第二章：质点运动学

李 阳

中国科学技术大学近代物理系

力学A · 2025年秋

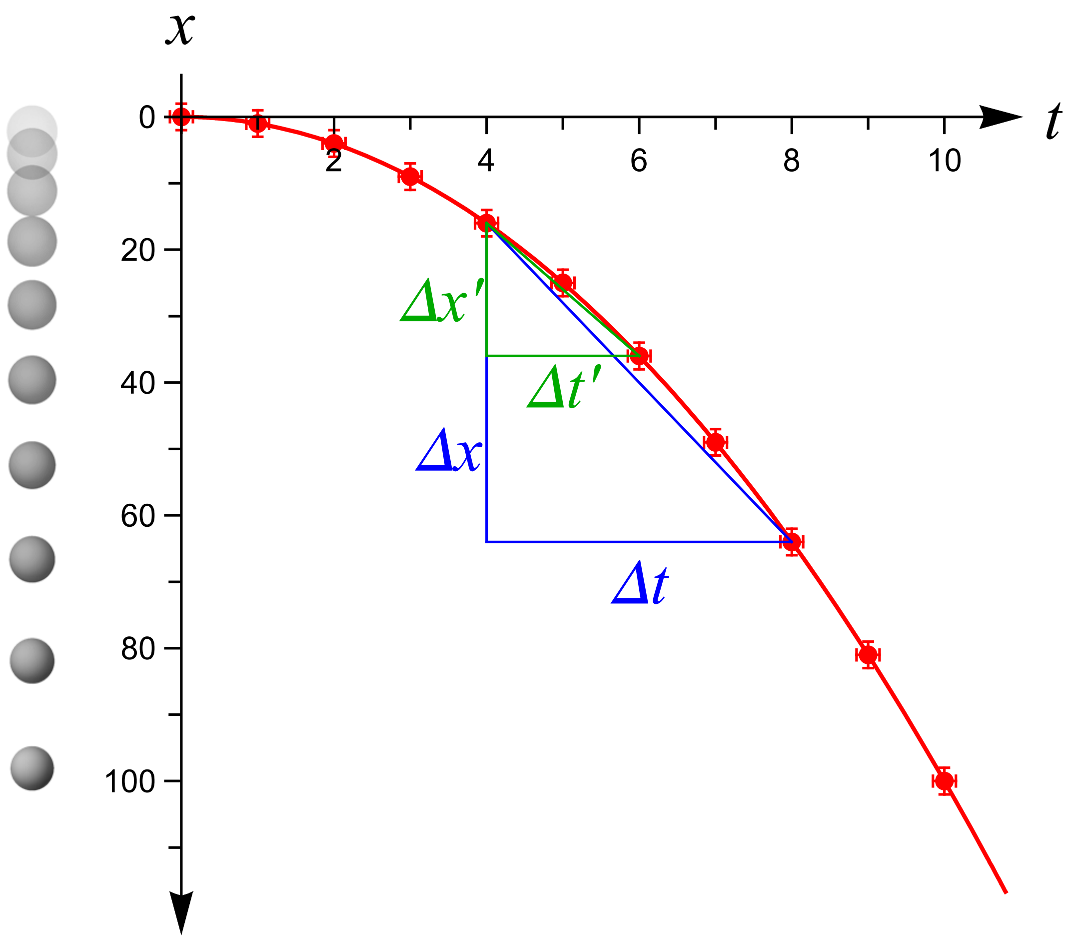
§1 质点运动学 I

运动学 (kinematics) 顾名思义就是描述物体运动规律的学问。运动学仅关心如何描述运动，而不考虑力与运动的关系

【例子】开普勒定律

- 行星沿着椭圆轨道运动，太阳位于椭圆轨道的一个焦点。
- 行星到太阳的连线在相同时间内扫过的面积相等。
- 行星绕太阳运动的周期 T 的平方与该行星的椭圆轨道的半长轴 a 的立方成正比

【例子】自由落体的运动



$$x = f(t) \quad \rightarrow \quad x = x(t)$$

a. 平均速度与瞬时速度

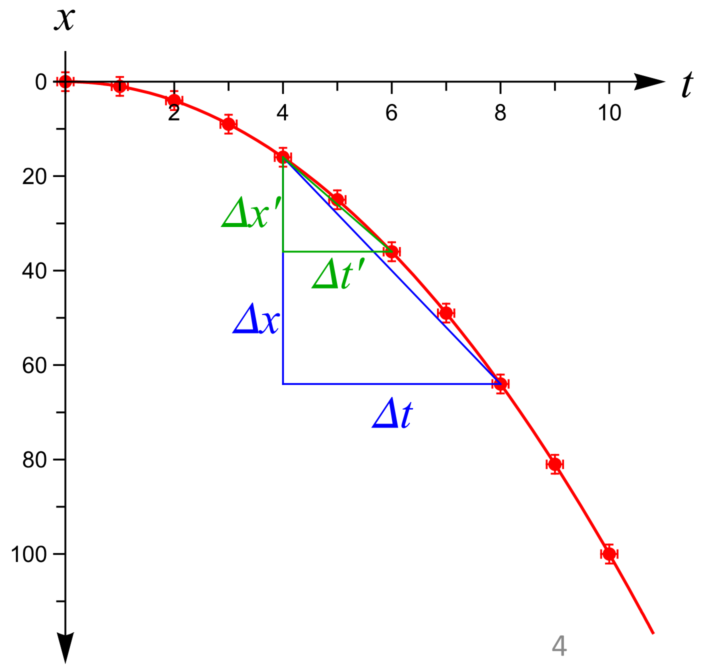
平均速度:

$$\bar{v}_{i\to i+1} = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} \quad \to \quad \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

瞬时速度: 极限

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

【例子】考虑自由落体运动 $x(t) = gt^2$，求平均速度与瞬时速度



- 莱布尼茨（Gottfried W. Leibniz）把通过取极限求瞬时速度的一般方法叫做微分（differentiation），并把上面的表达式记做微商（infinitesimal quotient）的形式，

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt}$$

微分的值叫做导数（derivative）

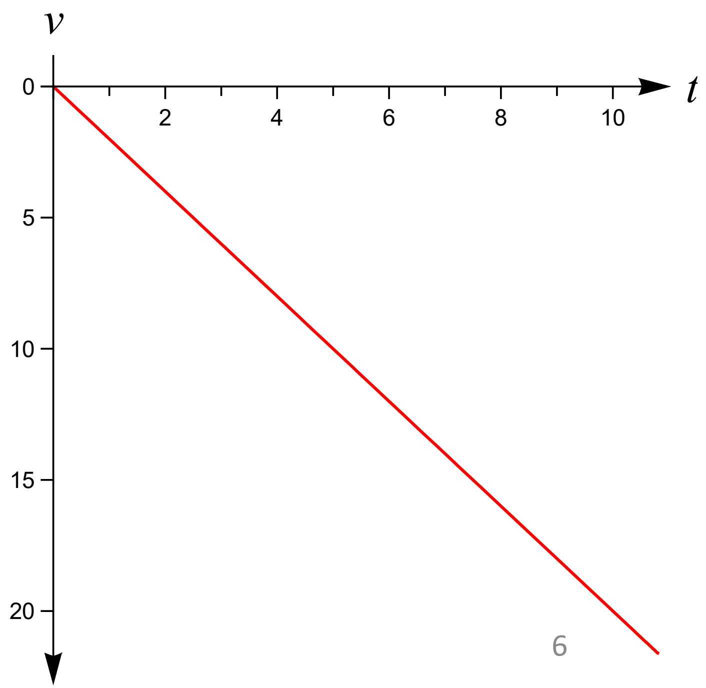
- 牛顿(Issac Newton)则把导数叫做流数（fluxion），记做，$v = \dot{x}\,(t)$。因此他的求导数的方法叫做流数法（Method of Fluxions)。此外还有拉格朗日记法 $x'(t)$、欧拉记法$D_x(t)$等

b. 加速度

瞬时速度仍然是时间的函数，因此可以对它进一步求时间微分，得到的量叫做加速度

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$$

当然还可以定义更高阶的微分，比如加速度的时间导数叫做加加速度（jerk）。这些高阶时间导数主要在工程实践和应用科学中有用。在经典力学中，由于牛顿第二定律，我们只需要研究到加速度。



§2 导数与微分

- **函数极限** (limit)：如果当自变量x无限趋于某一个值x_0时，函数$f(x)$的值无限趋近于某一个数值a，则称a为函数$f(x)$在$x \to x_0$时的极限，并记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

- 数学家的定义：$\epsilon - \delta$语言
- 在经典物理中，一般会假定实际物理过程的极限总是存在的，因此不需要严格地去用$\epsilon - \delta$语言来定义以及检验极限

「一尺之捶，日取其半，万世不竭」《庄子•天下》
「非半弗斫则不动，说在端」《墨子•经下》

- 导数(derivative)：

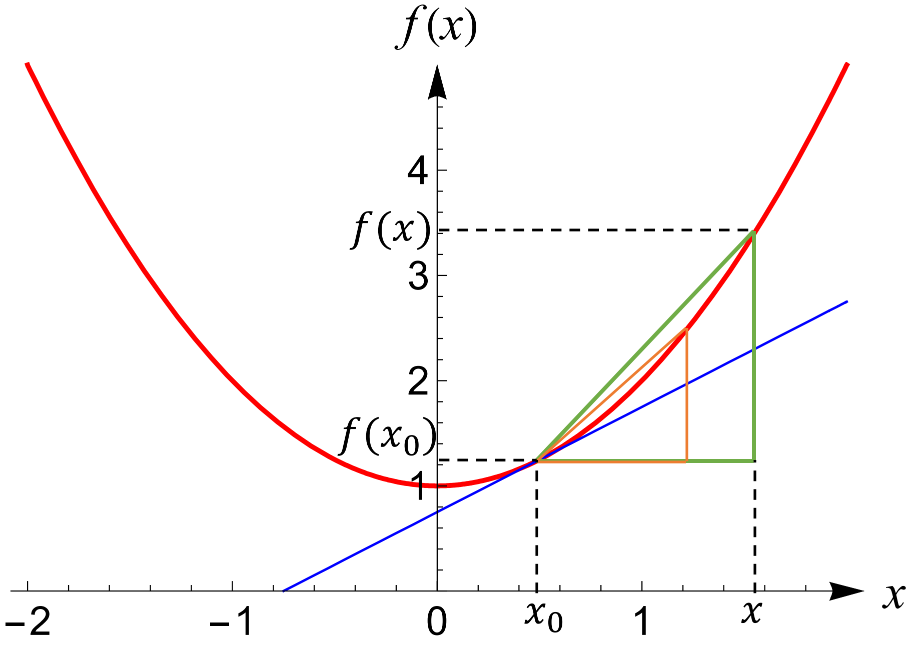
$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \equiv \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \equiv \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \equiv \frac{df}{dx}\bigg|_{x\to x_0}$$

一般来说，莱布尼茨记号会更常用一些

- 导数的几何含义：切线斜率(tangent)

【例子】三角函数(trigonometric function)的导数

【例子】指数函数(exponential function)的导数



a. 导数的基本性质

- 函数之和的导数

$$\frac{d}{dt}(f+g)=\frac{d}{dt}f+\frac{d}{dt}g$$

- 函数之积的导数（莱布尼茨法则, Leibniz's rule/product rule）

$$\frac{d}{dt}(fg)=\left(\frac{d}{dt}f\right)g+f\frac{d}{dt}g$$

- 复合函数的导数（链式法则，chain rule）

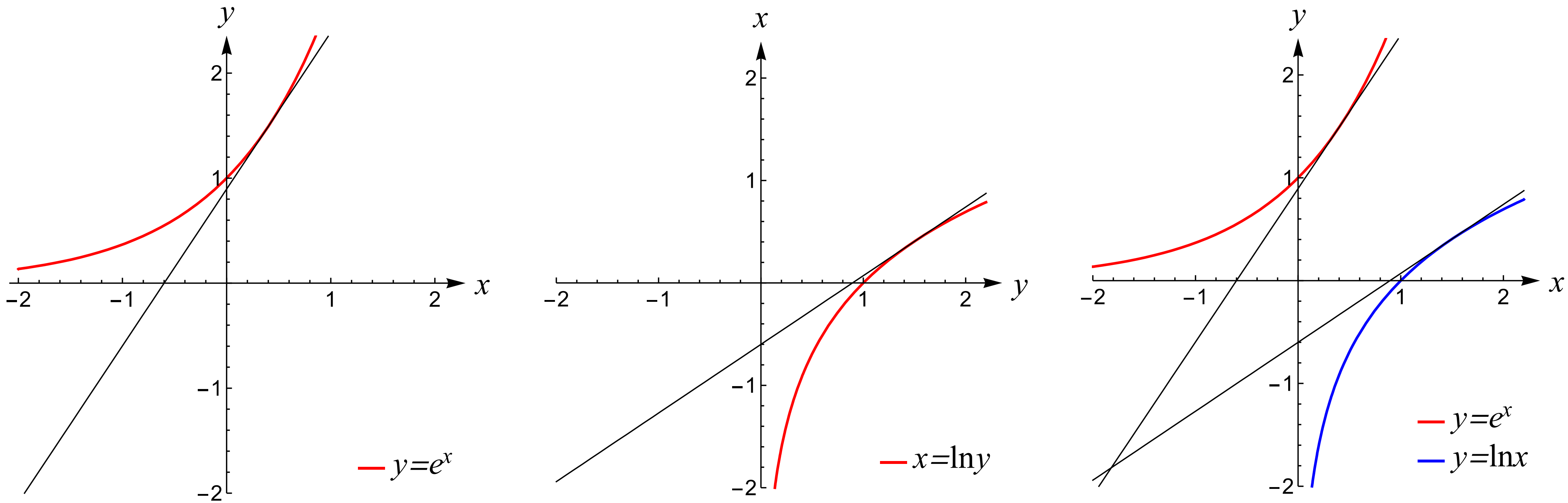
$$\frac{d}{dx}f\big(u(x)\big)=\frac{df}{du}\frac{du}{dx},\qquad f'_x\big(u(x)\big)=f'_u(u)\Big|_{u=u(x)}u'_x$$

【例子】幂函数的导数 $(x^a)'$

【例子】$\left(\ln\left[x+\sqrt{x^2+1}\right]\right)'$

- 反函数的导数
  - 函数 $y=f(x)$， 反函数： $x=f^{-1}(y) \Rightarrow$ 调整变量 $f^{-1}(x)$
  - 导数（注意变量的调整）

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y)=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{dy/dx}=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$



【例子】对数函数的导数 $(\ln x)'$

【例子】三角函数反函数的导数

双曲函数 (hyperbolic functions)

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

$$\operatorname{arcsinh} t = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$$

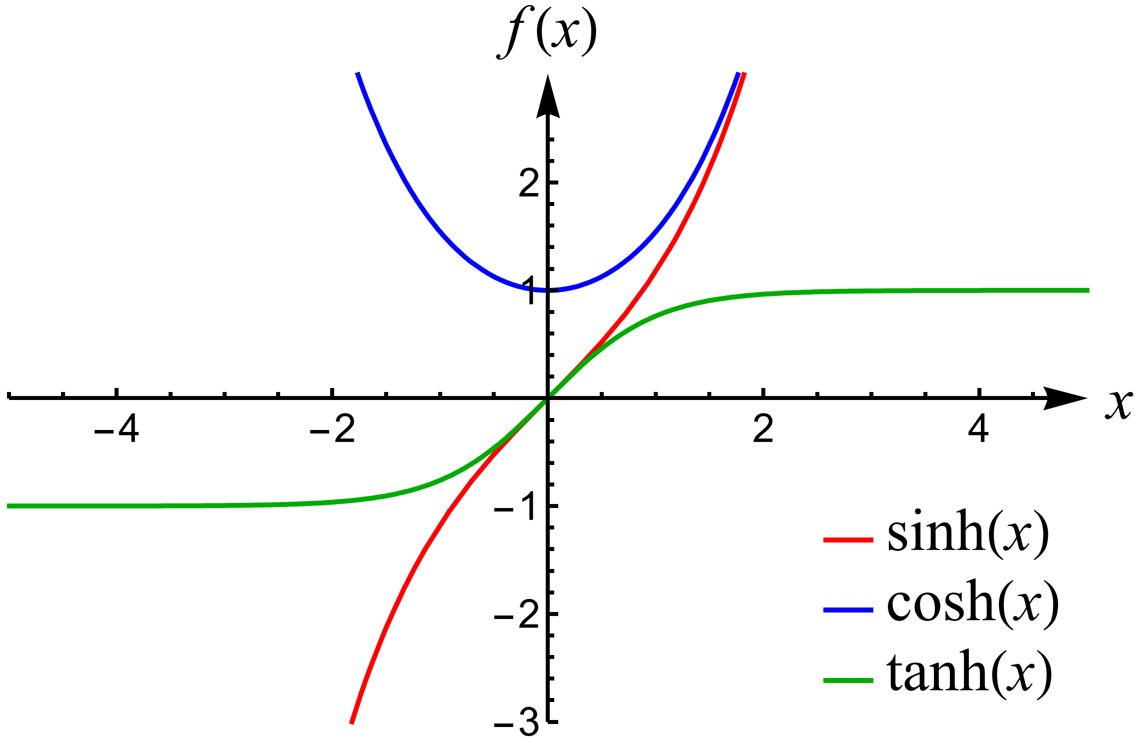
$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

$$\operatorname{arccosh} t = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}), \quad (|t| > 1)$$

$$\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}},$$

$$\operatorname{arctanh} t = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}, \qquad (|t| < 1)$$

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$



常见初等函数的导数

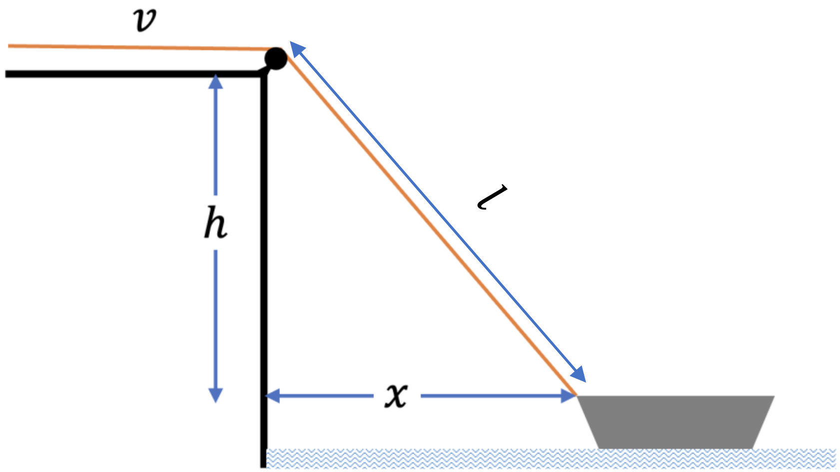
$\frac{d}{dt}\mathrm{Const} = 0$	$\frac{d}{dt}\sin t = \cos t$	$\frac{d}{dt}\arcsin t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\frac{d}{dt}t^a = at^{a-1}$	$\frac{d}{dt}\cos t = -\sin t$	$\frac{d}{dt}\arccos t = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\frac{d}{dt}e^t = e^t$	$\frac{d}{dt}\tan t = \frac{1}{\cos^2 t}$	$\frac{d}{dt}\arctan t = \frac{1}{1+t^2}$
$\frac{d}{dt}\ln t = \frac{1}{t}$	$\frac{d}{dt}\sinh t = \cosh t$	$\frac{d}{dt}\operatorname{arcsinh} t = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
$\frac{d}{dt}a^t = a^t \ln a$	$\frac{d}{dt}\cosh t = \sinh t$	$\frac{d}{dt}\operatorname{arccosh} t = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}, (t > 1)$
$\frac{d}{dt}\log_a t = \frac{1}{t \ln a}$	$\frac{d}{dt}\tanh t = \frac{1}{\cosh^2 t}$	$\frac{d}{dt}\operatorname{arctanh} t = \frac{1}{1-t^2}, (t < 1)$

b. 微分 (differentials)

考虑函数$y=f(x)$，当自变量x增加Δx时，函数的值y该如何改变？

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = ?$$

这里没有取极限或者假定$\Delta x \ll 1$



【例子】已知绳子的速度为v，求船的速度u。

- $u=\frac{dx}{dt}$，不知道$x(t)$，只知道$v=\frac{dl}{dt}$，因此希望知道当绳子缩短Δl时，船运动的距离Δx是多少。根据勾股定理$x=x(l)=\sqrt{h^2+l^2}$
- $\Delta x=\sqrt{h^2-l^2}-\sqrt{h^2+(l-\Delta l)^2}$

$$u=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sqrt{h^2-l^2}-\sqrt{h^2+(l-\Delta l)^2}}{\Delta t}=\frac{l}{x}v$$

考虑函数$y=f(x)$，当自变量x增加Δx时，考虑函数的值y的改变：

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

- 前面用割线的斜率来近似导数（切线的斜率），这里反过来：

$$\Delta y=\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x=f'(x)\Delta x+r(x,\Delta x)$$

- $r(x,\Delta x)$的性质：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{r(x,\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)=0$$

- 虽然我们不知道$r(x,\Delta x)$的具体形式 —— 也不需要知道，我们得到：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{r(x,\Delta x)}{\Delta x}=0$$

我们把这样的量叫做无穷小量(infinitesimal)，并记作$o(\Delta x)$

- 考虑函数$y = f(x)$，当自变量x增加Δx时，考虑函数的值y的改变：

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

- 对比导数的莱布尼茨记号，

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

在取极限$\Delta x \to 0$时，我们将有限差分Δ替换成微分号d

- 因此可以采取类似的记号，把上式记为，

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$
$$\Leftrightarrow df(x) \equiv f(x+dx) - f(x) = f'(x)dx$$

