$$

得到：

$$dT = T\mu d\theta \Rightarrow \frac{dT}{T} = \mu d\theta \Rightarrow T = T_0 e^{\mu\theta}$$

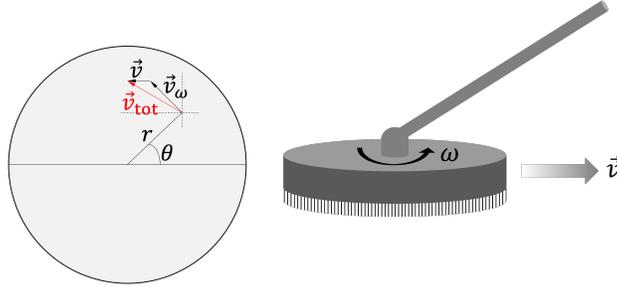


图 9.

【例子】【思考题】如图 9 所示，电动扫把可以视为一个均匀的扁圆柱，质量为 M 半径为 R ，它整体以 ω 的恒定角速度高速旋转。已知在不旋转的情况下扫把与地板的摩擦系数为 μ 。求，现在 \vec{v} 的速度拖动旋转的扫把，其中 $v \ll \omega R$ 。求此时扫把与地面的总摩擦力 \vec{f} 。

$$\begin{aligned} \vec{f} &= -\frac{Mg\mu}{\pi R^2} \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{(\omega r \sin \theta + v)\vec{e}_x + (\omega r \cos \theta)\vec{e}_y}{\sqrt{(\omega r \sin \theta + v)^2 + (\omega r \cos \theta)^2}} \\ &= -\frac{Mg\mu}{\pi R^2} \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{(\omega r \sin \theta + v)\vec{e}_x + (\omega r \cos \theta)\vec{e}_y}{\sqrt{(\omega r \sin \theta + v)^2 + (\omega r \cos \theta)^2}} \\ &= -\frac{Mg\mu}{\pi R^2} \int_0^R r dr I\left(\frac{v}{\omega r}\right)\vec{e}_x \end{aligned}$$

其中，

$$I(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta + z}{\sqrt{1 + z^2 + 2z \sin \theta}} d\theta$$

该积分表达式比较复杂（涉及到椭圆积分函数）。但考虑到 $v \ll \omega R$ ，可以将 $I(z)$ 在 $z = 0$ 附近做泰勒展开：

$$I(z) = I(0) + I'(0)z + \dots$$

其中容易得到 $I(0) = 0$ ，而，

$$I'(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{[1 + z^2 + 2z \sin \theta]^{\frac{3}{2}}} d\theta \Rightarrow I'(0) = \pi$$

如果需要更高阶项，可以使用 Padé 近似。保留到一阶项，可以得到：

$$f = -Mg\mu \frac{v}{\omega R} + O(v/\omega R)$$

讨论：旋转的电动拖把在不改变拖把清扫能力（即拖把与地面摩擦系数）的情况下，有效降低了拖动拖把所需要的力

5. **唯象力** 原子分子之间的力、核子之间的力，原则上可以由基本相互作用得到。实践中常常采用唯象模型来拟合这些力。例如，原子之间的莱纳-琼斯势、核子之间的阿贡势等。

6. **基本相互作用** 迄今为止，已知五种基本相互作用力：强相互作用力、弱相互作用力、电磁力、希格斯相互作用力、引力。对于这些基本相互作用来说，所谓力的概念不再完全成立，而需要推广。

电磁力（洛伦兹力） 在电磁场中运动的电荷受到的洛伦兹力为，

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

这里， q 是电荷的电量， \vec{E} 和 \vec{B} 分别是电磁场的电场与磁场强度。

库仑力：两个点电荷 q_1, q_2 之间的静电力为，

$$\vec{F}_{\text{Coul}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

安培力：根据洛伦兹力和毕奥-萨瓦尔定律¹，两个点电荷 q_1, q_2 之间的磁力为，

$$\vec{F}_{\text{Amp}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \hat{r})$$

【思考】 安培力是否满足牛顿第三定律？

达尔文模型：两个点电荷 q_1, q_2 之间的洛伦兹力 ($\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$):

$$\vec{F}_D = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[\hat{r} \left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{2c^2} - \frac{3(\hat{r} \cdot \vec{v}_1)(\hat{r} \cdot \vec{v}_2)}{2c^2} \right) + \frac{\hat{r} \cdot \vec{v}_2}{2c^2} \vec{v}_1 + \frac{\hat{r} \cdot \vec{v}_1}{2c^2} \vec{v}_2 \right] + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right)$$

【思考】 达尔文模型是否满足牛顿第三定律？其与上面的安培力有什么区别？

强相互作用力——康奈尔模型

$$\vec{F}_s = -\frac{4\alpha_s}{3r^2} \hat{r} + \sigma \vec{r}$$

¹ 实际上，不应该使用毕奥-萨瓦尔定律计算点电荷的磁场，虽然最终结果是正确的。最终结果是海威塞特首先得到的，在非相对近似下成立。

强相互作用力的一个显著特点是夸克禁闭。

弱相互作用力

$$\vec{F}_w = -\frac{\alpha_w}{r^2}(1 + m_W r)e^{-m_W r}\hat{r}$$

弱相互作用力的力程较短 $\sim 1/m_W \sim 10^{-18}$ m。

希格斯力

$$\vec{F}_h = -\frac{\alpha_h}{r^2}(1 + m_h r)e^{-m_h r}\hat{r}$$

希格斯力的力程也较短 $\sim 1/m_h \sim 10^{-18}$ m。希格斯力与基本粒子质量的起源息息相关。

万有引力

7. 万有引力 根据牛顿定律，行星做椭圆运动，可以归结为力的作用，这个力，牛顿认为与地面上的物体受到的重力是同样的，叫做万有引力。它是任何两个物体之间的吸引力。力的大小与物体之间的距离平方成正比、每个物体的质量成正比，方向沿着两个物体之间的连线，并指向另一个物体：

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

此处， $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ 。这里， G 是一个常数，叫做万有引力常数，现代精确测量得到， $G = 6.67430(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ 。 $m_{1,2}$ 是物体的质量。

万有引力常数 G 的测定 牛顿并未给出万有引力常数 G 的数值。 G 的测量需要非常精密的实验方法，历史上，英国物理学家卡文迪什是第一个完成这一测量的人。

【例子】可以估计一下，两个铅球之间的万有引力：取 $r \sim 5$ cm, $m \sim 100$ kg,

$$F = \frac{Gm^2}{r^2} \sim 10^{-4} \text{ N}$$

此力已经大于最小的砝码 ~ 100 mg 可以产生的重力 10^{-3} N。

历史上， G 的测量又被称为称地球，因此卡文迪什又被称为第一个给地球称重的人。

【例子】通过 G 来估计地球的质量及平均密度，并比较地球平均密度与岩石密度。

$$mg = \frac{GM_E m}{R_E^2} \Rightarrow M_E = \frac{gR_E^2}{G} \approx 6 \times 10^{24} \text{ kg} \quad (10)$$

地球的平均密度为，

$$\bar{\rho}_E = \frac{M_E}{\frac{4}{3}\pi R_E^3} = 5.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \quad (11)$$

一般岩石的密度约为 $3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。这说明地球内部有密度比较大的物质（地幔、地核等），如图 10 所示。

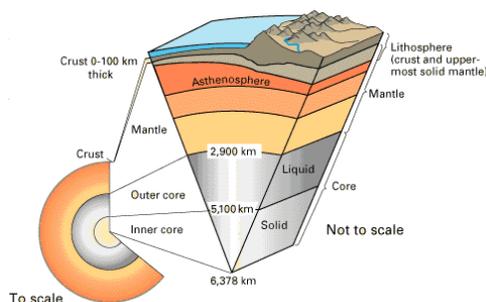


图 10. 地球的结构

卡文迪什实验：卡文迪许的实验原始方案来自地质学家约翰·米切尔，后者未来及完成这一实验便去世了，后来实验装置和方案传给了亨利·卡文迪什，他重建了实验装置并做了进一步改进。

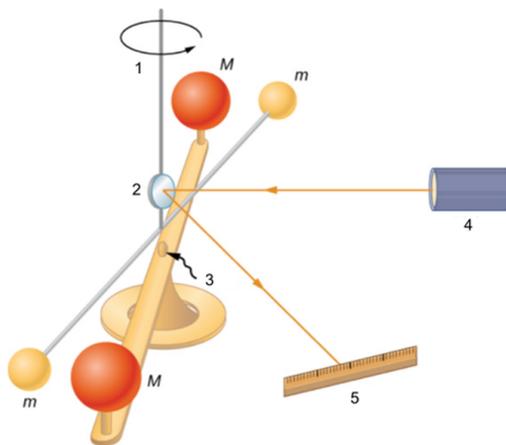


图 11. 现代版本的卡文迪什扭秤实验

如图 11 所示，这个实验装置由一个六英尺（1.8 米）长的木棒水平悬挂在一根细线上，木棒的两端各有一个直径 2 英寸（51 毫米），重 1.61 磅（0.73 千克）的小铅球。另外还有两个直径 12 英寸（300 毫米），重 348 磅（158 千克）的大铅球，分别悬挂在另一根线上，

可以移动到小铅球的远处或者两侧，距离为 8.85 英寸（225 毫米）。这个实验测量了小铅球和大铅球之间的微弱的引力，这个力使得木棒稍微旋转了约 0.16 英寸（或者用更硬的悬挂线时只有 0.03 英寸）。木棒的旋转角度可以通过两端的游标刻度盘读出。大铅球可以移动到扭摆杆的另一侧，使得木棒反向旋转。木棒旋转到一个角度时，悬挂线的扭力和铅球之间的万有引力达到平衡。

卡文迪什使用碳制的扭丝，其扭动弹性系数可以由振动实验测量得到。他还在装置上悬挂了镜子，由此通过反射光束来放大扭丝的偏转。整个装置被放在一个大箱子里，只留下观察和操作的空間，以减小空气流动对实验的影响。最终卡文迪什测量得到 $G = (6.74 \pm 0.04) \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1}\text{m}^3\text{s}^{-2}$ ，与现代值相差不到 1%，这个纪录一直保持了 100 多年。目前万有引力常数 G 最精确的测量仍来自于扭秤实验（华中科技大学引力中心，2018 年），万有引力常数 G 也是所有基本物理常数中测量最不精确的一个（图 12）。

基本常数	实验测量的相对误差
引力常数 G	2.2×10^{-5}
普朗克常数 h	8.7×10^{-9}
玻尔兹曼常数 k_b	2.8×10^{-7}
精细结构常数 α	2.9×10^{-11}
阿伏伽德罗常数 N_A	1.7×10^{-8}

图 12. 基本物理常数

卡文迪什实验是物理学中最优美、最著名的实验之一。卡文迪什所使用的扭秤现在仍然是现代化学精确测量的主要工具之一。卡文迪什是英国的一个贵族终身未婚，以精确测量著名。他的知名工作包括测量空气成分、测量引力常数、测量库伦力等。剑桥大学设有以其命名的卡文迪什实验室（由其族侄捐赠、麦克斯韦建立，出国 30 多个诺贝尔奖得主）。科大在卡文迪什访问过的老师：鄢文标、陆朝阳。

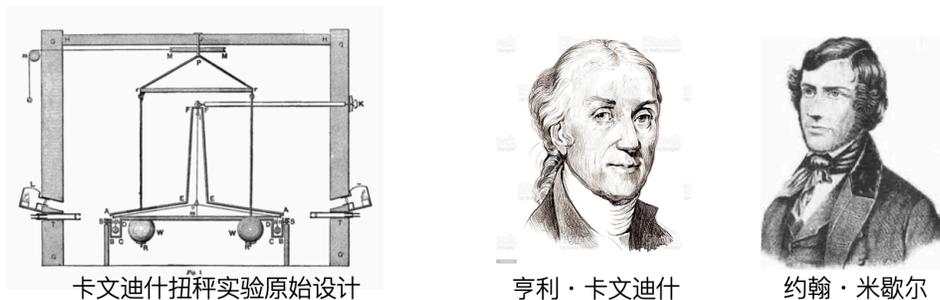


图 13.

