

第三章：质点动力学

李 阳

中国科学技术大学近代物理系



力学A · 2025年秋

§1. 牛顿三大定律

牛顿在《自然哲学的数学原理》一书中，提出了动力学的基本原理如下：

第一定律：每个物体将保持静止或匀速直线运动，除非有外力改变其运动状态。

第二定律：运动状态（动量）的改变，正比于所加外力的大小，并发生在所加外力的直线方向上。

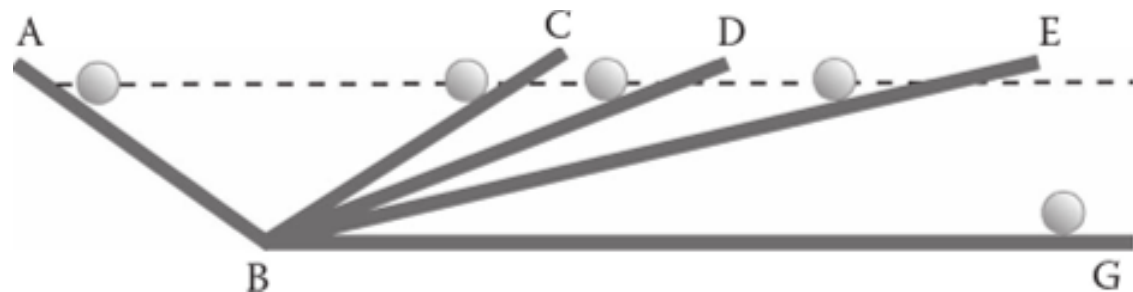
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

第三定律：反作用与作用大小相等、方向相反；两个物体之间的相互作用永远相等、方向相反。

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

a. 牛顿第一定律

- 牛顿第一定律又叫作惯性定律 (Galileo's law of inertia), 首先由伽利略提出, 它澄清了外界影响是改变物体运动状态的原因而非维持物体运动状态的原因
 - 亚里士多德: 不推不动 —— 没有合理分离研究对象
 - 伽利略通过研究斜面运动提出, 如果不受阻力的影响, 即不考虑改变运动的特殊情况, 物体将永远保持水平的匀速直线运动



$$v^2 \propto H$$

- 惯性的本质：
 - 牛顿指出，惯性是物质的抵抗能力，即由物质构成的物体具有保持其静止或匀速直线运动状态的趋势，可以通过(惯性)质量来度量
 - 另一方面，伽利略相对性表明，物体的惯性与参考系的选择有关，惯性定律仅在惯性参考系成立，换句话说，惯性定律操作性的定义了惯性参考系
 - 伽利略的实验实际上表明，对于地表附近的小范围运动而言，地球是个近似的惯性参考系
 - 在研究天体运动中，可以以远处恒星作为惯性参考系。随着测量精度的提高，我们可以采用不同的参考系作为惯性系。然而，现代物理观测表明，我们的宇宙并不是均匀且各向同性的时空——换句话说，真正的惯性系并不存在

b. 牛顿第二定律

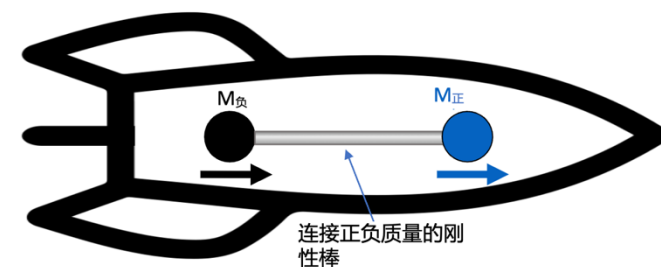
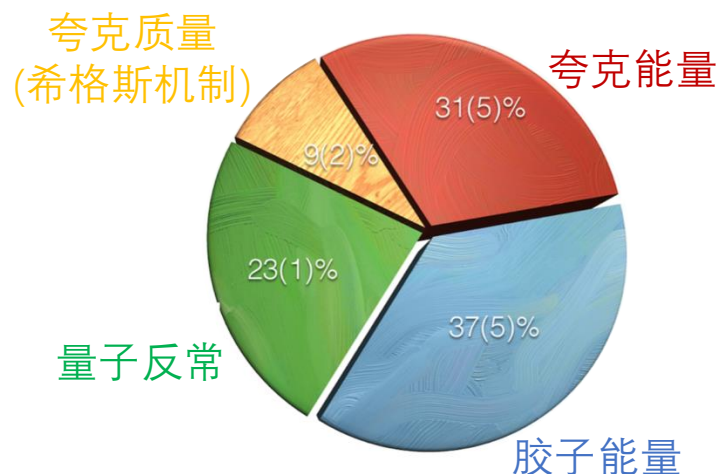
- 牛顿用动量 $\vec{p} = m\vec{v}$ 来度量物体的运动状态，其中 $\vec{v}$ 是物体的速度， m 是物体的质量
- **质量(mass)**是物体的内禀属性，与物体的机械运动状态无关
 - 牛顿将质量定义为物质含量的多少，并表示为体积乘以密度。然而密度在测量上定义为单位体积的质量。因此，这是一个循环定义
 - 牛顿的描述仅表明：质量是物体的内禀属性，与物体的机械运动状态无关
 - 另外一个隐含的条件是，质量是可以相加，也就是说，由多个物体组成的物体的质量等于其组分质量之和。这一点有时候又被称为牛顿第零定律、拉瓦锡质量守恒定律（1777年）
 - 质量可以通过牛顿第二定律操作性的定义与测量，在相同的力的作用下

通过测量不同物体的加速度，可以得到其质量的比值：

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

2018年以前，质量的绝对值可以通过与国际千克原器比较获得；2018年以后，质量的绝对值改为通过光子的能量比较来定义

- 质量的现代定义来自于时间、空间平移不变性，它是体系的静止能量。
亚原子粒子的质量可以通过测量体系的能量(量能器)和动量(磁谱仪)得到
- 质量的起源：希格斯机制(对称性的自发破缺)、强相互作用、引力质量等，仍然存在很多未解之谜

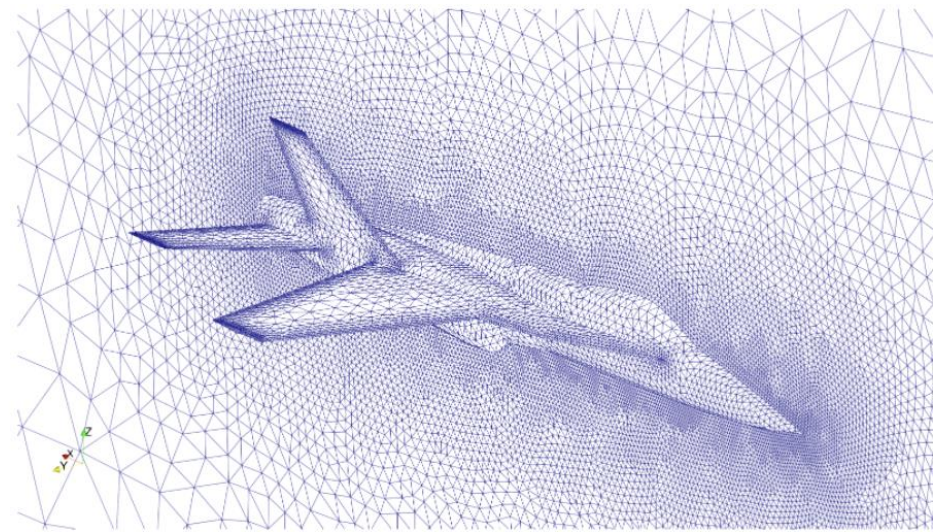
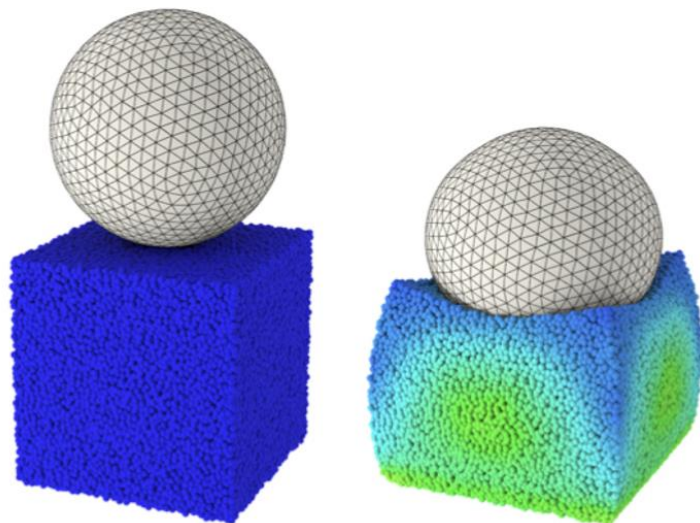
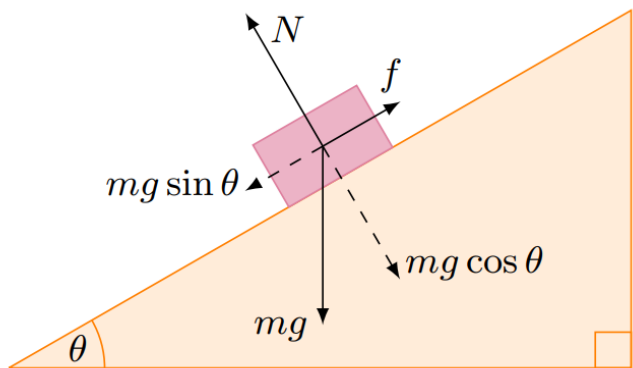


- **力 (force):** 牛顿第一定律将改变物体运动状态的外因抽象为力，牛顿第二定律则定量给出了外力与运动状态改变的关系
 - 力是某个主体能力的效能，而非实施的主体，尽管人们常常用力来代指实施主体。力也不是造成改变的原因，仅仅刻画实施主体的能力
 - 在伽利略和牛顿之前，人们对于物体运动的起因多有揣测，例如，笛卡尔认为以太的涡旋是造成天体做圆周运动的原因。牛顿将物体运动状态的改变抽象为外力，不对背后隐藏的原因做进一步的假设 —— Hypotheses non fingo。牛顿的定义可以定量测量、可以通过数学与逻辑推演来预测物体的运动，这是牛顿、伽利略科学方法的集中体现
 - 力的测量：牛顿第二定律

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

有趣的是，牛顿第二定律同时定义了质量和力！虽然这在数学上是不可能的事情，但在物理上的确可以操作性地实现

- **力的性质：** 根据牛顿，力是一个矢量，满足矢量叠加原理
 - 物体所受的力，等于其各个部分受力之矢量和
 - 隔离分析法
 - 微元法： 一个物体所受到的力可能很复杂，与其形状等有关，但如果不断分割物体为物质点，力的形式将会变得简单 → 还原论