- 导数可以视作微商

$$df(x) = f'(x)dx \;\; \Leftrightarrow \;\; \frac{df}{dx} = f'(x)$$

一阶微分不变性：

- 考虑复合函数$f(u(x))$，根据定义一方面，$d_x f = f_x'(u(x))dx$。即，当x作为自变量发生改变时，f相应的变化为

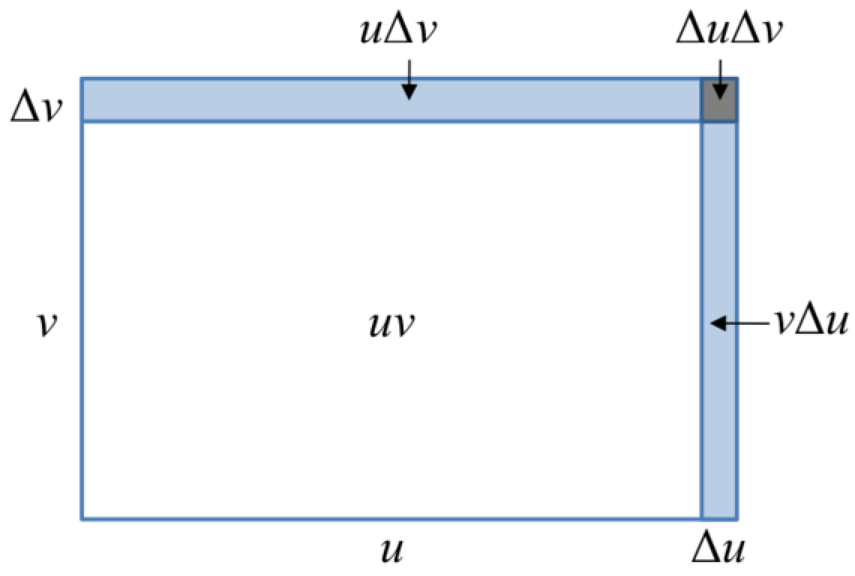
$$\Delta_x f \equiv f\big(u(x+\Delta x)\big) - f(u(x)) = f_x'\big(u(x)\big)\Delta x + \mathrm{o}(\Delta x)$$

另一方面，$d_u f = f_u'(u)du$。即，当u作为自变量发生改变时，f相应的变化为

$$\Delta_u f \equiv f(u+\Delta u) - f(u(x)) = f_u'(u)\Delta u + \mathrm{o}(\Delta u)$$

- 问题：如果u的变化是由x改变引起的，那么两种方法计算得到的f的改变是否相同？即$d_u f \overset{?}{=} d_x f$
- 根据复合函数的链式法则可以证明，两者的确相等，因此我们可以去掉下标，将微分记作df而不需要指定是相对于哪个变量的微分

可见，求函数的微分比求函数本身一般来说是要简单的。这是因为，**函数的微分本质上是一种局部线性化**



【例子】莱布尼茨法则

【例子】隐函数的微分$F\big(x,y(x)\big)=0$，求$y'(x)$

【例子】参数方程的微分：已知$x=\sin t\,,y=\cos t$。求$y'(x)$

c. 高阶导数 (high order derivatives)

对于函数的导数可以进一步求导，这样得到的导数叫做原来函数的高阶导数。

- 二阶导数记作:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x) = \ddot{f}(x)$$

这里约定$dx^2 \equiv (dx)^2$

- 类似地，n阶导数记作，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

- 高阶微分：

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n$$

- 注意，高阶微分不具有不变性，例如：

$$d_x^2 f\big(u(x)\big) = f_x''\big(u(x)\big) d^2 x = (f_u' u_x')' dx^2 = f_u'' du^2 + f_u' d^2 u$$

$$d_u^2 f(u) = f_u'' du^2 \neq d_x^2 f(u(x))$$

因此，考虑高阶微分时需要指定自变量

d. 泰勒展开 (Taylor expansion)

微分运算本质上是在局部线性化函数。那么，该如何获得函数在局部的高阶（非线性）信息？

【泰勒定理】设函数$f(x)$在区间I有$n+1$阶导数，$x_0 \in I$，则对于任何 $x \in I$，

$$f(x) - T_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)(x - x_0)^{n+1}, \qquad (0 < \theta < 1)$$

其中泰勒多项式，

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

- 进一步地，对于光滑函数$f(x)$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots$$

也可以写成，

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)\Delta x^n+\cdots$$

【例子】

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots$$

e. 函数形状的刻画

- 定义域、周期性、奇偶性、不连续点、不可微点、奇点
- 单调区间、驻点、极值点
  - $f'(x)$
- 凹凸区间、拐点、鞍点
  - $f''(x)$
- 渐进线
- 其他特殊点，如零点

【例子】绘制$f(x)=x+\frac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$上的形状，并求函数最小值

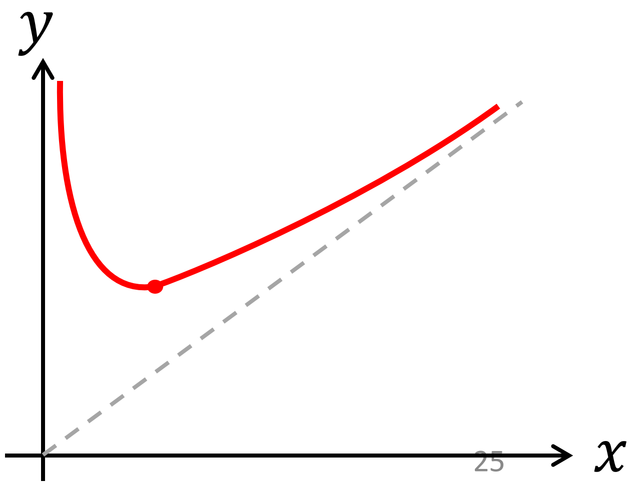
分析：

$f(x)$是奇函数，但我们只考虑正实轴$(0,+\infty)$。其导数为，

$$f'(x)=1-1/x^2$$

其中，函数的驻点即导数的零点为：$x=+1,-1$ (舍去)。导数在 $[+1,\infty]$区间非负，即为函数的单调增区间；导数在 $(0,+1)$区间负，即为函数的单调减区间。因此，$x=+1$为函数的极小值点，$f(+1)=2$。

- 渐进线：$x=0,y=x$



§3 质点运动学 II

假设我们知道了物体任意时刻的运动速度$v(t)$和其初始位置x_0，该如何求它任意时刻的位置$x(t)$呢？换句话说，就是求一个函数$x(t)$使得，

$$x'(t) = v(t), \qquad x(0) = x_0$$

我们把这样一个问题叫做§1问题的反问题。

还是按照前面的办法，将运动按照时间划分成若干区间。加入我们知道了每一个区间的平均速度$\bar{v}_{i\to i+1}$，就可以一步一步地从初始位置累加起来得到第i个区间的位置，

$$x_i = x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \bar{v}_{k\to k+1}\,\Delta t_{k\to k+1}$$

- 为了用瞬时速度代替平均速度，需要将区间划分的无限细，

$$x(t) = x_0 + \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=0}^{i-1} \bar{v}_{k\to k+1} \Delta t_{k\to k+1} \equiv x_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau$$

我们把这个运算叫做积分

- 不难看出，微分与积分互为逆运算，即：

$$\int_a^b \dot{x}(t) dt = x(b) - x(a),$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^t v(\tau) d\tau = v(t)$$

§4 积分

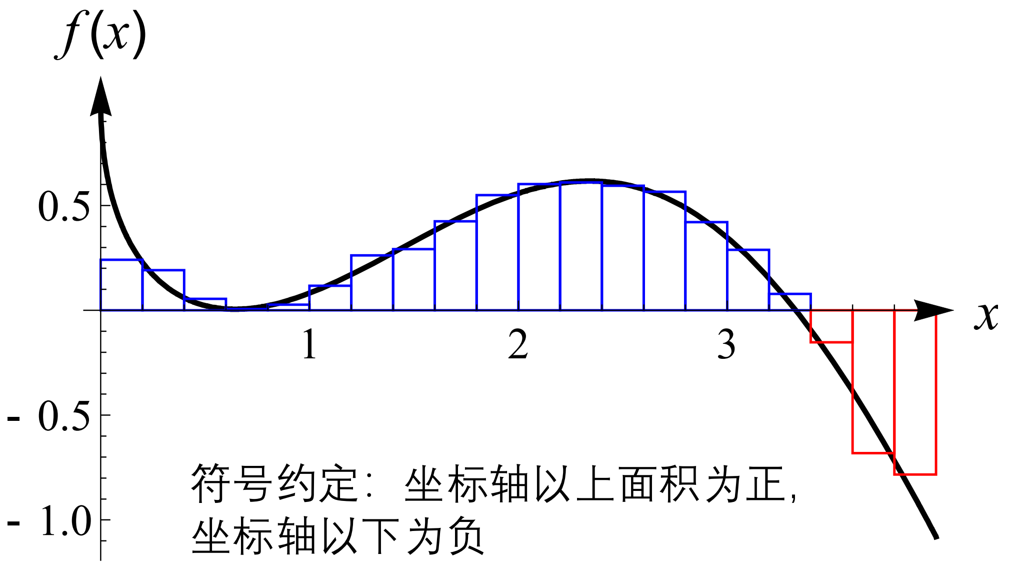
§3 对与积分的定义可以推广到任意连续函数

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i\,, \qquad (x_{i-1} < \xi_i < x_i)$$

- 从图形上看，函数的积分等于曲线与坐标轴围成的面积
- 微积分基本定理（牛顿-莱布尼茨定理）

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)\,,$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$



- 不定积分：对于不同的积分下限，

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$$

我们可以得到不同的函数$F_a(x)$，它们的导数都是函数$f(x)$。我们把$F_a(x)$叫做$f(x)$的原函数，把从$f(x)$求任意一个原函数$F(x)$的运算叫做不定积分，表示为，

$$F(x) = \int f(x)dx$$

- 可见，不定积分定义到一个任意常数

积分的性质

- 函数和的积分：

$$\int (f+g)dt = \int f dt + \int g dt$$

- 分部积分：

$$\int f g' dt = fg - \int f' g dt$$

- 变量代换：

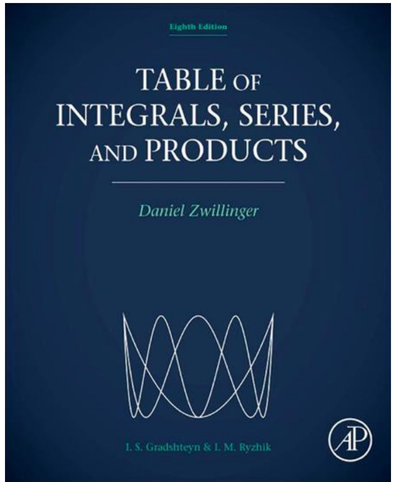
$$\int f(u)du = \int f\big(u(t)\big)u'(t)dt$$

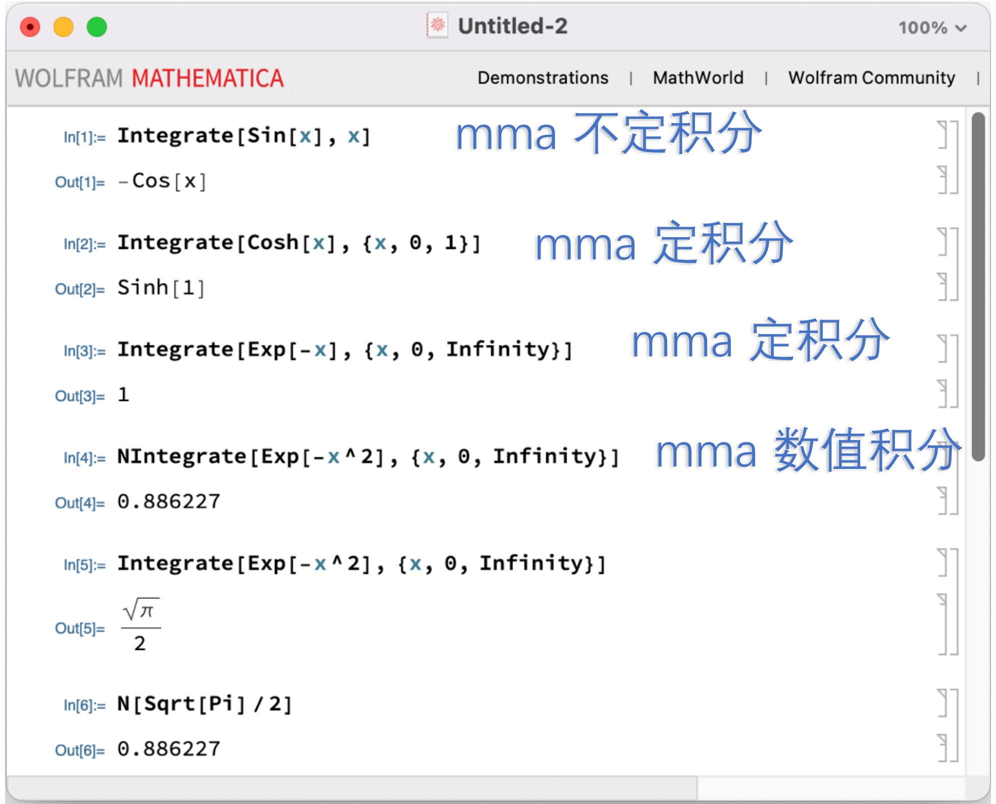
常见函数的积分

$\int 0dx = \mathrm{Const}$	$\int \cos x = \sin x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$
$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1}, (a \neq -1)$	$\int \sin x\, dx = -\cos x$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln \lvert x \rvert$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsinh} x$
$\int e^x dx = e^x$	$\int \sinh x\, dx = \cosh x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosh} x, (\lvert x \rvert > 1)$
$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x$	$\int \cosh x\, dx = \sinh x$	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctanh} x, (\lvert x \rvert < 1)$
	$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x$	

计算积分的工具

- 数学软件 Mathematica, matlab, maple
- 科学计算库： SciPy, NumPy
- 积分表： Table of Integrals, Series, and Products, 2014年第八版
- NIST数学手册： https://dlmf.nist.gov/
- Abramowitz and Stegun 数学手册 (A&S): https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/

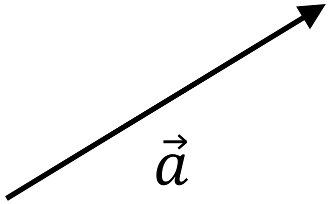




§5 矢量代数

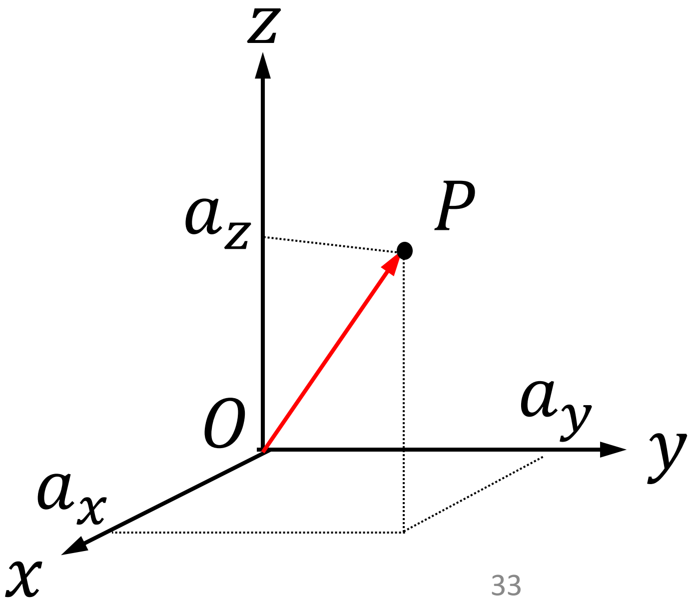
现实世界的运动既有距离又有方向。为了描述这些运动，我们需要引入一个新的数学对象——矢量又叫做向量。矢量简而言之是既有大小又有方向的量。数学物理上，将矢量记作：$\vec{a}$、$\boldsymbol{a}$、(a_x, a_y, a_z)

弓矢

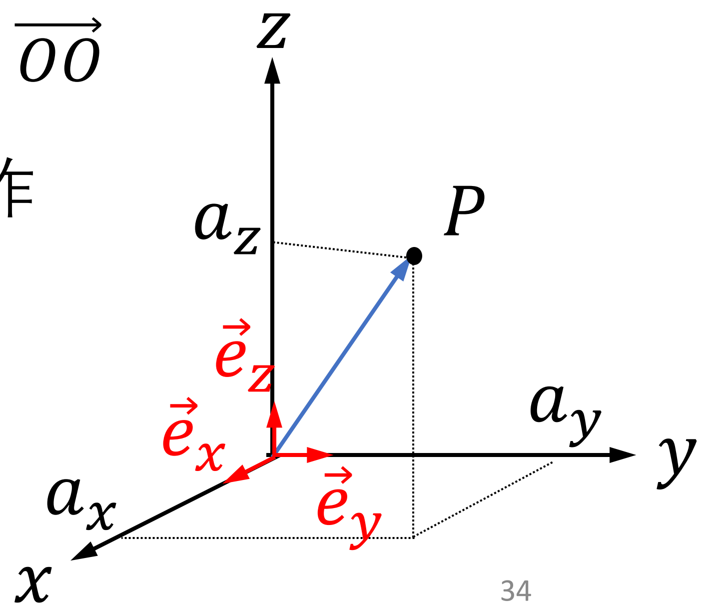


矢量

一个重要的例子是三维空间的点P相对于原点O的位置$\overrightarrow{OP}$

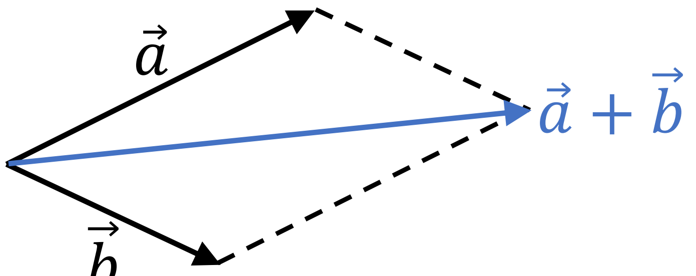


- 方向矢量：$\hat{a}=\frac{\vec{a}}{a}$，很显然，$|\hat{a}|=1$
- 矢量相等：大小相当、方向相同（起始点不需要相同）
- 矢量平行：方向相同（包含方向相反）的矢量互相平行
- 大小相同、方向相反的一对矢量互为负矢量。矢量$\vec{a}$的负矢量记作$-\vec{a}$
- 零矢量长度为零，没有方向，记作$\vec{0}$或者0。例子，原点：$\overrightarrow{OO}$
- 基矢量：x,y,z三个方向的方向矢量叫做基矢量，分别记作$\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$，也记作$\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}$
- 分量表示：$\vec{a}=a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z=\sum_i a_i\vec{e}_i$

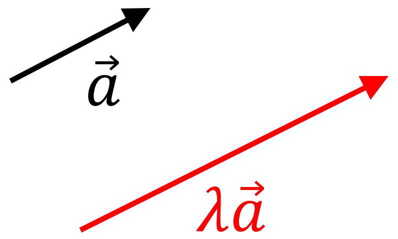


a. 矢量代数

- **矢量加法**：两个矢量相加得到一个矢量，满足平行四边形法则
  - 交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
  - 结合律：$\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$
  - 矢量减法：$\vec{a}-\vec{b}\equiv\vec{a}+(-\vec{b})$

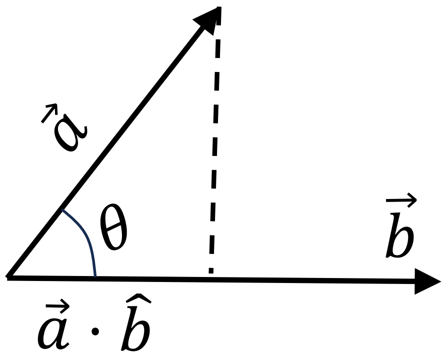


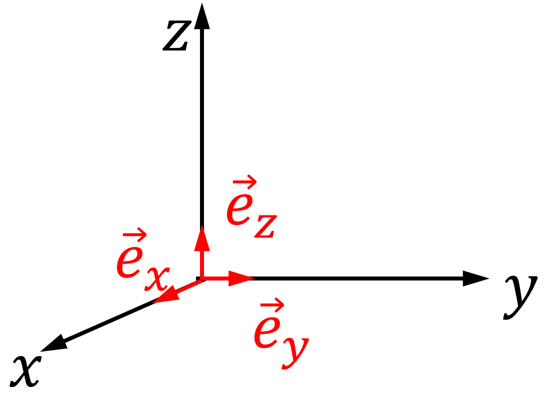
- **矢量数乘**：$\lambda\vec{a}$仍然是一个矢量，长度为原来矢量的λ倍，方向不变
  - 结合律：$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$
  - 分配律：$\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$



- **矢量点乘**（内积、点积）：矢量点乘的结果是一个数$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，其中$\theta$是两个矢量之间的夹角。点乘满足交换律和对加法的分配律以及对数乘的结合律
  - 模平方：$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2\equiv\vec{a}^2$
  - 矢量垂直：如果两个矢量的内积为0，称这两个矢量垂直：$\vec{a}\cdot\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$
  - 基矢量的内积：基矢量长度为1，互相垂直，$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x=\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y=\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z=1, \vec{e}_x\cdot\vec{e}_y=\vec{e}_y\cdot\vec{e}_z=\vec{e}_z\cdot\vec{e}_x=0$，还可以记为

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

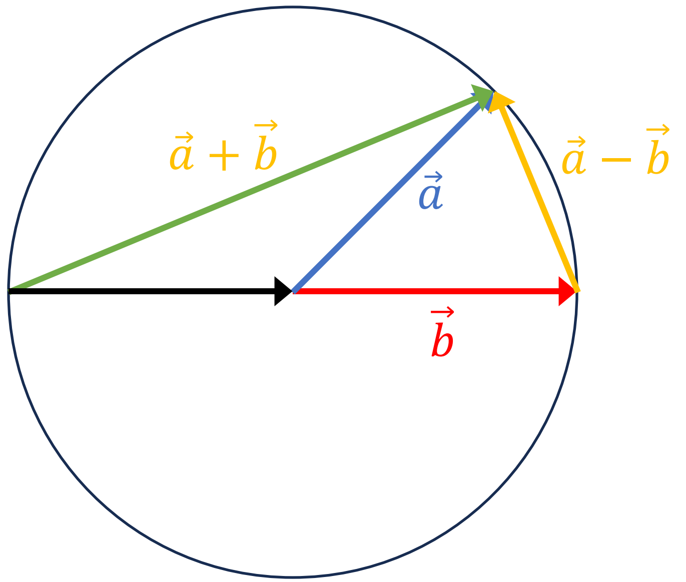




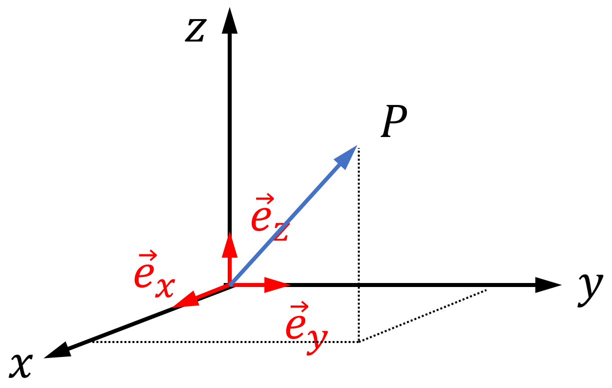
【例子】柯西不等式：

$$\vec{a}^2\vec{b}^2 \geq \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$$