等效原理 类比于库仑力，根据牛顿万有引力公式，质量是作为引力的“荷”。那么一个问题是，作为引力的荷的质量（即引力质量）是否等于惯性质量？假如等效原理，物体在引力作用下的加速度与其质量无关。特别地，在地球表面的物体在重力的作用下的加速度与物体质量无关，这个值叫做重力加速度。

实验检验：

- 比萨实验（“两个铁球同时落地”）
- 单摆实验：单摆周期与质量无关
- 厄特沃什实验：利用扭成验证引力质量与惯性质量相等，精度达到 10^{-8} ，现代厄特沃什实验经过改进之后精度可以达到 10^{-14}

壳层定理 牛顿万有引力定律是针对质点的。对于有限大小的物体所产生的引力，则需要微元方法将物体分割，最后把所有的引力加起来，即积分。

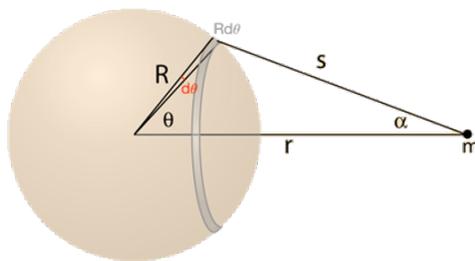


图 14.

让我们来计算一个质量为 M 半径为 R 的均匀球壳所产生的引力。为了方便，我们将球的原点设在坐标原点，并令测试质点的质量为 m ，其与球心的相对位置矢量为 \vec{r} 。

如图所示，可以充分利用球对称性，将球壳划分为微元环带，其质量为

$$dM = \sigma 2\pi h R d\theta, \quad (12)$$

其中 $\sigma = M/(4\pi R^2)$ 是球壳的质量面密度。根据几何关系， $h = R \sin \theta$ 。这个环带对于 r 处的测试质点产生的引力方向指向球心，因此我们只需要计算径向的分量。由于环带上所有质点与测试质点的距离相同均为 s ，其引力合力为，

$$dF = \frac{G dM m}{s^2} \cos \phi \quad (13)$$

根据几何关系， $s = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}$ ， $\cos \phi = (r - R \cos \theta)/s$ ，因此可以得到，

$$dF = \frac{G dM m (r - R \cos \theta)}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \quad (14)$$

合力为所有环带的累加，

$$F = \int dF = G\sigma 2\pi R^2 m \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta (r - R \cos \theta)}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \quad (15)$$

可以做变量代换， $s = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}$ ，容易得到 $s ds = rR \sin \theta d\theta$ 。当 $\theta = 0$ 时， $s = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR} = |r - R|$ —— **这里要非常注意这个绝对值号**；当 $\theta = \pi$ 时， $s = r + R$ 。因此，

$$F = \frac{1}{2} GMm \int_{|r-R|}^{r+R} \frac{r - \frac{1}{2r}(r^2 + R^2 - s^2)}{s^3} \frac{s}{rR} ds \quad (16)$$

$$= \frac{GMm}{2Rr} \int_{|r-R|}^{r+R} \left\{ \frac{r - \frac{1}{2r}(r^2 + R^2)}{s^2} + \frac{1}{2r} \right\} ds \quad (17)$$

$$= \frac{GMm}{2Rr} \left\{ (-1) \frac{1}{2} \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \left[\frac{1}{r+R} - \frac{1}{|r-R|} \right] + \frac{1}{2r} [(r+R) - |r-R|] \right\} \quad (18)$$

$$= \frac{GMm}{4Rr^2} \left\{ 2R - |r-R| + (r+R) \text{Sgn}(r-R) \right\} \quad (19)$$

$$= \begin{cases} \frac{GMm}{r^2}, & r > R \\ 0, & r < R \end{cases} = \theta(r-R) \frac{GMm}{r^2} \quad (20)$$

这里， $\theta(x)$ 是单位阶跃函数，定义为：

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (21)$$

换句话说，在球壳内部，引力为零，在球壳外部球壳产生的引力等价于相当质量的质点放置在球心时产生的引力。这个结论叫做**壳层定理 (shell theorem)**。这是牛顿首先提出来的。

为什么球壳内的引力为零呢？这可以通过图 15 的几何关系来理解：

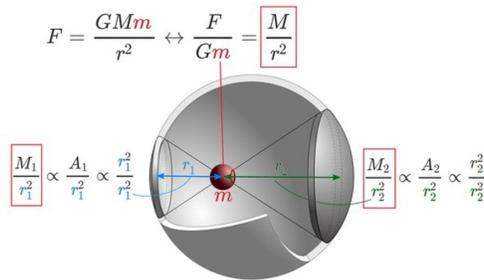


图 15. 对于球壳内部的任意一点，相对的两片质量元产生的引力大小相等，方向相反。

【例子】 求一个质量为 M ，半径为 R 的均匀实心球产生的引力场。

解：将实心球看成很多球壳的叠加，每个球壳的厚度为 dr ，因此其质量为 $dM = 4\pi r^2 \rho dr$ ，这里 $\rho = M / (\frac{4}{3}\pi R^3)$ 为实心球的体密度。根据壳层定理，以球心为原点，该球壳对于 s 处质量为 m 的测试质点产生的引力为，

$$dF = \theta(s - r) \frac{GdMm}{s^2} \quad (22)$$

合力可以通过积分可以得到。分情况讨论，如果 $s > R$ ，则 $\theta(s - r)$ 恒为 1，

$$F(s) = \int_0^R \frac{GdMm}{s^2} dr \quad (23)$$

$$= \frac{3GMm}{R^3 s^2} \int_0^R r^2 dr \quad (24)$$

$$= \frac{GMm}{s^2} \quad (25)$$

如果 $s \leq R$ ，则 $r > s$ 的部分球壳对合力没有贡献，积分变成，

$$F(s) = \int_0^s \frac{GdMm}{s^2} dr \quad (26)$$

$$= \frac{3GMm}{R^3 s^2} \int_0^s r^2 dr \quad (27)$$

$$= \frac{GMm}{R^3} s \quad (28)$$

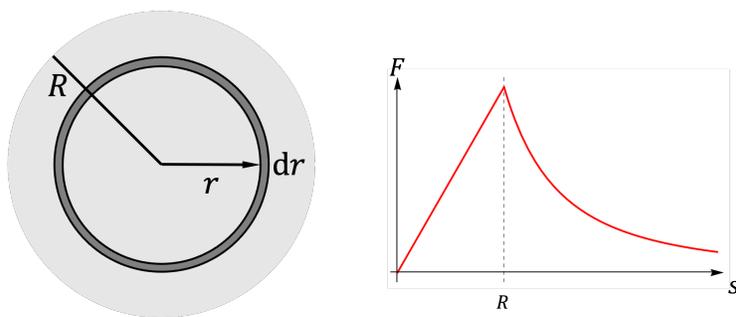


图 16.

【例子】 考虑一个球对称的星系质量为 M 。距离星系中心 r 处有一颗恒星围绕星系中心做匀速圆周。求下面三种情况下其运动速度 $v(r)$ ：

- 星系质量集中在星系中心（其他质量忽略不计）；
- 星系质量均匀分布在半径为 R 的暗物质晕内 ($R > r$, 其他质量忽略不计)；

解：引力提供恒星做圆周运动的向心力，

$$\frac{GM(r)m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \quad (29)$$

其中， $M(r)$ 是半径为 r 的球所包围的质量。

(a) 如果质量分布在星系中心，则 $M(r) = M$ 。因此， $v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ ，即随着 r 的增大下降。

(b) 如果质量均匀分布在半径为 R 的暗物质晕内，则 $M(r) = \frac{M}{R^3}r^3$ ，因此 $v(r) = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}r$ ，即随着 r 的增大而增大。

天文学家曾认为星系的质量主要集中在星系的中心。但上个世纪 60 年代天文观测表明随着 r 的增大并不减小，并且这一现象在绝大多数星系中都存在。这使得天文学家怀疑宇宙中存在尚未观测到的物质，称为暗物质。现代观测和研究表明，宇宙中暗物质的质量远大于可见物质质量。当然另外一种可能是牛顿万有引力公式在星系尺度上不再成立！人们提出所谓的修改引力 (Modified Newtonian dynamics, MOND) 也可以解释星系旋转曲线之谜。但是种种观测证据表明，暗物质确实存在，而且在星系形成、宇宙演化中扮演着重要的角色。

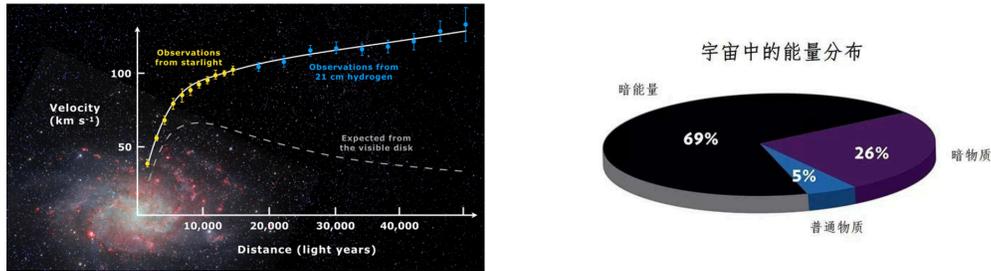


图 17. 星系旋转曲线与暗物质假说

【例子 *】考虑一个实际一些的银河系模型。银河系的质量分布可以视为由三部分组成如图 18 所示：

(1) 椭球形星核，其密度分布，

$$\rho_b(r') = \frac{\rho_{0b}}{(1 + r'/r_0)^\alpha} e^{-(r'/r_c)^2} \quad (30)$$

这里， $r' = \sqrt{R^2 + (z/q)^2}$ 是柱坐标 (R, θ, z) 的函数， $\alpha = 1.8$ ， $r_0 = 0.075$ kpc， $r_c = 2.1$ kpc， $q = 0.5$ ，星核总质量为 $M_b = 8.9 \times 10^9 M_\odot$ 。

(2) 厚度可以忽略的星系盘，其面密度分布为，

$$\rho_d(R) = \Sigma_0 e^{-R/R_d} \quad (31)$$

这里, $R_d = 2.5 \text{ kpc}$, 星盘总质量 $M_d = 4.6 \times 10^{10} M_\odot$ 。

(3) 球对称分布的暗物质晕, 密度分布为,

$$\rho_h(r) = \frac{\rho_{0h}}{x(1+x)^3} \quad (32)$$

其中, $r = \sqrt{R^2 + z^2}$, $x = r/r_h$, $r_h = 19.6 \text{ kpc}$ 。暗物质总质量为 $M_h = 2.7 \times 10^{11} M_\odot$ 。

求, 距离星系中心 r 处且在星系盘所在平面上的恒星绕星系中心做匀速圆周运动的速度 $v(r)$ 。

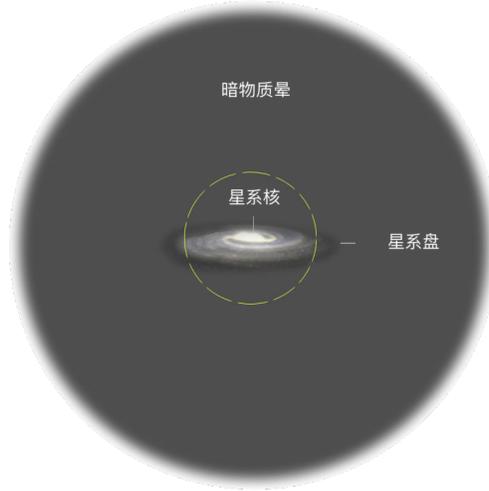


图 18. 银河系质量分布

§ 3. 牛顿第二定律的应用

1. 运动方程 结合牛顿第二定律和外力的具体形式, 我们可以得到一个或一组闭合的微分方程, 这组方程叫做体系的运动方程。一般而言, 外力仅与体系的瞬时状态有关, 即 $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ 。那么, 根据牛顿第二定律以及速度的定义,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad (33)$$

