

第九章：狭义相对论

§ 1. 历史背景

牛顿力学取得了巨大成功。尽管如此，牛顿力学还存在着一些挑战。其中，牛顿力学面临的哲学上的挑战包括：

- 马赫原理：远处的大质量分布，影响局域的物理定律；
- 牛顿力学允许超距作用：例如，万有引力
- 牛顿认为存在绝对时空：
 - 伽利略相对性原理：绝对惯性参考系不具有可测量效应——不需要绝对惯性系
 - 惯性系与非惯性系的物理规律不同：水桶实验

需要指出，这些哲学上的挑战并不构成对于牛顿力学本身的实质性威胁。因为物理学的研究都是从一定的假设出发进行逻辑推演与实验验证。

随着电磁学的发展，人们发现电磁学规律与牛顿时空观（特别是伽利略相对性原理）产生的矛盾，这是由于电磁学规律在伽利略变换下并不是不变的。其中，法拉第定律和高斯定律是伽利略不变的，而库伦定律和安培定律不是伽利略不变的。

弱形式的伽利略相对性原理：力学定律在惯性参考系中保持相同的形式

强形式伽利略相对性原理：所有物理定律在惯性参考系中保持相同的形式

洛伦兹力（带电粒子在磁场中受到的力）：

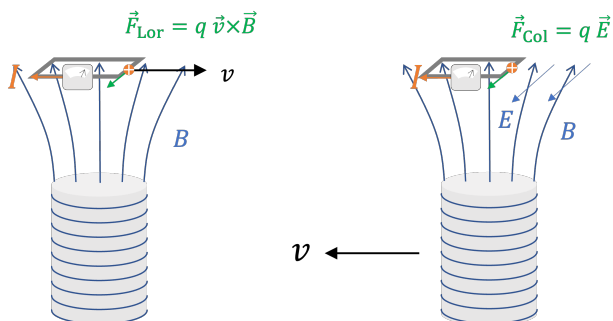
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

在伽利略变换下，

$$\vec{F}' = q'\vec{v}' \times \vec{B}' = q(\vec{v} + \vec{u}) \times \vec{B} = q\vec{v} \times \vec{B} + q\vec{u} \times \vec{B} \quad (2)$$

这似乎表明，我们可以通过电磁学的实验来确定惯性系的绝对速度。问题在哪里？参看下面的例子：

螺线管与导线圈相对运动，安培表上的读数应该是一样的。这是因为，在螺线管参考系，导线切割磁力线，电荷受到洛伦兹力， $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ 。在导线



参考系，磁场运动产生一个感生电场 $\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}'$ ，因此电荷受到电场力： $\vec{F}' = q\vec{E}' = q\vec{v} \times \vec{B}' = \vec{F}$ 。

这表明，在伽利略变换下，电磁场的变换遵循，

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}, \quad \vec{B}' = \vec{B}$$

从而广义洛伦兹力 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ 是不变的。但是， $\vec{u} \times \vec{B}$ 所对应的电场是无源的并不对应电荷，因此库伦定律在伽利略变换下不是不变的。

针对于这个问题，人们提出了几种解决方案：

1. 电动力学即麦克斯韦方程 (1871) 有错误——正确的电动力学理论应该满足伽利略不变性
2. 强形式的伽利略相对性原理不正确——电磁学规律定义在一个特殊参考系 (介质)，类似于声波和水波——光以太 (luminiferous ether)
3. 强形式的伽利略相对性原理正确，但伽利略变换不 (完全) 正确

1900 年左右，以菲涅尔 (光学权威)、斯托克斯 (流体力学权威)、洛伦兹 (电磁学权威) 为代表的绝大多数物理学家都认为第二种可能性最大，牛顿力学和电动力学的巨大成功第一、三种可能性几乎不被考虑。应当指出，实际上当时绝大多数科学家对这个问题并不太关心，因为人们更多地关心应用而不是这些形而上的哲学讨论。但是当解决方案被明确化为确定电磁场的介质时，这个问题成为了一个明确地、可以通过测量解决的问题，即需要测量地球相对于光以太的速度来确定地球上的电磁学规律。同时，光以太还与牛顿的绝对空间论相结合，即光以太是绝对静止的，它定义了绝对空间，所有运动都是相对于以太的运动。

1810 年，阿拉果¹首先利用光行差现象测量光在介质中折射率的改变。所谓光行差是指运动的观测者观察到光的方向与同一时间同一地点静止的观测者观察到的方向有偏差的现

¹ 多米尼克·弗朗克·让·阿拉果 (Dominique François Jean Arago), 1786–1853, 法国天文学家、数学家和物理学家。他有名的工作之一是发现圆盘后的衍射亮斑，如今称为柏松-阿拉果亮斑。



爱因斯坦 (1905年)

象。这一现象可以通过光相对于介质传播的速度是有限的来解释。阿拉果在望远镜中加入一块玻璃棱镜。当星光进入玻璃棱镜时，由于光相对于以太速度与玻璃棱镜（地球）相对于以太速度的矢量叠加，不同方向的星光在玻璃中的速度是不同的，因此折射率也会发生改变。因此通过对比直接入射的星光，可以测量到折射率的改变，这样就测量到不同方向光速的不同。然而，实际实验中阿拉果并没有观察到不同方向光速的不同。阿拉果感到大惑不解，并将这一结果告知了当时光学界的权威菲涅尔。菲涅尔提出，这是因为以太并非绝对静止。运动的介质会部分地拖拽以太，其中拖拽速度为 $v_{\text{drag}} = (1 - n^{-2})v$ ，这里 v 是介质的绝对运动速度， n 是介质的折射率。这就是所谓的以太曳引理论。

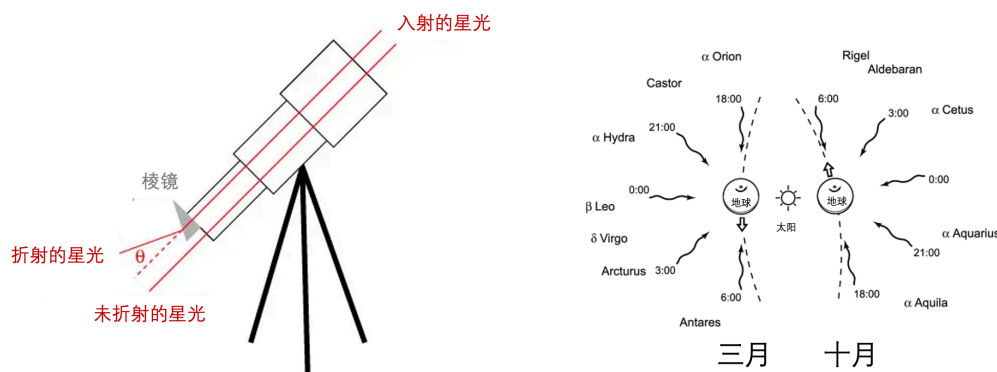


图 1. 阿拉果实验示意图

为了检验以太曳引力论，1851 年菲索²测量光在高速运动介质中的速度。如图所示，菲索将光通过半透半反射镜片分束以后分别通过流动方向相反的液体，由于以太被拖拽，两束光相对于实验室参考系的速度分别为 $c/n \pm v_{\text{drag}}$ ，这一差异会引起两条光路之间的光程差，从而产生干涉。菲索测量了干涉条纹的移动，发现实验结果与菲涅尔的部分曳引理论预言符合的非常好。当然，菲涅尔的理论有一些问题，比如，不同频率的光在介质中的折射率是不同的，这似乎表明以太在介质中会以不同的速度被曳引。

1887 年迈克尔逊³改进了菲索的干涉仪，并以 1% 的精度重复了菲索实验。同时，迈克尔逊还利用干涉仪测量了光速在垂直于平行于以太风方向的差别。实验结果表明，光速在各个方向是完全相同的。迈克尔逊干涉仪是现代高精度实验的基础，广泛应用于量子光学、引力波等高精度测量实验。迈克尔逊因为改进干涉仪获得了 1907 年的诺贝尔物理学奖。

² 阿曼达-希珀利克-路易斯·菲索 (Armand-Hippolyte-Louis Fizeau), 1819–1896, 法国物理学家。菲索的知名工作包括利用旋转齿轮测量光速。