【例子】泰勒斯定理：如果$|\vec{a}| = |\vec{b}|$，证明$\vec{a}+\vec{b}$ 与$\vec{a}-\vec{b}$垂直。



- **分量表示:**



$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z = \sum_i a_i\vec{e}_i$$

$$a_x = \vec{a}\cdot\vec{e}_x, a_y = \vec{a}\cdot\vec{e}_y, a_z = \vec{a}\cdot\vec{e}_z \;\Rightarrow\; a_i = \vec{a}\cdot\vec{e}_i$$

【例子】已知两个矢量$\vec{a},\vec{b}$的分量，求其内积

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z\right)\cdot\left(b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z\right) = a_xb_x + a_y\,b_y + a_zb_z$$

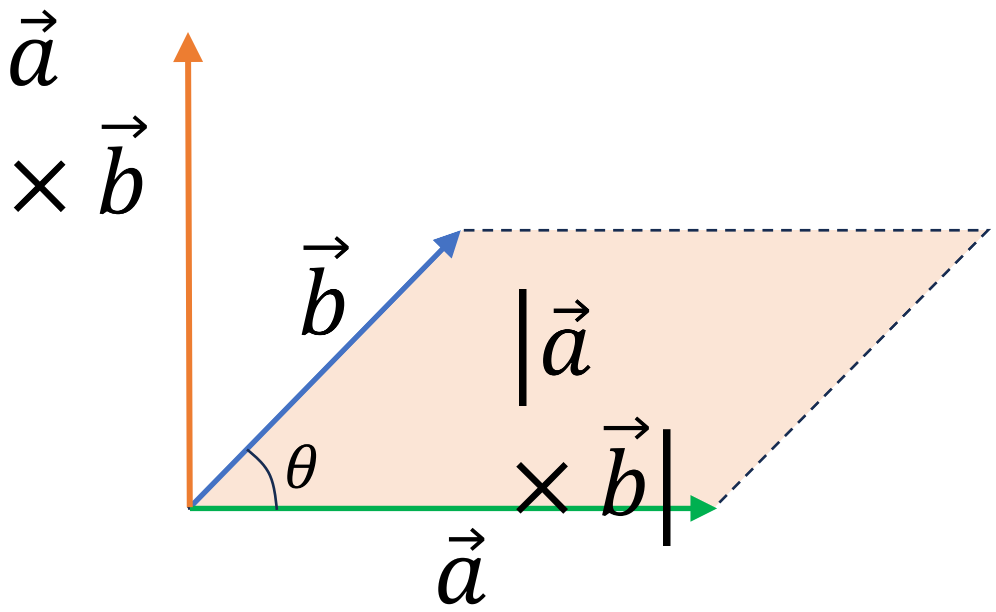
【例子】已知两个矢量$\vec{a},\vec{b}$的分量，求矢量$\vec{a},\vec{b}$之间的夹角

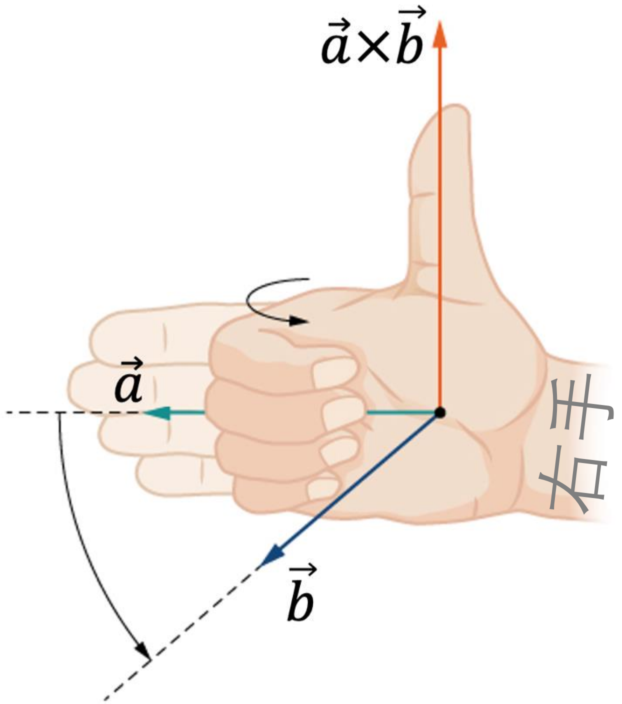
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow \theta = \arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \arccos\frac{a_xb_x + a_y\,b_y + a_zb_z}{\sqrt{(a_x^2+a_y^2+a_z^2)(b_x^2+b_y^2+b_z^2)}}$$

- **矢量叉乘**（外积）： 两个矢量叉乘得到一个新的矢量，

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$$

其大小$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}||\sin\theta|$（等于两个矢量构成的平行四边形的面积），方向垂直于矢量$\vec{a},\vec{b}$所在的平面，并按照右手定则来约定正负。也有些地方将叉乘记为$\vec{a}\wedge\vec{b}$或者$[\vec{a},\vec{b}]$



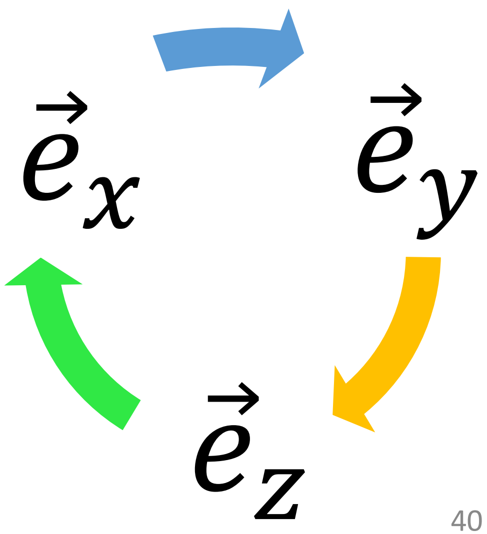


- **叉乘的性质**:
  - $\vec{a} \times \vec{a} = 0$，反过来，若$\vec{a} \times \vec{b} = 0$，则$\vec{a}||\vec{b}$，即$\vec{a} = \lambda\vec{b}$
  - 矢量外积与矢量垂直: $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{a} = 0$
  - 若$\vec{a} \perp \vec{b}$，则$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}||\vec{b}|$
  - 叉乘不满足交换律，实际上，$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
  - 基矢量的叉乘:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$

注意上面的循环顺序，如果逆着这个顺序，例如

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$$



- **多重积与混合积：**
  - 三重积： $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (BAC-CAB规则)

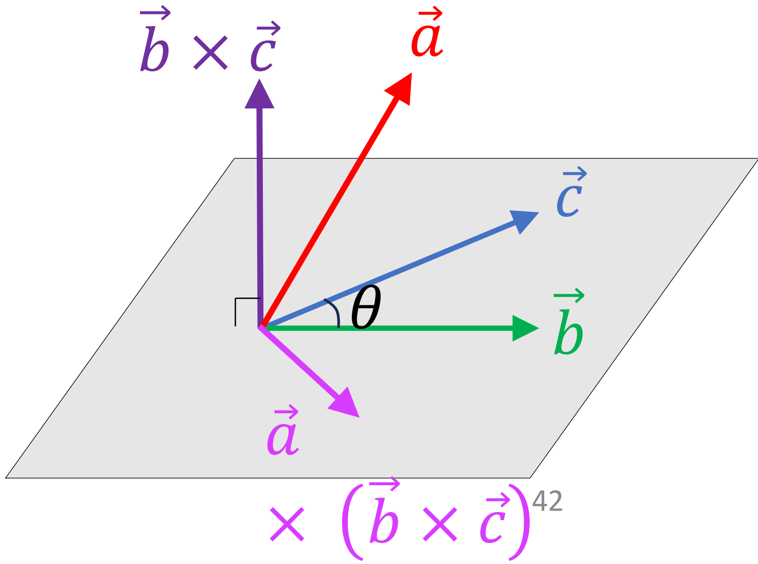
【证明】

方法一：分量展开算（练习）

方法二：如图，首先$\vec{b}\times\vec{c}$垂直于$\vec{b},\vec{c}$所在的平面，而$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$又垂直于$\vec{b}\times\vec{c}$，因此$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$一定位于$\vec{b},\vec{c}$所在的平面内，即可以表示成$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$。

另一方面，$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$垂直于$\vec{a}$。因此，$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\lambda[\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})]$。

最后找一个特殊情况确定λ: $\hat{\imath}\times(\hat{\imath}\times\hat{\jmath})=-\hat{\jmath}\Rightarrow\lambda=1$



注意：

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

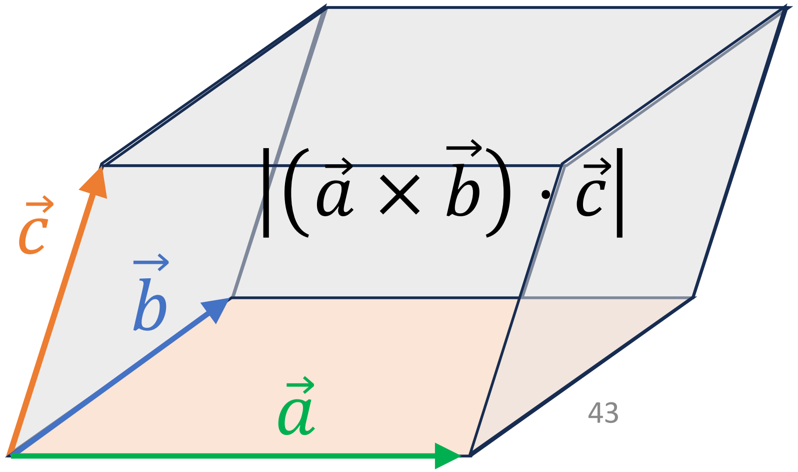
$$\neq\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)-\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$$

$$\neq\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)-\vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a})$$

不过， $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=0$（雅可比关系）

- 混合积： $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$
  - 几何解释： $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$三个矢量构成的平行六面体的体积
  - 分量表示： $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$

$$=a_xb_yc_z+a_yb_zc_x+a_zb_xc_y$$
$$-a_zb_yc_x-a_xb_zc_y-a_yb_xc_z$$

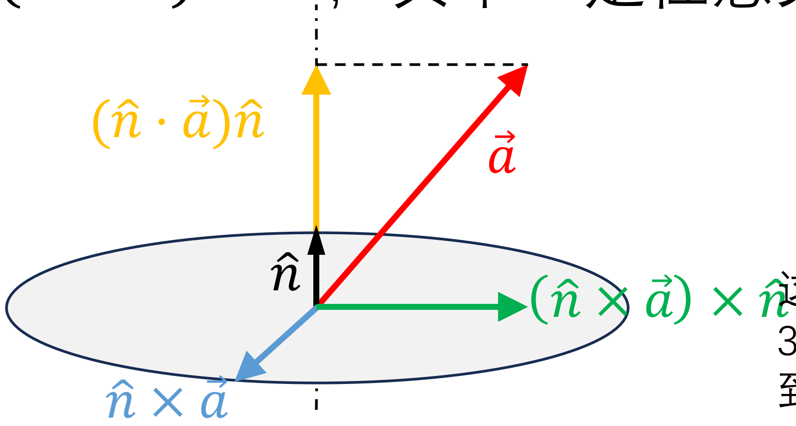


【例子】证明：$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+(\vec{a}\times\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$

【例子】证明：$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$

【例子】证明：$\vec{a}\times[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]=\vec{b}[a\cdot(\vec{c}\times\vec{d})]-(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})$

【例子：极分解定理】证明：$\vec{a}=(\vec{a}\cdot\hat{n})\hat{n}+(\hat{n}\times\vec{a})\times\hat{n}$，其中 $\vec{a}$ 是任意矢量，$\hat{n}$是任意单位矢量



这个结论在研究3维转动时将起到重要的作用

b. 矢量微积分

矢量微积分可以按照分量来定义。例如，

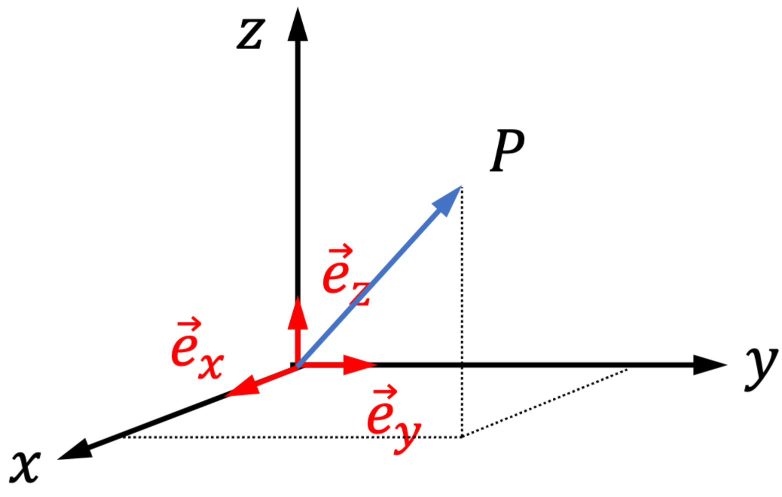
$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \sum_i \frac{da_i}{dt} \vec{e}_i$$

$$\int \vec{a}(t)dt = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i \vec{a}(\xi_i)\Delta t_i = \sum_i \int a_i(t)dt\, \vec{e}_i$$

§6 欧几里德几何

我们生活的时空是3维欧几里德时空，它是物理中最重要的一个矢量空间

- 位置矢量，点P相对于原点O的位置$\overrightarrow{OP}$
- 笛卡尔坐标系(Cartesian coordinate system)
  - 基矢量：$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$
    - 正交归一 $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$
    - 不依赖于坐标（全局基矢量）→ 物理存在性?
  - 位置矢量：$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z = \sum_i x_i \vec{e}_i$
  - 在物理上，一般约定采用右手坐标系，即X、Y、Z三个坐标轴满足右手定则



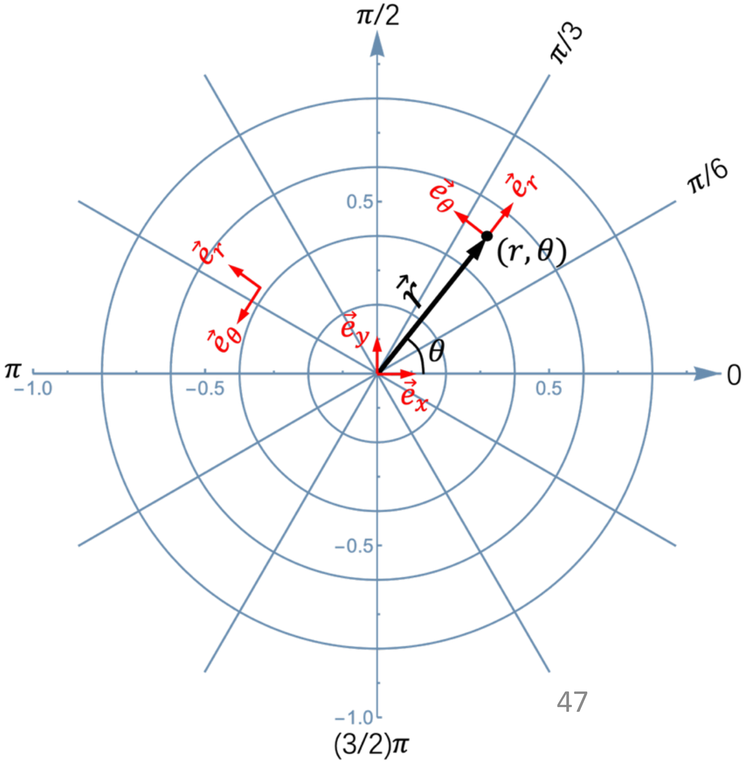
a. 极坐标系 (polar coordinate system)

对于2维欧几里德空间，另外一个常用的坐标系是极坐标系。其中的点既可以用笛卡尔坐标标记(x, y)，也可以用极坐标标记(r, θ)，两者满足：

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arg(x + iy) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

- 基矢量： $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$
  - 正交归一： $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = 1, \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0 \Rightarrow \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$
  - 这组基矢量是角度θ的函数(局域基矢量)

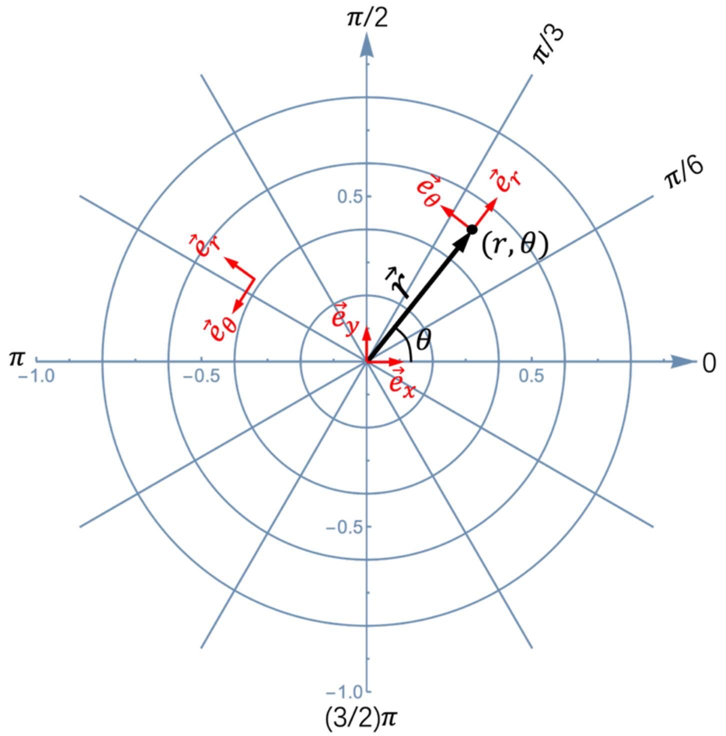
$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta\, \vec{e}_x + \sin\theta\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\, \vec{e}_x + \cos\theta\, \vec{e}_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_x = \cos\theta\ \vec{e}_r - \sin\theta\, \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_y = \sin\theta\, \vec{e}_r + \cos\theta\, \vec{e}_\theta \end{cases}$$



- 基矢量的微分：

$$d\vec{e}_r = \vec{e}_\theta d\theta, \qquad d\vec{e}_\theta = -\vec{e}_r d\theta$$

【证明】利用笛卡尔坐标基矢量

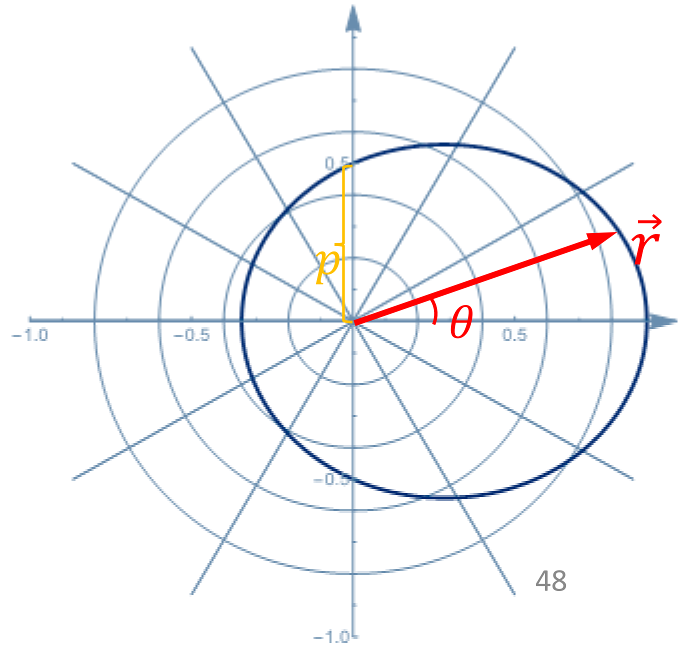


- 位置矢量：

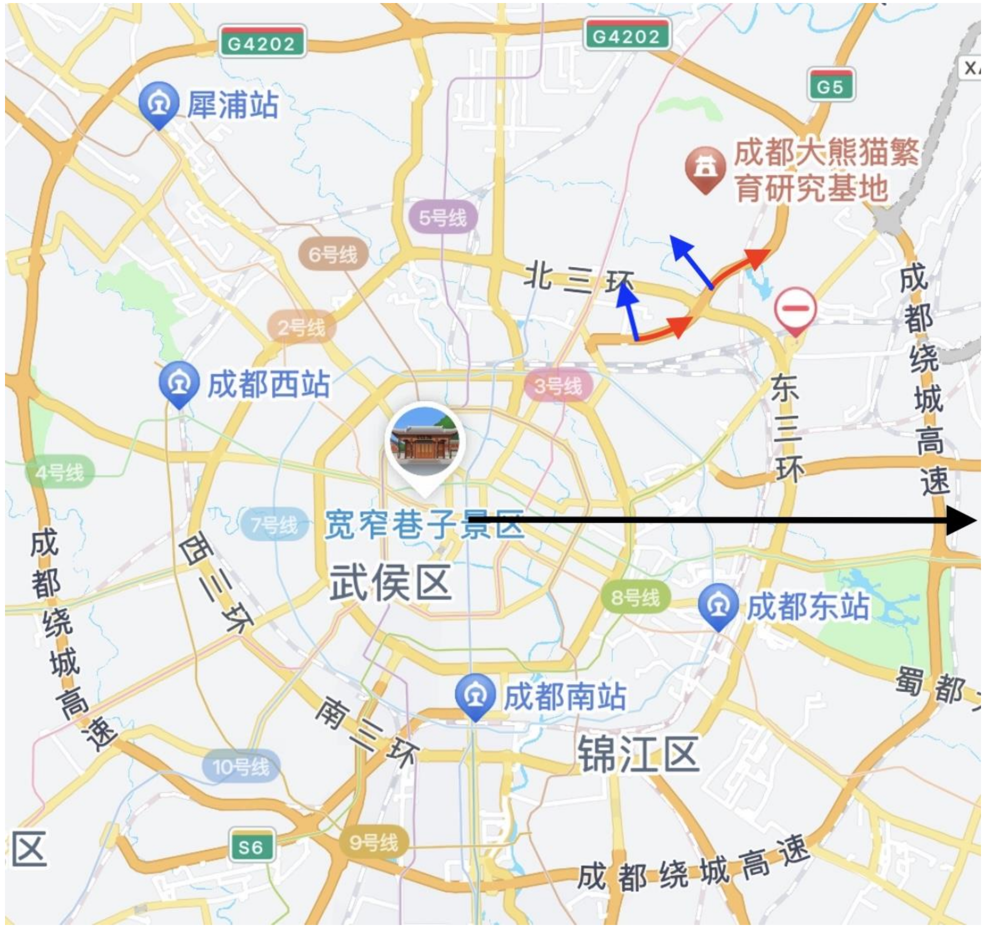
$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