- 力与加速度的关系：

- 为什么不定义为 $\vec{F} = m\vec{v}$ 或者 $\vec{F} = m\dot{\vec{a}}$? 与牛顿第一定律不符合
- 为什么不定义为 $\vec{F} = ma^2\vec{a}$? —— 完全可以，但是不好用，根据能量守恒，这里所定义的力用起来不方便

c. 牛顿第三定律

- 结合牛顿第二定律，可以从牛顿第三定律中得到：

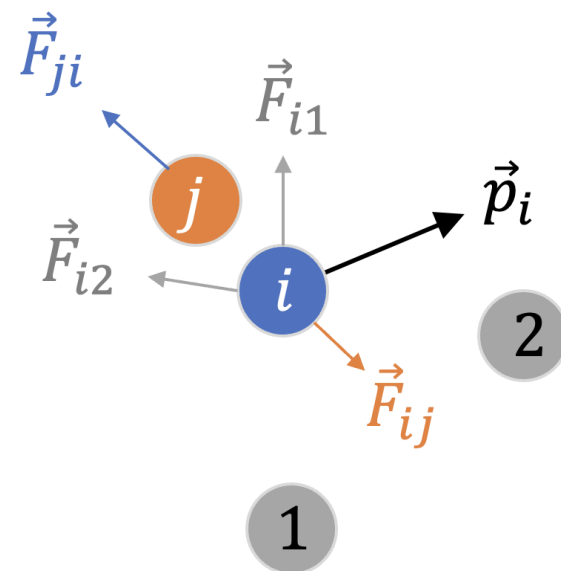
$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{const.}$$

即两体孤立体系动量不随时间改变，即动量守恒

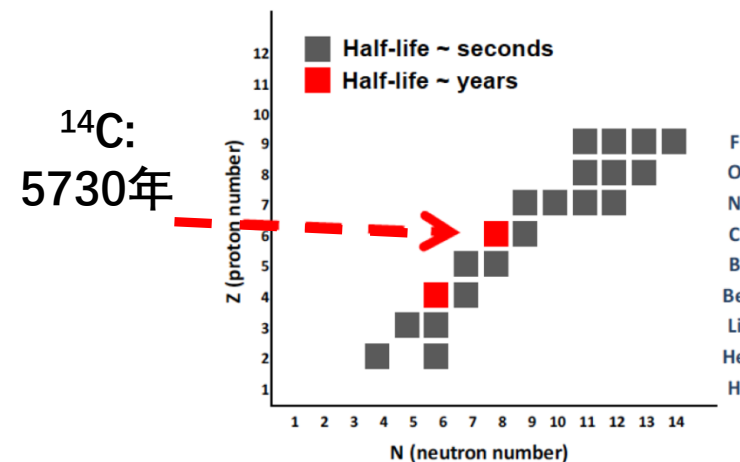
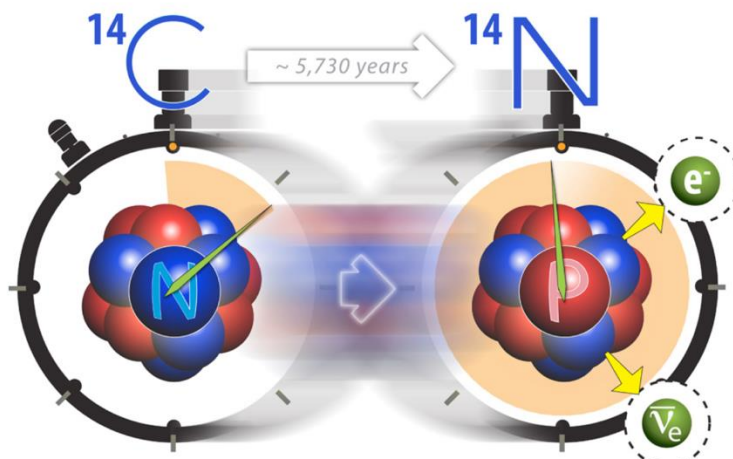
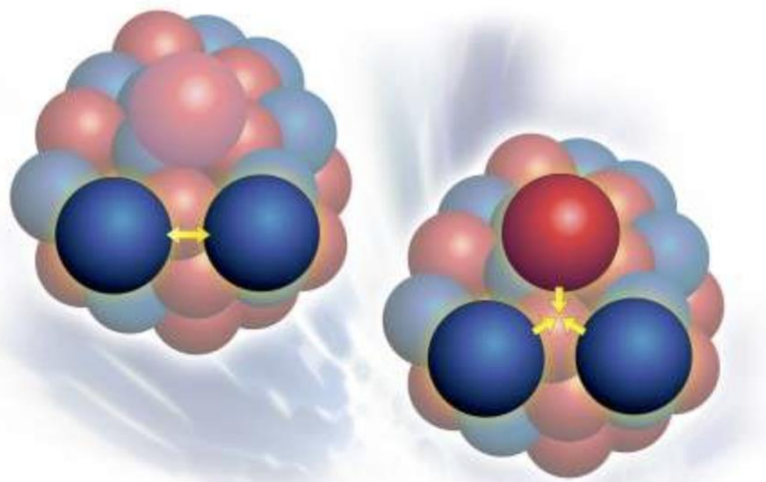
- 对于多质点体系，可以分别考虑任意两个质点 i, j 之间的相互作用力 $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ 。从而可以得到孤立体系的总动量守恒：

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const.}$$

因此，牛顿第三定律等价于动量守恒



- 但是，如果质点之间存在三体乃至多体相互作用，例如核子之间存在的三体核力，牛顿第三定律将会失效，而动量守恒仍然成立，因此动量守恒是更基本的物理定律，它来自于时空对称性
- 类似地，有人把“物体之间的作用力沿着连接其的直线的方向”作为“牛顿第四定律”。通过“牛顿第四定律”可以推导出角动量守恒。但是在很多情况下，例如分子、原子之间的作用力中是不成立的，但角动量守恒仍然成立。因此角动量守恒是更普遍的规律



d. 质点动力学

外力确定，如何确定质点运动状态的演化？

- 需要知道初始位置和初始速度 —— 其他信息，如 $\dot{\vec{a}}$ ？
- 牛顿决定论(Newtonian determinism): 只要确定了初始条件，体系的状态由动力学方程唯一确定

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \vec{v}(t), \\ m \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \vec{F}, \\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0, \vec{v}(0) = \vec{v}_0 \end{array} \right.$$

- 哲学引申：牛顿定律的完备性、自由意志是否存在、拉普拉斯妖 (Laplace's Demon)

- 柯西-利普希茨(Cauchy-Lipschitz)定理

对于一阶微分方程

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), t)$$

如果函数 f 满足利普希茨条件(Lipschitz condition), 即, 存在正实数 κ , 使得对于任意 t , $|f(x, t) - f(y, t)| \leq \kappa|x - y|$, 那么对于给定的初始条件, 微分方程的解局部存在且唯一

- 力仅为速度、位置 and 时间的函数, 且满足利普希茨条件时, 牛顿决定论成立, 质点的运动状态由位置 $\vec{r}$ 和速度 $\vec{v}$ 决定
- 反之, 如果力不仅仅是速度、位置 and 时间的函数, 或者不满足利普希茨条件, 运动方程的解不一定存在或唯一

【例子】带电粒子运动时由于辐射产生的电磁阻尼力(阿布拉罕-洛伦兹力)

$$\vec{F} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\vec{a}}$$

联立运动方程会发现，带电粒子会发生非物理的自加速现象。

$$v(t) = v_0 + a_0 \tau (e^{\frac{t}{\tau}} - 1)$$

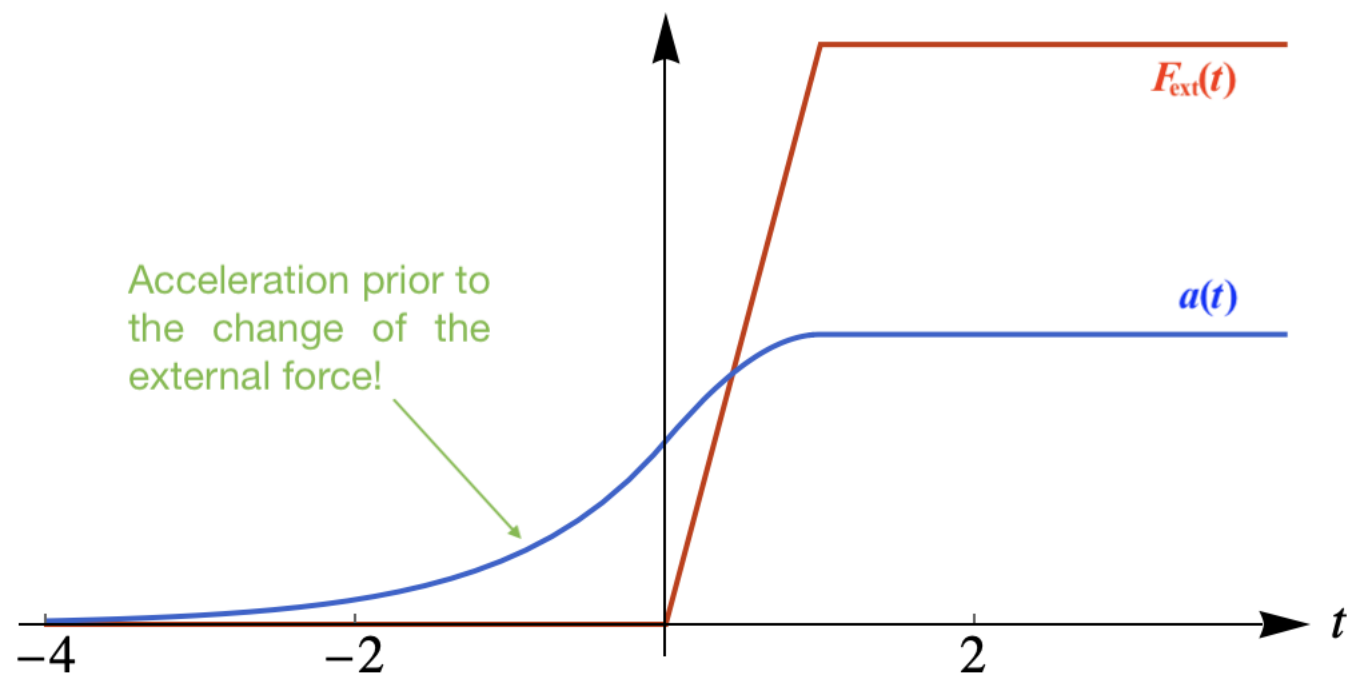
其中， $\tau = \frac{q^2}{6\pi m \epsilon_0 c^3}$ 。此外，带电粒子还会发生预加速现象，即在外力发生改变之前做出响应。假设外力依赖于时间 t ,

$$m(a - \tau \dot{a}) = F_{\text{ext}}(t)$$

这个一阶线性微分方程的解为，

$$a(t) = \frac{1}{m} \int_t^{\infty} F_{\text{ext}}(t') e^{-\frac{t'-t}{\tau}} dt'$$