为了得到体系的解 $\vec{r}(t)$, 我们还需要指定初始条件, 即 $\vec{r}(0)$ 和 $\vec{v}(0)$ 的值。前面提到过, 如果外力的形式满足柯西-利普希茨定理, 则运动方程的解是局部存在且唯一的。

求解力学问题的一般策略:

- 隔离分解

- 受力分析
- 运动学分析
- 建立运动方程，并取分量
- 数学求解

2. 几种常见约束

1. “轻物”，例如轻绳、轻杆、轻滑轮：力平衡（否则轻物会获得无穷大的加速度/角加速度）
2. 不可伸长的绳、杆：绳子/杆两端运动距离不变，速度、加速度相同（否则绳就会被伸长）
3. 软绳、锁链：只有张力，没有压力（否则绳子就变弯了，张力为 0）
4. 液体：只有压力，没有剪切力（否则液体会流动）
5. 斜面以及一般曲面约束：物体运动沿着曲面运动（否则物体会进入约束面。一个特殊情况是物体离开曲面以后不再受到约束，需要单独考虑）
6. 摩擦约束：动摩擦力的方向永远与运动方向相反，静止摩擦的方向为除摩擦力以外的合力方向相反。摩擦约束问题常常需要分情况讨论。



图 19. 滑轮-轻绳约束例题

3. 利用牛顿第二定律求解物体运动的例子 【例 1】求图 19 左图中两个物体的加速度。已知两个物体质量分别为 m_1, m_2 。

$$\begin{cases} m_1 : & T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \\ m_2 : & T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \\ \text{绳索} : & T_1 = T_2 \\ \text{不可伸长的绳索} : & a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$$

求解：

$$\begin{cases} m_1 : T - m_1 g = m_1 a \\ m_2 : T - m_2 g = -m_2 a \end{cases}$$

解：

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

注意事项：

- 注意符号：这里假定向上为正方向。如果求出来的解是负的（如， $m_1 > m_2$ 时），表示是向下加速度。
- 初始条件
- 检查特殊情况： $m_1 = m_2$ 时，力平衡状态，加速度为 0。
- 检查极限情况： $m_1 \gg m_2$ 时，可以忽略 m_2 ，加速度应该为 g 。

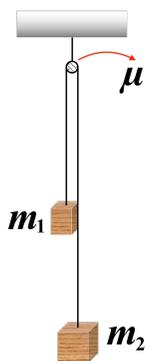


图 20. 滑轮-轻绳约束例题 2

【例 2】见图 20 中间的图，将滑轮改成钉子（不考虑钉子形状），并设滑动摩擦系数为 μ ， $m_2 > m_1$

$$\begin{cases} m_1 : & T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \\ m_2 : & T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \\ \text{绳索} : & T_1 = T_2 + \mu N \\ \text{钉子} : & T_1 + T_2 = N \\ \text{不可伸长的绳索} : & a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$$

求解：

• 力: $T_1 = T_2 - \mu(T_1 + T_2) \Rightarrow (1 + \mu)T_1 = (1 - \mu)T_2$

•

$$\begin{cases} m_1 : \frac{1-\mu}{1+\mu}T_2 - m_1g = m_1a \\ m_2 : T_2 - m_2g = -m_2a \\ \frac{1-\mu}{1+\mu}m_2(g-a) = m_1(g+a) \\ a = \frac{(1-\mu)m_2 - (1+\mu)m_1}{(1-\mu)m_2 + (1+\mu)m_1}g \end{cases}$$

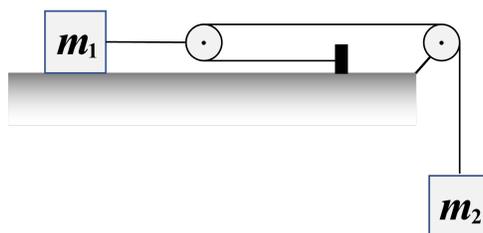


图 21. 滑轮-轻绳约束例题 3

【例 3】: 如图 21 右图动滑轮问题。求已知所有物体质量，求其加速度。

$$\begin{cases} m_1 : T_1 = m_1a_1 \\ m_2 : T_2 - m_2g = m_2a_2 \\ \text{绳索} : T_1 = 2T_2 \\ \text{绳索} : 2a_1 = -a_2 \end{cases}$$

求解:

$$\begin{cases} m_1 : T_1 = m_1a_1 \\ m_2 : 2T_1 - m_2g = -m_22a_1 \\ m_2g = 2(m_1 + m_2)a_1 \\ a_1 = \frac{m_1+m_2}{2m_2}g, \quad a_2 = -\frac{m_1+m_2}{m_2}g \end{cases}$$

注意符号。求解线性方程组：消元法。

【例 4】如图 22 斜面约束问题。已知质量为 M 的板与斜面之间的摩擦系数为 μ 且 $\mu \leq \frac{M}{M+m} \tan \alpha$ ，木块之间摩擦可以忽略。求两个木块的加速度。

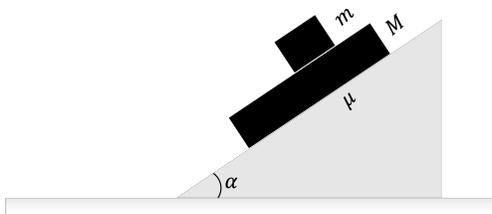


图 22. 斜面约束例题 1

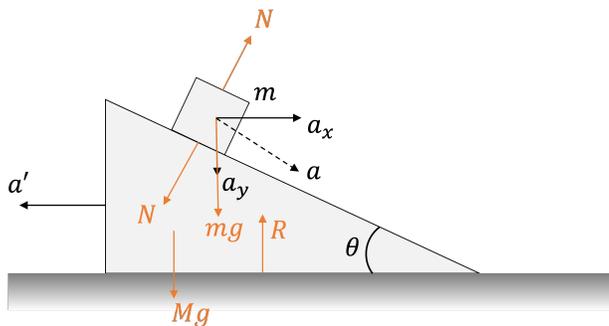
$$\begin{cases} m \text{ 切向: } mg \sin \alpha = ma \\ m \text{ 法向: } mg \cos \alpha = N \\ M \text{ 切向: } Mg \sin \alpha - \mu N' = Ma' \\ M \text{ 法向: } Mg \cos \alpha + N = N' \end{cases}$$

求解:

$$\begin{cases} m \text{ 切向: } mg \sin \alpha = ma \\ M \text{ 切向: } Mg \sin \alpha - \mu(M+m)g \cos \alpha = Ma' \\ a = g \sin \alpha, \quad a' = g \sin \alpha - \mu(M+m) \cos \alpha \end{cases}$$

思考: 如果 $\mu > \frac{M}{M+m} \tan \alpha$ 会发生什么?

【例 5】木块与斜面、斜面与水平面之间的摩擦力可以忽略。求木块与斜面的加速度。



$$\begin{cases} m \text{ 水平: } N \sin \theta = ma_x \\ m \text{ 垂直: } mg - N \cos \theta = ma_y \\ M \text{ 水平: } N \sin \theta = Ma' \\ M \text{ 垂直: } Mg + N \cos \theta - R = 0 \\ \text{约束关系 } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{x+x'} = \tan \theta \Rightarrow a_y = \tan \theta (a_x + a') \end{cases}$$

求解：

$$\begin{cases} N \sin \theta = ma_x = Ma' \\ mg - Ma' \cot \theta = m \tan \theta \left(\frac{M}{m} + 1 \right) a' \\ Mg + N \cos \theta - R = 0 \\ a' = \frac{m}{M \cot \theta + m \tan \theta \frac{m+M}{m}} g = \frac{mg \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} \end{cases}$$

约束四、斜面乃至一般平面约束，质点运动沿着平面。

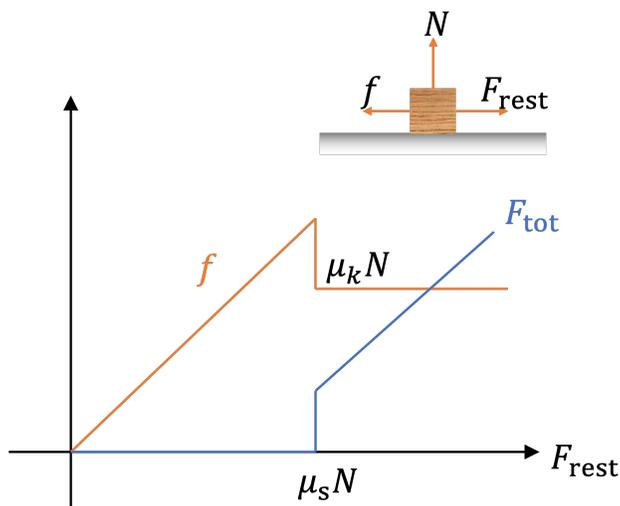


图 23. 摩擦约束

动摩擦力的方向永远与运动方向相反，静止摩擦的方向为除摩擦力以外的合力方向相反，如图 23 所示。用表达式可以表示为：

$$\vec{f} = \begin{cases} -\vec{F}_{\text{res}} & F_{\text{res}} \leq \mu_s N \text{ 且 } v = 0 \\ -\mu_s N \hat{F}_{\text{res}} & F_{\text{res}} > \mu_s N \text{ 且 } v = 0 \\ -\mu_k N \hat{v} & v > 0 \end{cases}$$

【例 6】 一个木块初速度为 3 m/s 在一个斜面上向上运动。斜面与水平面倾角为 30 度，斜面与木块之间的摩擦系数为 0.1。求 1s 以后木块与初始位置的距离。

第一阶段，木块向上运动，摩擦力方向向下。第二阶段，木块运动反向，摩擦力方向上。木块能停下来吗？ $\tan \theta \leq \mu$?

第一阶段

$$\left\{ \begin{array}{l} m: -mg \sin \theta - mg \cos \theta \mu = ma_1 \\ a_1 = -g(\sin \theta + \cos \theta \mu) = -5.75 \text{ m/s}^2 \\ t_1 = -v_0/a_1 = 0.52\text{s} \\ x_1 = -v_0^2/(2a_1) = 0.78\text{m} \end{array} \right.$$

第二阶段

$$\left\{ \begin{array}{l} m: -mg \sin \theta + mg \cos \theta \mu = ma_2 \\ a_2 = g(-\sin \theta + \cos \theta \mu) = -4.05 \text{ m/s}^2 \\ t_2 = (1 - 0.52)\text{s} \\ x_2 = x_1 + \frac{1}{2}a_2 t^2 = 0.32\text{m} \end{array} \right.$$



【例 7】 一个质量为 M 的薄木板静置在水平桌面上，木板与桌面大小相同且一端与桌边对齐。木板中心放着一个质量为 m 的小木块。现在将一个恒定的水平力 F 作用在木板上，要将木板从木块下抽出来，又要是木块不掉到地上。假定各个接触面的摩擦系数均为 μ ，求 F 至少多大。

求解：第一阶段，木板在力 F 的作用下向右运动，木块在摩擦力的作用下也向右运动。第二阶段，木块掉到桌面上，在摩擦力的作用下减速运动。

第一阶段：

$$\left\{ \begin{array}{l} m: \mu mg = ma \\ M: F - \mu(m + M)g - \mu mg = Ma' \end{array} \right.$$

第一阶段运动距离： $\Delta x_1 = \frac{1}{2}at^2$ ， $\Delta x' = \frac{1}{2}a't^2$ 。从木板上掉落， $\Delta x' - \Delta x = \frac{L}{2}$ 。

$$\frac{F}{M} - \mu g \left(1 + \frac{2m}{M}\right) - \mu g = \frac{2L}{2t^2}$$

第二阶段：

$$\left\{ \begin{array}{l} m: -\mu mg = -ma \end{array} \right.$$

$$\Delta x_2 = v_0^2 t - \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2。$$

不掉落的条件: $\Delta x_1 + \Delta x_2 = \mu g t^2 \leq \frac{L}{2}$ 。

$$\frac{F}{M} - \mu g \left(2 + \frac{2m}{M}\right) = \frac{L}{t^2} \geq 2\mu g \Rightarrow F \geq \mu(4M + 2m)g$$