【例子】开普勒轨道，

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$



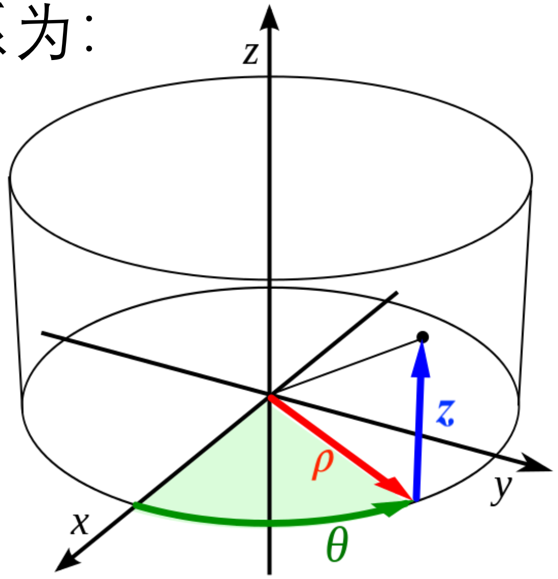

拥堵
北四环
北三环
国家体育场
Y
X
8号线
10号线
14号线
19号线
2号线
西三环
西四环
阜成路
9号线
西城区
朝阳区
天安门
北京站
北京西站
西二环
东二环
北京南站
东四环
丰台区
南三环
10号线
南四环


G4202
G5
犀浦站
成都大熊猫繁育研究基地
5号线
6号线
北三环
2号线
成都西站
3号线
东三环
成都绕城高速
4号线
宽窄巷子景区
7号线
西三环
武侯区
8号线
成都东站
成都南站
南三环
10号线
锦江区
S6
9号线
区

b. 柱坐标系 (cylindrical coordinate system)

对于3维欧几里德空间，将极坐标系增加一个z方向的坐标就可以得到柱坐标系。其中的点可以用柱坐标标记(ρ, θ, z)，它与笛卡尔坐标的关系为：

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arg(x + iy) \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$



- 基矢量： $\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho$
  - 正交归一： $\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1, \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\theta = \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_z = 0$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

  - 这组基矢量是角度θ的函数(局域基矢量)

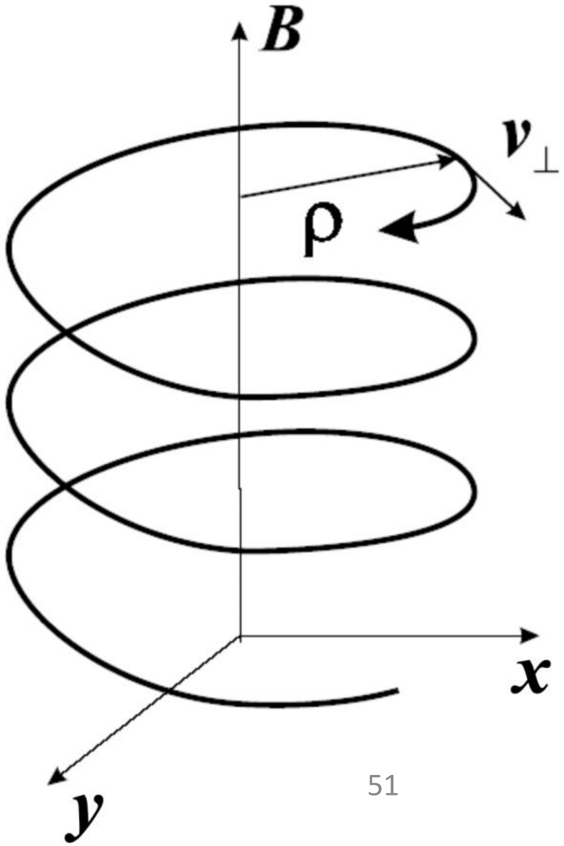
$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}_x = \cos\theta\ \ \vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_\theta \\ \vec{e}_y = \sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

- 基矢量的微分：

$$d\vec{e}_\rho = \vec{e}_\theta d\theta, \qquad d\vec{e}_\theta = -\vec{e}_\rho d\theta, \qquad d\vec{e}_z = 0$$

- 位置矢量：

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$$



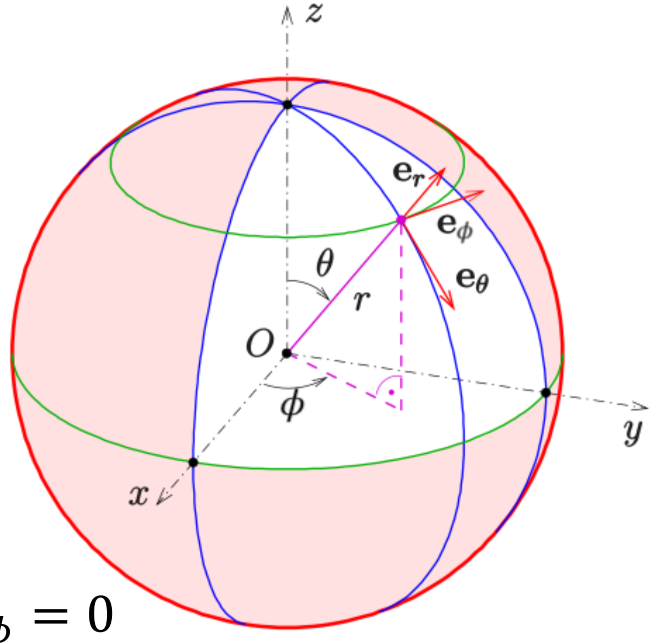
【例子】带电粒子在匀强磁场中的回旋运动。

$$\vec{r} = r_L\,\vec{e}_\rho + v_z t\,\vec{e}_z$$

c. 球坐标系 (spherical coordinate system)

极坐标系在3维欧几里德空间的另外一个推广是球坐标系。在这个坐标系，点可以用球坐标标记为(r,θ,ϕ)，它与笛卡尔坐标的关系为：

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arg(\sqrt{x^2+y^2}+iz) \\ \phi = \arg(x+iy) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



- 基矢量： $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$
  - 正交归一： $\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r=\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_\theta=\vec{e}_\phi\cdot\vec{e}_\phi=1, \vec{e}_r\cdot\vec{e}_\theta=\vec{e}_r\cdot\vec{e}_\phi=\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_\phi=0$

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}$$

  - 这组基矢量是角度θ,ϕ的函数(局域基矢量)

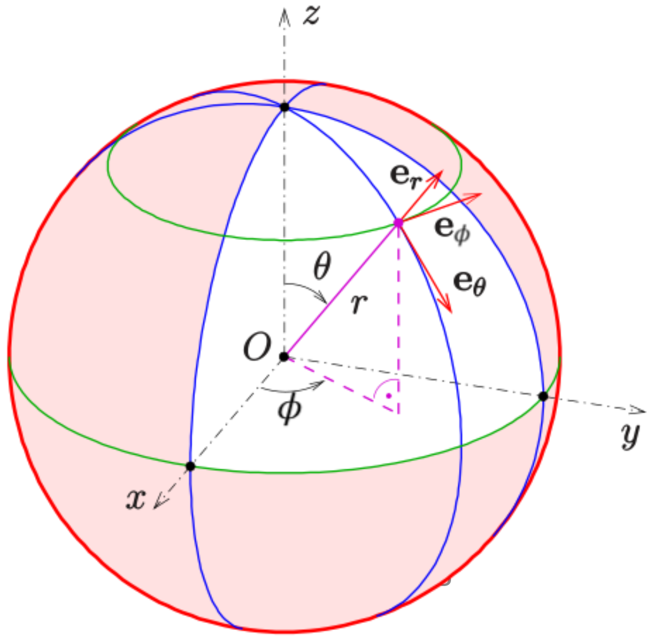
$$\begin{cases}\vec{e}_r = \sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\phi = -\sin\phi\,\vec{e}_x + \cos\phi\,\vec{e}_y\end{cases} \quad \begin{cases}\vec{e}_x = \sin\theta\cos\phi\ \vec{e}_r + \cos\theta\cos\phi\,\vec{e}_\theta - \sin\phi\vec{e}_\phi \\ \vec{e}_y = \sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\sin\phi\,\vec{e}_\theta + \cos\phi\vec{e}_\phi \\ \vec{e}_z = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta\end{cases}$$

- 基矢量微分:

$$\begin{cases}d\vec{e}_r = \vec{e}_\theta d\theta + \sin\theta\,\vec{e}_\phi d\phi \\ d\vec{e}_\theta = -\vec{e}_r d\theta + \cos\theta\vec{e}_\phi d\phi \\ d\vec{e}_\phi = -\sin\theta\,\vec{e}_r d\phi - \cos\theta\vec{e}_\theta d\phi\end{cases}$$

- 位置矢量:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$



【例子】地理坐标：合肥北纬 31.8639°，东经 117.2808°，海拔37米

d. 曲线

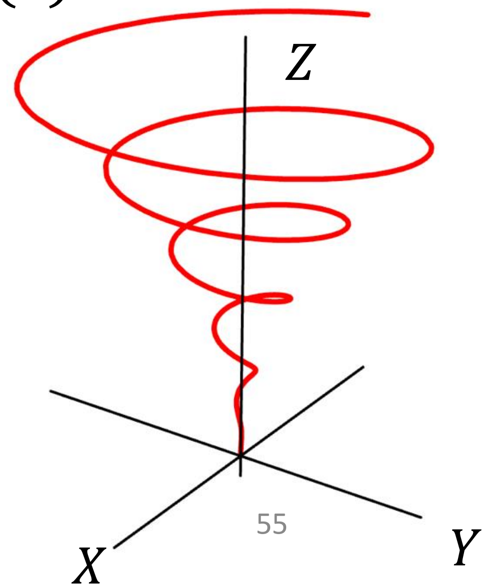
由参数方程组：

$$
\begin{cases}
x = \gamma_x(s) \\
y = \gamma_y(s), \\
z = \gamma_z(s)
\end{cases}
\qquad s \in [a,b] \subset \mathbb{R}
$$

确定的点集叫做一条曲线。可以记为矢量形式，$\vec{r} = \vec{\gamma}(s)$ 或者$\vec{r} = \vec{r}(s)$

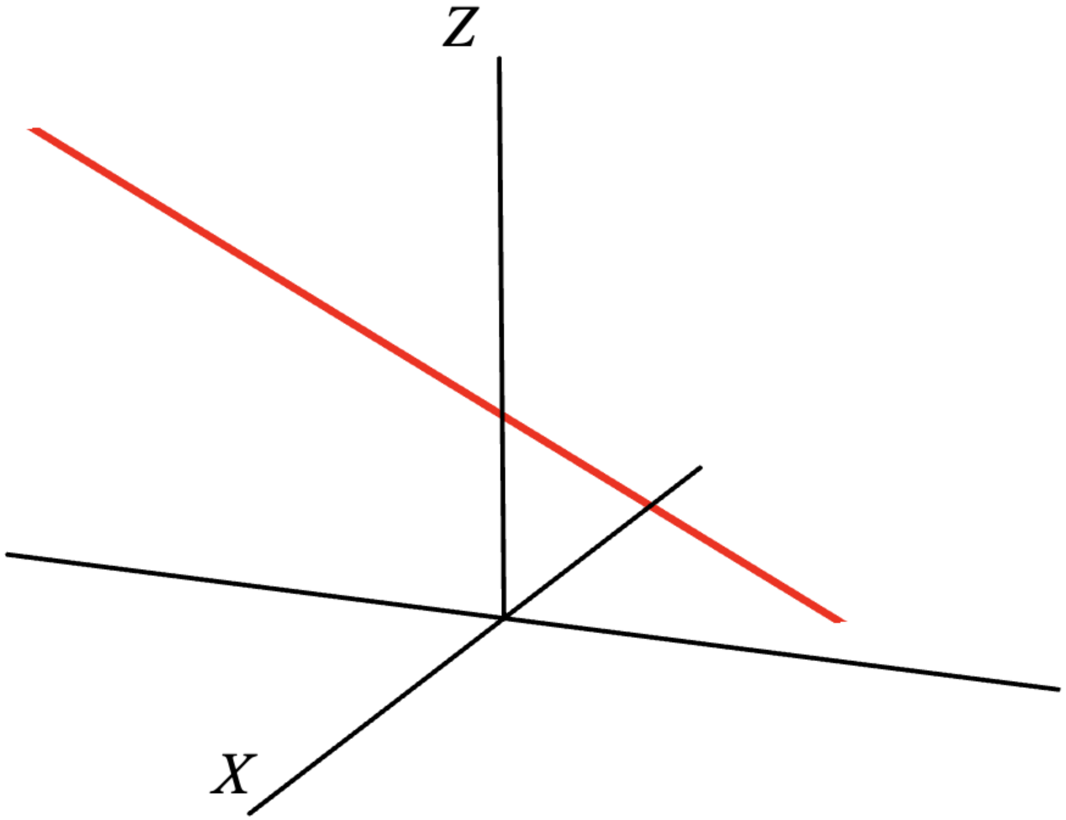
【例子】

$$
\begin{cases}
x = s^2 \cos s \\
y = s^2 \sin s\,, \\
z = s
\end{cases}
\qquad s \in [0, 8\pi]
$$



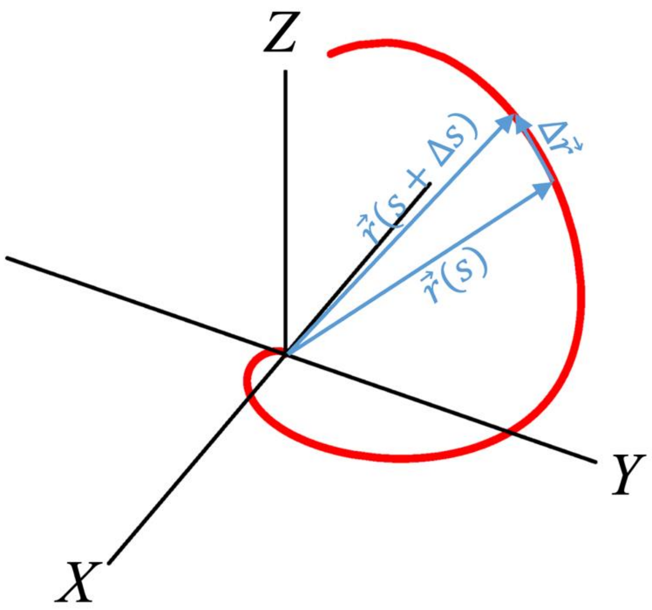
【例子】直线

$$\vec{r}(s) = \vec{r}_0 + s\vec{\tau}, \qquad s \in [a, b] \subset \mathbb{R}, |\vec{\tau}| = 1$$



线元：曲线位置向量的微分叫做线元(line element)，

$$d\vec{r} = \vec{r}(s+ds) - \vec{r}(s) = \vec{r}'(s)ds$$



- 切矢量(tangent vector)：微分的本质是线性化，因此不难看出线元与曲线相切，单位切矢量：

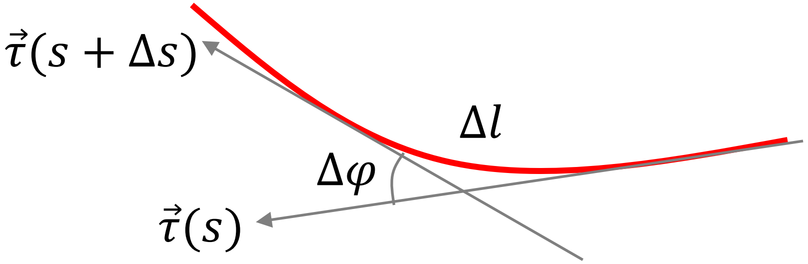
$$\vec{\tau}(s) = \frac{\vec{r}'(s)}{|\vec{r}'(s)|}$$

- 曲率：曲线的曲率定义为相邻切线的夹角与线元长度之比，

$$\kappa = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{|\vec{\tau}(s) \times \vec{\tau}(s+ds)|}{|d\vec{r}|}$$

$$= \frac{|\vec{\tau} \times \vec{\tau}'|}{|\vec{r}'|} = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}$$

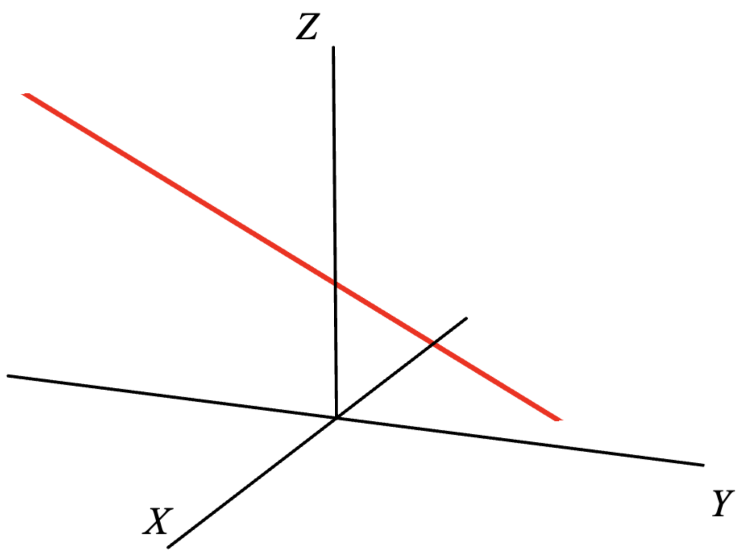
$$\vec{\tau}(s) \times \vec{\tau}(s+\Delta s) = \Delta\varphi$$



曲率的倒数叫做曲率半径，$\rho = \kappa^{-1}$

【例子】直线的切向量：

$$\vec{r}'(s)=\vec{\tau}$$



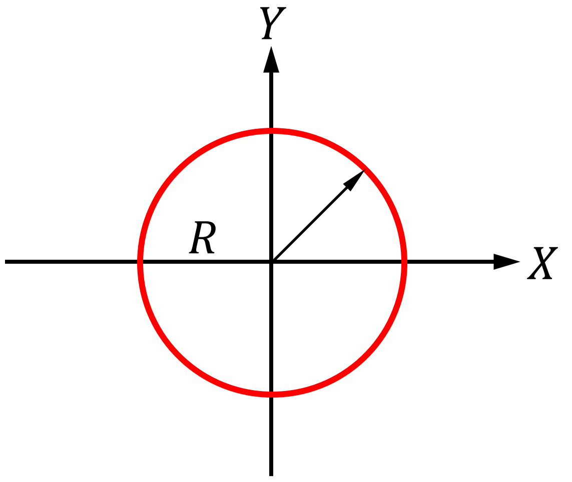
直线的曲率为0

【例子】圆的曲率：

$$\begin{cases} x(s)=R\cos s \\ y(s)=R\sin s \end{cases} \Rightarrow \vec{r}(s)=R\vec{e}_r, \theta=s$$

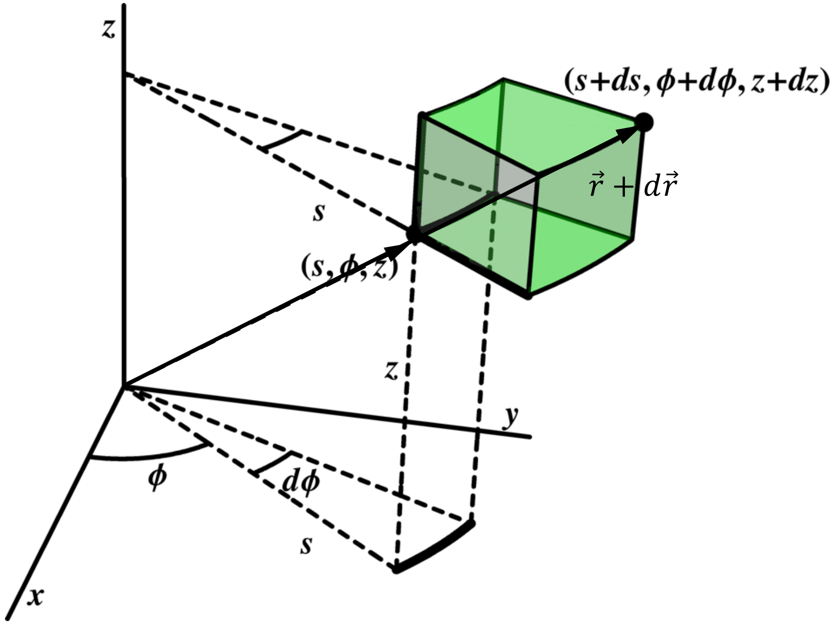
$$\Rightarrow \ \vec{r}'=R\vec{e}_\theta, \vec{\tau}(\theta)=\vec{e}_\theta, \vec{\tau}'(\theta)=-\vec{e}_r$$

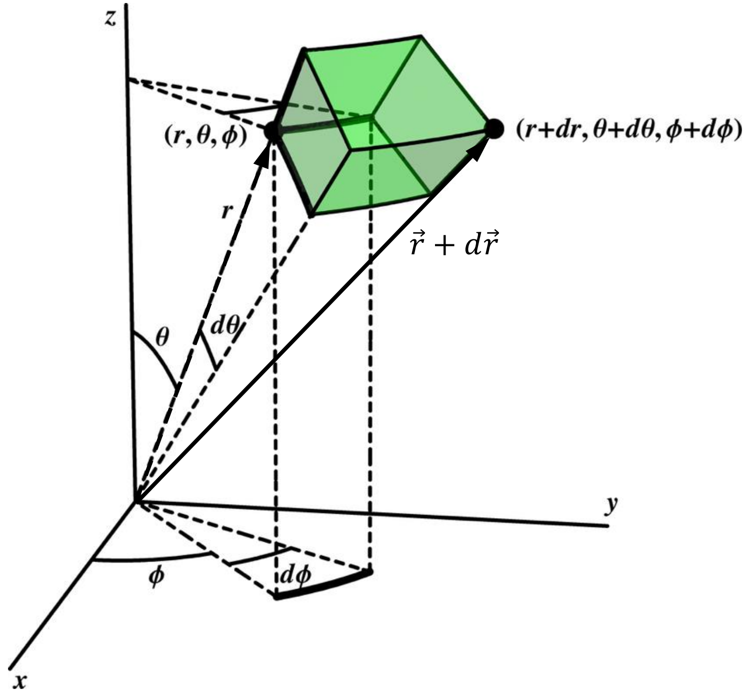
$$\Rightarrow \kappa=R^{-1}, \qquad \rho=R$$