³ 阿尔伯特·阿拉罕姆·迈克尔逊 (Albert Abraham Michelson), 1852–1931, 普鲁士裔美国物理学家，他于 1907 年获得诺贝尔奖，是美国第一个物理学诺贝尔奖得主。

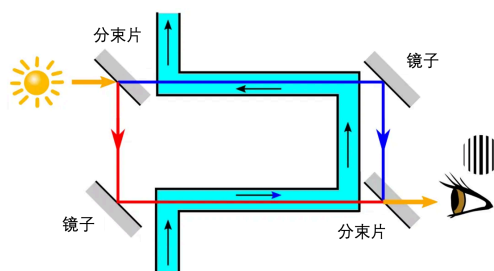


图 2. 费索实验示意图

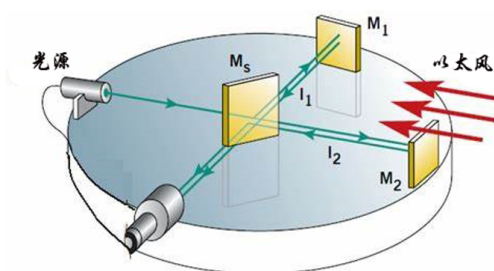
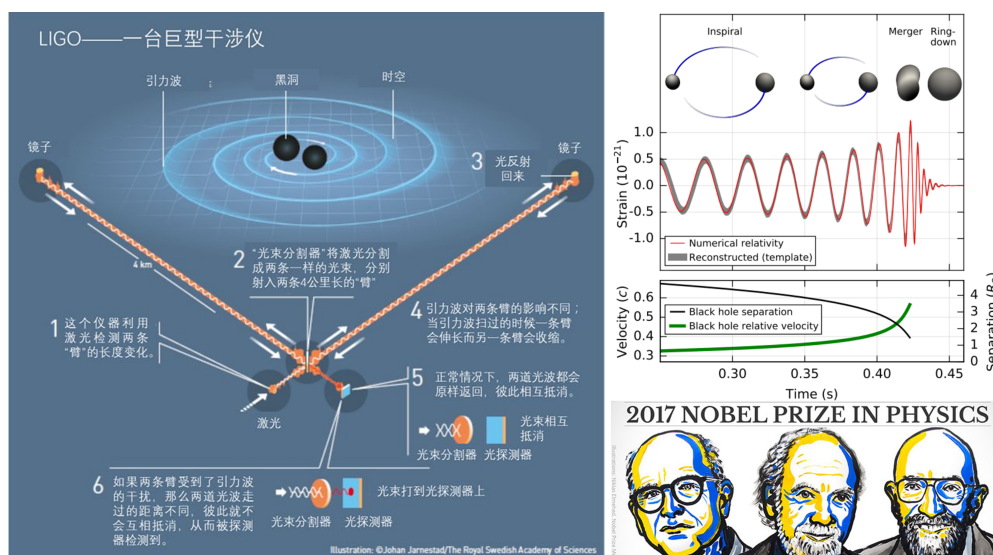


图 3. 迈克尔逊干涉实验示意图

1894 年汤姆逊发现了电子。1897 年汤姆逊发现电子的质量 (实际上是荷质比) 随着其速度改变而改变。从 1901 年开始, 卡弗曼 (Kaufmann)、布彻尔 (Bucherer)、纽曼 (Newmann) 等人测量了高速运动的电子的质量与其速度的关系。这一系列令人震惊的实验结果为相对论的建立奠定了基础。在这些实验基础上, 洛伦兹等人经过艰苦的努力, 终于在 1905 年, 由爱因斯坦系提出了狭义相对论, 系统地解释了这些实验现象。至此, 力学进入了其现代阶段。

从现代数学的角度看, 满足时空平移不变、以及参考系变换不变的时空对称性并非伽利略变换一种——一共有 11 种, 包括伽利略变换以及洛伦兹变换。如果进一步要求变换是



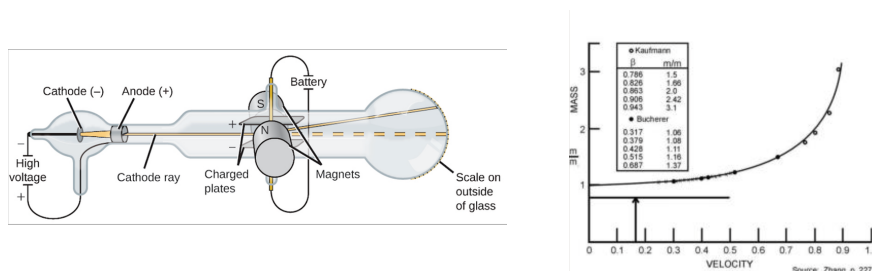


图 4. 左：汤姆逊的阴极射线管；右：卡弗曼实验

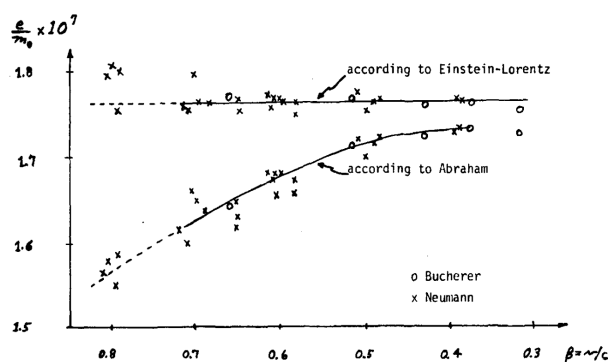


图 5. 布彻尔-纽曼实验数据与理论对比。这张图的横坐标是电子速度与光速之比，纵坐标为电子电荷与静止质量之比，这些是利用不同的理论将实验测量得到的电荷与质量之比转换为电子电荷与静止质量之比得到的。如果理论与实验符合，所得到的电子电荷与静止质量之比应该是一条水平直线。

线性的，则一共有两种，分别是伽利略变换和洛伦兹变换。而爱因斯坦最初的想法是解决牛顿力学的哲学困难，狭义相对论只是其中的第一步。继 1905 年提出狭义相对论以后，爱因斯坦继续寻找相对论性的引力理论，以消除所有参考系——包括惯性系——的特殊性。最终在 1915 年得到了广义相对论。本章主要讨论狭义相对论，即要求所有物理定律在惯性参考系中保持相同的形式 (强形式的伽利略相对性原理)，时空对称变换为洛伦兹变换。

§ 2. 洛伦兹变换

爱因斯坦狭义相对论的基本假设有两个：

- **相对性原理**：物理定律在惯性参考系中保持相同的形式
- **光速不变**：光在任何惯性参考系的速度都是相同的

相对性原理采取了加强的形式，即所有物理定律，包括力学和电磁学在惯性参考系中保持

相同的形式。光速不变与伽利略变换相矛盾，因此惯性系之间的时空变换需要新的形式。这一新的变换叫做洛伦兹变换，所有物理学规律需要在洛伦兹变换下保持相同的形式。

1. 洛伦兹变换的推导：洛伦兹变换仍需要保持惯性定律成立，即在洛伦兹变换下，做匀速直线运动的质点仍然做匀速直线运动；即洛伦兹变换将时空图中的直线变换为直线。根据几何学的知识，这样的变换必然是线性的。

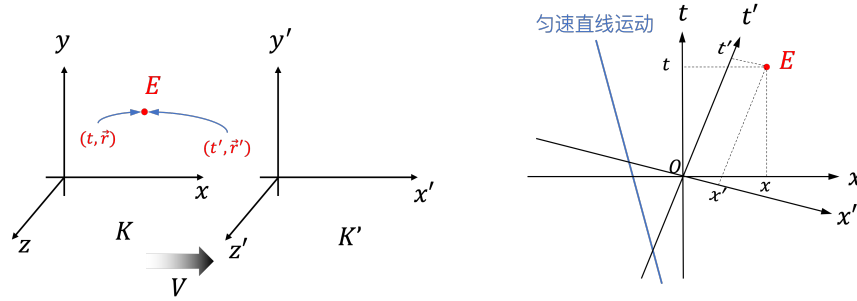


图 6. 洛伦兹变换要求做匀速直线运动的质点在新的惯性参考系仍然做匀速直线运动

下面考虑光速不变的约束：设有两个惯性坐标系 K, K' ，在 $t = t' = 0$ 时刻，两个坐标系原点重合，这一点可以通过时间、空间的平移做到。 K' 相对于 K 以 V 的速度沿运动。设在 $t = t' = 0$ 时刻从坐标原点发出一束光信号。由于光速不变，在两个参考系中，光都是以原点为球心的球面，因此，

$$r - ct = r' - ct' = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 \quad (3)$$