可见, t 时刻加速度取决于 $t' > t$ 时刻的外力的形式

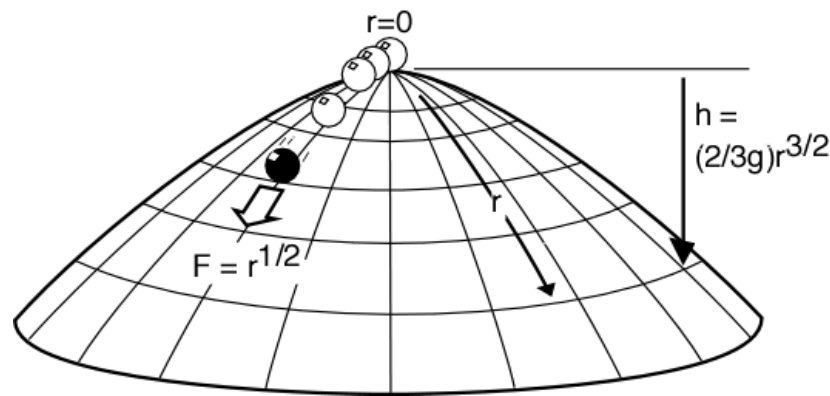


【例子】诺顿的穹顶 (Norton's dome)

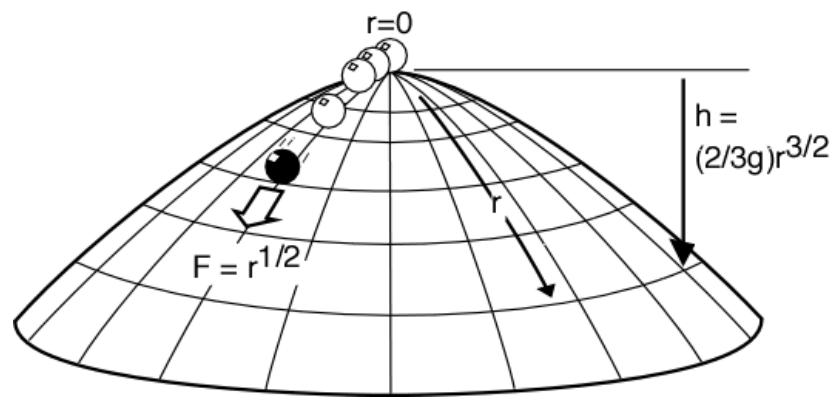
考虑一个穹顶，满足参数方程 $z = \frac{2}{3\sqrt{r_0}} r^{\frac{3}{2}}$, $z \in [0, \frac{2}{3} r_0]$ ，这里 r 是穹顶的径向弧长。初始时刻一个质点静止在穹顶的顶端 $r = 0$ 处。可以验证下面解是运动方程的解

$$r(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_0 \\ \frac{g^2}{144r_0} (t - t_0)^4, & t \geq t_0 \end{cases}$$

其中， t_0 是任意一个大于等于0的实数。换句话说，运动方程的解不唯一，即质点可以自发运动，并且自发运动的时间 t_0 无法从物理上得到，这与牛顿决定论截然不符。



- 问题的关键在于，上面的微分方程不满足利普希茨条件。因此，这个二阶微分方程的解不具有唯一性。也就是说，初始位置和初始速度无法唯一确定质点的动力学演化
- 实际上，我们可以进一步得到： $\ddot{r}(t_0) = 0$ ，以及 $\dddot{r}(t_0) = \frac{1}{6}$ 。换句话说，质点的运动是由于速度的4阶导数在 t_0 时刻具有了非零的初始值
- 注意到，在质点运动过程中一直满足牛顿第二定律，以及牛顿第一定律。因此，这个质点运动仍然是满足牛顿力学的。只不过，**力不是引起质点运动的原因，而是刻画质点运动状态改变的量。**



§2. 常见的力

牛顿三大定律把改变物体运动的外因抽象为力，因此，动力学接下来的任务便是寻找有关力的规律，这一任务一直延续到现代物理。下面考虑物理中常见的几种力。

a. 宏观力

- **弹性力：**当物体发生形变时，会产生弹性力。例如对于弹簧来说，弹性力 f 与弹簧的形变位移 Δx 成正比，

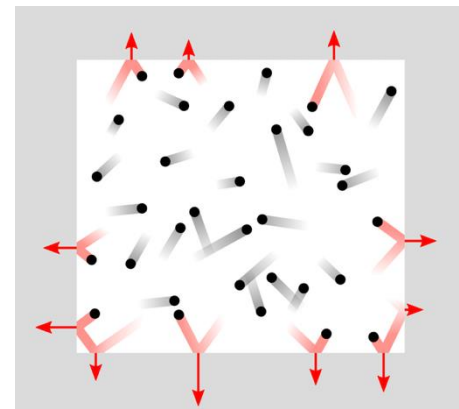
$$\vec{f} = -k\Delta\vec{x}$$

两个固体接触时产生的支撑力也是弹性力的一种

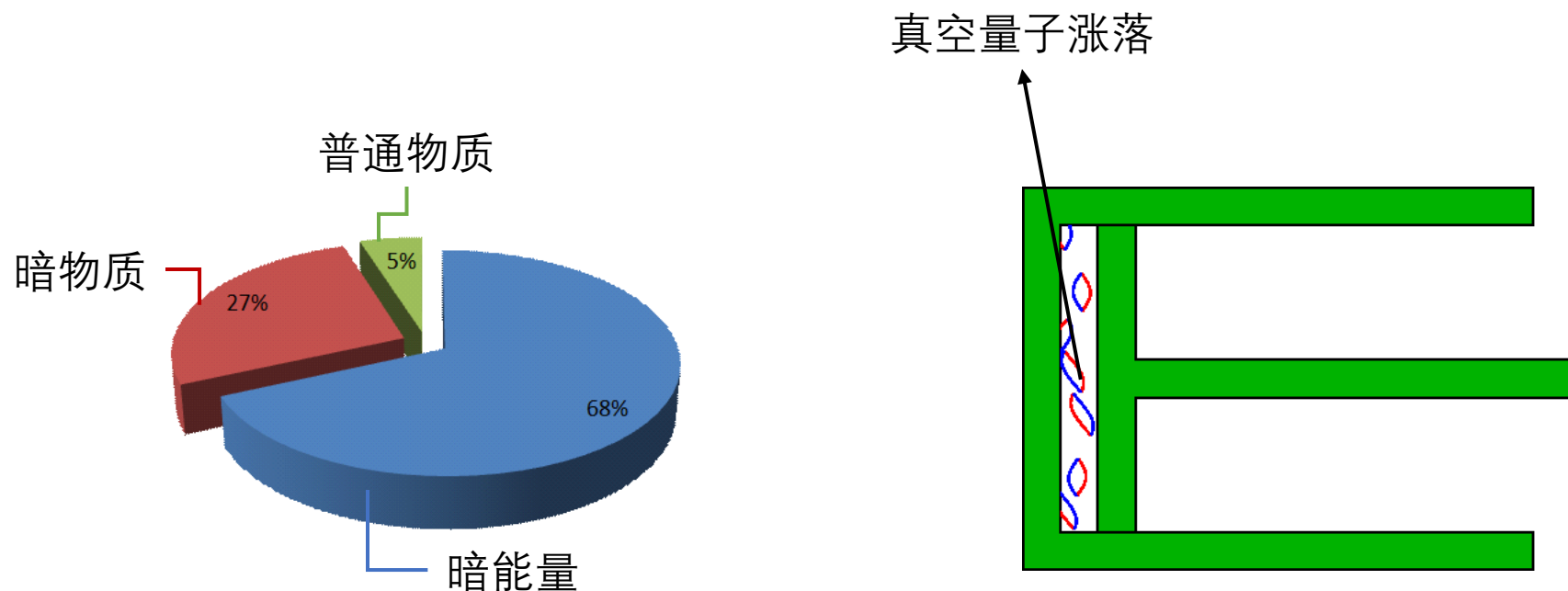
- **压力：**气体或液体对于其接触面会产生压力，压力的大小正比于接触面积，方向垂直于接触面的法向向外，

$$\vec{F} = pS\vec{n}$$

其中，单位面积上的压力 p 叫做压强。气体或液体的压力起源于微观层面分子的运动，如图所示。因此，压力是一种宏观的平均效应。当分子运动速度增加时（比如提高温度），压力便会增大。



一般而言，压强都是正的(排斥)。但是也存在负压力，一个有名的例子是爱因斯坦的宇宙常数项(cosmological constant term)。在标准宇宙模型中，宇宙常数项是暗能量的来源。一般认为宇宙常数项的起源是真空量子涨落，但这一解释也存在很大的争议。



- **阻力：**又叫做湿摩擦。在流体（空气、液体等）中运动的物体会受到阻力的影响。阻力的大小与速度有关，也跟流体状态有关。实验研究表明，在物体运动速度比较大时，阻力可以近似表示为，