曲线线元的坐标表示:

- 直角坐标表示: $d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$
- 极坐标/柱坐标表示: $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$
- 球坐标表示: $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\, d\phi\vec{e}_\phi$





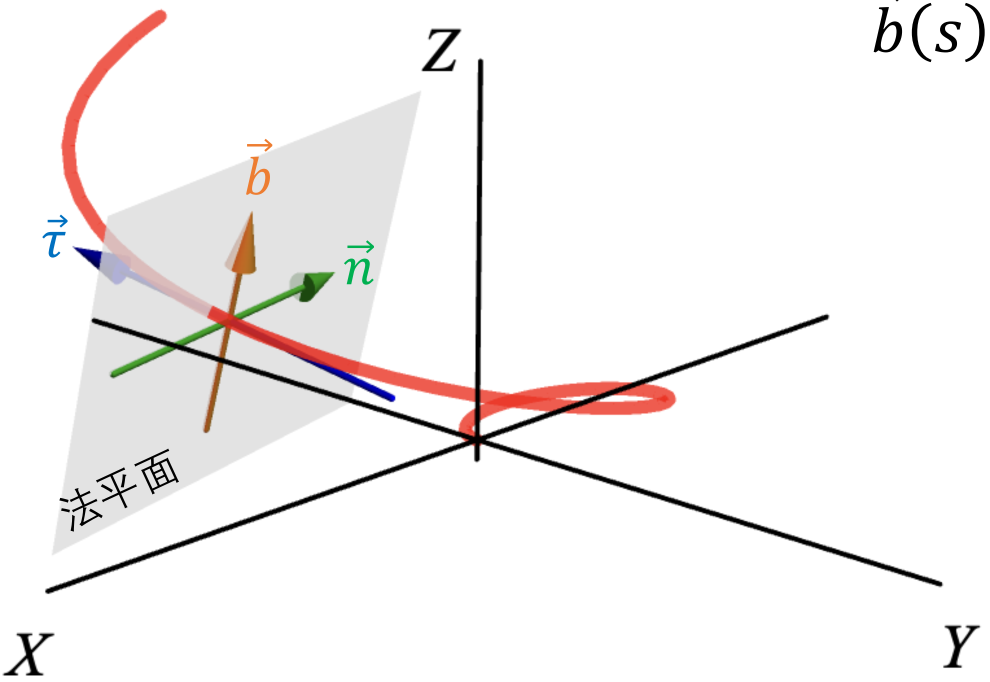
- 法平面：与切矢量垂直的点的集合

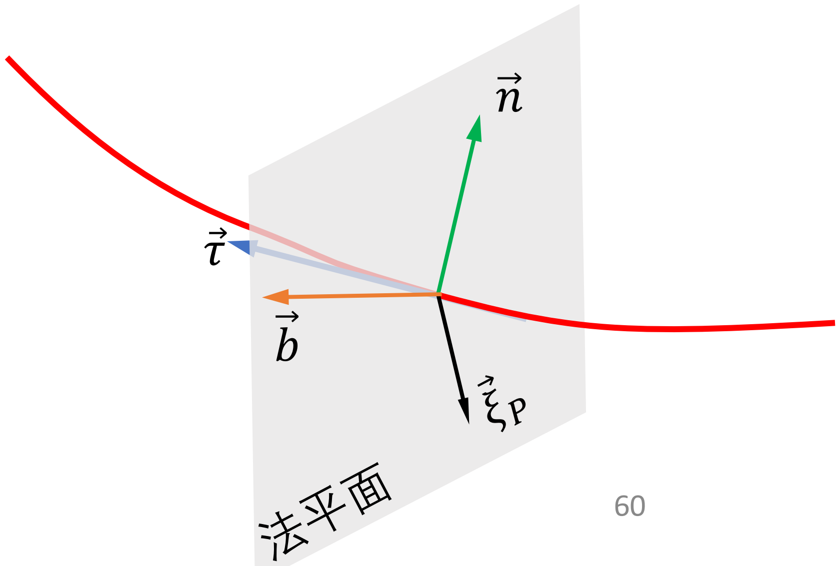
$$(\vec{\xi}_P - \vec{r}(s)) \cdot \vec{\tau}(s) = 0$$

- 法向量(normal vector)与次法向量(binormal vector)：

$$\vec{n}(s) = \frac{\vec{\tau}'(s)}{|\vec{\tau}'(s)|} = \frac{\vec{r}''|\vec{r}'|^2 - \vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{r}'')}{|\vec{r}'||\vec{r}' \times \vec{r}''|},$$

$$\vec{b}(s) = \vec{\tau}(s) \times \vec{n}(s) = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}$$





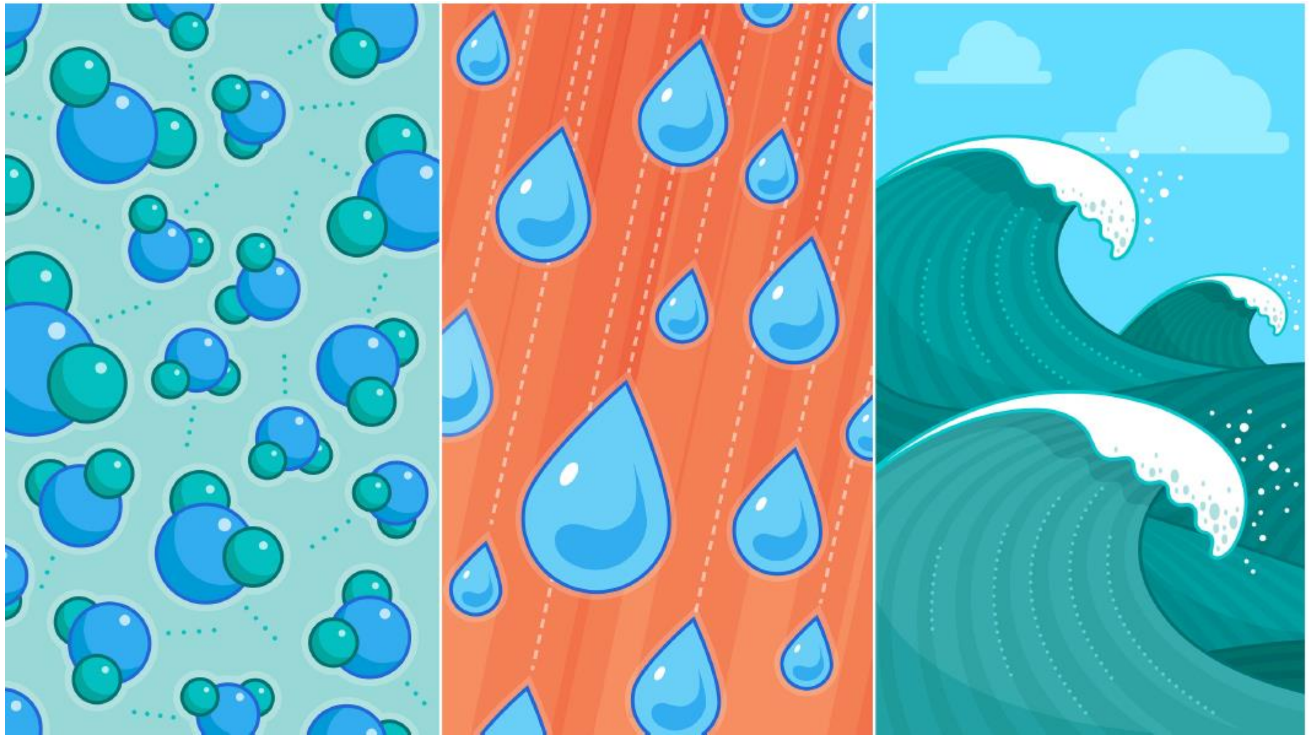
§7 质点运动学 III

a. 质点模型

- 物体大小远小于其运动距离时，可以把物体抽象为一个保留质量的点，叫做质点(point mass)、粒子(particle)、 物质点(material point)

【例子】天体运动、刚体平动

- 质点模型体现了物理学中一个非常深刻的想法，即尺度分离原则。即，当我们考虑大尺度物理（物体的运动）时，不需要了解小尺度物理（物体的内部结构）的细节——小尺度物理出现在宏观参数上（质量）。基于这个原则，人们发展了重整化和有效场理论。质点模型可以视为最简单的有效场论模型。

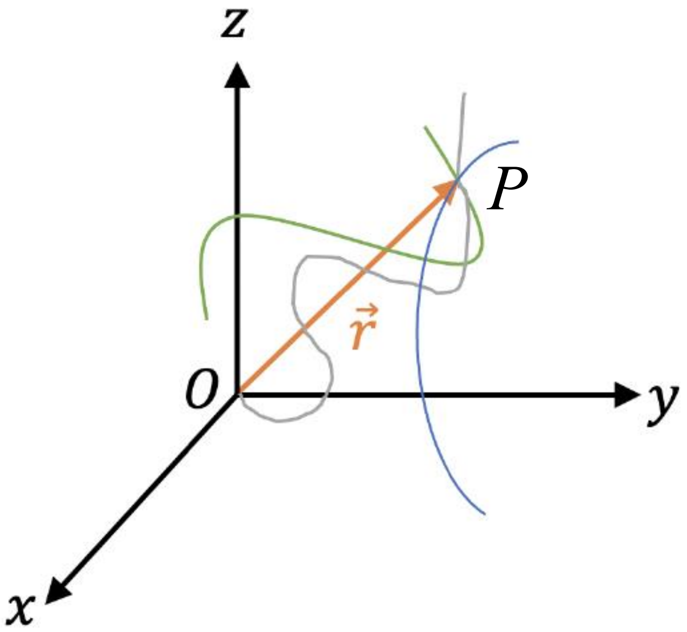


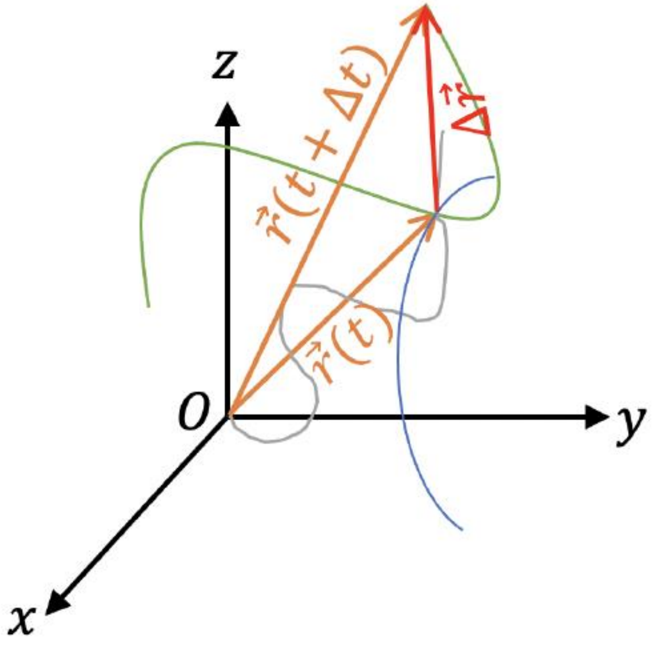
图：不同尺度的水

尺度分离原则：当我们考虑大尺度物理（物体的运动）时，不需要了解小尺度物理（物体的内部结构）的细节——小尺度物理出现在宏观参数上（如质量）

- 位置矢量（位矢）描述质点的瞬时位置$\vec{r}(t)$
  - 注意，位矢仅描述质点当前的位置，不关心质点的历史路径
  - 位置矢量，点P相对于**坐标系**原点O的位置$\overrightarrow{OP}$
- 位置矢量的改变量$\Delta\vec{r}$叫做位移(displacement)，位移也是一个矢量

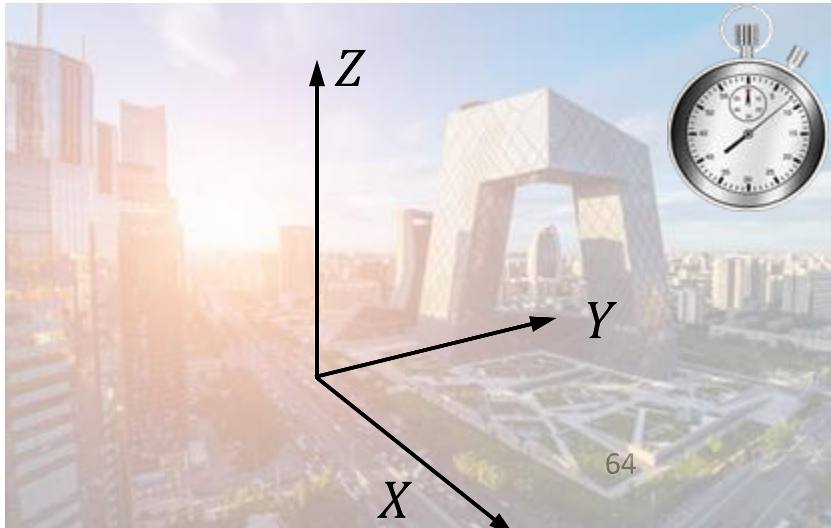
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$





- 参考系(reference frame)：描述运动所相对的参照物(包括时钟)叫做参考系，又叫做参照系
  - 在数学上，位置矢量$\vec{r}$是相对于某个几何坐标系(coordinates)定义的
  - 在物理上，运动都是相对的，绝对的运动不具有测量效应
  - 几何坐标系是参照物的抽象
  - 常用的坐标系：笛卡尔坐标系、柱坐标系、球坐标系
  - 右手规则

【例子】在陌生城市利用地标进行定向与导航



b. 速度与加速度

- 质点的瞬时速度(instantaneous velocity)定义为其位置矢量的时间导数:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\vec{r}$$

以后除非特殊指明，我们将瞬时速度简称为速度。速度是一个矢量。

- 质点的加速度(instantaneous acceleration)定义为其速度的时间导数:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\vec{v}$$

【例子】匀加速运动($\vec{a}$恒定)的位置矢量:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2, \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

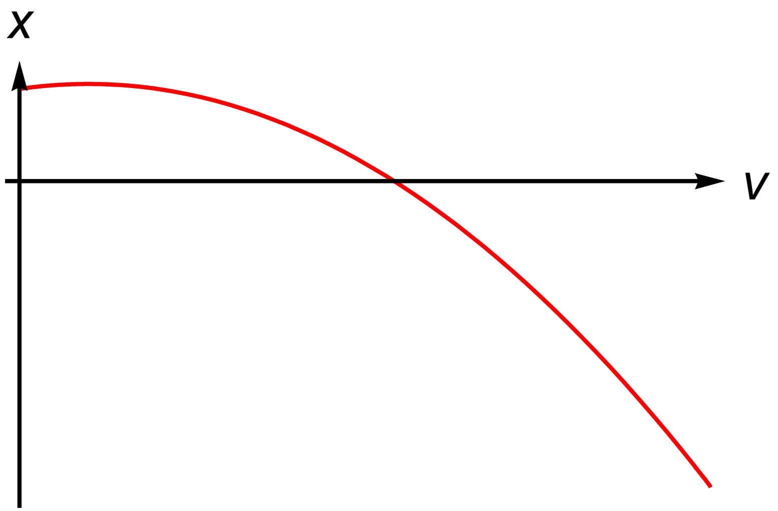
- 运动状态的确定：
  - 在数学上，如果知道位置矢量随时间的演化$\vec{r}(t)$，可以通过微分得到速度$\vec{v}(t)$、加速度$\vec{a}(t)$；反之如果知道速度$\vec{v}(t)$，可以通过积分得到位置矢量

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t), \qquad \vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

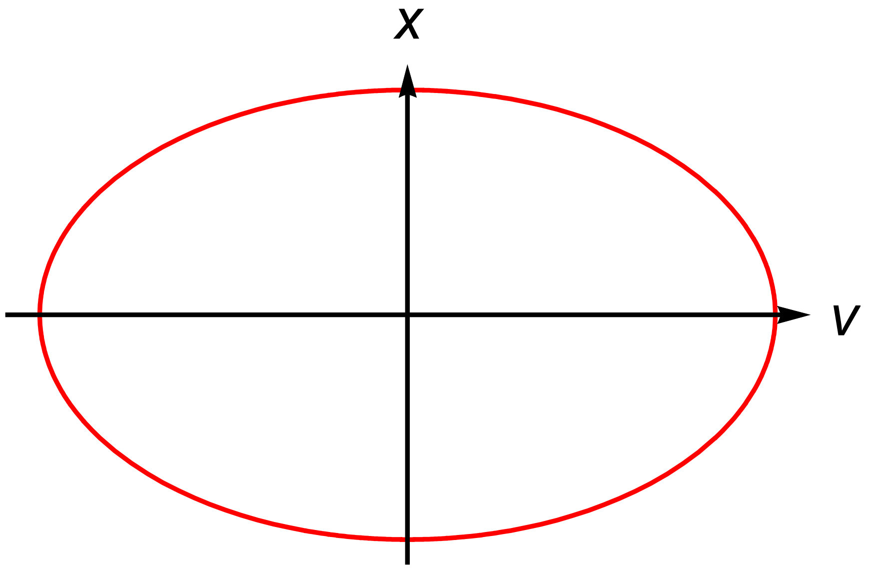
  - 在物理上，质点位置矢量作为时间的函数常常难以直接测量得到，比较容易直接获得的是质点的瞬时位置矢量$\vec{r}$、瞬时速度$\vec{v}$与瞬时加速度$\vec{a}$等，但注意这些瞬时量都是互相独立的
  - 根据牛顿第二定律，加速度可以通过相互作用力得到。因此，**在物理上，$(\vec{r},\vec{v})$唯一确定质点在t时刻的运动状态。**

- 相空间：位置与速度所构成的坐标系叫做相空间

【例子】



一维抛物运动在相空间的轨迹



一维谐振子运动在相空间的轨迹

- 质点在运动过程中所经历的各个点所构成的曲线叫做轨迹(trajectory)。轨迹不是瞬时量，也不包含完整的运动学信息。不同运动可能会有完全相同的运动轨迹。

- 运动的独立性与运动的分解：根据矢量的加法规则（包括微分），如果位矢可以分解为两个不平行的矢量相加，

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$$

其中 $\vec{r}_1 \neq \lambda \vec{r}_2$，那么，

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

也就是说，运动可以分解为两个独立运动的叠加。

- 这一分解还可以继续，根据线性代数的知识，2维最多找到2个线性无关的矢量，3维对多能找到3个线性无关的矢量。因此2维运动可以分解为2个独立运动的叠加，3维运动可以分解为3个独立运动的叠加

c. 2维斜抛运动 (inclined throw)

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \vec{e}_y, \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 - g t \vec{e}_y$$

不失一般性可取$\vec{r}_0 = 0$。有两种常见的分解方式:

- 笛卡尔分解（直角坐标分解）：

$$\vec{r} = v_{0x} t \, \vec{e}_x + \left(v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \right) \vec{e}_y, \qquad \vec{v} = v_{0x} \vec{e}_x + (v_{0y} - g t) \vec{e}_y$$

或者写出分量形式:

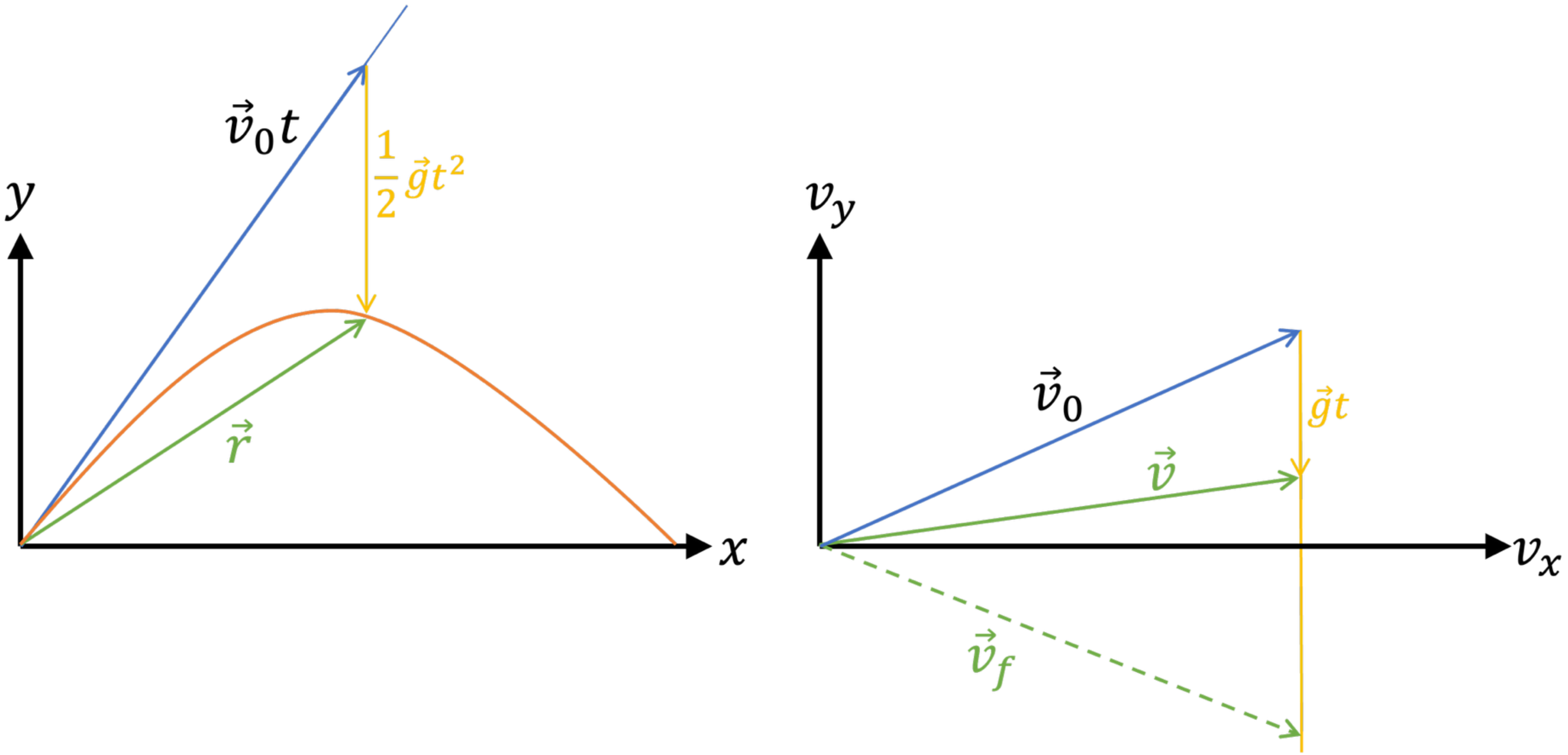
$$x = v_{0x} t, \qquad y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_x = v_{0x}, \qquad v_y = v_{0y} - g t$$