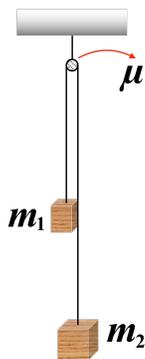


图 24. 滑轮-轻绳约束例题

【例 8】见图 24 中间的图，将滑轮改成钉子（不考虑钉子形状），并设滑动摩擦系数为 μ ， $m_2 > m_1$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 : \quad T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \\ m_2 : \quad T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \\ \text{绳索} : \quad T_1 = T_2 + f \\ \text{钉子} : \quad T_1 + T_2 = N \\ \text{不可伸长的绳索} : \quad a_1 + a_2 = 0 \end{array} \right.$$

求解：

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 : \quad T_1 - m_1 g = m_1 a \\ m_2 : \quad T_2 - m_2 g = -m_2 a \\ \text{绳索} : \quad T_1 = T_2 + f \\ \text{钉子} : \quad T_1 + T_2 = N \\ \quad \quad \quad F_r = T_2 - T_1 = (m_2 - m_1)g - (m_1 + m_2)a \\ \quad \quad \quad N = (m_1 + m_2)g + (m_1 - m_2)a \end{array} \right.$$

分段函数：

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0, \quad |F_r| \leq |\mu_s N| \Rightarrow |m_2 - m_1| \leq \mu_s |m_1 + m_2| \Rightarrow \frac{|m_1 - m_2|}{m_1 + m_2} \leq \mu_s \\ a \neq 0, \quad |F_r| = |\mu_k N| \Rightarrow |(m_2 - m_1)g - (m_1 + m_2)a| = \mu_k [(m_2 + m_1)g + (m_1 - m_2)a] \\ \quad \quad \quad \Rightarrow a = \frac{m_2(1-\mu) - m_1(1+\mu)}{m_1(1+\mu) + m_2(1-\mu)}, a = \frac{m_2(1+\mu) - m_1(1-\mu)}{m_1(1-\mu) + m_2(1+\mu)} \end{array} \right.$$

【例 9】如图所示，一根半径为 R 的环形细铁丝固定光滑水平面上。铁丝上穿有一个质量为 m 的小球。已知细铁丝与小球之间的摩擦系数为 μ ，小球的初始速度为 v_0 。

(a) 如果不考虑重力，求 t 时刻小球的速度。

(b) 如果考虑重力，求 t 时刻小球的速度。

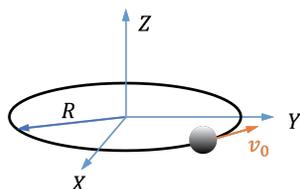


图 25. 小球穿在有摩擦的铁丝上转动问题。

解：这个问题主要需要计算积分。

(a) 考虑切向的牛顿第二定律，

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu N, \quad N = m \frac{v^2}{R}, \quad (34)$$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = -m\mu \frac{v^2}{R}, \quad (35)$$

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{\mu dt}{R}, \quad (36)$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = \int_0^t -\frac{\mu dt}{R}, \quad (37)$$

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = -\frac{\mu t}{R}, \quad (38)$$

$$v = \frac{v_0}{1 + \mu v_0 t / R} \quad (39)$$

(b) 仍然考虑切向牛顿第二定律，但此时支撑力的合力为 $N = \sqrt{m^2 g^2 + (mv^2/R)^2}$ 从

而,

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu N, \quad N = m\sqrt{g^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}, \quad (40)$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{m} \frac{dv}{dt} = -\cancel{m} \mu \sqrt{g^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}, \quad (41)$$

$$\frac{dv}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}} = -\mu dt, \quad (42)$$

$$\frac{dv}{\sqrt{1 + \frac{v^4}{g^2 R^2}}} = -g\mu dt \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int_0^t -\frac{g}{R}\mu dt \quad (43)$$

最后一步做了变量代换, $x = v/\sqrt{gR}$ 。最后一步的积分看似简单实际有些复杂无法用初等函数表示出来, 借助积分表可以得到,

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2} F\left(\arccos \frac{x^2-1}{x^2+1}, \frac{1}{2}\right) \quad (44)$$

其中, $F(\varphi, k)$ 是第一类椭圆函数, 定义为,

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k\sin^2\theta}} \quad (45)$$

它关于 φ 的反函数叫做振幅函数, 即如果 $u = F(\varphi, k)$, 则 $\varphi = \text{am}(u, k)$ 。利用这些超越函数, (b) 的解可以表示为,

$$v^2 = gR \frac{1 + \cos \left[\text{am}\left(F\left(\arccos \frac{v_0^2 - gR}{v_0^2 + gR}, \frac{1}{2}\right) + 2\mu\sqrt{\frac{g}{R}}t\right) \right]}{1 - \cos \left[\text{am}\left(F\left(\arccos \frac{v_0^2 - gR}{v_0^2 + gR}, \frac{1}{2}\right) + 2\mu\sqrt{\frac{g}{R}}t\right) \right]} \quad (46)$$

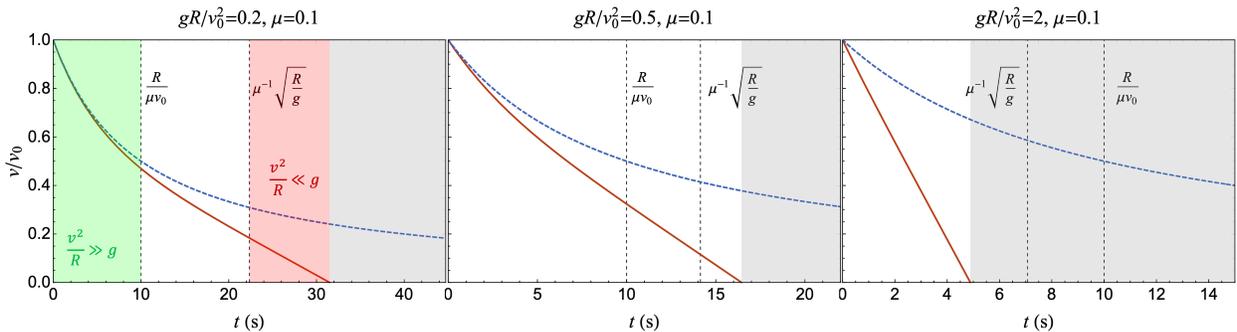


图 26. 比较 (a)、(b) 问的解。当 $gR \ll v^2$ 时, 小球的运动接近于 (a); 当 $gR \gg v^2$ 时, 小球的运动接近于匀减速运动。 $t = t_T$ 时刻, 小球停止运动。

小球的运动特征如上图所示。当 $v \gg \sqrt{gR}$ 时, 重力可以忽略, 小球的运动接近于 (a), 即按照 $1/(1 + \mu v_0 t/R)$ 减速; 当 $v \ll \sqrt{gR}$ 时, 向心力可以忽略, 小球的运动接近于匀减速运动。 $t = t_T$ 时刻, 小球停止运动。停止时间 t_T 为,

$$t_T = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{R}{g}} \left[F\left(\pi, \frac{1}{2}\right) - F\left(\arccos \frac{v_0^2 - gR}{v_0^2 + gR}, \frac{1}{2}\right) \right] \quad (47)$$

§ 4. 常微分方程求解 *

运用牛顿第二定律, 经过化简之后最终所要求解的问题形式一般为一个常微分方程, 形如:

$$x''(t) = F(x, x', t) \quad (48)$$

这是一个二阶微分方程。对于保守系统, 利用能量守恒可以把二阶微分方程化简为一阶微分方程,

$$G(x, x', t) = 0 \quad (49)$$

或者, 进一步将 x' 表示出来,

$$x' = \Phi(x, t) \quad (50)$$

常微分方程求解没有统一地求解方法。这里列举几类基本的求解方法。除此之外, 有一些方程虽然比较复杂, 但可以通过变量代换以后采用这里的方法求解。需要指出力学课程不涉及过于复杂的常微分方程的求解。

1. 直接积分法 如果常微分方程

$$x' = \Phi(x, t) \quad (51)$$

可以写成全微分的形式, 即 $\Phi(x, t) = -F'_t/F'_x$

$$F'_x(x, t)dx + F'_t(x, t)dt = 0 \quad (52)$$

可以通过直接积分得到解 (隐函数解):

$$F(x(t), t) = C \quad (53)$$

特别是, 如果能够分离变量, $\Phi(x, t) = f(t)/g(x)$,

$$g(x)dx = f(t)dt \quad \Rightarrow \quad \int g(x)dx = \int f(t)dt \quad (54)$$

两边积分可以得到方程的解。此时需要注意初始条件的确认。这相当于取

$$F(x, t) = \int f(t)dt - \int g(x)dx \quad (55)$$

2. 一阶线性常微分方程 一阶线性常微分方程是指形如：

$$x' = a(t)x + b(t) \quad (56)$$

的方程。

齐次一阶线性常微分方程或者一阶线性常系数常微分方程可以通过前面的直接积分方法得到。例如，

$$x' = a(t)x \Rightarrow x(t) = Ce^{\int a(t)dt} \equiv Ce^{A(t)} \quad (57)$$

为了求解 (56)，可以采用常数变异法，即取 (57) 中的 C 为某一个待定函数而非常数，并代入非齐次方程得到，

$$C'e^{A(t)} = b(t) \Rightarrow C(t) = \int e^{-A(t)}b(t)dt \quad (58)$$

最终，一阶线性常微分方程 (56) 的通解为，

$$x(t) = x_0e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau \quad (59)$$

3. 常系数常微分方程 一般而言，常系数常微分方程总是可以求解的。这里主要讨论力学上比较有用的二阶常系数常微分方程，

$$x'' + bx' + c = 0 \quad (60)$$

其中， b, c 是常数。这个方程的解与二次方程有关：

$$x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad (61)$$

根据根的情况，分情况讨论：

1. $b^2 - 4c > 0$ (有两个实根的情况)：

$$x(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} \quad (62)$$

2. $b^2 - 4c < 0$ (有两个复根的情况) : 将两个复根记为, $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = e^{\alpha t} [c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)] \quad (63)$$

3. $b^2 - 4c = 0$ (有重根的情况) :

$$x(t) = e^{rt} [c_1 + c_2 t] \quad (64)$$

数值方法

§ 5. 非惯性参考系

牛顿三大定律仅在惯性参考系成立。因此, 在经典物理中, 我们应当优先选择惯性参考系来考察力学问题。但是, 在很多情况下, 选择惯性系并不是最方便的选择。例如, 地球本身在自转, 角速度为 $\Omega = \frac{2\pi}{T_d} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ 。当以地球-太阳为参考系时, 地日系统也在选择, 角速度为 $\Omega = \frac{2\pi}{T_y} = 2 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$ 。在考虑精确测量、或者大尺度物理效应时, 这些效应会显示出来。

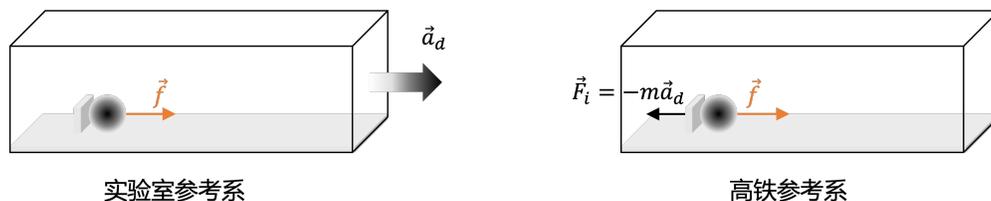


图 27. 平动加速参考系

1. 平动加速参考系 $\overline{OO'}$ $\vec{OO'} = \vec{d}$, $\vec{v}_d = \dot{\vec{d}}$, $\vec{a}_d = \dot{\vec{v}}_d$ ——牵连速度、牵连加速度。

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{d}$$

速度与加速度:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_d$$

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_d$$

惯性定律不再成立, 牛顿第二定律也不再成立。但是可以引入惯性力 (inertial force, 又叫做虚拟力 fictitious force、pseudo force、d'Alembert force) 使得牛顿第二定律仍然成立。

$$\vec{F} = m\vec{a}, \Rightarrow \vec{F}' = m\vec{a}', \quad \vec{F}' = \vec{F} - m\vec{a}_d = \vec{F} + \vec{F}_i$$

其中: $\vec{F}_i = -m\vec{a}_d$ 叫做惯性力。

【例子】 加速的高铁上的水杯

我们这里不加证明地预先用到了理想流体的一个性质, 即理想流体不能承受剪切力, 否则就会沿着剪切方向发生流动。因此在流体静止参考系, 其表面的合力一定是垂直于流体表面的。

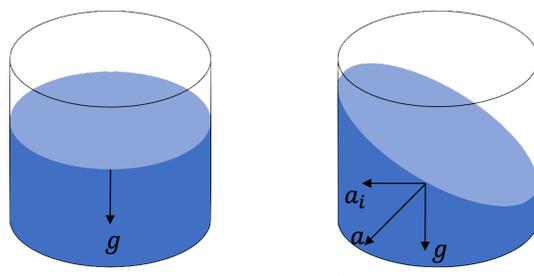


图 28.