其中， c 是个常数，为真空中的光速。因此，为了保持光速不变，洛伦兹变换需要保持 $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ 不变。

设 K' 相对于 K 沿 x 方向匀速运动，速度为 V ，根据运动独立性， y, z 方向的坐标不受影响，因此 $y = y', z = z'$ 。由于洛伦兹变换的线性性，可以设坐标变换为，

$$t' = At + Bx, \quad x' = Ct + Dx \quad (4)$$

考虑光速不变， $x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2$,

$$t^2(-A^2c^2 + c^2 + C^2) + 2tx(CD - ABc^2) + x^2(-B^2c^2 + D^2 - 1) = 0 \quad (5)$$

变换对于任意坐标都成立，因此，

$$C^2 = c^2(A^2 - 1), \quad (6)$$

$$ABc^2 - CD = 0, \quad (7)$$

$$D^2 = 1 + c^2B^2 \quad (8)$$

从而可以得到,

$$C = \pm c\sqrt{A^2 - 1}, \quad (9)$$

$$B = \pm \frac{1}{c}\sqrt{A^2 - 1}, \quad (10)$$

$$D = \pm A \quad (11)$$

正负号来自于速度的方向, 为了确定起见, 我们取

$$C = -c\sqrt{A^2 - 1}, \quad (12)$$

$$B = -\frac{1}{c}\sqrt{A^2 - 1}, \quad (13)$$

$$D = +A \quad (14)$$

因此, 坐标变换为,

$$t' = At - \frac{1}{c}\sqrt{A^2 - 1}x, \quad (15)$$

$$x' = -c\sqrt{A^2 - 1}t + Ax \quad (16)$$

最后, 还需要将 A 与参考系的相对速度联系起来。考虑 K' 原点在 K 的速度 V , 因此,

$$V = \frac{x}{t} = \frac{c}{A}\sqrt{A^2 - 1} \Rightarrow A = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (17)$$

这样以来, 完整的洛伦兹变换可以写成,

$$\begin{cases} t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ y = y', \\ z = z' \end{cases} \quad (18)$$

为了方便, 常常引入几个量, $\beta = V/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, 快度 (rapidity): $\phi = \operatorname{arctanh}\beta = \ln \frac{c+v}{c-v}$ 。洛伦兹变换可以写作,

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) = \cosh \phi ct - \sinh \phi x, \\ x' = \gamma(x - \beta ct) = \cosh \phi x - \sinh \phi ct, \\ y' = y, \\ z' = z \end{cases} \quad (19)$$

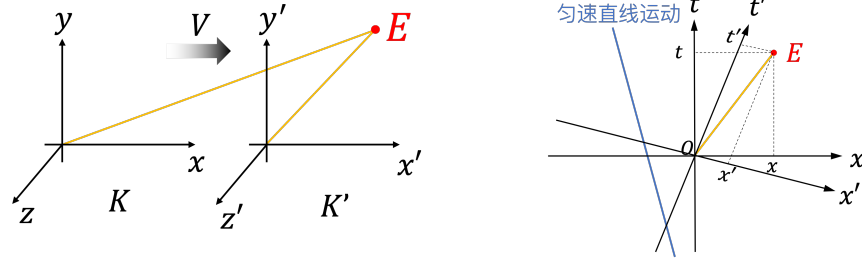


图 7. 洛伦兹变换需要保持光速不变

2. 洛伦兹变换的性质:

1. 在实际测量中, 时间间隔、空间间隔才具有意义。在伽利略变换下, 时间间隔和空间间隔不变。在洛伦兹变换下两者都改变:

$$\begin{cases} \Delta t' = \frac{\Delta t - (V/c^2)\Delta x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \\ \Delta x' = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \\ \Delta y' = \Delta y, \\ \Delta z' = \Delta z \end{cases} \quad (20)$$

不变的是时空间隔, 定义为: $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta \vec{r}^2$

2. 参考系之间相对速度远小于光速时 $V \ll c$, 时间的变换保留到一阶 $\Delta t' = \Delta t - V\Delta x/c^2 = \Delta t(1 - V\Delta x/c^2\Delta t)$ 。第二项在时间间隔不是特别短或者距离间隔不是特别远 $\Delta x/\Delta t \ll c$ 时, 可以忽略, 这样以来洛伦兹变换退化为,

$$\begin{cases} t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \\ x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z \end{cases} \xrightarrow{V \ll c} \begin{cases} t' = t, \\ x' = x - Vt, \\ y' = y, \\ z' = z \end{cases} \quad (21)$$

3. 矢量形式的洛伦兹变换: 若参考系 K' 相对于 K 以任意的速度 \vec{v} 匀速运动, 则相对应的洛伦兹变换沿平行 \parallel 和垂直 \perp 方向分别为,

$$\begin{cases} t' = \gamma(ct - \vec{\beta} \cdot \vec{r}) \\ \vec{r}'_{\parallel} = \gamma(\vec{r}_{\parallel} - \vec{\beta}ct) \\ \vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp} \end{cases} \quad (22)$$

此处, $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ 。考虑到 $\vec{r}_{\parallel} = (\vec{\beta} \cdot \vec{r})\vec{\beta}/\beta^2$, $\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel}$, 上述变换可以写成矢量形式,

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \vec{\beta} \cdot \vec{r}) \\ \vec{r}' = \vec{r} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}(\vec{\beta} \cdot \vec{r})\vec{\beta} - \gamma\vec{\beta}ct \end{cases} \quad (23)$$

4. 无穷小洛伦兹变换: 考虑变换速度 $\delta\vec{V} \ll c$ 的情形。精确到一阶, 得到的是伽利略变换

$$\begin{cases} ct' = ct - \delta\vec{\beta} \cdot \vec{r} + O(\delta\beta^2) \\ \vec{r}' = \vec{r} - \delta\vec{\beta}ct + O(\delta\beta^2) \end{cases} \quad (24)$$

考虑精确到二阶,

$$\begin{cases} ct' = ct - \delta\vec{\beta} \cdot \vec{r} - \frac{1}{2}\delta\vec{\beta}^2ct + O(\delta\beta^3) \\ \vec{r}' = \vec{r} - \delta\vec{\beta}ct - \frac{1}{2}(\delta\vec{\beta} \cdot \vec{r})\delta\vec{\beta} + O(\delta\beta^3) \end{cases} \quad (25)$$

5. 托马斯转动: 取惯性参考系 K , 质点 P 在 K 中的坐标为 (t, \vec{r}) 。若 K_1 相对于 K 速度为 $\delta\vec{V}_1$, 而 K_2 相对于 K_1 的速度为 $\delta\vec{V}_2$ 。设 $|\delta\vec{V}_1|, |\delta\vec{V}_2| \ll c$ 则, 质点 P 在 K_2 中的坐标精确到二阶为,

$$\vec{r}_{12} = \vec{r} - (\delta\vec{\beta}_1 + \delta\vec{\beta}_2)ct - \frac{1}{2}\delta\vec{\beta}_1(\delta\vec{\beta}_1 \cdot \vec{r}) - \frac{1}{2}\delta\vec{\beta}_2(\delta\vec{\beta}_2 \cdot \vec{r}) + \delta\vec{\beta}_2(\delta\vec{\beta}_1 \cdot \vec{r}) \quad (26)$$

另一方面, 若 K'_1 相对于 K 的速度为 $\delta\vec{V}_2$, K'_2 相对于 K'_1 的速度为 $\delta\vec{V}_1$, 则在 K'_1 参考系, 质点 P 的坐标精确到二阶为,

$$\vec{r}_{21} = \vec{r} - (\delta\vec{\beta}_2 + \delta\vec{\beta}_1)ct - \frac{1}{2}\delta\vec{\beta}_1(\delta\vec{\beta}_1 \cdot \vec{r}) - \frac{1}{2}\delta\vec{\beta}_2(\delta\vec{\beta}_2 \cdot \vec{r}) + \delta\vec{\beta}_1(\delta\vec{\beta}_2 \cdot \vec{r}) \quad (27)$$