$$\vec{F}_d = -\frac{1}{2} C_d \rho A v^2 \hat{v}$$

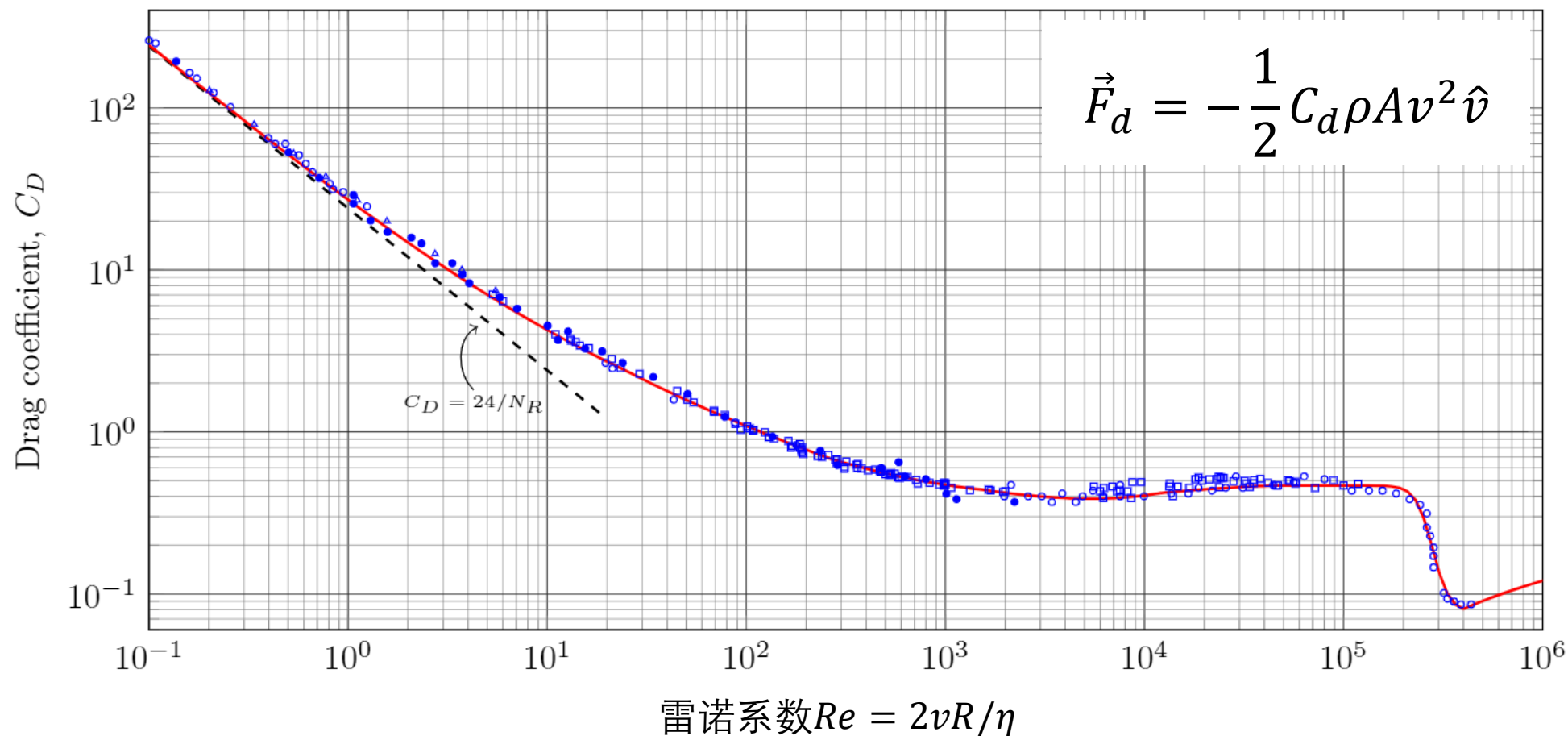
其中， ρ 是流体密度， v 是物体相对流体的速度， A 是物体有效截面积， C_d 叫做阻力系数。这个公式是牛顿先发现的，又叫做牛顿阻力公式。

另一方面，当物体运动速度比较慢时，阻力可以由斯托克斯公式近似描述为，

$$\vec{F}_d = -6\pi\eta R \vec{v}$$

此处， η 为流体的粘滞系数， R 为物体的等效半径。

实际情况要远比这两种近似公式复杂。流体力学研究表明，阻力与一个无量纲的数雷诺数 $Re = 2vR/\eta$ 有关。从阻力的例子可以看出，对于宏观物体来说，其受力一般是非常复杂的。



图：光滑球在流体中的阻力系数 C_d 作为雷诺系数 $Re = 2vR/\eta$ 的函数。当雷诺数较低时，阻力系数与雷诺数成反比，即阻力满足斯托克斯公式。当雷诺数在 $10^3 \sim 10^5$ 时，阻力系数近似为常数，即阻力满足牛顿阻力公式。在雷诺数超过 2×10^5 时，阻力系数会突然下降，这一现象叫做阻力危机，又叫做埃菲尔现象，在运动、航空等领域具有重要的应用。

- **摩擦力：**两个互相接触的固体表面之间阻止相对运动的力叫做干摩擦。干摩擦的摩擦力与相对运动方向相反，大小近似遵循阿蒙顿-库伦定律(Amontons-Coulomb law),

$$\begin{cases} F \leq \mu_s N, & \text{物体相对静止} \\ F = \mu_k N, & \text{物体相对滑动} \end{cases}$$

其中， N 为两个表面之间的支撑力。 μ_s 和 μ_k 分别叫做静摩擦系数和滑动摩擦系数，一般而言， $0.1 < \mu_k \lesssim \mu_s < 1.0$ ，但也不绝对。不同材料之间的摩擦系数可以通过实验测量得到并列成摩擦系数表。

尽管摩擦现象很常见，其成因却很复杂。1950年，Bowden和Tabor给出了阿蒙顿-库伦定律的一个微观的解释。Bowden和Tabor首先认为两个粗糙固体接触时，其表面并未完全贴合，而仅仅是其表面的很多凹凸颗粒接触。因此，实际接触面积 S_r 远小于表观接触面积 S_a 。

这意味着，这些凹凸颗粒所承受的压力 $\sigma = N/S_r$ 远大于物体表面的平均压力 N/S_a 。因此，这些凹凸发生弹性形变。Bowden和Tabor假定压力 $\sigma = H$ 是个常数，且由材料表面的硬度 H 决定，因此接触面积正比于压力：

$$S_r = N/H$$

这可以解释摩擦力正比于压力，而与(表观)接触面积 S_a 无关。进一步，Bowden和Tabor假定这些被压缩的凹凸颗粒“焊接”在一起形成一个个“接头”。为了破坏这些接头、产生滑动，需要一个临界剪切应力 τ_c 。这样以来，总摩擦力，

$$f = \tau_c S_r = \frac{\tau_c}{H} N$$

因此，摩擦系数 $\mu = \tau_c/H$ 。

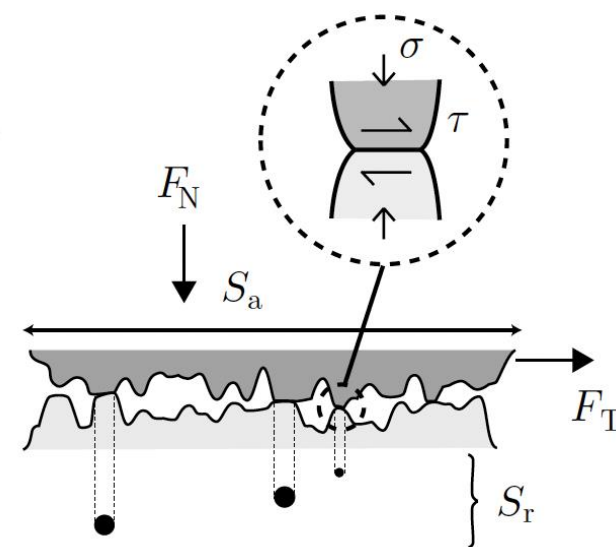
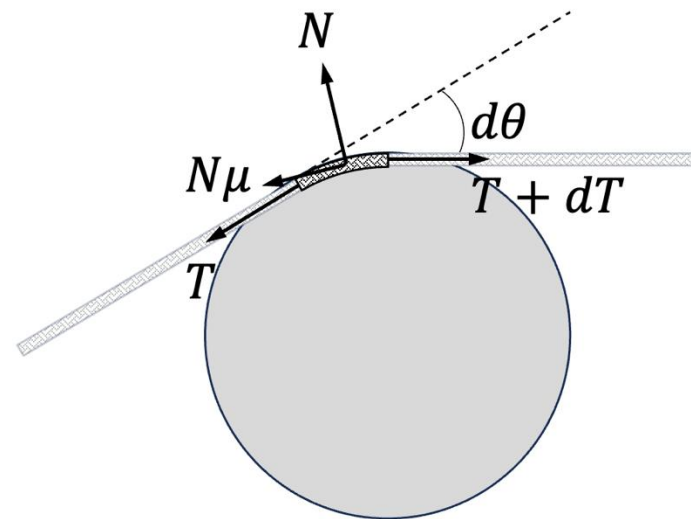


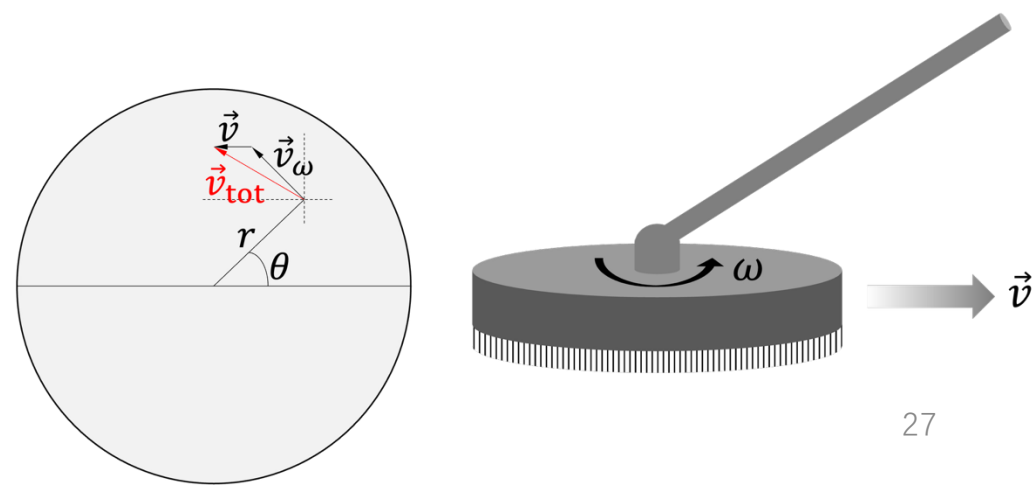
表 I. 常见材料的摩擦系数。来源: <https://hypertextbook.com>

材料 1	材料 2	μ_s	μ_k	备注
橡胶	混凝土	1.0	0.8	干
橡胶	混凝土	0.3	0.25	湿
橡胶	冰		0.15	
木头	木头	0.25–0.5	0.48	
木头	金属	0.5	0.3	
木头	砖	0.6		
铝	铝	1.05–1.35	1.4	
玻璃	玻璃	0.9–1.0	0.4	
钢	钢	0.7	0.6	
冰	冰	0.1	0.02	0 °C
冰	钢	0.04	0.02	
石墨	石墨	0.1		
金刚石	金刚石	0.1	0.05	
关节	关节	0.01	0.003	

【例子】 计算缠在柱子上的绳索的摩擦力， 设绳索与圆柱之间的摩擦系数为 μ ， 绳子一端固定， 张力为 T_0 。



【例子】 如图所示，电动扫把可以视为一个均匀的扁圆柱，质量为 M 半径为 R ，它整体以 ω 的恒定角速度高速旋转。已知在不旋转的情况下扫把与地板的摩擦系数为 μ 。求，现在 $\vec{v}$ 的速度拖动旋转的扫把，其中 $v \ll \omega R$ 。求此时扫把与地面的总摩擦力 $\vec{f}$ 。



b. 基本相互作用

迄今为止，已知五种基本相互作用力：强相互作用力、弱相互作用力、电磁力、希格斯相互作用力、引力。对于这些基本相互作用来说，所谓力的概念不再完全成立，而需要推广。

- **电磁力：**两个静止的点电荷之间的电磁力由库伦公式给出：

$$\vec{F}_{\text{Coul}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

当电荷发生运动时，电荷会产生磁场，因此电荷之间还有洛伦兹力的相互作用。不难估计，点电荷之间的洛伦兹力为(海威塞特公式)，

$$\vec{F}_{\text{Hv}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \hat{r})$$