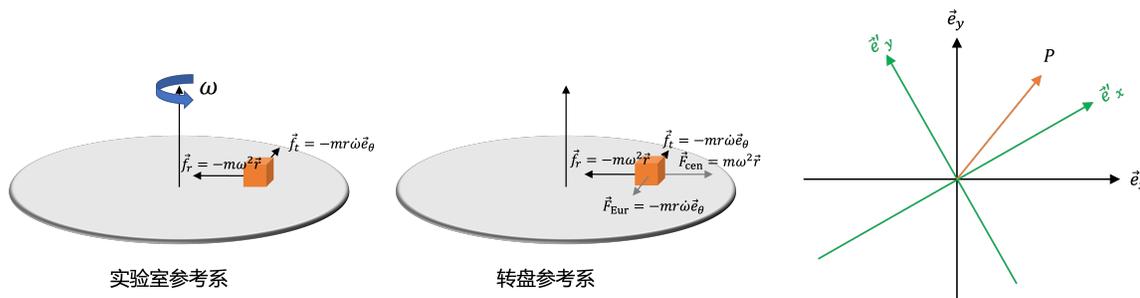


图 29. 转动参考系的坐标

2. **转动参考系** 首先, 我们考虑一个简单却不失一般性的情况。 K 是个惯性参考系, K' 与 K 原点重合, 且相对于 K 在转动, 转动轴为 z 方向, 如图所示。

参考系 K' 包括其所有的点都在相对于 K 旋转。例如, K' 里静止的一个点 P , 在 K 看来也在运动, 且做匀速圆周运动。加速度为,

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

另一方面, 质点在参考系 K' 中加速度为 $\vec{a}' = 0$,

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_d = 0$$

这里, \vec{a}_d 是参考系 K' 的牵引加速度。很显然, $\vec{a}_d = -\omega^2 \vec{r}$ 。相应的惯性力为, $\vec{F}_i = -m\vec{a}_d = m\omega^2 \vec{r}$ 叫做离心力。换句话说, 在一个匀速旋转参考系 K' 静止的质点, 会感受

到一个离心惯性力。这个力需要由额外的力（如摩擦力、支撑力）来平衡。从 K 来看，质点 P 在做匀速圆周运动，而这个额外的平衡力实际上提供了向心加速度。

【例子】牛顿水桶实验

考虑一桶水以角速度 ω 旋转，求桶内水面的形状。已知水桶的半径为 R ，桶内的水足够深。

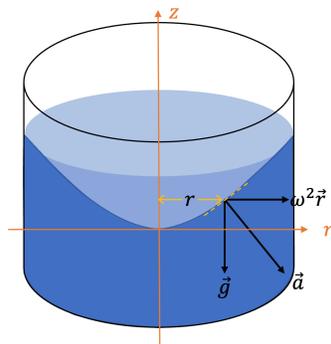


图 30. 牛顿水桶实验

在水桶参考系，有离心力和重力。液体可以承受压力但不能承受剪切力，因此平衡状态下，水面与合力的方向垂直。因此，

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dr} &= \tan \alpha = \frac{\omega^2 r}{g} \\ \Rightarrow z &= \frac{\omega^2 r^2}{2g} \end{aligned}$$

因此液面形状为抛物线。

【例子】离心分离机、人造重力、过山车

3. 一般转动参考系 如果参考系是加速转动的，则相对于参考系静止的质点相对于实验室参考系还会多一个角向加速度： $\vec{a}_d = r\dot{\omega}\vec{e}_\theta$ 。这个加速度仍需要外力还提供。在旋转参考系中，为了保持力平衡，需要引入另外一个惯性力， $\vec{F}_i = -r\dot{\omega}\vec{e}_\theta$ 。这个力叫做欧拉力。

我们下面考虑最一般的情形，在惯性参考系中质点运动的情形。在参考系 K ，质点的加速度为，

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta \quad (65)$$

类似地，在参考系 K' 中，质点的一般运动的加速度为，

$$\vec{a}' = (\ddot{r}' - r'\dot{\theta}'^2)\vec{e}'_r + (r'\ddot{\theta}' + 2\dot{r}'\dot{\theta}')\vec{e}'_\theta \quad (66)$$

两个参考系之间的变换采用伽利略变换，即

$$\begin{aligned} t' &= t \\ \vec{r}' &= \vec{r}, \Rightarrow r' = r, \vec{e}'_r = \vec{e}_r, \vec{e}'_\theta = \vec{e}_\theta \\ \theta' &= \theta - \Theta \Rightarrow \dot{\theta}' = \dot{\theta} - \omega \end{aligned}$$

从而，

$$\begin{aligned} \vec{a}_d &= \vec{a} - \vec{a}' \\ &= -\omega^2 \vec{r}' + 2\omega \dot{r}' \vec{e}'_\theta - 2\omega \dot{\theta}' \vec{e}'_r + r' \dot{\omega} \vec{e}'_\theta \\ &= \omega \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' \end{aligned}$$

坐标架无关的形式：引入矢量 $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ 。

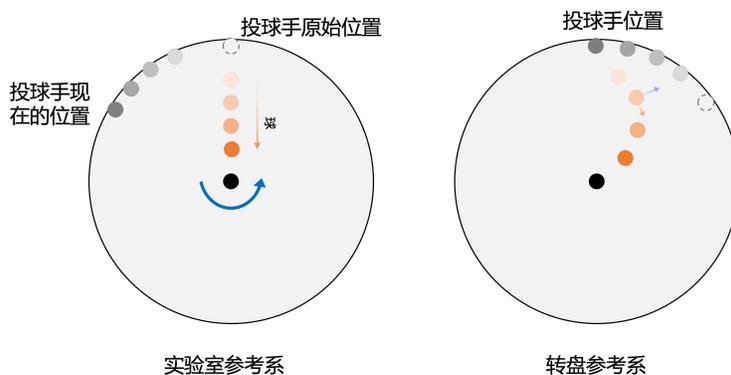


图 31. 转动参考系的科里奥利力

相应的惯性力为，

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= -m\omega \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' \\ &= \vec{F}_{\text{cen}} + \vec{F}_{\text{Cor}} + \vec{F}_{\text{Eur}} \end{aligned}$$

三个力： $\vec{F}_{\text{cen}} = -\omega \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ 离心力 (centrifugal force)， $\vec{F}_{\text{Cor}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$ 科里奥利力 (Coriolis force)， $\vec{F}_{\text{Eur}} = -m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$ 欧拉力 (Euler force)。也就是说，牵引加速度和惯性力都与质点坐标有关。

【例子】抛物线转盘可以用来演示科里奥利力的效果，图 31。

【例子】科里奥利流量计 (Coriolis mass flowmeter)

如图 32所示，科里奥利流量计为一段 U 形弯管，接到待测流体上。这段弯管在驱动力

的作用下绕中心轴转动，角速度为 ω 。在弯管静止的参考系，流体收到一对科里奥利力的作用，因此以反作用会施加到弯管上。这对反作用力会使得弯管略微弯曲。而这一效应可以通过探测器检测出来。弯管弯曲程度与单位时间内通过横截面的质量有关（质量流量 $q = \rho Av$ ）。

注意，科里奥利力与 ω 有关，但并不要求 ω 为常数（即匀速圆周运动）。现代科里奥利流量计即利用这一点，将 θ 取为三角函数。这可以通过激发 U 形管的本征模来实现。这样以来， $\omega = \dot{\theta}$ 与 U 形管的本征振动差 $\pi/2$ 的相位。科里奥利力引起的策动力与 ω 成正比，因此，策动力与 U 形管的本征振动会差一个相位。这个相位正比于流体质量流量，即

$$\tan \varphi = \frac{Kq}{f}$$

其中， f 是振动频率。 K 是 U 形管的弹簧常数。这个相位很容易通过电信号差分得到。因此，科里奥利流量计可以高精度获得流体的质量流量。

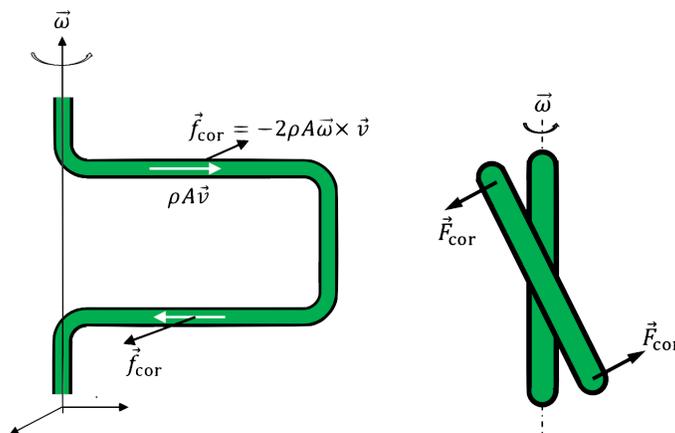


图 32. 科里奥利流量计

对比科里奥利力与洛伦兹力， $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ ，可以将非惯性系的角速度与回旋角速度做类比 $\vec{\omega} \sim q\vec{B}/2m \equiv (1/2)\vec{\omega}_c$ 。

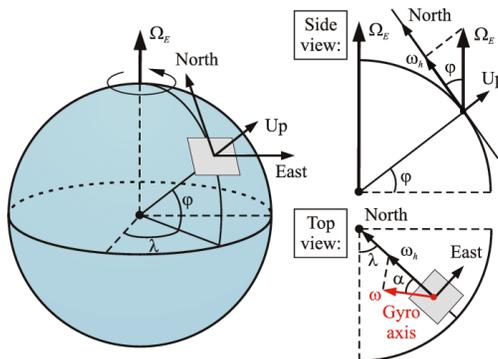


图 33. 地球坐标

4. 地球上的非惯性力 地球的自转角速度: $\Omega \approx \frac{2\pi}{T} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$, $R \approx 6400 \text{ km}$ 。所对应的 $a_{\Omega} = \Omega^2 R \approx 3.4 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ 。

地球由于自旋, 也是一个非惯性参考系。因此, 以地球为参考系时, 需要考虑离心力和科里奥利力。这两个力会带来非常重要的效应。

离心力导致有效的重力加速度随着纬度改变, 方向也不完全指向地心:

$$\begin{aligned} g' &= \sqrt{(g - \Omega^2 R \cos \alpha \cos \alpha)^2 + (\Omega^2 R \cos \alpha \sin \alpha)^2} \\ &= \sqrt{g^2 + \Omega^4 R^2 \cos^2 \alpha - 2g\Omega^2 R \cos^2 \alpha} \\ &\approx g - \Omega^2 R \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

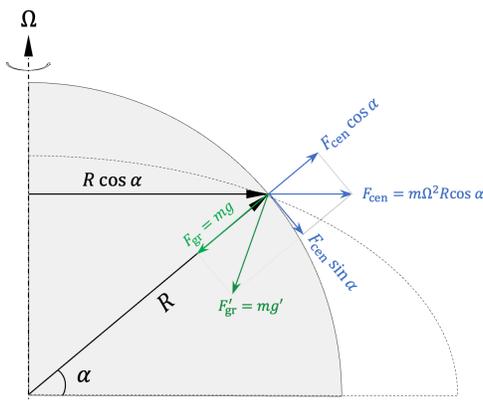


图 34. 地球引力与离心力

科里奥利力导致地表运动的物体受到一个平行于地面且垂直于运动方向的偏向力。根据图 35, 地表物体所受到的科里奥利力沿着地表方向的分量为,

$$F_{\text{Cor}} = m2\Omega v \sin \alpha \quad (67)$$

其中, α 为物体的纬度 (赤道的纬度为 0° , 北极的纬度为 90°)。

【例子】赤道隆起 (equatorial bulge - 赤道地球直径比两极直径大 43 km)

【思考】快速旋转的星球的形状是什么样的?