- 沿着初速度与加速度分解：

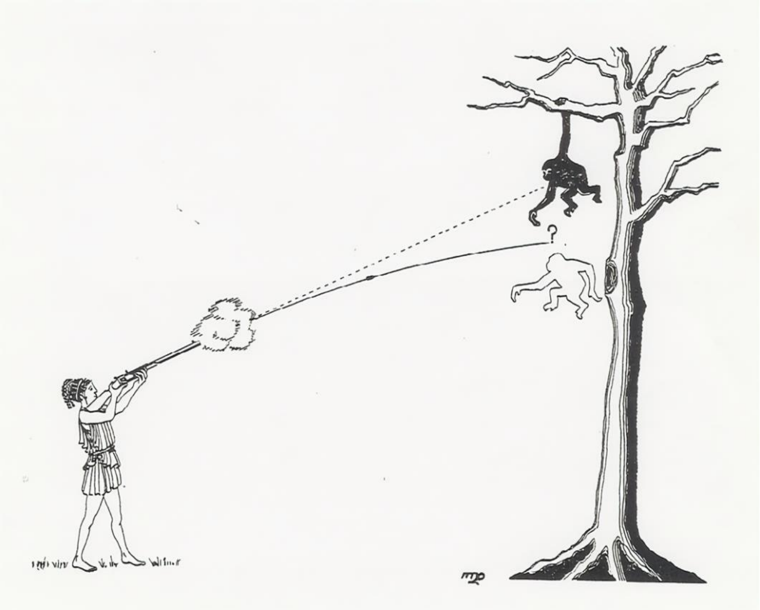
$$\vec{r}_1=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t,\qquad \vec{r}_2=-\frac{1}{2}gt^2\vec{e}_y$$

可以视为匀速直线运动与自由落体的叠加。



【例子】猎人与猴子的故事 (虚拟情形，请保护野生动物)

树上吊着一只猴子。远处有一个猎人，举枪瞄准猴子。当猎枪发射的一瞬间，猴子看到了火光，从树上垂直落下来。问，子弹能否击中猴子？



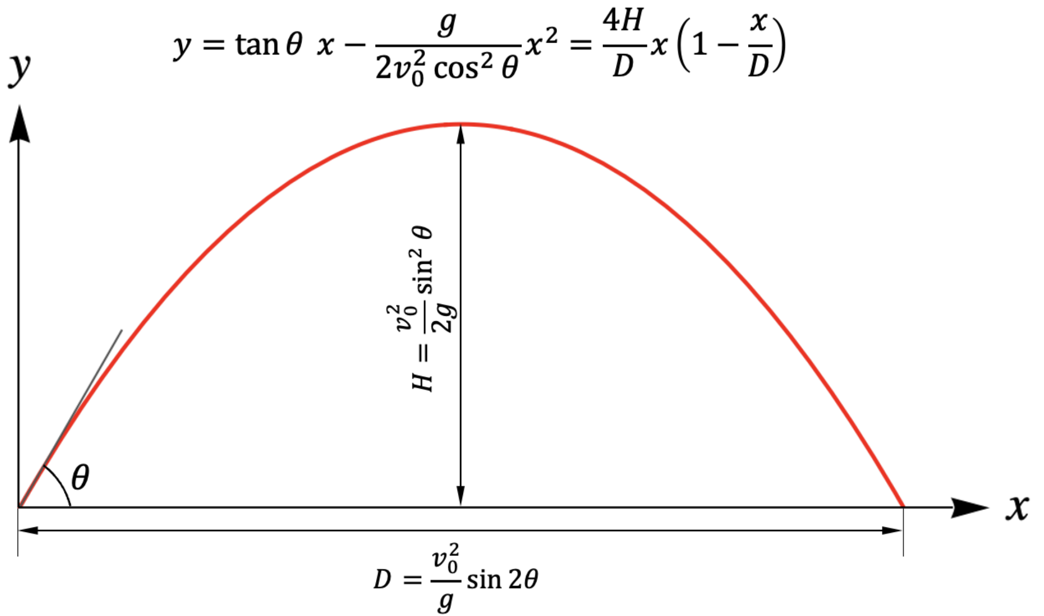
【例子】飞碟射击 (skeet shooting)

在一次飞碟射击中，飞碟沿着与射手连线的方向朝射手飞行。射手在飞碟飞行的最高点处发射。已知此时飞碟的速度为$u_1 = 30\ \mathrm{m/s}$，高度为$h = 10\ \mathrm{m}$ (不考虑射手身高)，与射手的水平距离为$l = 100\ \mathrm{m}$。子弹初始速度为$u_2 = 300\ \mathrm{m/s}$。若想要击中飞碟，求子弹的初始角度 θ 。

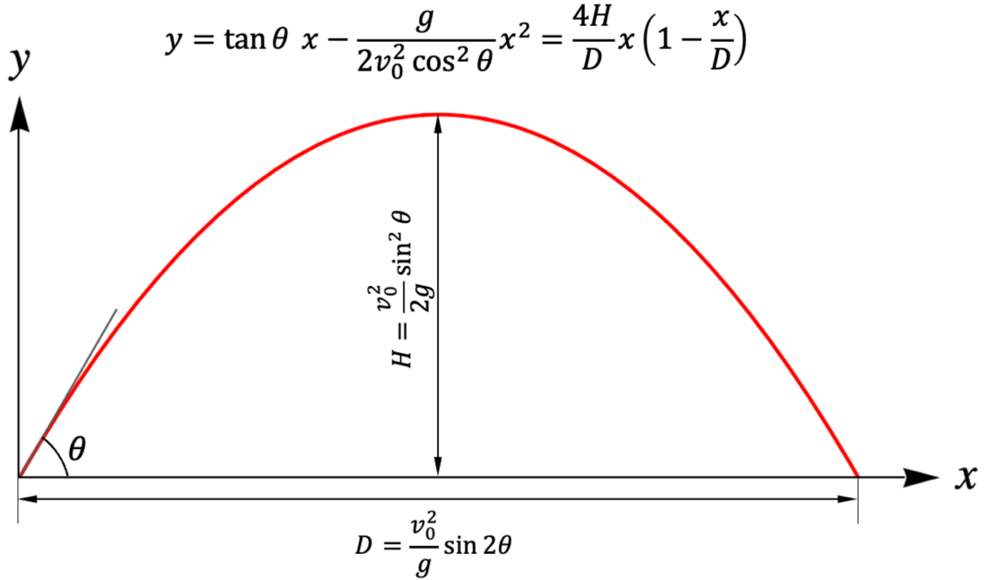
描述斜抛运动轨迹的参数又叫做弹道参数 (ballistic coefficients)，如图所示，在射击、运动中有广泛的应用。

$$\begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow \quad y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}t - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 = x\tan\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

其中$\theta = \arctan v_{0y}/v_{0x} \in [0,\pi]$为抛射角。



- 落地时间：$T = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0}{g}\sin\theta$
- 抛射距离：$D = v_{0x}T = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta\cos\theta = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$
- 抛射高度：$H = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta$
- 抛物轨迹可以用抛射高度、抛射距离表示为：$y = \frac{4H}{D}x\left(1 - \frac{x}{D}\right)$
- 最佳抛射角与最大抛射距离：$\theta_{\mathrm{op}} = \frac{\pi}{4}, D_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$



【例子】灌溉问题。假定有一排N个喷口（$N \gg 1$），所有喷口出水面积均为A、出水速度均为v_0。

a. 若喷口按角度均匀地分布在$[0,\pi]$之间，求第i个水柱喷射的距离x_i。

b. 若喷口按角度均匀地分布在$[0,\pi]$之间，求喷灌距离x与单位时间、单位长度喷灌体积（即流量线密度）$q(x)$之间的关系。

c. 想要均匀灌溉$-x_0$到x_0之间的草地($x_0 = v_0^2/g$)，该如何设置第i个喷口的角度θ_i。

【求解】：

a. 喷射距离：

$$x_i \;=\; x_0 \sin 2\theta_i$$

其中$\theta_i \;= \pi \frac{i}{N}$。

b. 由于$N \gg\; 1$，我们可以将问题视为连续的。喷口的总流量为$Q_0 = NAv_0$，这些流量均匀地分布在0到π角度之间，即

$$\frac{dQ}{d\theta} = \frac{NAv_0}{\pi}$$

这里Q是流量，即单位时间的出水体积。现在需要分析，这些水该如何分布到距离$[-x_0，x_0]$之间。由于左右两边是对称的，且喷灌角度θ与$\frac{\pi}{2} - \theta$的喷口喷射距离相同。我们只需要分析$\theta \in \left[0,\, \frac{\pi}{4}\right]$之间的情况。

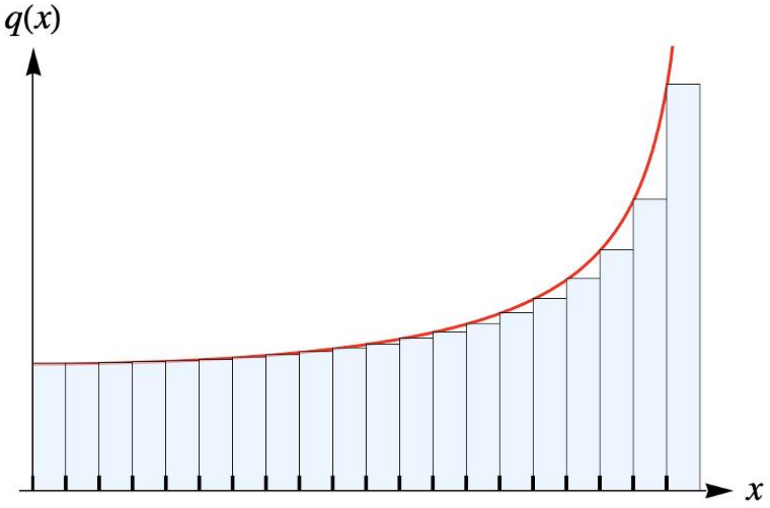
b. 根据抛物轨迹方程，

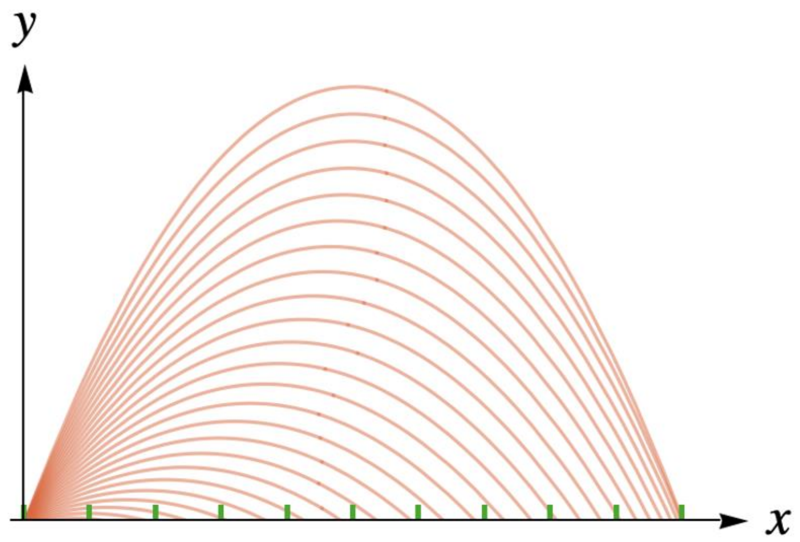
$$x(\theta) = x_0\sin2\theta \Rightarrow dx = 2x_0\cos2\theta d\theta$$

其中，$x_0 = \frac{v_0^2}{g}$。这里已经取了连续极限。流量线密度：

$$q = 2\left|\frac{dQ}{dx}\right| = 2\left|\frac{dQ}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}\right| = 2\frac{NAv_0}{\pi}\left|\frac{1}{2x_0\cos 2\theta}\right| = \frac{NAv_0}{\pi\sqrt{x_0^2 - x^2}}$$

可见灌溉不是均匀的，越远处灌溉流量密度越大





c. 想要均匀灌溉草地的话，需要使得$q(x) = q_0 = \text{const.}$:

$$q = 2\left|\frac{dQ}{dx}\right| = 2\left|\frac{dQ}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}\right| = 2\frac{dQ}{d\theta}\left|\frac{1}{2x_0\cos 2\theta}\right| = q_0$$

因此，

$$\frac{dQ}{d\theta} = C\,|\cos 2\theta|$$

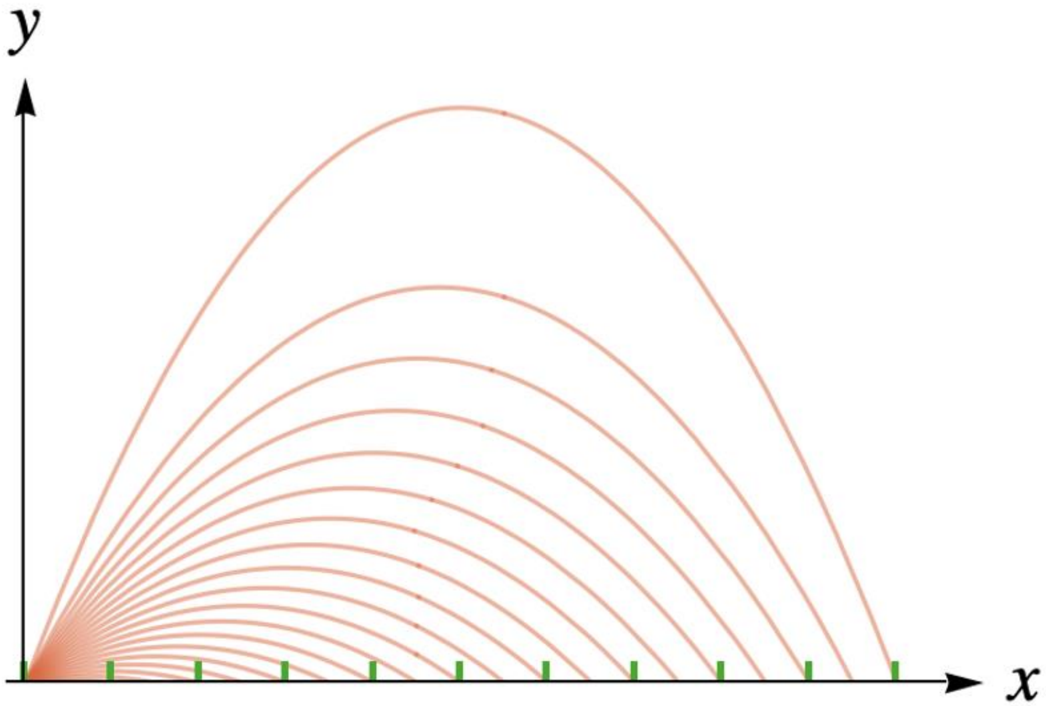
这里，C是一个归一化常数。积分可以得到，

$$Q(\theta) = \frac{C}{2}\sin 2\theta, \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

当$\theta = \frac{\pi}{4}$时，流量应该为总流量的$\frac{1}{4}$，由此定出$C = \frac{NAv_0}{2}$，因此，

$$iAv_0 = Q_i = Q(\theta_i) = \frac{NAv_0}{4}\sin 2\theta_i$$

$$\Rightarrow \quad i = \frac{N}{4}\sin 2\theta_i \quad \Rightarrow \quad \theta_i = \frac{1}{2}\arcsin\frac{4i}{N}, \qquad \left(i = 1,2,\ldots,\frac{N}{4}\right)$$

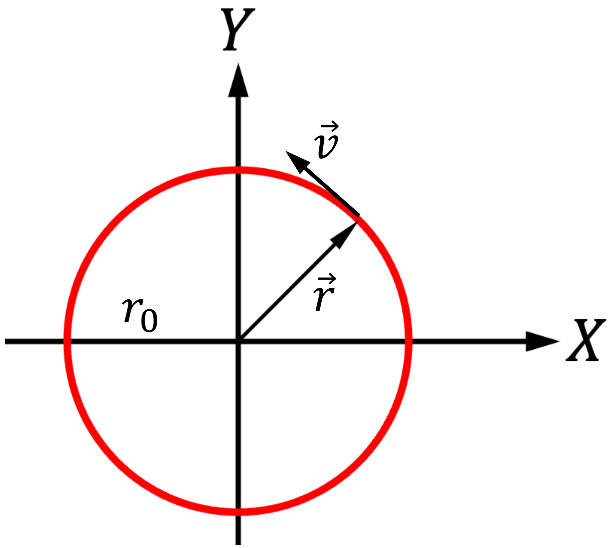


图：等距离灌溉：抛射角按照$(1/2)\arcsin i/N$分布

d. 平面上的匀速圆周运动

直角坐标表示：

$$\begin{cases} x(t) = r_0 \cos \omega t \\ y(t) = r_0 \sin \omega t \end{cases}$$



- 位置矢量：

$$\vec{r}(t) = r_0 \cos \omega t \ \vec{e}_x + r_0 \sin \omega t \ \vec{e}_y$$

- 速度：

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = -\omega r_0 \sin \omega t \ \vec{e}_x + \omega r_0 \cos \omega t \ \vec{e}_y$$

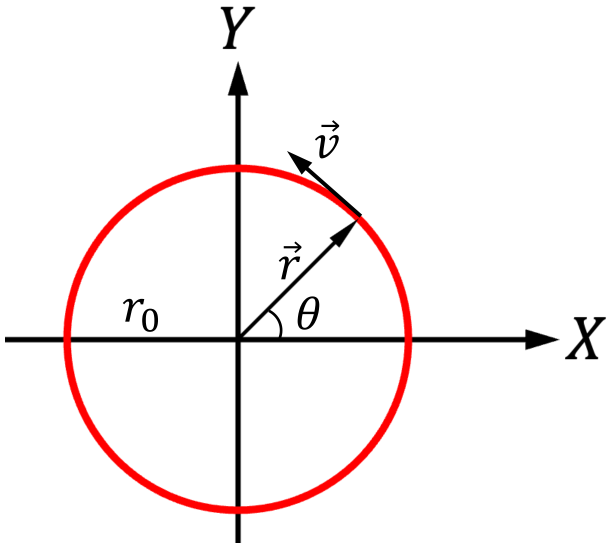
速度的大小：$v = |\vec{v}| = \omega r_0$，且$\vec{v} \cdot \vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{r}$

- 加速度:

$$\vec{a}(t)=\dot{\vec{v}}(t)=-\omega_0^2 r_0\cos\omega t\ \vec{e}_x-\omega^2 r_0\sin\omega t\ \vec{e}_y$$

加速度的大小：$a=|\vec{a}|=\omega^2 r_0$，且$\vec{a}\parallel\vec{r}$：$\vec{a}=-\omega^2\vec{r}$。注意，$\vec{a}$一直都沿着径向向内，因此叫做向心加速度。

极坐标表示：



$$\begin{cases} r(t)=r_0 \\ \theta(t)=\omega t \end{cases}$$

- 位置矢量:

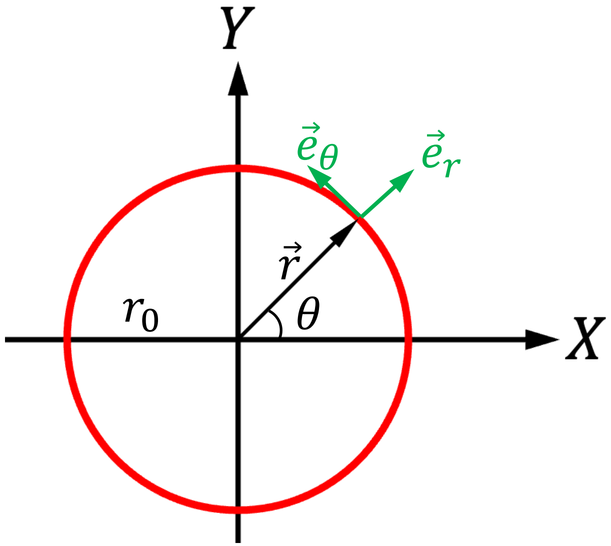
$$\vec{r}=r_0\vec{e}_r$$

- 速度:

$$\vec{v}(t)=\dot{\vec{r}}(t)=\frac{d}{dt}(r\vec{e}_r)=\cancelto{0}{\frac{dr}{dt}}\vec{e}_r+r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

其中，基矢量的导数：(基矢量含时)

$$\begin{cases} d\vec{e}_r=d\theta\,\vec{e}_\theta \\ d\vec{e}_\theta=-d\theta\,\vec{e}_r \end{cases}$$



因此:

$$\vec{v}=r\dot{\theta}\vec{e}_\theta=r_0\omega\vec{e}_\theta$$

- 加速度:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(r\dot{\theta}\vec{e}_r)=\frac{dr\dot{\theta}}{dt}\vec{e}_\theta+r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}=-r\dot{\theta}^2\vec{e}_r=-\omega^2\vec{r}$$

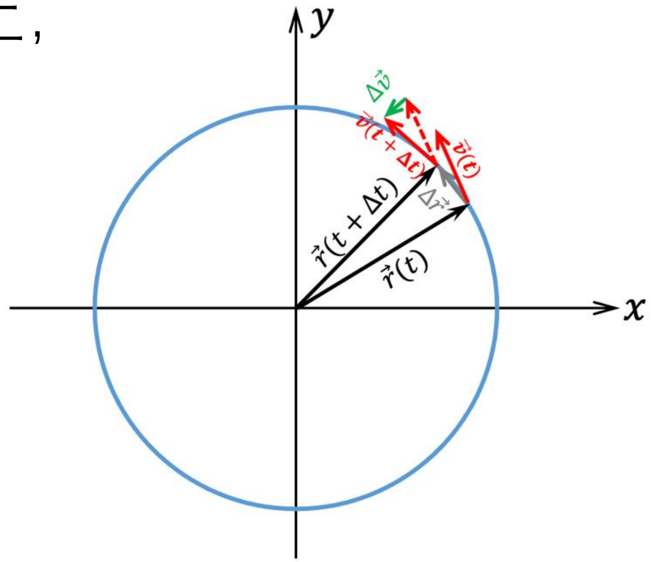
几何表示：

- 速度：根据定义，

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

考虑位移矢量$\Delta\vec{r}$，现求其大小和方向，如图所示。从几何关系上看，精确到一阶无穷小量，$\Delta\vec{r} \perp \vec{r}$，因此$\Delta\vec{r} \parallel \vec{e}_\theta$;另有$|\Delta\vec{r}| = r\Delta\theta$。综上，

$$\Delta\vec{r} = r\Delta\theta\vec{e}_\theta + o(\Delta\theta)$$



从而可以得到速度为：

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

- 加速度可以类似分析可以得到，

$$\Delta\vec{v} = -v\Delta\theta\vec{e}_r + o(\Delta\theta) \Rightarrow \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = -v\omega\vec{e}_r = -\omega^2\vec{r}$$