这两个矢量并不相同。换句话说, 洛伦兹变换与变换的顺序有关。这两个矢量之间的差为,

$$\delta\vec{r} = \vec{r}_{21} - \vec{r}_{12} = \delta\vec{\beta}_1(\delta\vec{\beta}_2 \cdot \vec{r}) - \delta\vec{\beta}_2(\delta\vec{\beta}_1 \cdot \vec{r}) = \vec{r} \times (\delta\vec{V}_1 \times \delta\vec{V}_2) \quad (28)$$

换句话说, 两个矢量的差是一个旋转。这个效应叫做托马斯转动。

§ 3. 相对论时空观

第二章, 我们介绍了牛顿力学的时空观。简而言之, 牛顿力学的时空观可以归结为:

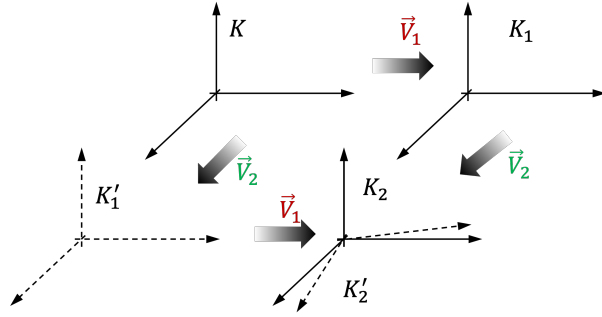


图 8. 托马斯转动

时空几何 ↔ 对称性 ↔ 物理定律

在牛顿力学中，物理定律主要指牛顿三大定律以及关于力的规律，例如万有引力、电磁定律等等。对称性指的是保持物理定律不变的时空变换。在牛顿力学中这些对称变换包括，

- 时间平移;
- 空间平移;
- 空间旋转;
- 伽利略变换

时空几何粗略而言指的是时空坐标的集合以及时空间隔的度量。在牛顿力学中，时空间隔定义为，

$$d(\Delta\vec{r}, \Delta t) = \begin{cases} \Delta t, & \Delta t \neq 0 \\ |\Delta\vec{r}|, & \Delta t = 0 \end{cases} \quad (29)$$

电磁学在伽利略变换下不是不变的。为了协调电磁学与相对性原理，需要引入新的参考系变换，也就是洛伦兹变换。现在时空的对称变换为，

- 时间平移;
- 空间平移;
- 空间旋转;
- 洛伦兹变换

这一组变换的集合叫做庞加莱变换，所对应的对称性叫做庞加莱对称性。在庞加莱变换下保持不变的时空间隔度量为，

$$d(\Delta t, \vec{r}) = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2} \quad (30)$$

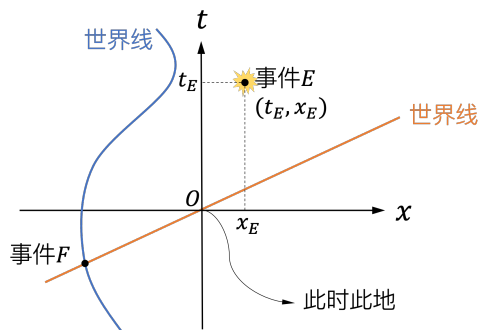


图 9. 时空图

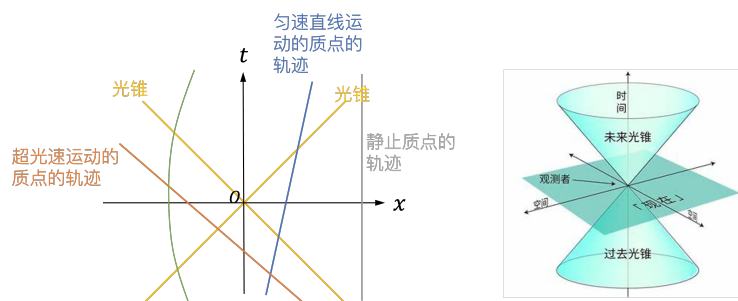


图 10. 时空图中的轨迹与光锥

配备了这一度量的 4 维时空叫做闵可夫斯基时空。

1. 时空图 在几何上，时空图是描述时空几何的重要辅助工具：

- 事件 (event): 时空图中的点叫做事件，事件可由时空坐标 (t, \vec{r}) 所标记；
- 时空间隔 (spacetime interval): d_{EF} 体现了时空的几何，时空间隔在洛伦兹变换下是不变的；
- 世界线 (worldline): 一系列事件的集合构成一条世界线。一个典型的世界线是一个质点的时空轨迹，它完全描述了质点的运动。
 - 匀速直线运动的质点的世界线是直线
 - 世界线的斜率：速度的倒数
 - 光锥：光的轨迹——斜率永远为 $1/c$ 的直线
- 洛伦兹变换保持光锥不变：

2. 同时 (*simultaneity*) 的相对性 在物理上，同时 (*simultaneity*) 指的是两个事件 E, F 发生的时间相同： $t_E = t_F$ 。在相对论中，由于时间在不同参考系是不同的，同时性变成了一个相对的概念。

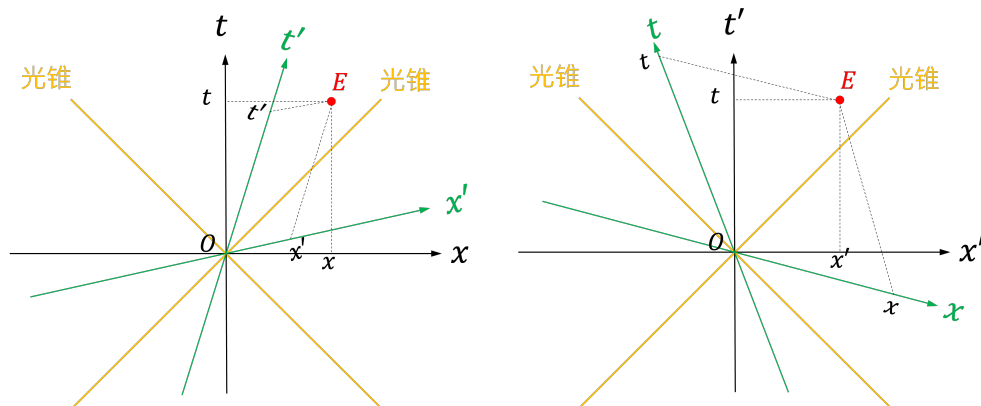


图 11. 时空图中的洛伦兹变换

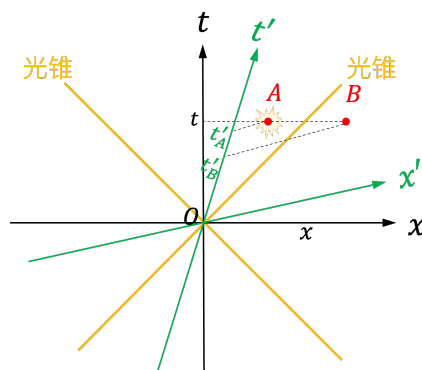


图 12. 同时的相对性

考虑参考系 K 中发生在同一时间、不同地点的两个事件 A, B ，设其空间间隔为 Δx 。设参考系 K' 相对于 K 以 V 的速度匀速运动。在参考系 K' 中，两个事件发生的时间间隔为 $(t'_A \neq t'_B)$ ，

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \frac{t_B - \frac{V}{c^2}x_B}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t_A - \frac{V}{c^2}x_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{-\frac{V}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (31)$$

换句话说，在一个参考系同时发生的两个事件，在另一个参考系未必是同时发生的！

【例子】 一列静止长度为 100 米的火车在平直轨道上以 $0.6c$ 匀速行驶，穿过一个长度为 100 米的站台。火车车尾刚进入站台时车尾发出一道闪光；车头刚出站台时也发出一道闪光。问在列车上的人与站台的人分别看来，这两道闪光是否同时发生？

解：以车尾为原点、车尾闪光为 0 时刻，建立相对于列车静止的坐标系 T 。并设相对站台静止的参考系 S 的时空坐标的原点与 T 重合， S 相对于 T 以 $V = -0.6c$ 的速度匀速运动。这样一来，车尾闪光事件 O 发生在坐标原