【例子】大尺度大气运动、大尺度海洋运动

如图 36所示, 科里奥利力还导致气旋的形成、盛行风带 (信风、季风) 和洋流的形成。

我们来分析一下, 哪些现象科里奥利力起作用呢? 假设科里奥利力提供了气旋或洋流

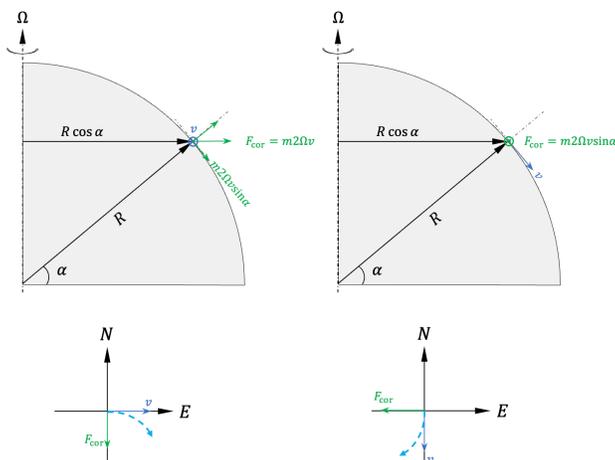


图 35. 科里奥利力

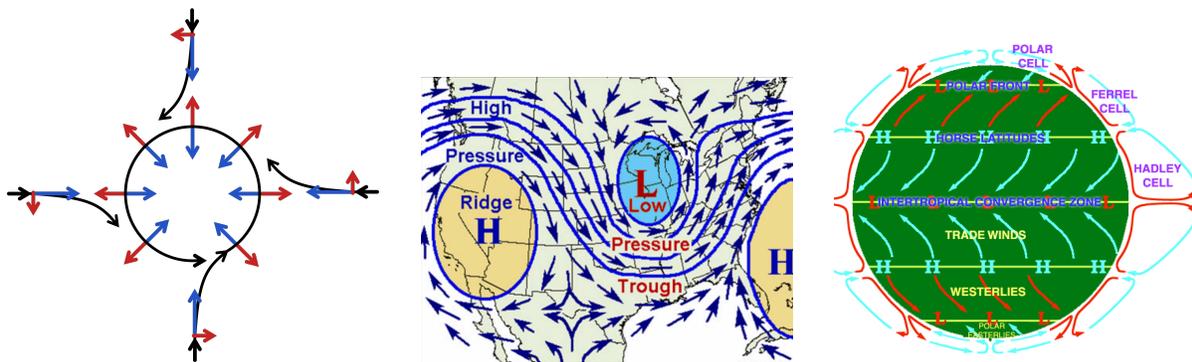


图 36. (左) 科里奥利加力 (红色) 与气旋 (黑色) 的形成。蓝色是压力梯度方向; (中) 气象图。在科里奥利力的作用下, 空气沿着等压线运动; (右) 全球空气循环受科里奥利力的影响形成

的向心加速度:

$$2\Omega_E v \sin \alpha = \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{v}{2\Omega_E \sin \alpha} \quad (68)$$

罗斯比数 (Rossby number) 定义为向心力与科里奥利力的比,

$$Ro = \frac{v^2/r}{2\Omega_E v \sin \alpha} = \frac{v}{2\Omega_E r \sin \alpha} \quad (69)$$

如果一个现象的罗斯比数约等于 1, 说明科里奥利力起主导作用; 如果罗斯比数远大于 1, 说明科里奥利力无法平衡所需要的向心力, 因此需要其他机制。表 II 列举了不同现象的罗斯比数。可见地球上大范围的现象 (图 37) 一般受到科里奥利力的影响。龙卷风、水槽中的涡流等局部现象受科里奥利力的影响很小。

【例子】落体偏东

表 II. 不同现象的罗斯比数 Ro

现象	速度	半径	$Ro = v/(2\Omega_E \sin \alpha r)$
龙卷风	50 m/s	100 m	5000
台风	30 m/s	100-1000 km	0.1-10
风	10 m/s	100 km	1
洋流	10 cm/s	1 km	1
水槽中的涡旋	1 cm/s	10 cm	1000

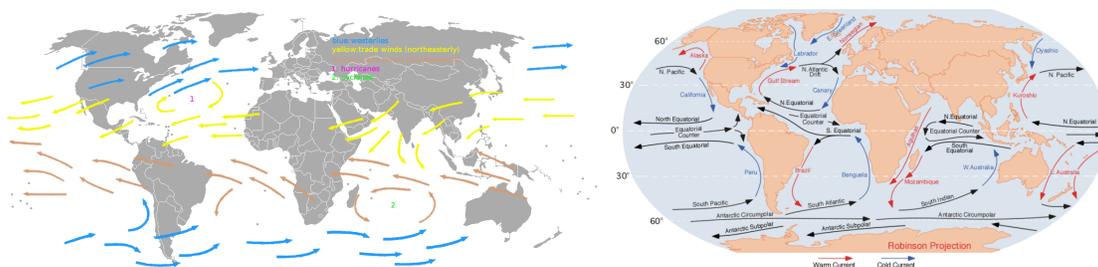


图 37. 地球上的盛行风带和洋流循环。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\Omega \cos \alpha z = 2\Omega \cos \alpha gt$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{3}\Omega gt^3 \cos \alpha = \frac{1}{3}\Omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}$$

其中, $z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2$, 或者, $\dot{z} = -gt$ 。

赤道附近百米高空下落: 偏离 2 厘米。赤道附近 5000km 高空下落 (如导弹): 偏离 250 km, 因此洲际导弹必须要考虑科里奥利效应。

【例子】傅科摆 (Foucault pendulum)

悬挂在北极的摆: 24 小时摆面旋转一圈。其他纬度呢?

极坐标:

$$\begin{cases} r = r_0 \sin \omega t \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = a_\theta = -2\Omega \sin \alpha \dot{r} \end{cases}$$

注意到, $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$, $2r\dot{r} = \frac{d}{dt}r^2$, 上式可以写成,

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = -\Omega \sin \alpha \frac{d}{dt}r^2 \Rightarrow \cancel{r^2}\dot{\theta} = -\cancel{r^2}\Omega \sin \alpha$$

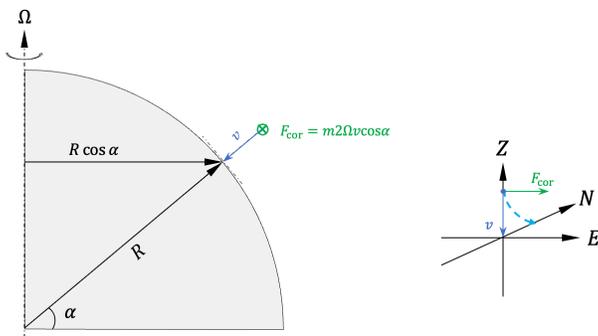


图 38. 自由落体受到的科里奥利力

因此，摆面将会以 $-\Omega \sin \alpha$ 角速度进动。

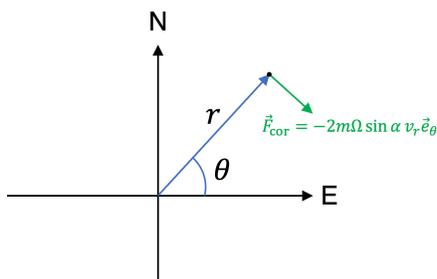


图 39. 傅科摆在地面坐标系的受力分析

如何从几何的角度来理解这个问题。由于惯性，摆面所定义的向量在空间相对于远处恒星取向保持不变。以地球为参考系不动，恒星旋转一周。向量沿着球面纬线平行移动一圈以后，与原始向量差角度： $\Delta\theta = \Omega \sin \alpha \Delta t$ 。

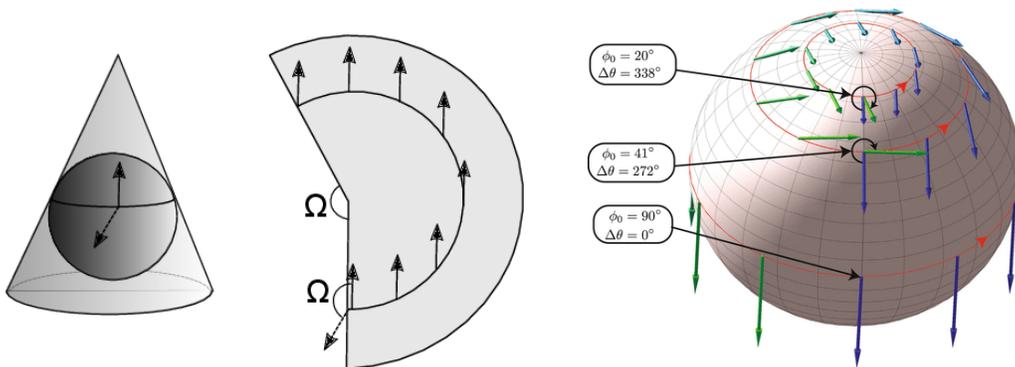


图 40. 球面上的向量的平行移动

5. 潮汐 根据壳层定理，两个球之间的引力等价于位于球心的等质量质点之间的引力。一个很自然的问题是，是否在引力场中，球与质点**完全等价**？答案是否定的。这些偏离质点的引力展现为潮汐。

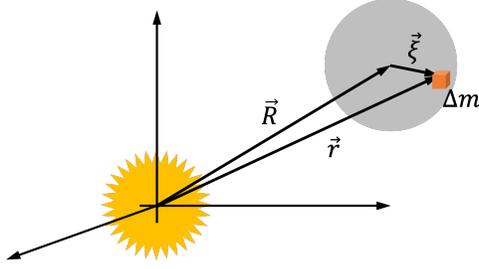


图 41. 潮汐的形成来自于引力与惯性力无法完全抵消。

考虑地球在太阳的引力作用下做圆周运动，其加速度根据壳层定理为，

$$\vec{a}_d = -\frac{GM}{R^3}\vec{R} \quad (70)$$

其中 \vec{R} 是日心到地心的相对位置矢量。当以地球为参考系时，质量为 Δm 的物体受到惯性力，

$$\vec{F}_d = -\Delta m \vec{a}_d \quad (71)$$

考虑地球上相对于地心位置矢量为 $\vec{\xi}$ 处的一个质量元 Δm ，如图 41，所受到的太阳的引力为，

$$\vec{F} = -\frac{GM\Delta m}{r^3}\vec{r} = -\frac{GM\Delta m}{|\vec{R} + \vec{\xi}|^3}(\vec{R} + \vec{\xi}) \quad (72)$$

容易看到， $\vec{F} + \vec{F}_d \neq 0$ 。残余的力叫做潮汐力，又叫做引潮力，

$$\vec{F}_{td} = \vec{F}_{gr} + \vec{F}_d = -\frac{GM\Delta m}{|\vec{R} + \vec{\xi}|^3}(\vec{R} + \vec{\xi}) + \frac{GM\Delta m}{R^3}\vec{R} \quad (73)$$

潮汐力导致潮汐的形成，地球上的潮汐主要受太阳和月球引力的影响，其中，月球影响更大。

【例子】比较月球与太阳潮汐力的大小，其中 $M_{\text{moon}} = 7.3 \times 10^{22} \text{ kg}$, $M_{\odot} = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$, $R_{\text{moon}} = 3.8 \times 10^8 \text{ m}$, $R_{\odot} = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ 。