比较海威塞特公式与库伦力可以发现，

$$\frac{F_{\text{Hv}}}{F_{\text{Coul}}} \sim \frac{v^2}{c^2}$$

因此，在非相对论极限下($v \ll c$)，点电荷之间的洛伦兹力远小于库伦力。但注意，两个点电荷之间的完整的电磁力并非库伦力与海威塞特力简单相加，还需要考虑库伦力的相对论修正。精确到 $O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$ 阶，两个点电荷之间的电磁力由达尔文模型给出：

$$\vec{F}_D = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{2c^2} - \frac{3(\hat{r} \cdot \vec{v}_1)(\hat{r} \cdot \vec{v}_2)}{2c^2} \right) \hat{r} + \frac{\hat{r} \cdot \vec{v}_2}{2c^2} \vec{v}_1 + \frac{\hat{r} \cdot \vec{v}_1}{2c^2} \vec{v}_2 \right]$$

- 现代研究表明，电和磁是独立于普通物质的存在形式，叫做电场和磁场，合称电磁场。带电粒子在电磁场中受到的力为，

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

这个力叫做洛伦兹力，与两个带点质点之间的力相比，它是精确的。

- **万有引力：**稍后介绍

- **强相互作用力：**强相互作用描述夸克之间的相互作用，它的一个特点是夸克禁闭，即强相互作用力不随着距离的增加而衰减。强子中的两个重夸克之间的相互作用可以由康奈尔模型来描述，

$$\vec{F}_{\text{Cor}} = -\frac{4\alpha_s}{3r^2} \hat{r} - \sigma \hat{r}$$

- **弱相互作用力：**

$$\vec{F}_w = -\frac{\alpha_w}{r^2} (1 + m_W r) e^{-m_W r} \hat{r}$$

弱相互作用的力程较短 $\sim m_W^{-1} \sim 10^{-18}\text{m}$ 。

- **希格斯相互作用力：**

$$\vec{F}_h = -\frac{\alpha_h}{r^2} (1 + m_h r) e^{-m_h r} \hat{r}$$

希格斯相互作用的力程也比较短 $\sim m_h^{-1} \sim 10^{-18}\text{m}$ 。希格斯力与基本粒子质量的起源息息相关。

c. 微观唯象力

原子、分子、核子等微观粒子并非基本粒子。它们之间的相互作用力原则上可以由基本相互作用得到。一般来说直接计算这些力非常复杂，因此实践中人们常常采用唯象模型来拟合这些力。例如，原子之间的莱纳-琼斯势、核子之间的阿贡势等。

d. 万有引力

根据牛顿定律，行星做椭圆运动，可以归结为力的作用，这个力，牛顿认为与地面上的物体受到的重力是同样的，叫做万有引力。它是任何两个物体之间的吸引力。力的大小与物体之间的距离平方成正比、每个物体的质量成正比，方向沿着两个物体之间的连线，并指向另一个物体：

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

其中， $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ， $m_{1,2}$ 是物体的质量， G 是一个常数，叫做万有引力常数。现代精确测量得到， $G = 6.67430(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ 。

- **万有引力常数 G 的测定：**牛顿并未给出万有引力常数 G 的数值，其测量需要非常精密的实验方法，历史上，英国物理学家卡文迪什是第一个完成这一测量的人。通过 G 可以获得地球的质量，因此卡文迪什是第一个给地球称重的人。

【例子】可以估计一下两个铅球之间的万有引力：取其距离 $r = 5 \text{ cm}$ ，每个铅球质量 $m = 100 \text{ kg}$ 。

$$F = \frac{Gm^2}{r^2} \sim 10^{-4} \text{ N} \sim 10 \text{ mg} \times 9.8 \text{ m/s}^2$$

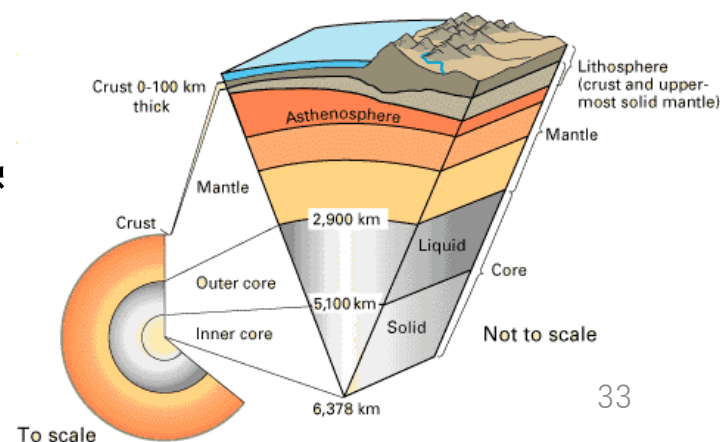
此力已经大于最小的砝码 100 mg 可以产生的重力 10^{-3} N 。



【例子】通过 G 来估计地球的质量及平均密度，并比较地球平均密度与岩石密度。

$$\rho_E = \frac{M_E}{\frac{4}{3}\pi R_E^3} = \frac{3g}{4\pi G R_E} \approx 5.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

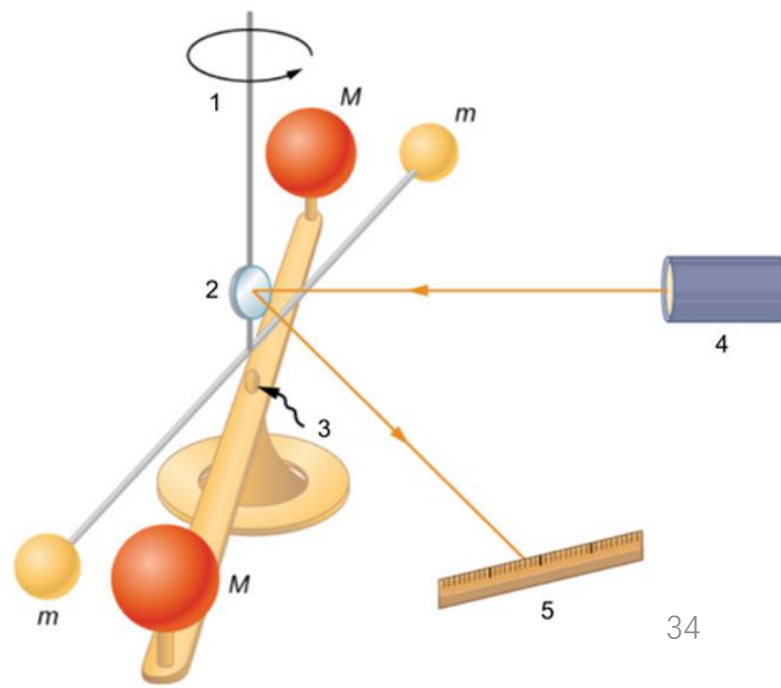
一般岩石的密度约为 $3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。这说明地球内部有密度比较大的物质（地幔、地核等）。



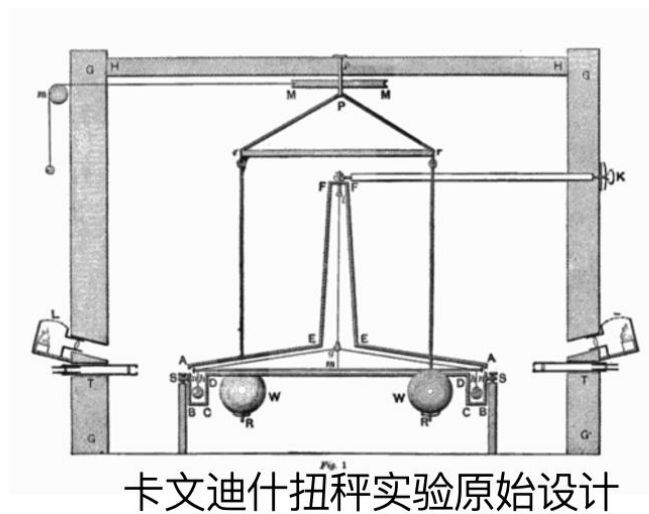
卡文迪什实验：如图所示，这个实验装置由一个六英尺（1.8米）长的木棒水平悬挂在一根细线上，木棒的两端各有一个直径2英寸（51毫米），重1.61磅（0.73千克）的小铅球。另外还有两个直径12英寸（300毫米），重348磅（158千克）的大铅球，分别悬挂在另一根线上，可以移动到小铅球的远处或者两侧，距离为8.85英寸（225毫米）。

这个实验测量了小铅球和大铅球之间的微弱的引力，这个力使得木棒稍微旋转了约0.16英寸（或者用更硬的悬挂线时只有0.03英寸）。木棒的旋转角度可以通过两端的游标刻度盘读出。大铅球可以移动到扭摆杆的另一侧，使得木棒反向旋转。木棒旋转到一个角度时，悬挂线的扭力和铅球之间的万有引力达到平衡。

1. 扭丝；
2. 镜子；
3. 木棒，可绕中心旋转；
4. 望远镜；
5. 标尺；



卡文迪许的实验原始方案来自地质学家约翰·米切尔，后者未来及完成这一实验便去世了，后来实验装置和方案传给了亨利·卡文迪什，他重建了实验装置并做了进一步改进。卡文迪什使用碳制的扭丝，其扭动弹性系数可以由振动实验测量得到。他还在装置上悬挂了镜子，由此通过反射光束来放大扭丝的偏转。整个装置被放在一个大箱子里，只留下观察和操作的空間，以减小空气流动对实验的影响。最终卡文迪什测量得到 $G = 6.74(4) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ，与现代值相差不到1%，这个纪录一直保持了100多年。