图 13. 爱因斯坦的火车

点。这个问题的难点在于车头闪光事件 B ，我们只知道发生在两个参考系的 $x_B = x'_B = x = 100\text{ m}$ 处，不知道时间。考虑 $t = 0$ 时刻，车头也发出一道闪光。在 T 系，这个事件发生的时空坐标为 $(0, l)$ ，在 T' 系，这一事件的坐标 (t'_A, x'_A) 根据洛伦兹变换为，

$$t'_A = \gamma(0 + \beta \frac{l}{c}) = \gamma\beta \frac{l}{c}, \quad x'_A = \gamma(l + 0) = \gamma l \quad (32)$$

现在再考虑车头闪光事件 B 。根据刚才的计算，事件 A 发生时，在参考系 S 中，车头的坐标是 $\gamma l > l$ ，因此事件 B 必定发生在这之前：

$$t'_B = t'_A - (\gamma - 1) \frac{l}{V} = (\gamma - 1) \frac{l}{\gamma V} > 0, \quad x'_B = l \quad (33)$$

根据洛伦兹变换，这一事件在 T 参考系坐标为，

$$t_B = \gamma(t'_B - \frac{\beta x'_B}{c}) = \frac{l(1 - \gamma)}{\gamma \beta c} < 0 \quad (34)$$

同时作为验证可以得到 $x_B = \gamma(x'_B - \beta c t'_B) = l$ ，也就是说，事件在 T 中的坐标确实是车头。

总结一下：

- 列车参考系 T ：

- 车尾闪光发生在 $t_O = 0$ 时刻，
- 车头闪光发生在 $t_B = (1 - \gamma) \frac{l}{\gamma V} = -0.2 \frac{l}{V}$ 时刻；

- 站台参考系 S ：

- 车尾闪光发生在 $t'_O = 0$ 时刻，
- 车头闪光发生在 $t'_B = (\gamma - 1) \frac{l}{\gamma V} = +0.2 \frac{l}{V}$ 时刻；

从时空图上来看这个问题：仍以火车为参考系，取车尾与入站端相遇的事件为时空坐标原点。车头闪光事件为 B ，这时车头与出站端相遇。

火车车头的时空轨迹为： $x_T(t_T) = l$ ；出站端的时空轨迹为： $x'_S(t'_S) = l$ ；两者相遇时（事件 B ）在同一个坐标系时空坐标相同。进行洛伦兹变换，出站端换

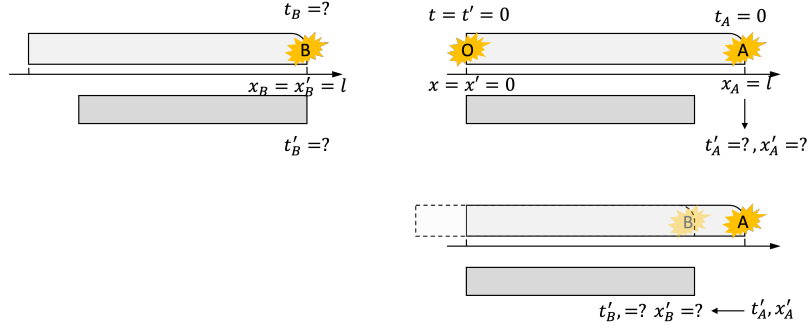


图 14. 爱因斯坦的火车

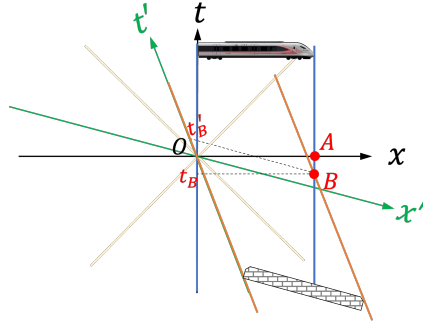


图 15. 爱因斯坦的火车：时空图

到火车参考系 T' :

$$x_S = \gamma(x'_S - \beta ct'_S) = \gamma(l - \beta ct'_S) \quad (35)$$

$$t_S = \gamma(t'_S - \beta x'_S) = \gamma(t'_S - \beta \frac{l}{c}) \quad (36)$$

车头与站台相遇的条件是: $t_T = t_S, x_S = x_T$ 。由此可以得到,

$$\gamma(l - \beta ct'_S) = l, \quad (37)$$

$$\gamma(t'_S - \beta lc) = t_s \quad (38)$$

这样以来,

$$t'_S = t'_B = (\gamma - 1) \frac{l}{\gamma V}, \quad (39)$$

$$t_S = t_B = -(\gamma - 1) \frac{l}{\gamma V} \quad (40)$$

同时的相对性与我们自身的直觉非常悖逆, 原因在于我们所熟悉的牛顿力学具有时间绝对性。这一点会带来一系列问题, 需要我们去重新考虑:

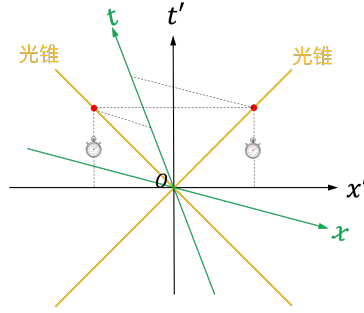


图 16. 爱因斯坦提出，在同一个参考系，可以借助光的传播来校钟。

第一个问题是如何校准两个时钟？处在同一位置的两个时钟，不管双方是否具有相对运动，都可以通过对读数的方式校准，此后的演化由洛伦兹变换决定。对于处于不同位置的两个时钟，该如何校准？

一种办法是我们将时钟送到同一个位置校准之后再拿回去，为了避免洛伦兹变换带来的影响，我们取、还表的速度必须非常慢。另一种办法是借助光。在两个时钟的中心位置发射一个光信号，每个时钟收到光信号的时刻定为零时刻（或某个约定值）即可。当然，由于同时的相对性，这样的两个时钟在其他参考系看来实际上并没有对准因此对钟只能针对于同一个惯性参考系而言。我们以后假定同一个惯性参考系的钟都是对准的

另外一个问题是因果性 (causality)。例如，运动员投篮入篮，从时序上讲一定是抛球在先，入篮在后。事件的因果性是非常基本的一条自然哲学规律；因果性的丧失对于社会的基本秩序乃至人的理性具有毁灭性的打击。例如，我们的生活建立在一些基本因果逻辑之上：学习好 \rightarrow 好成绩；挨打 \rightarrow 疼痛；如果因果性彻底丧失，任何手段的测试都会失去意义、任何基本生存本能也会失去意义。

根据苏格兰哲学家休谟，因果相关的事件必然特定时序，即因发生的时间在先，果发生的时间在后。在相对论中，由于同时的绝对性的丧失，导致事件的时序不再确定。根据洛伦兹变换，事件的时间间隔满足变换，

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{\beta}{c} \Delta x \right) = \gamma \Delta t \left(1 - \beta \frac{\Delta x}{c \Delta t} \right) \quad (41)$$

其中，若 K 参考系中的事件具有时序 $\Delta t > 0$ ，则 $\Delta t' > 0$ 不一定仍然成立。但是假如 $|\Delta x / \Delta t| \leq c$ ，括号里的部分恒正，则 $\Delta t' > 0$ ，即事件的时序不变。

换句话说，因果相关的事件之间的时空间隔须满足 $|\Delta x / \Delta t| \leq c$ 否则因果律有被违背之虞；这样的事件叫做类时分离的。两个事件之间的相互作用需要通过信息或能量传递。因此类时分离的要求，相当于是要求信息和能量传播的速度不能大于光速。从相对论动力学将会看到，我们永远无法将有限质量的物体加速到超过光速，因此相对论物理仍然保持了事件的因果性。所有与原点 O 的时空间隔 $\Delta s^2 \equiv c^2 \Delta t^2 - \Delta \vec{r}^2 > 0$ 的事件构成的区域叫做类时区 (time-like region) 类时区的点与原点具有确定的时序，两者可以建立因