考虑地球表面海水的一个微元，其质量为 Δm ，令 $\vec{\xi}$ 为相对于地心位置矢量。由于地日和地月距离均远大于地球半径 $R \gg \xi$ ，因此可以对潮汐力公式进行泰勒展开并保留到领头项，

$$\vec{F}_{td} \approx -\frac{GM\Delta m}{R^3}[\vec{\xi} - 3(\hat{R} \cdot \vec{\xi})\hat{R}] \quad (74)$$

因此，潮汐力 $F_{td} \propto M/R^3$ ，比较月球与太阳潮汐力的大小

$$\frac{M_{\text{moon}}}{R_{\text{moon}}^3} : \frac{M_{\odot}}{R_{\odot}^3} \approx 2.2 : 1 \quad (75)$$

因此潮汐与月相有关。

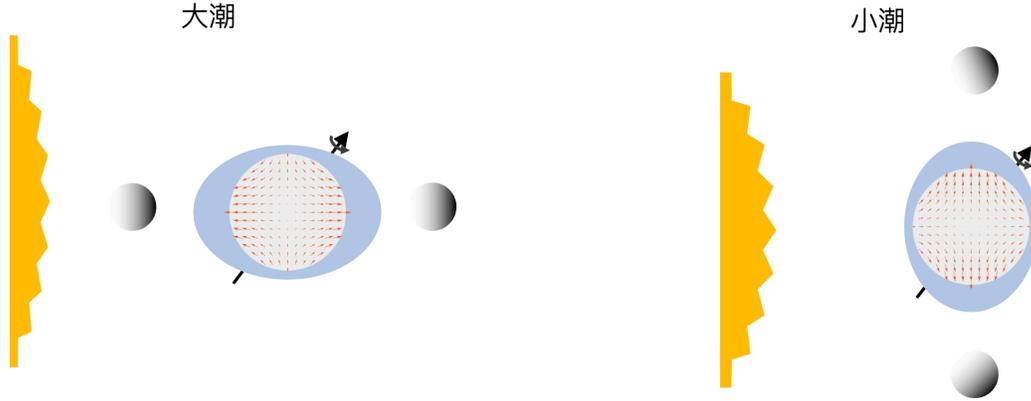


图 42. 太阳和月球引起的潮汐

【例子 *】求在月球作用下潮汐力作用下洋面的大致形状（忽略太阳引力的影响）。

合力 \vec{F} （潮汐力 \vec{F}_{td} 加上地球引力）应当垂直于洋面。在数学上，描述洋面的曲线 φ 应当满足：

$$\vec{F} = -\frac{GM\Delta m}{R^3} [\vec{\xi} - 3(\hat{R} \cdot \vec{\xi})\hat{R}] - \frac{GM\Delta m}{\xi^3} \vec{\xi} = -\Delta m \nabla \varphi \quad (76)$$

这里， $\nabla f = \vec{e}_x f'_x + \vec{e}_y f'_y + \vec{e}_z f'_z$ 。 φ 实际上就是潮汐力所对应的引力势能。到流体力学一章，我们会学习到，流体静力平衡的条件是 $p + \rho\varphi = \text{const.}$ ，其中 p 是压强， ρ 是流体密度，而流体表面是等压面，因此流体密度不发生改变时（不可压缩流体）其表面也是等势面。

如图建立直角坐标系 ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$)，容易得到势能满足：

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{GM}{R^3}x - \frac{GM}{r}, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{GM}{R^3}y - \frac{GM}{r}, \quad \frac{d\varphi}{dz} = -2\frac{GM}{R^3}z - \frac{GM}{r} \quad (77)$$

容易得到，

$$\varphi(x, y, z) = \frac{GM}{2R^3}(x^2 + y^2 - 2z^2) - \frac{GM}{r} = \text{const} \quad (78)$$

具体常数的值由海水的体积决定，如图 43所示。

【例子】洛希极限 (Roche limit)：对于较大的天体，其作用在附近小天体（卫星、小行星）的潮汐力主要由这些小天体自身的引力来平衡，当受到潮汐力超过其自身引力时，这些小天体将会被撕碎

$$F_{td, \max} \approx \frac{2GM\Delta m}{R^3}\xi \gg \frac{G\Delta m}{\xi^2}m(\xi) \Rightarrow R^3 \leq 2R_M^3 \frac{\rho_M}{\rho_m} \quad (79)$$

其中， R 为两个天体之间的距离。 R_M 为大天体的半径。即，当两个天体之间的距离小于

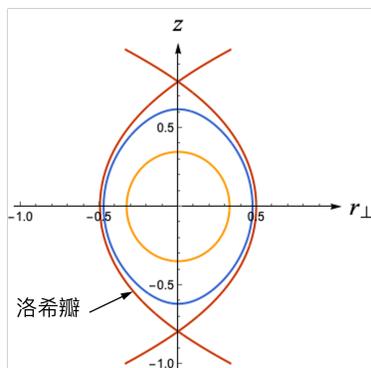


图 43. 地球海水的等势面，不同颜色的线表示不同的等势面。如果海水超过零势能面（红色）以后，等势面不再闭合，表示海水可以从地球上泄流而出，零势能面的形状叫做洛希瓣。当然，这里没有考虑海水自身的引力，并且零势能面不满足近似： $\xi \ll R$ 。

$1.26R_M[\rho_M/\rho_m]^{\frac{1}{3}}$ 时，小天体会被大天体的潮汐力所撕碎。《流浪地球》中展示了这样的情形。影片假设月球停止绕地球转动，月球撞向地球，进入地球洛希极限 (9600 km) 以后被潮汐力所撕碎。【思考】计算一下月球进入地球洛希极限的时间，已知月球平均密度为 3.34 kg/m^3 。

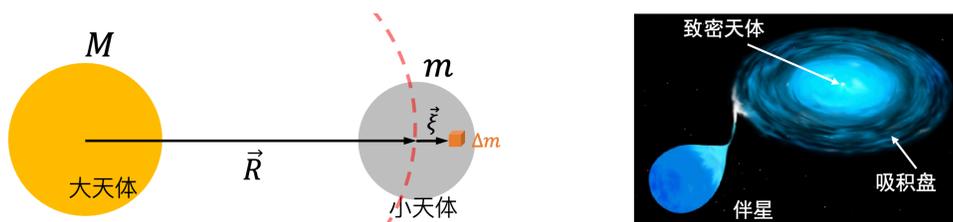


图 44.

§ 6. 伽利略相对性原理

在非惯性系，即使没有外力作用，质点的运动状态也会发生改变。所有这些都与参考系的牵连加速度有关。例如转动参考系（地球），我们可以通过测量离心力（水桶实验）和科里奥利力来测量参考系的转动角速度 ω 。一个问题是，我们是否能够测量一个参考系的绝对速度。我们来只需要考虑惯性系。

【例子】高铁平稳行驶时，你吃饭、行走、做事能否感知到高铁在高速行驶？

【例子】地球虽然有微小的角速度，但地表的线速度很大 ~ 500 米/秒，真正是「坐地日行八万里」《毛泽东诗词》。我们能否做实验测量到这一点？

伽利略在其著作《两个世界的对话》中指出，任何力学实验无法区分所在惯性参考系的

绝对速度。这一论断被称为伽利略相对性原理。这一原理表明，相对于地面运动的观察者测量到的物理规律与相对地面静止的观察者是完全相同的。伽利略的力学实验是在地球为参考系建立的。

参考系 K 和 K' 之间的坐标由伽利略变换给出：

$$\begin{cases} t' = t + t_0 \\ \vec{r}' = \vec{r} + \vec{d}_0 + \vec{u}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}' = \vec{a} \\ \Delta t' = \Delta t \\ \Delta \vec{r}' = \Delta \vec{r} \end{cases}$$

考察牛顿第一定律：在 K 中做匀速直线运动的质点，在 K' 的观察者看来仍然做匀速直线运动。因此在伽利略变换下，牛顿第一定律仍然是成立的。

现考虑两个参考系之间的动力学规律。设在 K 中，牛顿第二定律，

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

则在 K' 中， $\vec{a} = \vec{a}'$,

$$m\vec{a}' = \vec{F}.$$

现在的问题是，力的变换是什么？也就是说， $\vec{F} = \vec{F}'$ ？考虑引力，

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

仅依赖于两个质点之间的相对坐标。因此，如果我们考虑两个质点的话，力的变换是不变的。对于粒子之间的一般基本相互作用来说，其相互作用力与粒子之间的相对位置 $\Delta\vec{r}$ 或相对速度 $\Delta\vec{v}$ 有关。而在伽利略变换下，相对位置 $\Delta\vec{r}$ 和时间间隔 Δt 以及相对速度是不变的，因此，只要包含所有需要考察的质点，即考虑一个闭合系统（孤立系统），力在伽利略变换下也是不变的。换句话说，孤立系统不同参考系得到的力也是相同的。

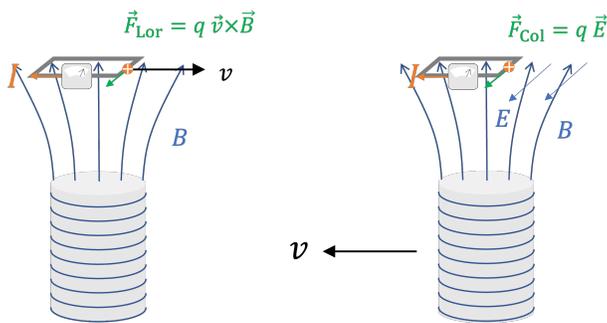
当然，我们无法穷举所有力的情形。但我们可以假设，闭合系统的牛顿定律在伽利略变换下是不变的，也就是说，牛顿定律在所有惯性参考系都是成立的。这就是伽利略相对论性原理。

伽利略相对性原理告诉我们，相互匀速运动的参考系是动力学意义上等价的。我们把所有动力学意义上等价的参考系（即所有两两之间相互匀速运动的参考系）构成的集合叫做动力学意义上的参考系等价类。由于在任意两个惯性参考系中的动力学规律都是相同的，因此在其中做相同的实验，得到的结果是完全相同的。这说明，我们无法通过力学实验区分不同的惯性参考系（比如获得所在的惯性参考系的绝对速度）。我们只能得到不同惯性参考系之间的相对速度。

牛顿曾认为存在一个绝对静止的参考系。所有惯性系都是相对于这一参考系做匀速运动的参考系。但我们看到，根据伽利略相对性原理，这样的绝对静止的参考系是无法通过力学测量得到的。

不过，似乎有一个例外，就是洛伦兹力（带电粒子在磁场中受到的力）： $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ 。在伽利略变换下， $\vec{F}' = q'\vec{v}' \times \vec{B}' = q(\vec{v} + \vec{u}) \times \vec{B} = q\vec{v} \times \vec{B} + q\vec{u} \times \vec{B}$ 。这似乎表明，我们可以通过电磁学的实验来确定惯性系的绝对速度。

问题在哪里？参看下面的例子：



螺线管与导线圈相对运动，安培表上的读数应该是一样的。这是因为，在螺线管参考系，导线切割磁力线，电荷受到洛伦兹力， $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ 。在导线参考系，磁场运动产生一个感生电场 $\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}'$ ，因此电荷受到电场力： $\vec{F}' = q\vec{E}' = q\vec{v} \times \vec{B}' = \vec{F}$ 。

这表明，在伽利略变换下，电磁场的变换遵循，

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}, \quad \vec{B}' = \vec{B}$$

从而广义洛伦兹力 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ 是不变的²。因此我们可以将伽利略相对性原理推广到电磁学，并进一步推广到所有物理规律：任何物理规律在所有惯性参考系中的形式是相同的（强形式的伽利略相对性原理）。现代物理将相对性原理作为更加基础的出发点。

§ 7. 动力学与时空

时间和空间似乎都是无穷无尽的。它们的本质是什么？我们并不知道。但是我们可以用尺子测量物体之间的距离、用钟表测量事件之间的间隔。然后建立 3 维空间坐标系 \mathbb{R}^3 来描述物体的位置，建立 1 维的时间坐标系 \mathbb{R} ，来描述事件发生的时间。在物理上，每个坐标系都是一个参考系。