讨论：

- 注意到，对于一个单位矢量$\vec{e}$来说，$\vec{e} \perp \dot{\vec{e}}$。如何证明？根据定义，

$$\vec{e} \cdot \vec{e} = 1$$

两边微分，

$$2\frac{d\vec{e}}{dt} \cdot \vec{e} = 0 \;\Rightarrow\; \dot{\vec{e}} \cdot \vec{e} = 0 \;\Rightarrow \vec{e} \perp \dot{\vec{e}}$$

这个结论对于长度固定的矢量都成立，证明方法相同。

- 可以引入角速度矢量：

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$$

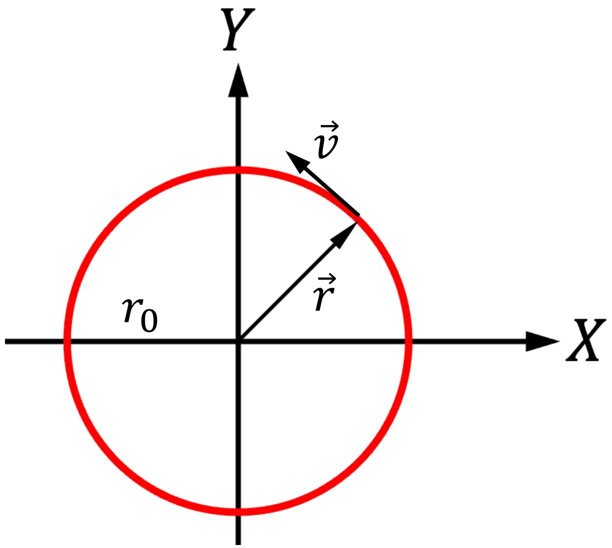
$$\begin{cases} \dot{\vec{e}}_r = \vec{\omega} \times \vec{e}_r \\ \dot{\vec{e}}_\theta = \vec{\omega} \times \vec{e}_\theta \end{cases}$$

不难证明：

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \qquad \vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = -\omega^2 \vec{r}$$

e. 平面上的变速圆周运动

直角坐标表示：



$$\begin{cases} x(t) = r_0 \cos\theta \\ y(t) = r_0 \sin\theta \end{cases}$$

注意此时$\omega \equiv \dot{\theta}$不再是一个常数。仍定义角速度矢量：

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$$

- 位置矢量：

$$\vec{r}(t) = r_0 \cos\theta \;\; \vec{e}_x + r_0 \sin\theta \;\; \vec{e}_y$$

- 速度：

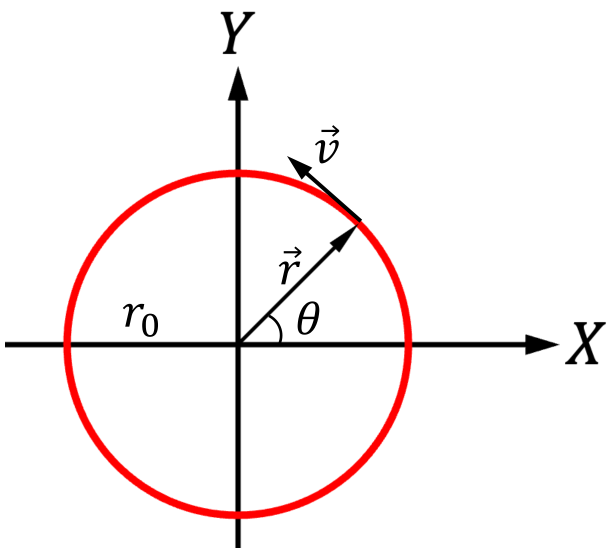
$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = -\dot{\theta} r_0 \sin\theta \;\; \vec{e}_x + \dot{\theta} r_0 \cos\theta \;\; \vec{e}_y = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- 加速度:

$$\vec{a}(t)=\dot{\vec{v}}(t)=-r_0\left(\dot{\theta}^2\cos\theta+\ddot{\theta}\sin\theta\right)\vec{e}_x-r_0\left(\dot{\theta}^2\sin\theta+\ddot{\theta}\cos\theta\right)\vec{e}_y$$
$$=\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}-\omega^2\vec{r}$$

极坐标表示:

$$\begin{cases} r(t)=r \\ \theta(t)=\theta \end{cases}$$



- 位置矢量:

$$\vec{r}=r\vec{e}_r$$

- 速度:

$$\vec{v}=r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

- 加速度:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

第一项是向心加速度，第二项叫做切向加速度。对应角速度的形式为，

$$\begin{cases} \vec{a}_n \equiv -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\omega^2\vec{r} \\ \vec{a}_t \equiv r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} \end{cases}$$

f. 一般平面运动

直角坐标表示：

- 位置矢量：

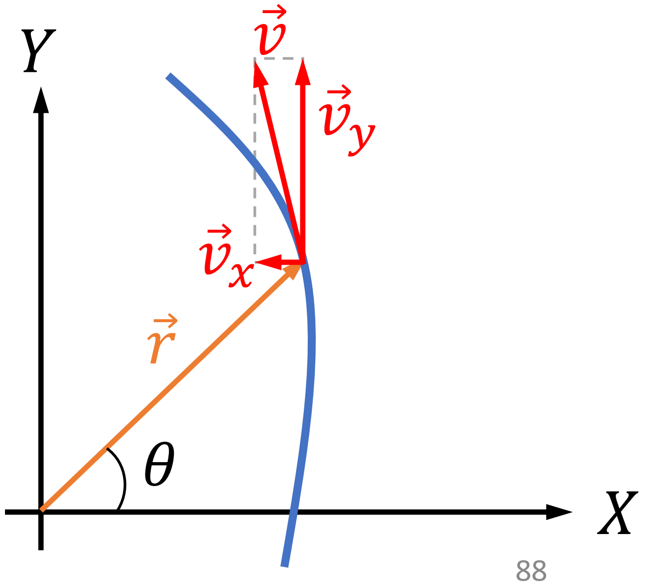
$$\vec{r}(t) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

- 速度：

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$$

- 加速度：

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y$$



极坐标表示：

- 位置矢量：

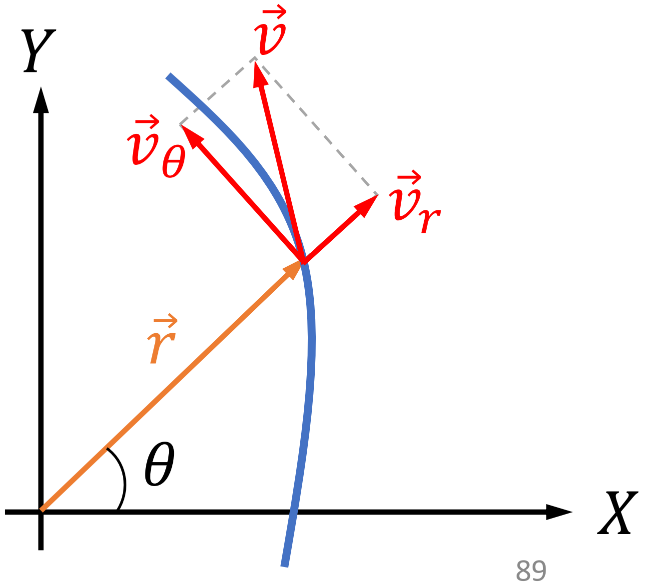
$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

- 速度：

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

径向速度：$v_r = \dot{r}$，角向速度：$v_\theta = r\dot{\theta}$，

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$$



- 加速度:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right)$$

$$= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

径向加速度:$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$,角向加速度: $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$,其中,$\ddot{r}$叫做(径向)线性加速度, $-r\dot{\theta}^2$叫做向心加速度, $r\ddot{\theta}$叫做欧拉加速度,又叫作角向加速度, $2\dot{r}\dot{\theta}$叫做科里奥利加速度。

几何表示：

- 位置矢量：

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

- 速度：

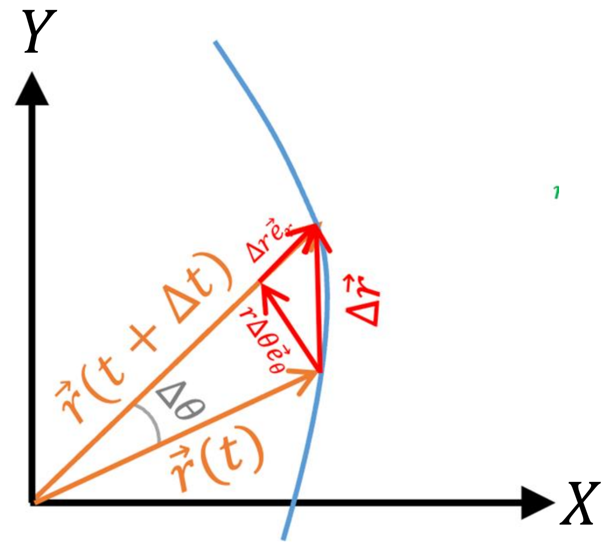
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

其中，根据如图几何关系，

$$\Delta \vec{r} = r\Delta\theta \vec{e}_\theta + \Delta r \vec{e}_r + o(\Delta\theta)$$

因此，

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\vec{e}_r$$



- 加速度:

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(t+\Delta t)-\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t^2}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)+\vec{r}(t-\Delta t)-2\vec{r}(t)}{\Delta t^2}$$

注意，需要将取极限前的表达式计算至Δt^2阶。根据如图几何关系，

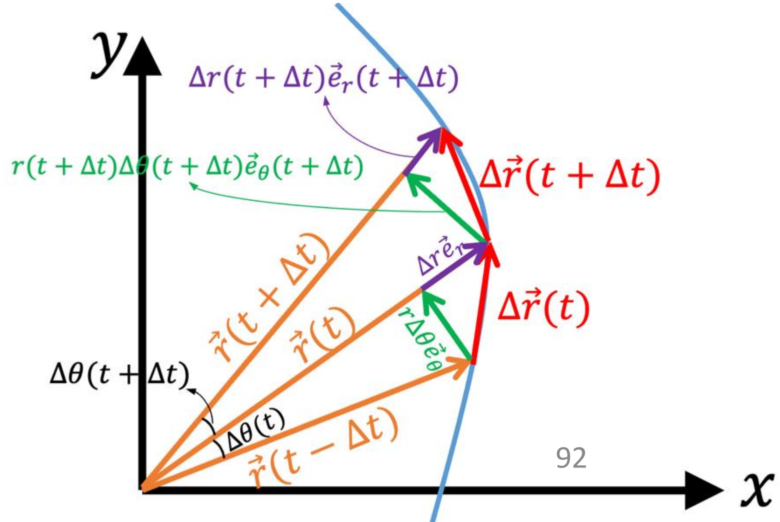
$$\Delta\vec{r}(t)=\vec{r}(t)-\vec{r}(t-\Delta t)=r(t)\sin\Delta\theta(t)\,\vec{e}_\theta(t)+\Delta r(t)\vec{e}_r(t)$$

$$\Delta\vec{r}(t+\Delta t)=r(t+\Delta t)\sin\Delta\theta(t+\Delta t)\vec{e}_\theta(t+\Delta t)+\Delta r(t+\Delta t)\vec{e}_r(t+\Delta t)$$

做泰勒展开，保留到Δt^2阶，可以得到:

$$\Delta\vec{r}(t+\Delta t)-\Delta\vec{r}(t)$$

$$=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r\Delta t^2+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta\Delta t^2+o(\Delta t^2)$$



由此可以得到加速度:

$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

坐标无关的表示:

- 前面提到，对于平面运动，可以引入一个角动量矢量$\vec{\omega}=\dot{\theta}\vec{e}_z$，使得基矢量的导数表示为，

$$\begin{cases}\dot{\vec{e}}_r=\vec{\omega}\times\vec{e}_r\\ \dot{\vec{e}}_\theta=\vec{\omega}\times\vec{e}_\theta\end{cases}$$

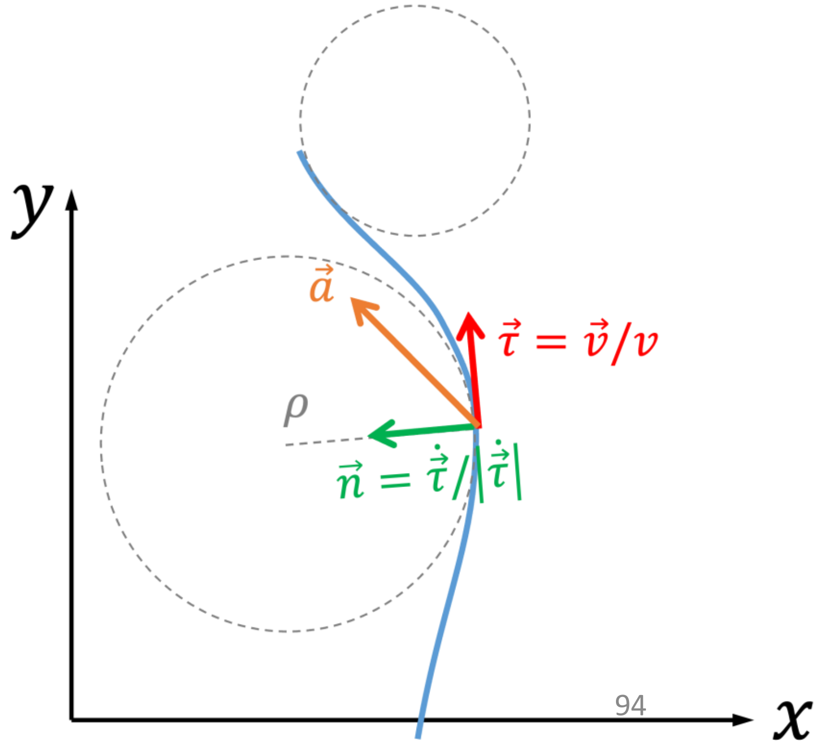
- 不难证明，

$$\vec{v}=\dot{r}\hat{r}+\vec{\omega}\times\vec{r},\qquad \vec{a}=\ddot{r}\hat{r}+2\dot{r}\vec{\omega}\times\hat{r}+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

- 此外，角动量也可以表示为坐标无关的形式: $\vec{\omega}=\frac{\hat{r}\times\vec{v}}{r}$

g. 平面上的自然坐标系

- 极坐标表示本质上是沿着位矢方向进行投影。除了位矢以外，我们还有一组特殊的方向，那就是速度的方向(叫做切向)以及与其垂直平面(叫做法向)
- 由于切向-法向与原点的选择无关，因此是一个绝佳的局域坐标系，叫做自然坐标系，也叫做弗莱纳(Frenet)坐标系
- 由于速度是瞬时的，自然坐标系也是瞬时的
- 自然坐标系仅与运动轨迹有关，与运动速度无关



- 切矢量：

$$\vec{\tau} = \hat{v} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}$$

利用微分不变性，不难发现切矢量的定义与质点的实际**运动状态**无关，仅依赖于运动轨迹的几何形状。换句话说，假定$t = t(s)$是任意光滑函数，切矢量仍然可以写成不变的形式：

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}_s'}{|\vec{r}_s'|}$$

- 法矢量：

$$\vec{n} = \frac{\dot{\vec{\tau}}}{|\dot{\vec{\tau}}|}$$

注意，法矢量与切矢量垂直：$\vec{n} \cdot \vec{\tau} = 0$。并且，根据这里的定义，不难

发现法矢量与质点的实际运动状态也无关，仅依赖于运动轨迹的几何形状。

- 加速度：可以将加速度在自然坐标系进行投影，根据定义，

$$\vec{a}=\frac{d}{dt}\vec{v}$$

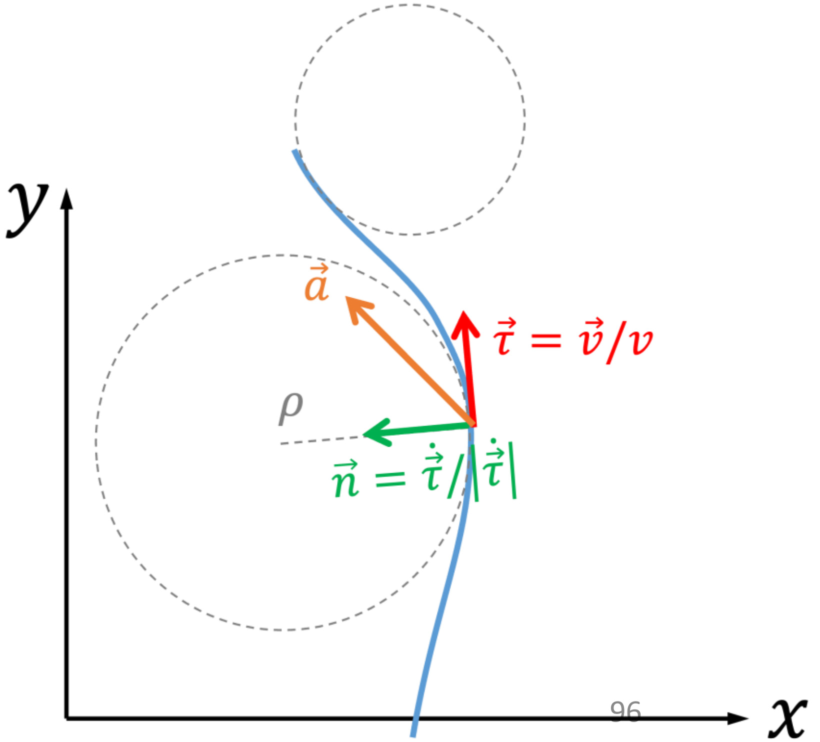
$$=\frac{d}{dt}(v\hat{v})$$

$$=\dot{v}\vec{\tau}+v\dot{\vec{\tau}}$$

$$=\dot{v}\vec{\tau}+v|\dot{\vec{\tau}}|\vec{n}$$

$$\equiv a_t\vec{\tau}+a_n\vec{n}$$

这里$a_t=\dot{v}$叫做切向加速度，$a_n=v|\dot{\vec{\tau}}|$叫做法向加速度



可以将法向加速度进一步表示为速度和表征曲线形状的非运动学量。为此考虑轨迹的曲率(curvature)，定义为相邻切线的夹角与线元长度之比，

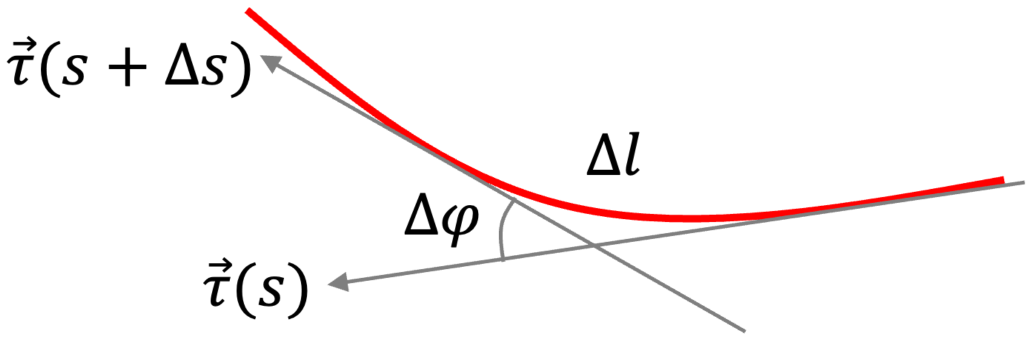
$$\kappa = \frac{d\varphi}{dr}$$

曲线的曲率与曲线的参数化形式无关，仅与曲线的局部形状有关。利用曲线微分，$\Delta\varphi = |\vec{\tau}(s) \times \vec{\tau}(s+\Delta s)| + o(\Delta s)$，因此，

$$\kappa = \frac{|\vec{\tau}(t) \times \vec{\tau}(t+dt)|}{|d\vec{r}(t)|}$$

$$= \frac{|\vec{\tau}(t) \times [\vec{\tau}(t+dt) - \vec{\tau}(t)]|}{|d\vec{r}(t)|}$$

$$= \frac{\left|\vec{\tau}(t) \times \dot{\vec{\tau}}(t)\right|}{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|} = \frac{|\dot{\vec{\tau}}|}{v}$$

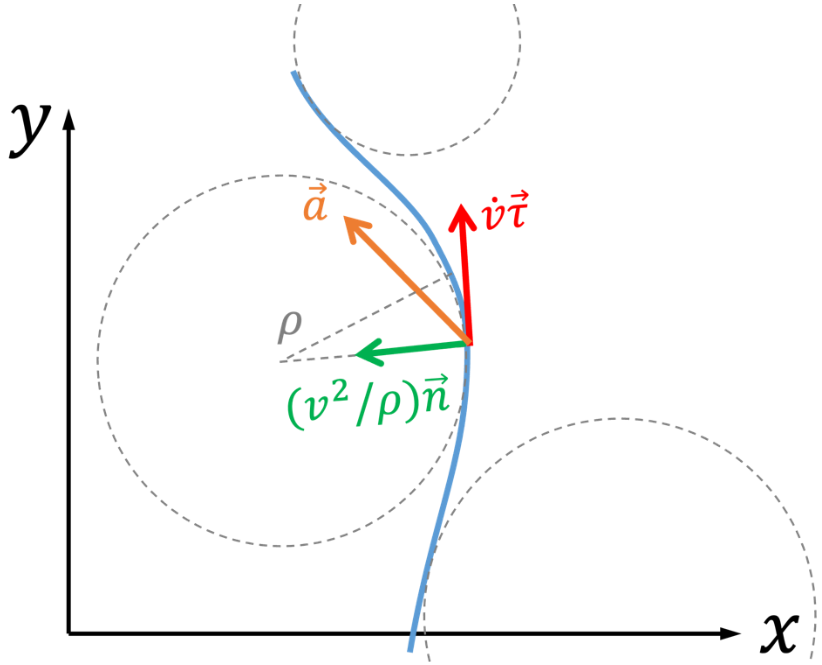


因此，$|\dot{\vec{\tau}}| = \kappa v$。这样以来，

$$a_n = v^2\kappa = \frac{v^2}{\rho}$$

这里，曲率的倒数$\rho = 1/\kappa$叫做曲率半径。综上所述，加速度在自然坐标系可以写出，

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$



- 弗莱纳-赛雷(Frenet-Serret)公式：

$$\begin{cases} \dot{\vec{\tau}} = \kappa v \vec{n} \\ \dot{\vec{n}} = -\kappa v \vec{\tau} \end{cases}$$

思考一下如何证明？

【例子】开车拐弯时为什么要减速?