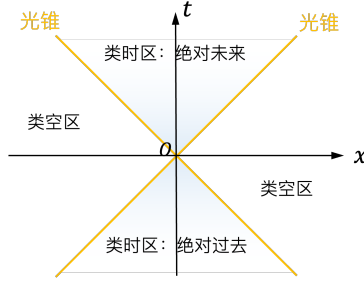


图 17. 闵可夫斯基时空的因果结构

果关系。其中 $t > 0$ 的事件组成的区域叫做绝对未来； $t < 0$ 的事件组成的区域叫做绝对过去。同时，所有与原点 O 的时空间隔 $c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{r}^2 < 0$ 的事件构成的区域叫做类空区 (space-like region)。所有与原点 O 的时空间隔 $c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{r}^2 = 0$ 的事件构成的区域叫做光锥 (light cone)。

3. 时间膨胀 (time dilation) 考虑参考系 K 中发生在同一地点不同时间的两个事件 A, B (例如一个静止的时钟的两次读数)，设其时间间隔为 Δt 。设参考系 K' 相对于 K 以 V 的速度匀速运动。在参考系 K' 中，两个事件的时间间隔为，

$$\Delta t' = t'_B - t'_A \quad (42)$$

$$= \frac{t_B - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t_A - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (43)$$

$$\Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (44)$$

换句话说，在 K' 中看时间间隔要长一些，简而言之运动的时钟走的慢一些，这个现象叫做时间膨胀，又叫做钟慢效应，有时候也叫做时间延迟。需要指出，在 K' 参考系， A, B 两个事件并不发生在同一地点。反过来，在 K' 参考系静止的时钟在 K 参考系看起来也是走的慢一些。

我们把这种相对于质点静止的参考系测量得到的时间叫做质点的固有时间又叫做原时 (proper time)，并记作 $\Delta\tau$ 。由于质点保持静止， $\Delta\vec{r} = 0$ ，因此固有时正比于质点在静止参考系的时空间隔 $\Delta s = c\Delta\tau$ 。

【例子】 宇宙射线在大气层顶部 (10 km) 产生接近光速运动的缪子。已知静止的缪子的寿命为 $\tau = 2 \times 10^{-6}\text{ s}$ 。按照牛顿力学，缪子在大气中最多能飞行 $d = c\tau \sim 600\text{ m}$ ，无法穿过大气层到达地面。而实际中，我们在地面上能观测到缪子 (这些缪子对于进化起到重要的作用)。原因在于相对论的时间膨胀效应，高速飞行的缪子的寿命远大于其静止时的寿命。

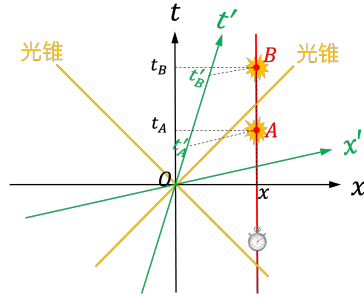


图 18. 时间膨胀

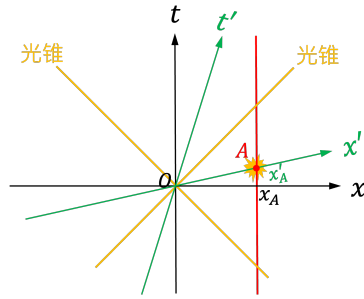


图 19. 长度收缩

4. 长度收缩 (*length contraction*) 考虑参考系 K 中静止的两个质点 (例如一把静止的直尺两端), 设其空间间隔为 Δl 。设参考系 K' 相对于 K 以 V 的速度匀速运动, 且 $t = t' = 0$ 时刻两个坐标原点重合。现在考虑参考系 K' 中测量这两个质点之间的距离。考虑 $t' = 0$ 时刻, 一个质点位于原点 O , 另一个质点 A 在 K' 系的时空坐标为,

$$t'_A = \frac{t_A - \frac{V}{c^2}x_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (45)$$

$$x'_A = \frac{x_A - Vt_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (46)$$

测量距离时, 需要取相同的时刻, 即 $t'_A = t' = 0$ 。因此可以从第二个式子得到, $t_A = (V/c^2)x_A$ 。代入到第二个表达式可以得到,

$$x'_A = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}x_A \quad (47)$$

换句话说, 运动的尺子会短一些。这个效应叫做长度收缩, 又叫尺缩效应。注意距离的测量必须是同时的, 也就是说在某个参考系测量距离时尺子两端需要定义在该参考系的同一时刻。

【例子】一列静止长度为 100 米的火车在平直轨道上以 $0.6c$ 匀速行驶, 穿过一

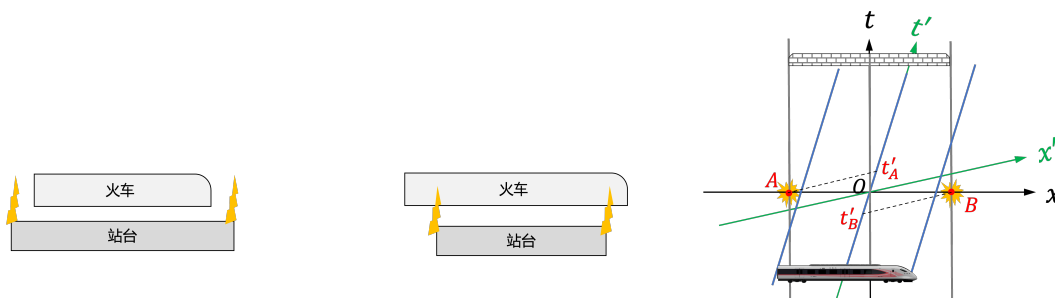


图 20. 火车佯谬

个长度为 100 米的站台。当火车中点与站台中点对齐的瞬间，站台进出站两端同时发出两道垂直于火车的闪电。

站台上的人认为，火车由于相对论尺缩效应变短为 80 米，因此闪电不会打在火车上。火车上的人认为，站台相对于火车运动，由于相对论效应发生尺缩，变短为 80 米，因此闪电会打在火车上。谁的分析是正确的？

分析：首先两种说法中尺缩效应的分析都是对的。但是闪电是站台发出的，因此站台参考系才可以定义闪电的同时性。换句话说，火车看到的闪电并不是同时发生的。因此站台的分析是正确的。

【例子】（孪生子佯谬）一对双胞胎出生以后，弟弟随母亲留在地球上，而哥哥随父亲乘坐速度为 $0.8c$ 的宇宙飞船前往距离地球 4 光年外的比邻星，随即以相同速度返回。当飞船返回地球时，弟弟已经是 10 岁了。在地球上的人看来，飞船上的哥哥由于时间膨胀效应，返回时才 6 岁。同样地，宇宙飞船上的哥哥看到地球上的弟弟在以 $0.8c$ 运动，因此根据时间膨胀效应，弟弟应该比自己岁数小。如何解释这一矛盾？

§ 4. 相对论动力学

经典力学的动力学定律是牛顿三大定律。相对论与牛顿第一定律（惯性定律）相容。牛顿第二定律将物体运动状态的改变归因为外力，即给出了外力与加速度之间的关系；但是这个关系在相对论中需要重新考虑，原因在于：在牛顿力学中，加速度具有绝对性，即根据伽利略变换，不同惯性参考系中的加速度是相同的；而相对论将伽利略变换替换成了洛伦兹变换，加速度在不同惯性参考系是否还具有不变性？这一节我们首先推导相对论速度和加速度变换公式，并在此基础上重新考虑牛顿第二定律在相对论中的推广。

1. 相对论速度变换 设 K 和 K' 为两个惯性参考系，其中 K' 相对于 K 以 V 的速度沿 x 方向运动。若质点在 K 中的坐标为 (t, \vec{r}) ，跟据速度的定义 $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ ；类似地质点在 K' 中的速度为 $\vec{v}' = d\vec{r}'/dt'$ ，其中 (t', \vec{r}') 为其在 K' 中的坐标，可由洛伦兹变换

得到： .