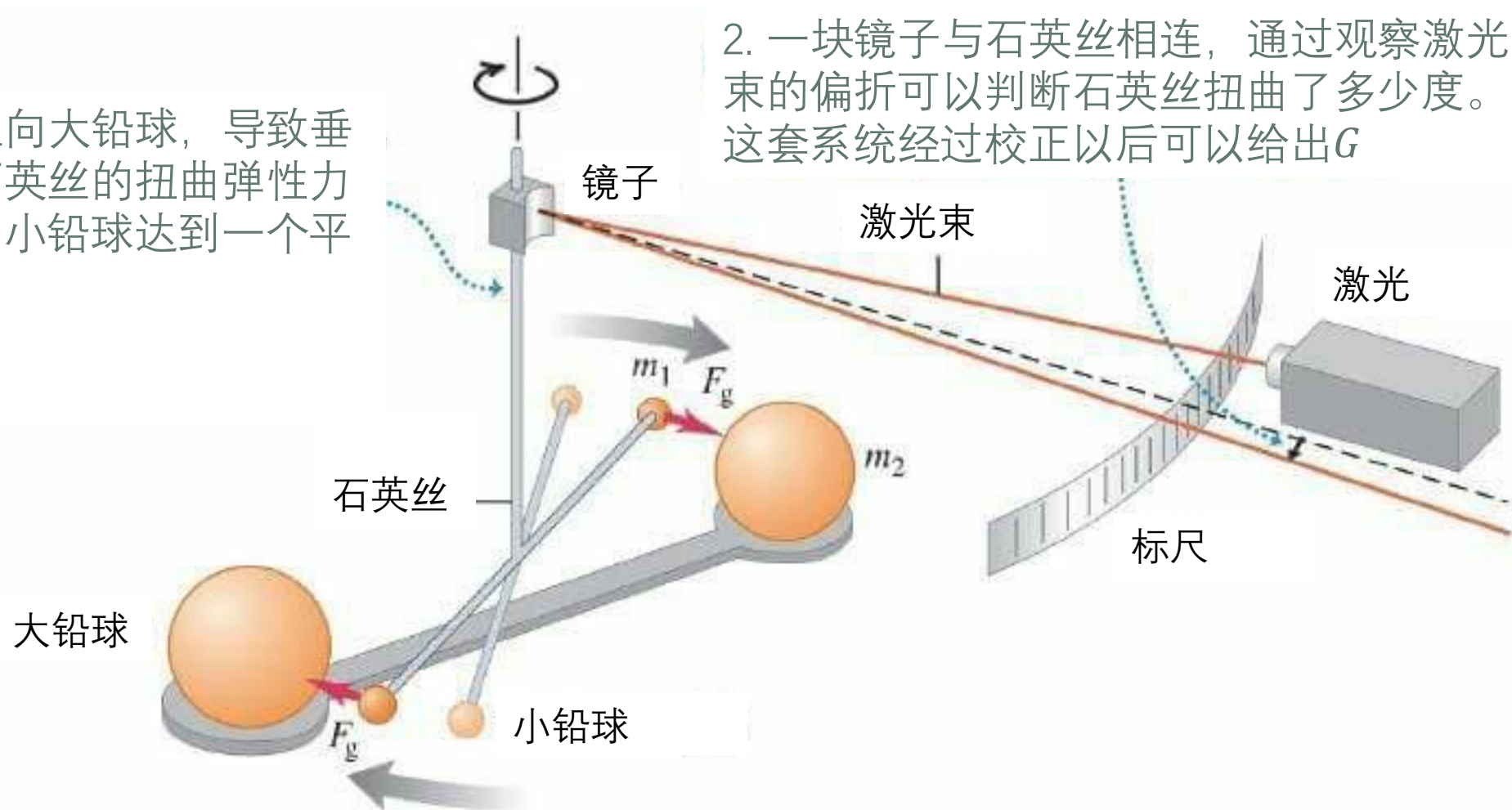
亨利·卡文迪什



约翰·米歇尔

现代版本的卡文迪什实验

1. 万有引力将小铅球拉向大铅球，导致垂直的石英丝扭曲。当石英丝的扭曲弹性力与万有引力相平衡时，小铅球达到一个平衡位置。



卡文迪什实验是物理学中最优美、最著名的实验之一。卡文迪什所使用的扭秤现在仍然是现代化学精确测量的主要工具之一。卡文迪什是英国的一个贵族终身未婚，以精确测量著名。他的知名工作包括测量空气成分、测量引力常数、测量库伦力等。剑桥大学设有以其命名的卡文迪什实验室（由其族侄捐赠、麦克斯韦建立，出国30多个诺贝尔奖得主）。科大在卡文迪什访问过的老师：郢文标、陆朝阳。

目前万有引力常数 G 最精确的测量仍来自于扭秤实验（华中科技大学引力中心，2018年），不过万有引力常数 G 也是所有基本物理常数中测量最不精确的一个。

基本常数	实验测量的相对误差
引力常数 G	2.2×10^{-5}
普朗克常数 h	8.7×10^{-9}
玻尔兹曼常数 k_b	2.8×10^{-7}
精细结构常数 α	2.9×10^{-11}
阿伏伽德罗常数 N_A	1.7×10^{-8}

等效原理：类比于库仑力，根据牛顿万有引力公式，质量是作为引力的“荷”。那么一个问题是，作为引力的荷的质量（即引力质量）是否等于惯性质量？牛顿假设引力质量等于惯性质量，这叫做等效原理，在广义相对论的建立中起到了至关重要的作用，但人们后来意识到等效原理需要通过高精度的实验进行检验。

根据等效原理，物体在引力作用下的加速度与其质量无关。特别地，在地球表面的物体在重力的作用下的加速度与物体质量无关，这个值叫做重力加速度。

实验检验：

- 比萨实验（“两个铁球同时落地”）
- 单摆实验：单摆周期与质量无关
- 厄特沃什实验：利用扭成验证引力质量与惯性质量相等，精度达到 10^{-8} ，现代厄特沃什实验经过改进之后精度可以达到 10^{-14}

壳层定理：牛顿万有引力定律是针对质点的。对于有限大小的物体所产生的引力，则需要微元方法将物体分割，最后把所有的引力加起来，即积分。让我们来计算一个质量为 M 半径为 R 的均匀球壳所产生的引力。为了方便，我们将球的原点设在坐标原点，并令测试质点的质量为 m ，其与球心的相对位置矢量为 $\vec{r}$ 。

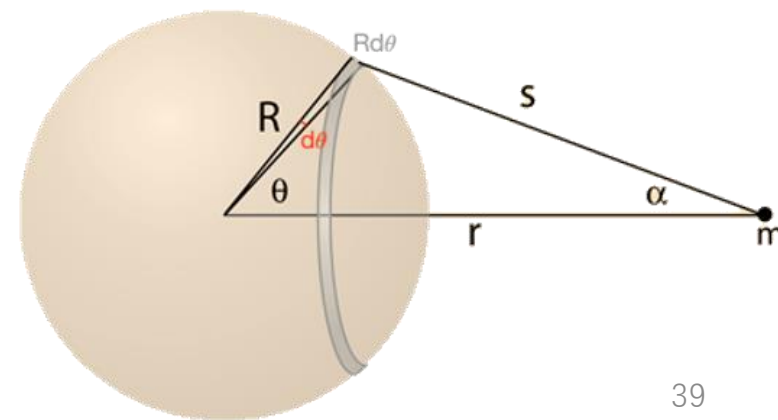
如图所示，可以充分利用球对称性，将球壳划分为微元环带，其质量为

$$dM = \sigma 2\pi R \sin \theta R d\theta$$

其中， $\sigma = M/(4\pi R^2)$ 是面密度。这个环带对于 r 处的测试质点产生的引力方向指向球心，因此我们只需要计算径向的分量。由于环带上所有质点与试探质点的距离相同均为 s ，其引力合力为，

$$dF = \frac{Gm dM}{s^2} \cos \phi$$

其中， $s = \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR\cos\theta}$ ， $\cos \phi = \frac{r - R \cos \theta}{s}$



因此可以得到,

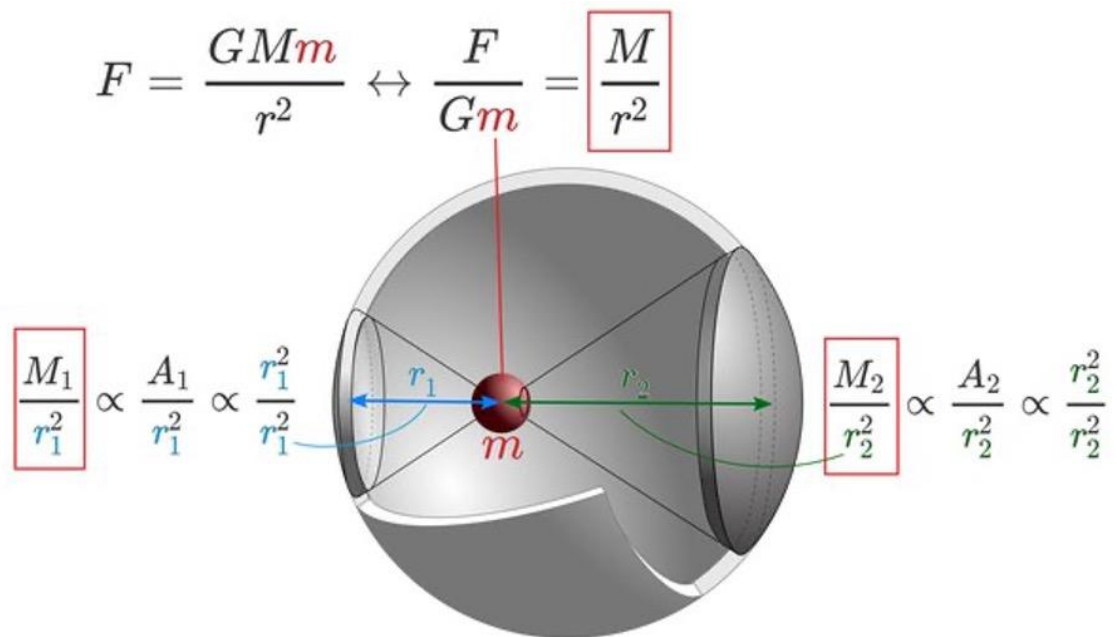
$$F = \int dF = \int_0^\pi G\sigma 2\pi R^2 m \frac{(r - R \cos\theta) \sin\theta d\theta}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

可以做变量代换, 另 $s = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos\theta}$, 易得 $s ds = rR \sin\theta d\theta$, 当 $\theta = 0$ 时 $s = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR} = |r - R|$, 注意这个绝对值号。当 $\theta = \pi$ 时, $s = r + R$ 。因此,

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} GMm \int_{|r-R|}^{r+R} \frac{r - \frac{1}{2r}(r^2 + R^2 - s^2)}{s^3} \frac{s}{rR} ds \\ &= \frac{GMm}{2Rr} (2R - |r - R| + (r + R) \text{Sgn}(r - R)) \\ &= \begin{cases} \frac{GMm}{r^2}, & r > R \\ 0, & r < R \end{cases} = \Theta(r - R) \frac{GMm}{r^2} \end{aligned}$$

换句话说，在球壳内部，引力为零，在球壳外部球壳产生的引力等价于相当质量的质点放置在球心时产生的引力。这个结论叫做**壳层定理** (shell theorem)。这是牛顿首先提出来的。