【例子】求抛物线$y = x(1 - x)$最高点处的曲率半径

h. 球坐标下的一般3维运动

直角坐标表示：

- 位置矢量：

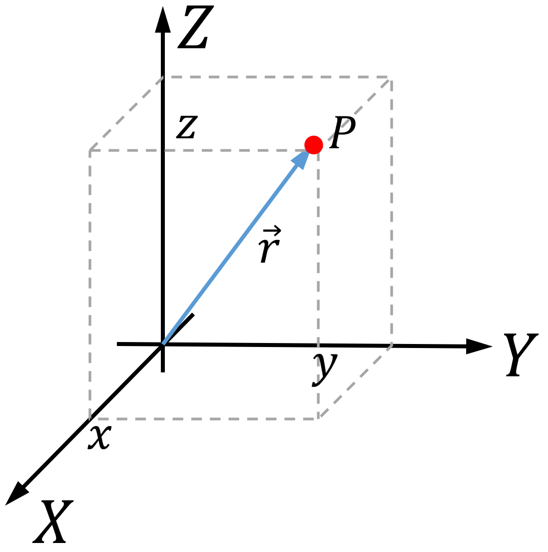
$$\vec{r}(t) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

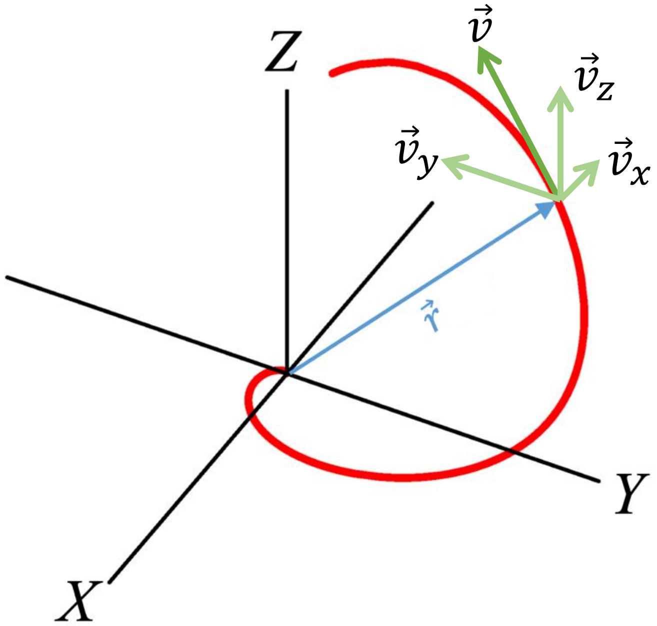
- 速度：

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

- 加速度：

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

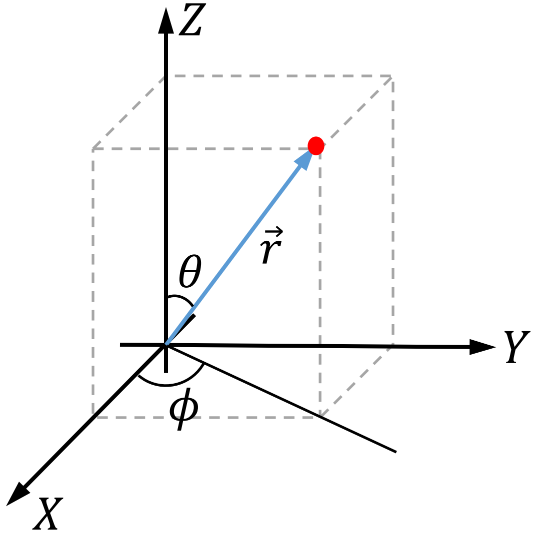




球坐标表示：

- 球坐标：

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

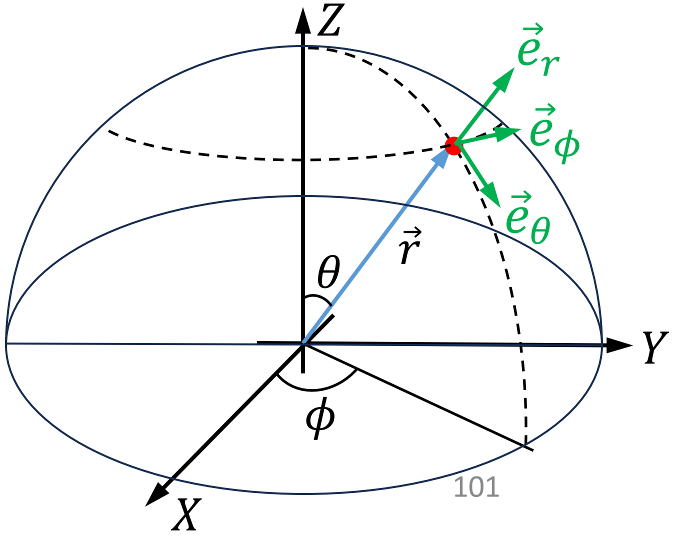


- 位置矢量：

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

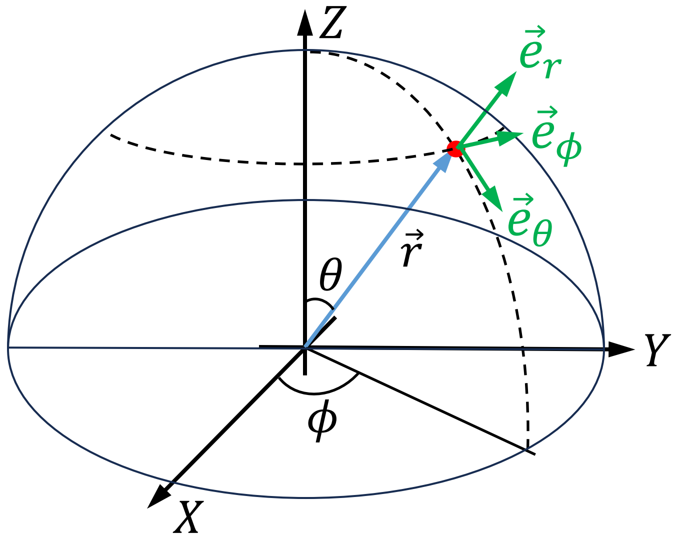
其中基矢量，

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\phi = -\sin\phi\,\vec{e}_x + \cos\phi\,\vec{e}_y \end{cases}$$



基矢量的导数，

$$
\begin{cases}
\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\,\vec{e}_\phi. \\
\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\,\vec{e}_\phi \\
\dot{\vec{e}}_\phi = -\dot{\phi}\sin\theta\,\vec{e}_r - \dot{\phi}\cos\theta\,\vec{e}_\theta
\end{cases}
$$



- 速度：

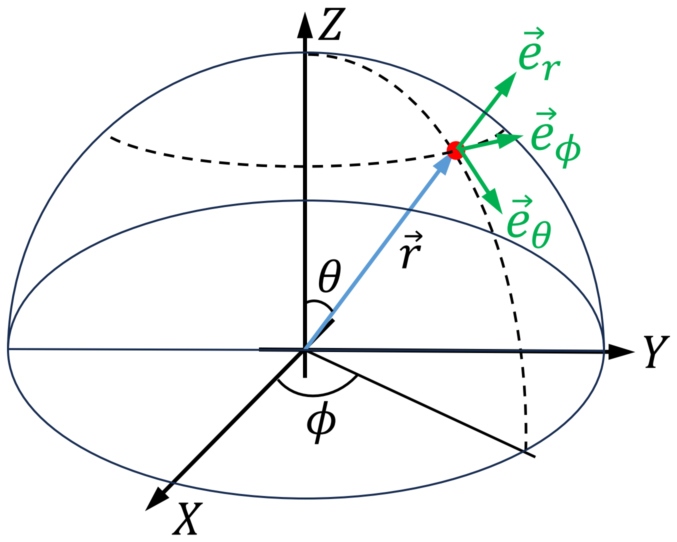
$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\,\vec{e}_\phi$$

因此，$v_r = \dot{r}, v_\theta = r\dot{\theta}, v_\phi = r\dot{\phi}\sin\theta$

- 加速度：

$$
\begin{aligned}
&\vec{a} = \dot{\vec{v}} \\
&= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{e}_\theta \\
&+ \left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\right)\vec{e}_\phi
\end{aligned}
$$

因此



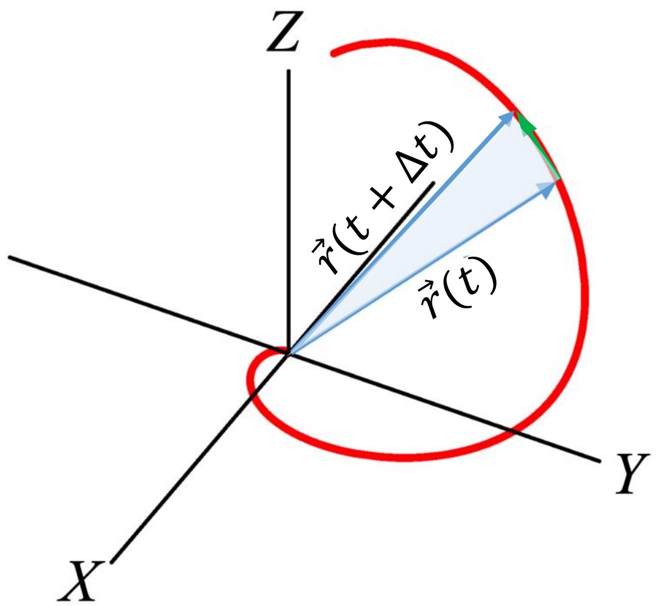
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta\,,$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta\,,$$
$$a_\phi = r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta$$

可见，加速度的表达式比较复杂，原因在于需要对球坐标基矢量进行反复投影。

坐标无关的表示：

从几何上观察，在某一瞬间，$\vec{r}(t)$与$\vec{r}(t+\Delta t)$构成一个平面，位置矢量一方面绕着法向量转动，一方面长度发生改变：

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

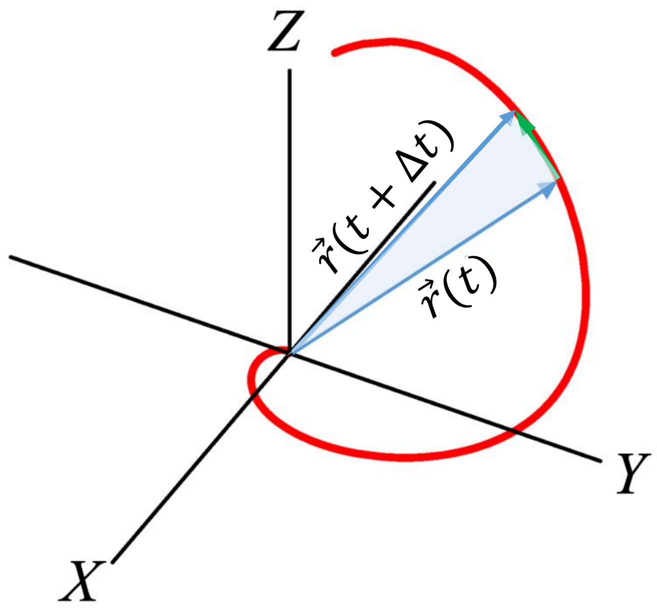


类似于平面运动。这样以来，

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + 2\dot{r}\vec{\omega} \times \hat{r} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

这个表达式与平面上的一般运动的加速度是一样的。但是现在$\vec{\omega}$不一定在z方向了。但是我们仍然希望它满足，

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_r$$



为此可以对$\vec{r}(t+dt) = \vec{r} + d\vec{r}$进行极分解：

$$\vec{r}(t+dt) = [\vec{r}(t+dt) \cdot \hat{r}]\hat{r} + [\hat{r} \times \vec{r}(t+dt)] \times \hat{r}$$

$$= \vec{r}(t) + (\hat{r} \cdot d\vec{r})\hat{r} + (\hat{r} \times d\vec{r}) \times \hat{r}$$

$$\Rightarrow \ \vec{v} = v_r\hat{r} + (\hat{r} \times \vec{v}) \times \hat{r}$$

可以取$\vec{\omega} = \hat{r} \times \vec{v}$，这个矢量叫做质点相对于原点$O$的角速度矢量。在球坐

标下

$$\vec{\omega} = \hat{r} \times \vec{v} = \dot{\theta}\vec{e}_\phi - \dot{\phi}\sin\theta\,\vec{e}_\theta$$

当然，满足表达式 $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_r$ 的矢量并不唯一。另外一个有用的矢量是，

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} + \dot{\phi}\cos\theta\,\vec{e}_r = \dot{\phi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_\phi$$

这个矢量满足：

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{e}_r$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{e}_\theta$$

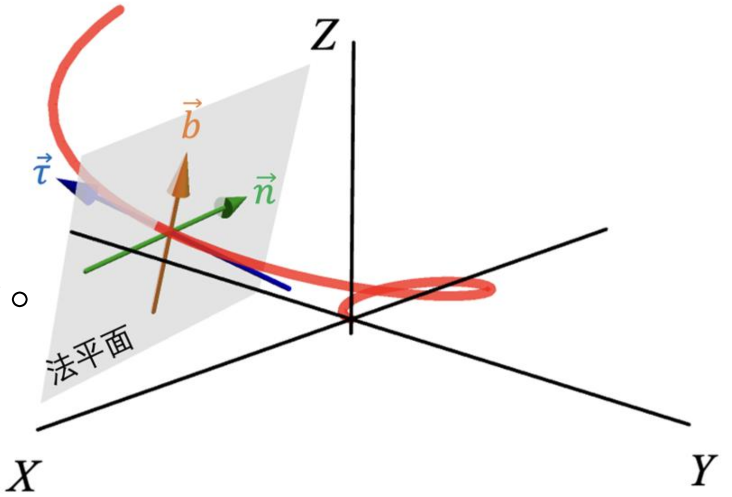
$$\frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{e}_\phi$$

i. 3维运动的自然坐标系

- 前面提到，在球坐标中加速度的表达式比较复杂，原因在于需要对球坐标基矢量进行反复投影
- 这提示我们如果能找到一个合适的坐标系，可以化简加速度的表达式
- 在2维运动中我们引入了自然坐标系。这一坐标系可以推广到3维运动
- 一个极大的化简在于在3维自然坐标系中加速度的投影表达式仍然成立，

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

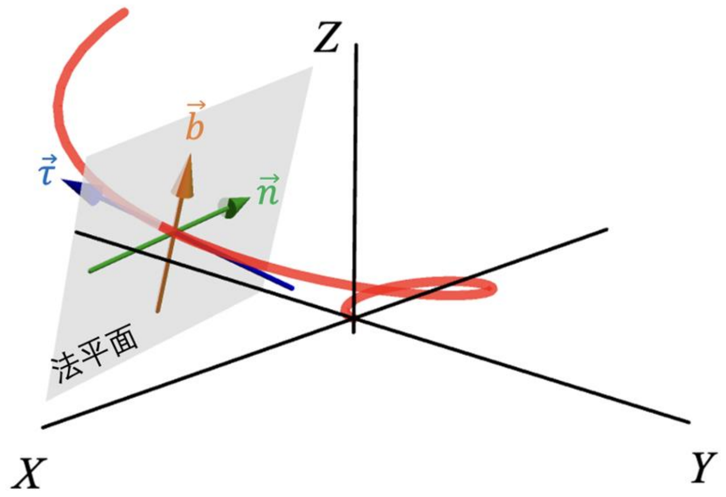
注意，尽管加速度是3维的，它并不存在第三个方向的投影。

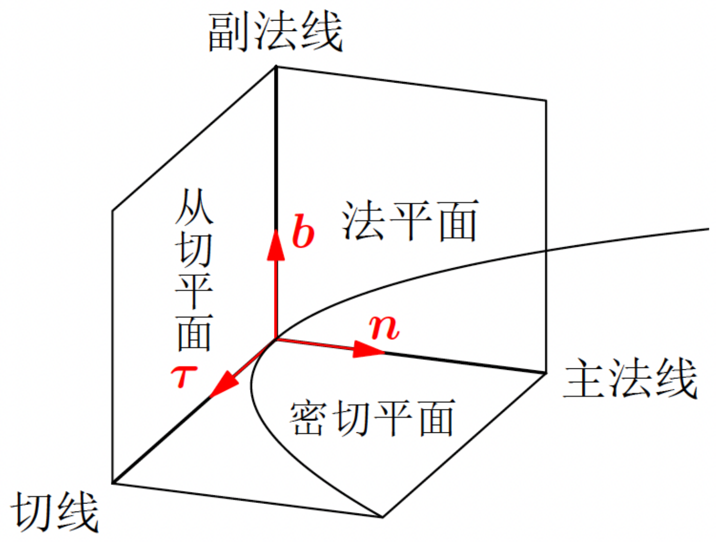


- 自然坐标系的基矢量

$$\vec{\tau} = \hat{v} = \frac{\vec{v}}{v}, \qquad \vec{n} = \frac{\dot{\vec{\tau}}}{|\dot{\vec{\tau}}|}, \qquad \vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$$

其中，$\vec{\tau}$仍叫做切矢量(tangential vector)，$\vec{n}$仍叫做法矢量(normal vector)，而$\vec{b}$叫做次法矢量(binormal vector)。$\vec{n}$与$\vec{b}$构成的平面叫做法平面，$\vec{n}$与$\vec{\tau}$构成的平面叫做密切平面，$\vec{\tau}$与$\vec{b}$构成的平面叫做从切平面。





- 弗莱纳-赛雷(Frenet-Serret)公式可以推广到3维：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{\tau} = v\kappa\vec{n} \\ \dfrac{d}{dt}\vec{n} = -v\kappa\vec{\tau} + v\sigma\vec{b} \\ \dfrac{d}{dt}\vec{b} = -v\sigma\vec{n} \end{cases}$$

其中，κ是轨迹的曲率，σ叫做挠率(torsion)。挠率表示曲线偏离平面的速率。

【例子】引入达布矢量(Darboux vector)，

$$\vec{d} = \sigma\vec{\tau} + \kappa\vec{b}$$

证明:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{\tau} = v\vec{d} \times \vec{\tau} \\ \dfrac{d}{dt}\vec{n} = v\vec{d} \times \vec{n} \\ \dfrac{d}{dt}\vec{b} = v\vec{d} \times \vec{b} \end{cases}$$

即，自然坐标系的基矢量的演化可以视为瞬时转动。

§8 运动的相对性

- 位置矢量根据定义取决于坐标系，包括坐标原点的选择
- 速度虽然不依赖于坐标原点的选择，但仍然依赖于坐标系
- 在物理上，所有的运动都是相对的，坐标系是参考物的抽象 —— 在物理上把坐标与时钟合称为一个参考系

【例子】人在高速运动的火车上静止，但人相对于地面仍然是运动的

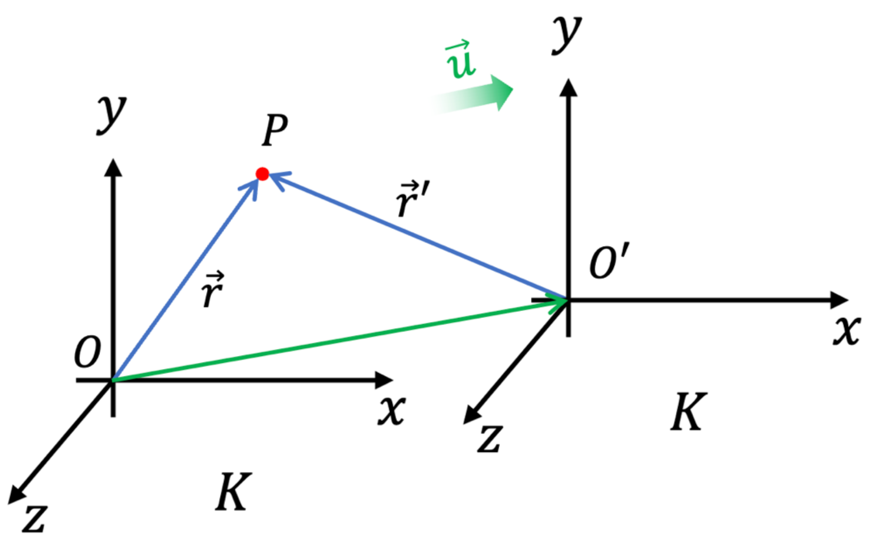
【例子】《尚书纬》，“地恒动不止，而人不知，譬如人在大舟中，闭牖而坐，舟行而人不觉也。”

【例子】地心说、日心说

a. 伽利略变换

- 一个很自然的问题是，如何联系不同参考系之间的运动？

考虑坐标系K和K'。K'相对于K以$\vec{u}$的相对速度运动，且$\vec{u}$不依赖于位置（但有可能依赖于时间）—— 即K'相对于K做平动。若一个点P的位置矢量在K系为$\vec{r}$，那么点P在K'的位置矢量$\vec{r}'$是什么？



$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}$$

- 在任何一个瞬间，欧几里德空间的位置矢量满足关系，

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}$$

因此，

$$\overrightarrow{r'} = \vec{d} + \vec{r}$$

- 利用这一表达式，对于均匀互相运动的两个参考系，两点之间的空间间隔是不变的

$$|\Delta\vec{r}'| = |\Delta\vec{r}|$$

- 为了描述运动，我们还需要知道时间的变换。经验表明在不同参考系中，时间间隔也是不变的，即$\Delta t' = \Delta t'$
- 在均匀相互运动的参考系中时间、空间间隔的不变性叫做**伽利略不变性**

- 求导可以得到速度的变换：

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u}, \qquad \vec{a}' = \vec{a} + \dot{\vec{u}}$$

一个特殊的情况是当$\vec{u}$是常矢量时，也就是说K’相对于K做匀速运动，则，

$$\vec{d} = \vec{d}_0 + \vec{u}t$$

相应的坐标变换叫做伽利略变换：

$$\begin{cases} t' = t \\ \vec{r}' = \vec{r} + \vec{d}_0 + \vec{u}t \end{cases}$$

- 伽利略速度变换：

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u}$$

- 伽利略加速度变换：

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

- 可见在以匀速相互运动的两个参考系中，质点的加速度是相同的
- 由于加速度与动力学（即牛顿第二定律）有关，相互做匀速直线运动的参考系在动力学上是等价的
- 所有相互之间做匀速直线运动的参考系构成一个等价类，其中最重要的一个参考系等价类是惯性参考系，在惯性参考系中牛顿三定律成立，下一章讲进行详细探讨

谢 谢！