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \frac{\beta}{c}x), \\ x' = \gamma(x - \beta ct), \\ y' = y, \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt' = \gamma(dt - \frac{\beta}{c}dx), \\ dx' = \gamma(dx - \beta cdt), \\ dy' = dy, \\ dz' = dz \end{cases} \quad (48)$$

根据速度的定义可以得到，

$$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}, \\ v'_y = v_y \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}, \\ v'_z = v_z \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \\ v_y = v'_y \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \\ v_z = v'_z \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} \end{cases} \quad (49)$$

讨论：

- 光速不变：若 $v_x = c, v_y = v_z = 0$ ，则 $v'_x = c$ ；类似地，若 $v_x = v_z = 0, v_y = c$ ，则 $v'_x = V, v'_y = c\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ ，从而 $v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z} = c$ 。即光在参考系变换下保持不变。
- 光速为亚光速合成的上限。若 $V < c, v'_x < c$ ，则

$$\left(1 - \frac{v'_x}{c}\right)\left(1 - \frac{V}{c}\right) > 0 \Rightarrow v_x \equiv \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} < c \quad (50)$$

- 矢量形式：对于两个参考系之间相对运动速度为任意矢量 \vec{V} 的情形，相应的速度变换可以分别取 \vec{V} 的平行与垂直方向，然后进行速度合成，得到的结果如下：

$$\vec{v}' = \frac{\vec{v} + (\gamma - 1)(\hat{\beta} \cdot \vec{v})\hat{\beta} - \gamma\vec{\beta}}{\gamma(1 - \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{v}}{c})} \quad (51)$$

此处， $\vec{\beta} = \vec{V}/c$ ， $\gamma = (1 - \vec{V}^2/c^2)^{-1/2}$ 。

- 加速度变换：设质点在参考系 K 的速度为 \vec{v} 、加速度为 \vec{a} ，参考系 K' 以 \vec{V} 的速度相对于 K 运动，则质点在参考系 K' 的加速度 \vec{a}' 为，

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} + (\gamma - 1)(\hat{\beta} \cdot \vec{a})\hat{\beta} + \gamma(\vec{\beta} \cdot \vec{a})\vec{v}'/c}{\gamma^2(1 - \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{v}}{c})^2} \quad (52)$$

可见，加速度不再是不变的。相应的，欧拉形式的牛顿第二定律 $\vec{F} = m\vec{a}$ 在洛伦兹变换下不再是不变的了。

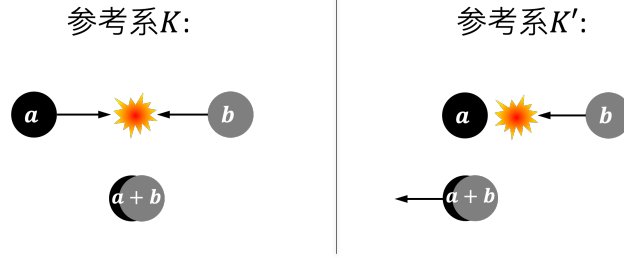


图 21. 动量守恒的检验

2. 相对论动量 能量与动量与时空平移对称性有关，因此是比动力学定律更基本的量。在相对论中，时空平移对称性仍然存在，因此能量与动量仍然是守恒的。首先检查动量守恒与相对论速度变换是否相容。考虑两个粒子对心碰撞的情况。设在参考系 K ，两个质量为 m 的全同粒子 a, b 以大小相等方向、相反的速度 v 进行对撞；总动量为 0。对撞后两个粒子黏在一起，在参考系 K 保持静止。

假设 K' 以 v 的速度相对于 K 运动，现在在 K' 中考察整个过程粒子 a 在 K' 中静止；粒子 b 的速度为，

$$v'_b = \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \quad (53)$$

对撞过后，两个粒子黏在一起。根据总动量守恒，可以得到黏在一起的 ab 粒子的速度，

$$mv'_b = \frac{-2mv}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = 2mv'_{ab}, \quad (54)$$

$$\Rightarrow v'_{ab} = -\frac{v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \quad (55)$$

另一方面，这个速度可以通过参考系变换得到，另一方面， v'_{ab} 也可以通过速度变换得到，考虑到在 K 中 $v_{ab} = 0$ ；可以得到，

$$v'_{ab} = -v \quad (56)$$

这个结果与用动量守恒求的结果矛盾！这说明，速度变换与动量守恒是不相容的。为此我们需要修改动量的定义。类似地，可以利用弹性散射得到动能也需要修改。

假定动量与速度满足关系，

$$\vec{p} = M(v)\vec{v} \quad (57)$$

其中， $M(v)$ 是速度的光滑函数。1901 年，卡弗曼等人测量了电子的质量随着速度的改变确立了这一关系。在理论方面爱因斯坦等人利用相对论和动量守恒也推导出了这个关系。

下面我们重新考察上面的过程，但假定质量可以随着速度改变。粒子 a 在 K' 中静止；

粒子 b 的速度为,

$$v'_b = \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \quad (58)$$

对撞过后, 两个粒子黏在一起, 根据总动量守恒,

$$M(v'_b)v'_b = M_{ab}(v'_{ab})v'_{ab} \quad (59)$$

黏在一起的粒子 ab 的速度根据在 K 为 0, 根据洛伦兹速度变换, 其在 K' 的速度 v'_{ab} 为,

$$v'_{ab} = -v \quad (60)$$

另外, 在牛顿力学里面质量是守恒的。这里我们也假定动质量守恒, 即有

$$M_{ab}(v'_{ab}) = M(v'_b) + M(0) \quad (61)$$

这样以来, 我们得到:

$$M\left(\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}\right) \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \left\{ M\left(\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}\right) + M(0) \right\} v \quad (62)$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}\right) = M(0) \frac{1 + v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} \quad (63)$$

做变量代换可以得到:

$$M(v) = \frac{M(0)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (64)$$

这里, $M(0)$ 叫做粒子的静止质量 (rest mass), 一般记为 m_0 。定义粒子的动质量,

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma m_0 \quad (65)$$

这里 $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, 要注意与洛伦兹变换时两个参考系之间的 γ -因子相区分。动质量随着粒子速度的增加而增大。当粒子速度接近光速时, 动质量趋近于无穷大。

定义相对论动量为,

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 \vec{v} \quad (66)$$

这里 $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, 要注意与洛伦兹变换时两个参考系之间的 γ -因子相区分。在洛伦兹

变换下，动质量的变换为，

$$m(v') = m(v) \frac{1 - \frac{\vec{V} \cdot \vec{v}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = m(v) \gamma_V (1 - \vec{\beta}_V \cdot \vec{\beta}) \quad (67)$$

这里， \vec{V} 是参考系之间的相对速度，要与粒子本身的运动速度相区分。 $\vec{\beta}_V = \vec{V}/c$, $\gamma_V = 1/\sqrt{1 - \vec{\beta}_V^2}$ 。

相对论动量的洛伦兹变换为，

$$\vec{p}' = \vec{p} + (\gamma_V - 1)(\vec{\beta}_V \cdot \vec{p})\vec{\beta}_V - \gamma_V \vec{\beta}_V \gamma m_0 \quad (68)$$

这一个变换与坐标的变换很类似（将 $\gamma m_0 c^2$ 类比为 ct ），这里 $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ，需要与 γ_V 相区分。特别是，如果只考虑 x 方向的洛伦兹变换的话，。我们以后将满足这样一组洛伦兹变换的量称作为一个洛伦兹协变的矢量。例如，坐标 (ct, \vec{r}) 构成一组洛伦兹协变的矢量。同样地， $(\gamma m_0 c^2, \vec{p})$ 也构成一组洛伦兹协变的矢量。我们马上会看到， $\gamma m_0 c^2$ 的物理含义是相对论动能。

3. 相对论动力学 我们来重新考察相对论情形下的动力学。

首先，牛顿第一定律（惯性定律）在相对论中仍然是成立的。

其次，牛顿第二定律将运动状态的改变定义为力。在牛顿原始的定义中，他将运动状态定义为动量，这样定义的好处是动量守恒可以很容易得到。上一节，我们重新定义了相对论动量，使得得动量守恒仍然成立。有了动量的合理的定义，现在考虑牛顿第二定律，仍然将动量的改变定义为力，

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (69)$$

这样以来，牛顿第二定律与动量守恒仍然是相容的。牛顿第三定律：本质上是动量守恒，在相对论中仍然成立

注意，在相对论中，信息和能量传播的速度是有限的，因此这对于相对论力的形式提出了限制。在相对论力学中常常采用场的形式。

【例子】电磁力（洛伦兹力）来自于粒子与电磁场的相互作用：

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (70)$$

\vec{E}, \vec{B} 是电磁场，而电磁场由电荷与电流产生（麦克斯韦方程组）。目前已知的的基本相互作用，电磁、弱、强和希格斯都是建立在类似的场论基础之上。