为什么球壳内的引力为零呢？这可以通过下图的几何关系来理解：



对于球壳内部的任意一点，相对的两片质量元产生的引力大小相等，方向相反。

【例子】求一个质量为 M ，半径为 R 的均匀实心球产生的引力场。

解：将实心球看成很多球壳的叠加，每个球壳的厚度为 dr ，因此其质量为 $dM = 4\pi r^2 \rho dr$ ，这里 $\rho = \frac{M}{4/3\pi R^3}$ 为实心球的体密度。根据壳层定理，以球心为原点，该球壳对于 s 处质量为 m 的测试质点产生的引力为，

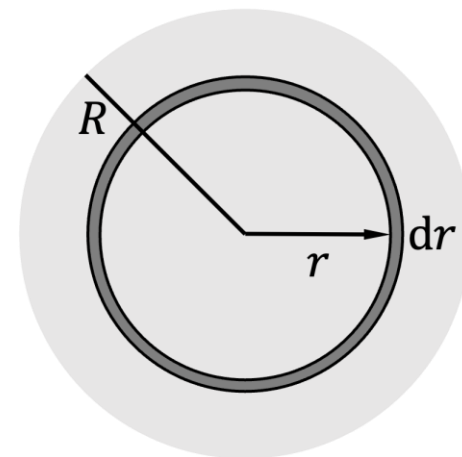
$$dF = \Theta(s - r) \frac{GmdM}{s^2} = \Theta(s - r) \frac{GMm}{s^2} \frac{3r^2 dr}{R^3}$$

积分可以得到合力：

$$F(s) = \frac{3GMm}{R^3 s^2} \int_0^R \Theta(s - r) r^2 dr$$

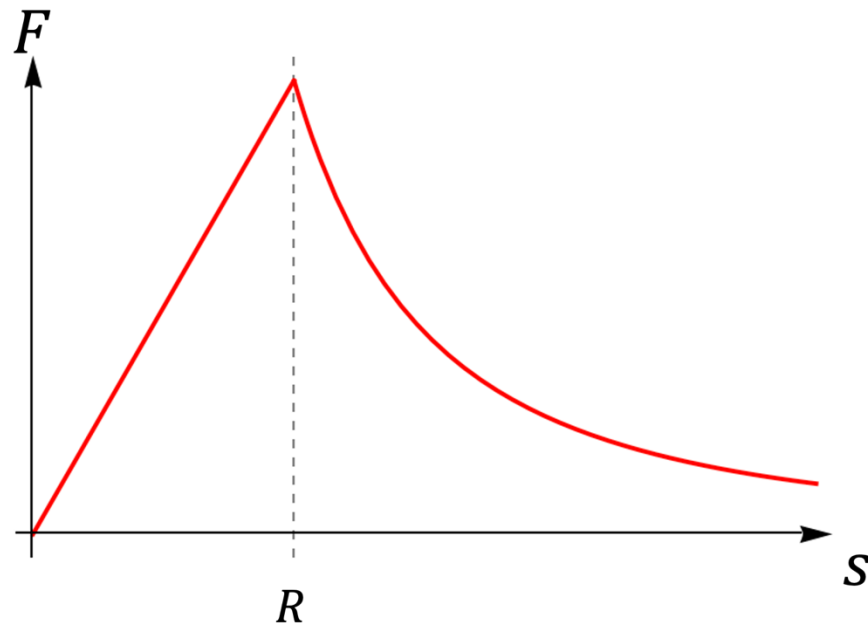
如果 $s > R$ ，则

$$F(s) = \frac{3GMm}{R^3 s^2} \int_0^R r^2 dr = \frac{GMm}{s^2}$$



如果 $s < R$, 则

$$F(s) = \frac{3GMm}{R^3 s^2} \int_0^s r^2 dr = \frac{GMm}{R^2} s$$



【例子】考虑一个球对称的星系质量为 M 。距离星系中心 r 处有一颗恒星围绕星系中心做匀速圆周。求下面三种情况下其运动速度 $v(r)$:

- a. 星系质量集中在星系中心（其他质量忽略不计）；
- b. 星系质量均匀分布在半径为 R 的暗物质晕内 ($R > r$, 其他质量忽略不计);

解:

引力提供恒星做圆周运动的向心力,

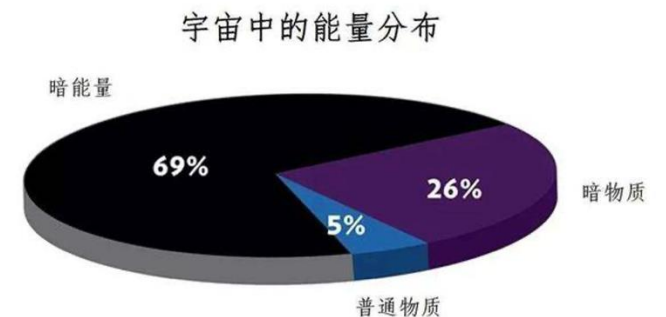
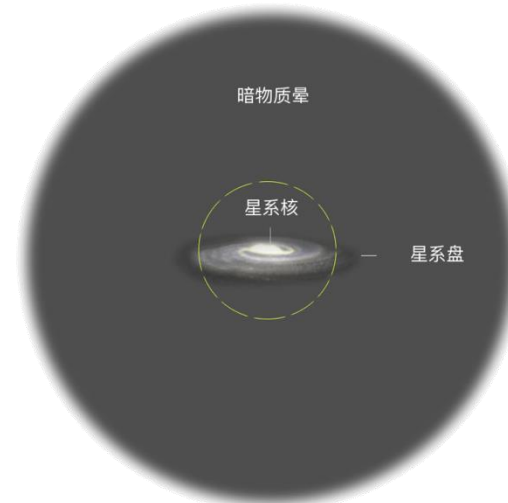
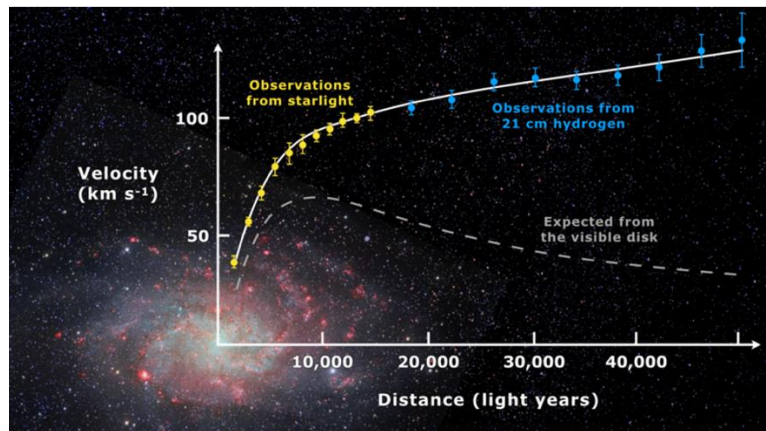
$$\frac{GM(r)m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}$$

其中, $M(r)$ 是半径为 r 的球所包围的质量。

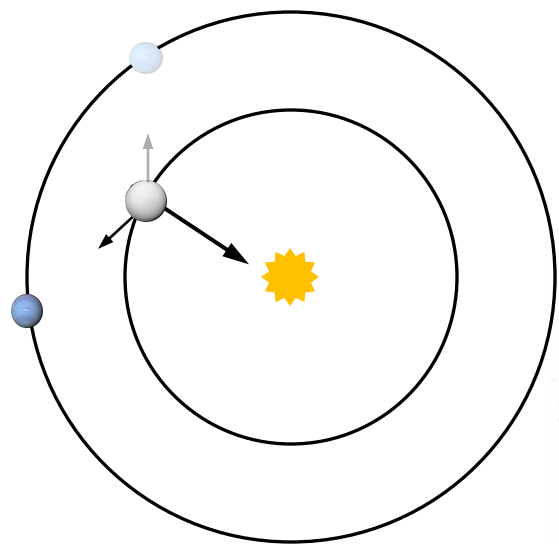
(a) 如果质量分布在星系中心, 则 $M(r) = M$ 。因此, $v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}$, 即随着 r 的增大下降。

(b) 如果质量均匀分布在半径为 R 的暗物质晕内, 则 $M(r) = \frac{M}{R^3} r^3$, 因此 $v(r) = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} r$, 即随着 r 的增大而增大。

天文学家曾认为星系的质量主要集中在星系的核心。但上个世纪60年代天文观测表随着 r 的增大并不减小, 并且这一现象在绝大多数星系中都存在。这使得天文学家怀疑宇宙中存在尚未观测到的物质, 称为暗物质。现代观测和研究表明, 宇宙中暗物质的质量远大于可见物质质量。当然另外一种可能是牛顿万有引力公式在星系尺度上不再成立! 人们提出所谓的修改引力(Modified Newtonian dynamics, MOND)也可以解释星系旋转曲线之谜。但是种种观测证据表明, 暗物质确实存在, 而且在星系形成、宇宙演化中扮演着重要的角色。

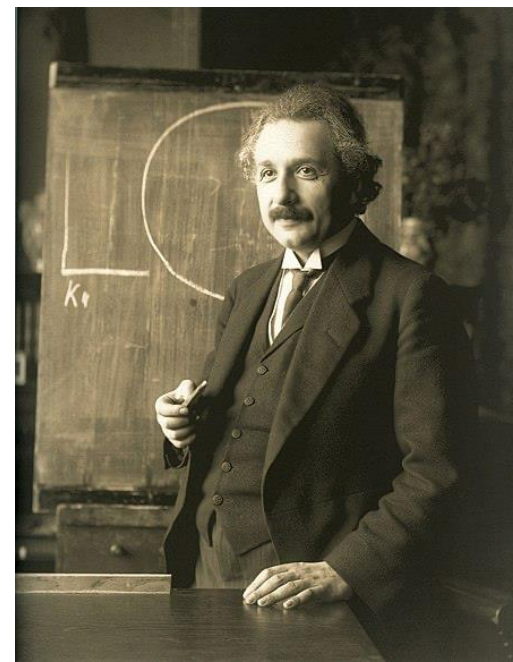


- 牛顿万有引力取得了辉煌的成就
 - “笔尖上发现的行星”——海王星(Neptune): 1846年在勒维耶的预言下由德国天文学家伽勒发现, 由此也验证了万有引力的精确性
- 万有引力的挑战
 - 为了解释水星的轨道反常, 勒维耶用同样的方法计算预言水星轨道以内存在一颗行星——“祝融星”, 却一直未被发现
 - 超距作用 (与狭义相对论不符)
 - 马赫原理: 万有引力符合牛顿的绝对时空观
- 广义相对论 (general relativity)
 - 爱因斯坦提出了新的引力理论: 广义相对论
 - 在广义相对论不仅仅是引力理论, 还是关于时空的理论