² 法拉第定律和高斯定理符合伽利略相对性原理。然而库伦定律和安培定律不满足伽利略相对性原理。

1. 时间 参考时间（时间坐标）的选择具有一定的任意性。而孤立体系的物理定律仅与时间间隔 Δt 有关，而与时间起点的选择无关，即

- 时间原点的选择 $t \rightarrow t' = t + t_0$ （时间平移不变性）

也就是说，一个孤立的体系具有时间平移不变性。

当然，上面的规律仅存在于惯性参考系（例如，作为一个反例，考虑一个变加速运动的参考系，由于惯性力在不断增加，即使是孤立体系其运动规律也不具有时间间隔不变性）。

2. 空间 空间坐标系的选择具有一定的任意性，它代表了一定的观察视角。而物理定律应该与这些选择无关。

一个孤立的体系力学量的测量仅仅依赖于质点之间的相对距离

$$\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

和相对取向 $\vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{23}$ 。而相对取向也可以用距离来表示，即 $\vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{23} = \frac{1}{2}[(\vec{r}_{12} + \vec{r}_{23})^2 - \vec{r}_{12}^2 - \vec{r}_{23}^2]$ 。数学上可以证明，保持距离不变的所有坐标系的变换都是线性的，也就是说它将直线变换成直线，并且保持直线之间的夹角。这些变换包括：

- 坐标原点的选择 $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$ （空间平移不变性）
- 坐标架取向的选择 $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = R(\vec{r})$ （空间旋转不变性）

例如，二维的情况下，

$$\begin{cases} x' = \cos \theta x + \sin \theta y \\ y' = -\sin \theta x + \cos \theta y \end{cases}$$

也就是说，一个孤立体系具有空间平移不变性和空间旋转不变性。

当然，上面的规律仅存在于惯性参考系（例如，作为一个反例，考虑一个匀速旋转的参考系——地球！这个参考系存在一个特殊的方向，其物理规律如傅科摆与其他方向是不同的）。

在物理上，上面的这些保持物理定律不变的变换叫做对称性。在数学上，定义了 3 维欧几里得距离的坐标空间构成一个 3 维欧几里得空间。

还存在非欧几里得空间，例如球面上的点构成的集合 S^2 。它具有不同的对称性。

3. 时间与空间——时空 由于物理规律的特性，物理学空间是一个 3 维欧几里得空间。类似地，物理学时间是一个 1 维欧几里得空间。

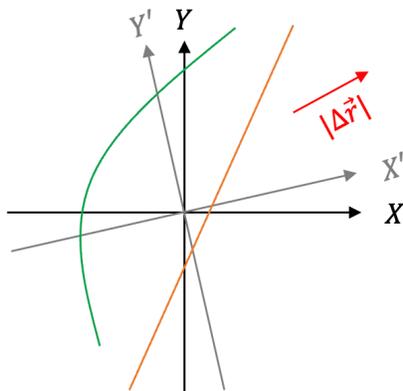


图 45. 旋转不变性



但是空间平移不变性、旋转不变性以及时间平移不变性并不足以完全描述物理定律的不变性。伽利略相对性原理告诉我们，经典力学的时空还存在一类变换，保持物理定律的不变——即参考系的变换。伽利略变换是否能用上面的几何方法来描述呢？实际上是可以的，但我们需要将时间和空间放在一起考虑 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ ，也就是说，伽利略变换是一种时空变换（混合时间与空间）：

$$\begin{cases} t' = t + t_0 \\ \vec{r}' = R\vec{r} + \vec{u}t + \vec{a}, \end{cases}$$

伽利略相对性原理要求伽利略变换将 3+1 维时空的直线（匀速直线运动）变换成 3+1 维时空的直线。我们可以将伽利略变换与时间平移、空间平移、旋转放到一起，构成一个大的时空变换，叫做广义伽利略变换，或者叫做广义伽利略对称性，（数学上所有这些对称性构成一个群，叫做伽利略群）。伽利略相对性原理推广为，孤立系统的物理定律在广义的伽利略变换下是不变的。类似与转动的情形，我们可以在时空 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ 中定义一个广义的“距离”，

$$\Delta s^2 = \begin{cases} \Delta t^2 & \text{iff } \Delta t \neq 0 \\ \Delta \vec{r}^2 & \text{iff } \Delta t = 0 \end{cases}$$

广义伽利略对称性为保持该“长度”不变的所有可能的坐标变换。

在狭义相对论中，闵可夫斯基时空定义的“距离”是，

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \vec{r}^2$$

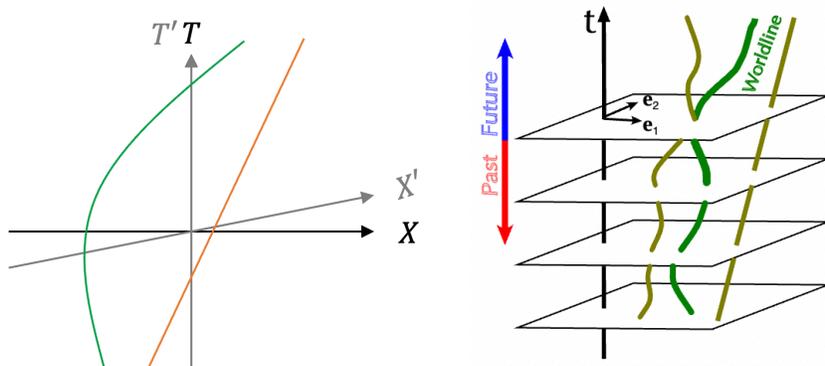


图 46. 伽利略-牛顿时空

保持该距离不变的所有变换（即对称性）叫做庞加莱对称性，包括了时空平移不变性、空间转动不变性和洛伦兹变换。在闵可夫斯基时空中的物理定律与牛顿力学有显著不同（后面会讲）。



4. 牛顿绝对时空 对于时空与物质的关系，有两种观点。一种观点认为，时空是一种独立于物质的客观存在（舞台）。时空的几何，决定了对称性，进一步决定了物质运动规律（物理定律）。这种观点以牛顿为代表。牛顿进一步认为，时间是绝对的存在，它与空间无关。还存在一个绝对的空间。绝对空间是一个静止的惯性参考系，所有其他惯性参考系都是相对于该绝对空间做匀速直线运动的参考系。任何非惯性参考系都是相对于绝对时空做非惯性运动的参考系。

牛顿力学可以很方便的在绝对时空中表达。因为绝对时空挑出了一个特殊的参考系，在这个参考系，牛顿定律具有最简单的形式。你可以想象在宇宙中存在一个巨大的坐标架和时钟。

那么该如何区分不同的参考系呢？牛顿提出了一个有名的水桶实验。

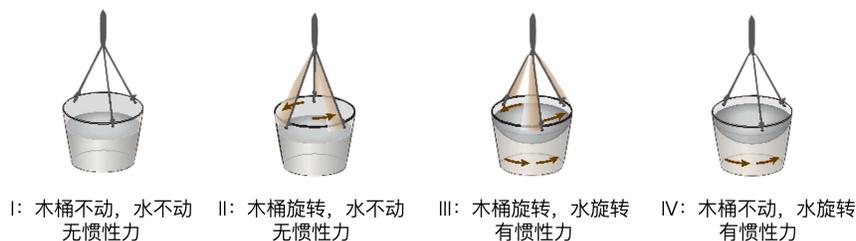


图 47.

考虑一个水桶装着半桶水，水桶和水都静止，水面是水平的。某一时刻开始，水桶开始旋转，开始的阶段由于惯性水处于静止状态，水面仍然维持水平。过了一段时间以后，由于水桶和水之间的摩擦，水开始随着水桶一起旋转。这时候水面变得凹下去。如果此时水桶停止旋转，水由于惯性继续旋转，水面仍然维持凹下去的形状。

分析水和水桶运动的几个阶段：

- I 水桶静止、水静止，水相对于水桶静止——没有惯性力
- II 水桶旋转、水静止，水相对于水桶旋转——没有惯性力
- III 水桶旋转、水旋转，水相对于水桶静止——有惯性力
- IV 水桶静止、水旋转，水相对于水桶旋转——有惯性力

可见，牛顿总结道，水是否受到惯性力的影响，与水与水桶本身的相对运动无关，仅仅与水的绝对运动有关。这个绝对运动，牛顿认为，就是水相对于绝对参考系（绝对时空）的运动。

- 时空不是独立的客观存在。时间只不过是事件发生的先后次序，空间只不过是物体之间的相对位置。
- 时空是一种独立于物质的客观存在。时空的几何决定了对称性，进一步决定了物质运动规律。



图 48. 牛顿 vs 莱布尼茨：几何与代数

第二种观点认为，时间和空间不是独立的客观存在。时间只不过是事件发生的先后次序，空间只不过是物体之间的相对位置。除了物质以外，并没有额外的作为客观存在的时间与空间。因此所有运动都是相对的。换句话说，如果没有参考物，我们无法确定物体的速度和加速度。这种观点认为物理定律决定了对称性，也就是时空的几何。这一观点以莱布尼茨为代表。

莱布尼茨利用伽利略相对性原理指出，牛顿的绝对时空并没有任何可以观测的效应。所有惯性系本身是等价的，并不存在一个更特殊的惯性系。但是相对于一般参考系来说，惯性系还是比较特殊的。

马赫提出牛顿水桶实验中，产生惯性力的情况，其实是水相对于远处恒星在运动。假如如图 49 所示，水桶壁足够厚，以至于水桶对于水的影响超过了远处恒星，那么当水相对于

远处恒星静止但相对于水桶旋转时，仍然会有惯性力的产生。因此马赫认为远处的大质量分布，影响局域的物理定律（例如惯性）。



图 49. 马赫的水桶实验

【例子】傅科摆

牛顿：地球相对于绝对参考系在转动（绝对转动），因此傅科摆受到非惯性力的牵引，从而摆面产生进动。

马赫：地球相对于远处恒星在转动（相对转动），可以视为地球是静止的，（傅科摆消除了地球对摆面的影响）摆面受到远处恒星作用的牵引，从而摆面产生进动。

【例子】甩臂实验，站在地面上转动，手臂会感受到牵引力，同时能仰头看到漫天繁星的转动：

牛顿：人相对于绝对惯性系在（绝对转动），因此手臂受到非惯性力的牵引。

马赫：人相对于满天繁星在转动，因此手臂受到满天繁星的牵引。

马赫的这些想法有时候又被称为马赫原理或马赫效应。对于大质量天体影响局域动力学定律这一点（参考系曳引），在 2011 年，已经通过 Gravity Probe B 实验得到了证实。

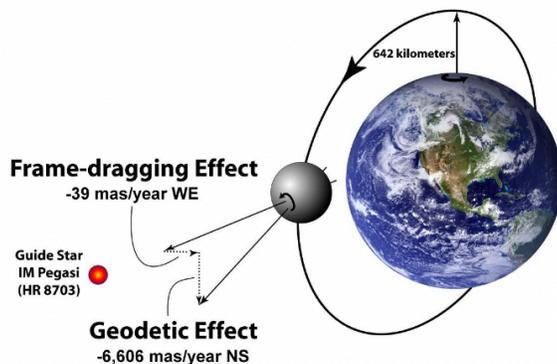


图 50. Gravity Probe B 实验示意图。

在莱布尼茨-马赫的表述中，牛顿所谓的绝对惯性参考系，实际上是以远处的恒星作为参考系——这也正是我们现今的办法。

那么，到底哪一种观点正确呢？都有正确的地方，也都有不正确的地方，而且是进一步辩论中的问题。马赫效应已经包含着广义相对论中了。但是时空是否能够脱离物质存在

呢？换句话说，有没有一个紧致而不含物质的空间（真空），但其上的引力却不等于零？这个问题最终由数学家在 1976 年解决（丘成桐）。但是这仍然不是物理学家的终极目标。物理学家进一步提问，时空与物质有没有可能是同源的？也就是说，时空有没有可能从物质中衍生出来？（莱布尼茨）抑或量子物理的定律其实是时空几何决定的（牛顿）？这些问题目前还没有答案。