【例子】万有引力是超距作用，与相对论天然违背。原则上讲可以将牛顿万有引力相对论化，实际上可以有不同的版本，但是绝大多数这些相对论化的引力理

论要么不自洽，要么与观测证据不符合，要么与爱因斯坦的广义相对论等价。

4. 相对论动能 能量守恒来自于时间平移对称性，因此在相对论中仍然成立。但由于我们修改了牛顿第二定律，必然需要修改动能的定义。考虑一个质点在力的作用下从静止加速到速度 v 。考虑动能定理仍然成立，

$$W = T - T_0 \quad (71)$$

其中，外力做功为

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (72)$$

下面利用牛顿第二定律计算相对论动能，

$$T - T_0 = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \cdot \vec{v} dt, \quad (73)$$

$$= \frac{m_0 \vec{v}^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \int \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot d\vec{v}, \quad (74)$$

$$= \frac{m_0 \vec{v}^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{2} \int \frac{m_0 dv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (75)$$

$$= \frac{m_0 \vec{v}^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{c^2}{2} \int \frac{m_0 d(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (76)$$

$$= \frac{m_0 \vec{v}^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 \quad (77)$$

初始时刻动能 T_0 为零，因此速度为 v 的质点的相对论动能为，

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2 \quad (78)$$

在质点运动速度比较低时，做泰勒展开可以得到牛顿力学的动能，

$$T \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots \quad (79)$$

还可以定义静止能量

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (80)$$

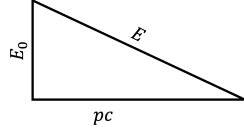


图 22. 质能三角

以及总能量

$$E = E_0 + T = m(v)c^2 = \gamma m_0 c^2 \quad (81)$$

这就是大名鼎鼎的质能关系。从这个角度讲，动质量守恒本质上是总能量守恒，即在相对论中，静止质量不守恒，总能量守恒。

不难验证，在相对论中，能量与动量直接满足，

$$E^2 = m_0^2 c^2 + \vec{p}^2 c^2 \quad (82)$$

这个关系有时候又叫做质能三角。

当一个粒子的静止能量远小于其动能时，其能量近似正比于其动量： $E \approx |\vec{p}|c$ 。这样的粒子叫做极端相对论性粒子。在现代大型粒子加速器上，电子、质子可以被加速到非常高的能量，这些粒子都是极端相对论性的。此外，如果一个粒子的静止质量严格为零，则其是极端相对论性的。这样的粒子在非相对论力学中是无法出现的，否则任何相互作用都会导致其加速度无穷大，而且，这样的粒子在非相对论力学中的动量、动能皆为零。相对论允许这样的粒子存在，其具有有限的能量 E 和动量 p 且满足 $E = pc$ ，但其速度恒为光速。构成光的微观粒子——光子就是这样的粒子。

相对论角动量定义为，

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (83)$$

这样，对于中心力来说，相对论角动量仍然是守恒的。

§ 5. 引力与时空

前面提到过，牛顿的万有引力与相对论不符，原因是它是超距作用的，也就是说如果一个天体发生移动，另一个天体会立即感受到相应的力的变换。这显然与光速的有限传播相矛盾，否则我们可以通过万有引力来传递信号以突破狭义相对论中信号传播速度小于光速的限制。当然，仅有这一点不足以告诉我们什么是正确的引力理论。

引力理论的进一步发展还来自于莱布尼茨和马赫对牛顿力学的批判。譬如，莱布尼茨、马赫批评了牛顿绝对时空的观点，并认为所有运动都是相对的。按照这些想法，远处大质量天体的运动会对本地的惯性产生影响。这一论断被称为马赫原理。当然，马赫原理本身

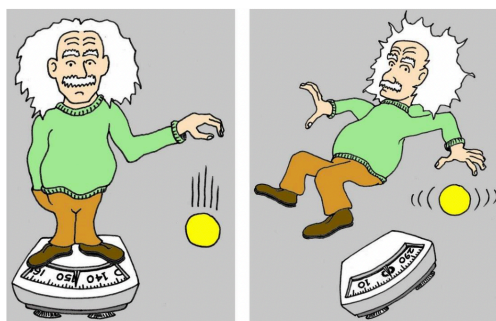


图 23. 爱因斯坦最幸福的想法

并不是一个精确的物理论断，因此可以有不同的量化方式，这也说明马赫原理本身不足以指示新的引力理论，尽管爱因斯坦曾将其作为广义相对论的物理基础之一。

爱因斯坦建立新的引力理论的另外一个关键思想动因是相对性原理的推广。伽利略的相对性原理指出物理定律在所有惯性参考系中都是相同的。这一论断否定了绝对惯性参考系的存在，但仍然不否认惯性系的特殊地位。当然，正如牛顿用水桶实验所阐释的那样，非惯性参考系中的物理定律与惯性系中的物理定律的确是不同的。但是，人们并不知道该如何定义一个惯性参考系。在牛顿时代，人们认为恒星是固定在天空中不动的，因此叫做固定的星星（fixed star）。随着物理学尤其是天文学的发展，人们逐渐明白恒星也是在运动，只不过它们距离地球非常遥远，以至于它们看起来几乎是不变的。这样以来，用远处恒星来定义惯性参考系便不再是一件显而易见的事情了。

爱因斯坦建立狭义相对论以后便开始思索如何打破惯性系的特殊地位，将物理定律推广到所有参考系。他的突破来自于他称为自己“一生中最幸福的想法”：

“（1907 年）当我忙着写一个关于狭义相对论的总结时，我也在努力修改牛顿的引力理论使它与狭义相对论协调。在那个时刻，我得到了我人生中最幸福的想法。因为对于一个从屋顶开始做自由落体的观察者来说，在下落的时刻，至少在他的四周，是没有引力场的。即，假如这个观察者放开任何物品，它们相对于他来说保持静止或者匀速运动，不论他们的化学或物理结构是什么。”

爱因斯坦的想法是，引力与加速度局域地等价。爱因斯坦的这个想法叫做等效原理（equivalence principle）。等效原理实际上起源于伽利略。伽利略首先通过落体实验发现物体的加速度与其质量无关。随后，这一原理被牛顿嵌入到它的万有引力理论中。它具体表述为，引力质量等价于惯性质量。钟摆提供了比自由落体的更高精度的检验。1891 年，厄特沃什利用扭秤验证引力质量与惯性质量相等，精度达到 10^{-8} 。此后人们不断提高实验精度，并且在宏观、微观等多个尺度检验了等效原理。

根据等效原理，一定可以找到一个局域的瞬时惯性参考系，在其中引力是不存在的。这样以来，物理定律可以建立在这一局域瞬时惯性参考系——当然，这里的物理定律要求是要满足洛伦兹不变性的。其他参考系的物理定律可以通过坐标变换得到。原则上讲，所有

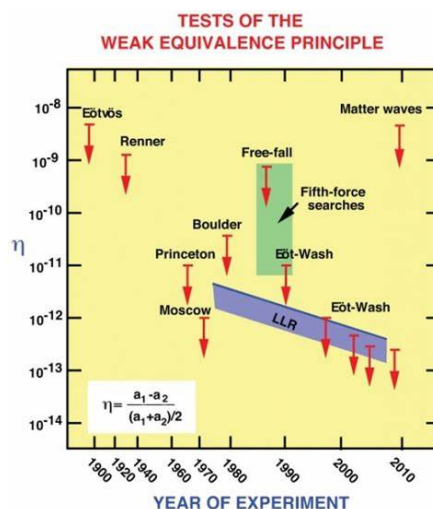


图 24. 等效原理的实验检验

物理定律（除了引力本身以外）都可以这样产生。不过，数学家提供了更简便的办法来实现这一点，这就是所谓的广义协变性原理。在这一原理下，我们只要将物理定律写成坐标无关的形式，类似于 3 维矢量形式，便可以自然地保证它们在局域瞬时惯性参考系恢复到正确的形式。在本门课程，我们不讨论物理定律在一般参考系的形式，因为广义协变性需要更多的数学工具来定量描述。

数学的参与其实不难料到。因为根据等效原理，引力场实际上是几何化的，即对于引力场中的所有质点，其运动与其质量、电荷以及其他内部结构无关。爱因斯坦的广义相对论正是将引力理论建立在几何描述之上。有了微分几何的指导，爱因斯坦进一步提出了广义相对论的场方程，即解决了引力是如何产生的问题。