法国数学家、天文学家勒维耶

- 在广义相对论中，引力来自于时空的弯曲
- 牛顿理论作为广义相对论的低速、弱引力情形的有效理论
- 广义相对论通过了实验的精确地检验：
 - 水星进动问题、光线偏折、雷达回波……
- 广义相对论还提出了全新的物理概念：
 - 引力波、黑洞、宇宙学……



§3. 牛顿第二定律的应用

结合牛顿第二定律和外力的具体形式，我们可以得到一个或一组闭合的微分方程，这组方程叫做体系的运动方程。一般而言，外力仅与体系的瞬时状态有关，即 $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ 。那么，根据牛顿第二定律以及速度的定义，

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

为了得到体系的解 $\vec{r}(t)$ ，我们还需要指定初始条件，即 $\vec{r}(0)$ 和 $\vec{v}(0)$ 的值。前面提到过，如果外力的形式满足柯西-利普希茨定理，则运动方程的解是局部存在且唯一的。

求解力学问题的一般策略：

- 隔离分解
- 受力分析
- 运动学分析包括约束分析
- 建立运动方程，并取分量
- 数学求解

【例子】 如图所示，一根半径为 R 的环形细铁丝固定光滑水平面上。铁丝上穿有一个质量为 m 的小珠。已知细铁丝与小珠之间的摩擦系数为 μ ，小珠的初始速度为 v_0 。

- a. 如果不考虑重力，求 t 时刻小珠的速度。
- b. 如果考虑重力，求 t 时刻小珠的速度。

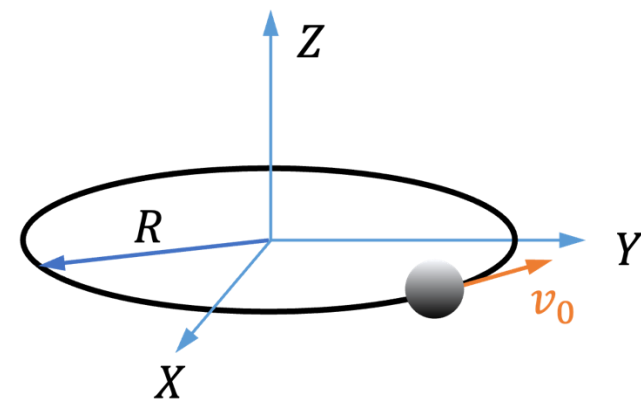
解答：

- a. 针对小珠切向运动应用牛顿第二定律，

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu N$$

其中， $N = mv^2/R$ 。代入方程可以得到，

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu v^2}{R}$$



$$\frac{dv}{v^2} = -\mu \frac{dt}{R} \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = -\int_0^t \frac{\mu}{R} dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = -\frac{\mu t}{R} \Rightarrow v = \frac{v_0}{1 + \frac{\mu v_0 t}{R}}$$

b. 针对小珠切向运动应用牛顿第二定律,

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu N$$

其中, $N = \sqrt{(mv^2/R)^2 + m^2 g^2}$ 。联立方程可以得到,

$$\frac{dv}{dt} = -\mu \sqrt{\frac{v^4}{R^2} + g^2} \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{\frac{v^4}{R^2} + g^2}} = -\mu dt$$

做变量代换 $x = v/\sqrt{gR}$,

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = -\frac{\mu g}{R} t$$

左侧积分虽然形式简单，实际上积起来很复杂。查表可以得到，

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2} F\left(\arccos \frac{x^2-1}{x^2+1}, \frac{1}{2}\right)$$

其中， $F(\varphi, k)$ 是第一类椭圆函数，定义为，

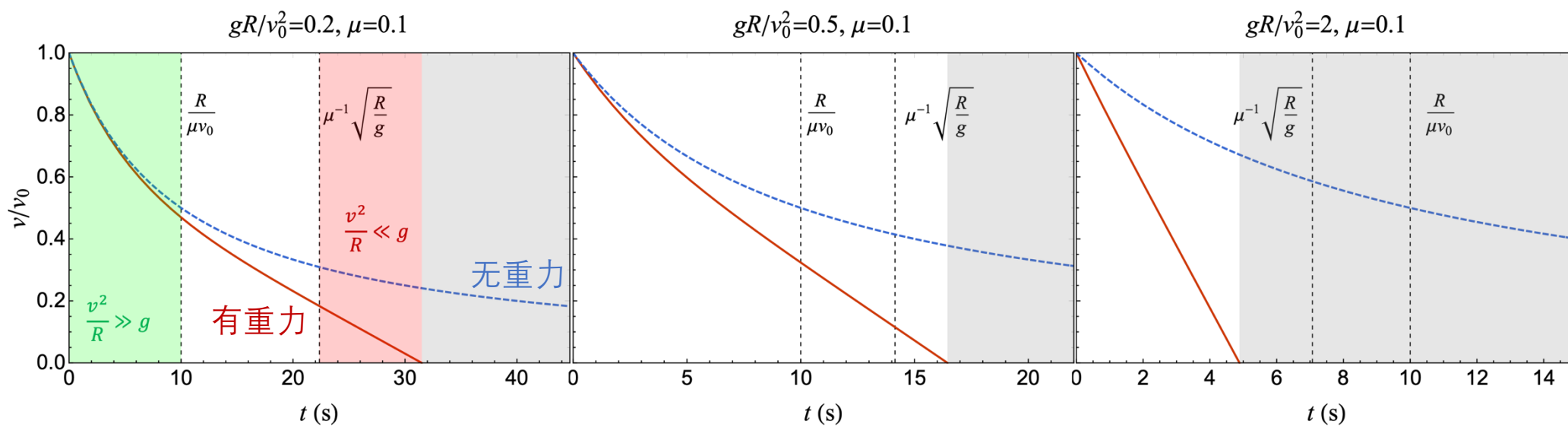
$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k \sin^2 \theta}}$$

它关于 φ 的反函数叫做振幅函数am：如果 $u = F(\varphi, k)$ ，则 $\varphi = \text{am}(u, k)$ 。

利用这些超越函数，b. 的解可以表示为，

$$v = \sqrt{gR} \sqrt{\frac{1 + \cos \left[\operatorname{am} \left(F \left(\arccos \frac{v_0^2 - gR}{v_0^2 + gR}, \frac{1}{2} \right) + 2 \mu \sqrt{\frac{gt}{R}} \right) \right]}{1 - \cos \left[\operatorname{am} \left(F \left(\arccos \frac{v_0^2 - gR}{v_0^2 + gR}, \frac{1}{2} \right) + 2 \mu \sqrt{\frac{gt}{R}} \right) \right]}}$$

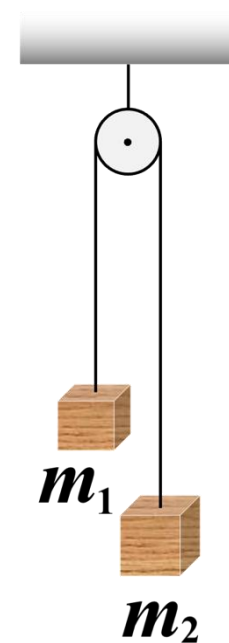
小珠的运动特征如图所示。当 $v \gg \sqrt{gR}$ 时，重力可以忽略，小珠的运动接近于(a)，即按照 $1/(1 + \mu v_0 t/R)$ 减速；当 $v \ll \sqrt{gR}$ 时，向心力可以忽略，小珠的运动接近于匀减速运动，且在 $t = t_T$ 时刻停止运动。



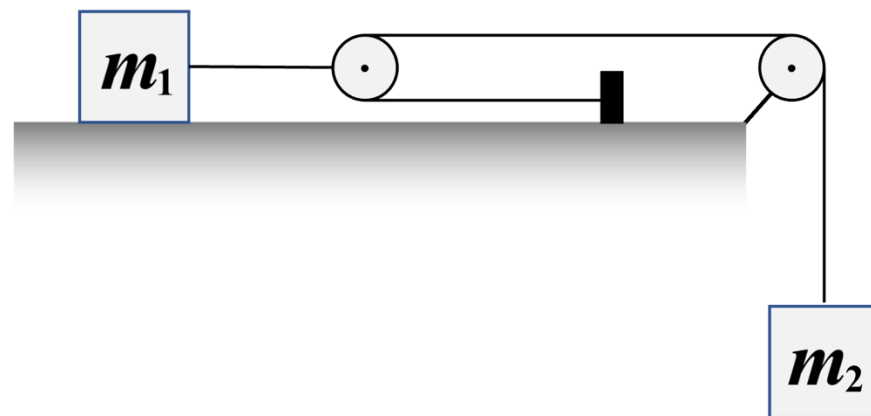
几种常见约束：

- “轻物”，例如轻绳、轻杆、轻滑轮：力平衡（否则轻物会获得无穷大的加速度/角加速度）
- 不可伸长的绳、杆：绳子/杆两端运动距离不变，速度、加速度相同（否则绳就会被伸长）
- 软绳、锁链：只有张力，没有压力（否则绳子就变弯了，张力为0）
- 液体：只有压力，没有剪切力（否则液体会流动）
- 斜面以及一般曲面约束：物体运动沿着曲面运动（否则物体会进入约束面。一个特殊情况是物体离开曲面以后不再受到约束，需要单独考虑）
- 摩擦约束：动摩擦力的方向永远与运动方向相反，静止摩擦的方向为除摩擦力以外的合力方向相反。摩擦约束问题常常需要分情况讨论。

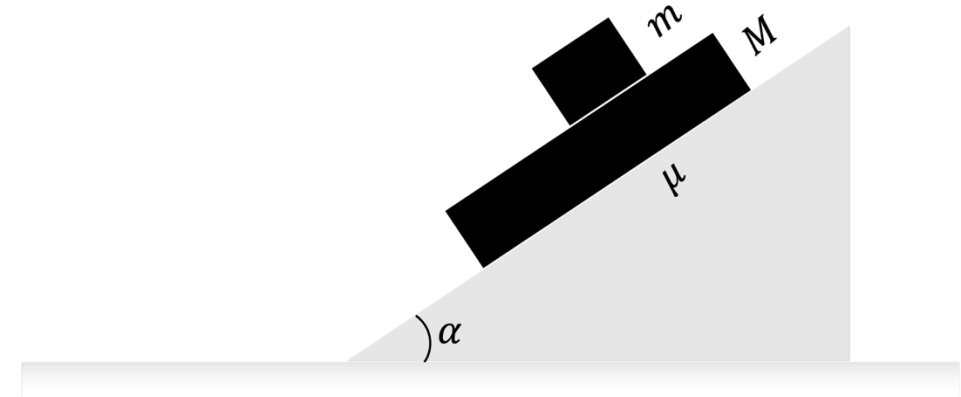
【例子】 求图中两个物体的加速度。已知两个物体质量分别为 m_1, m_2 。



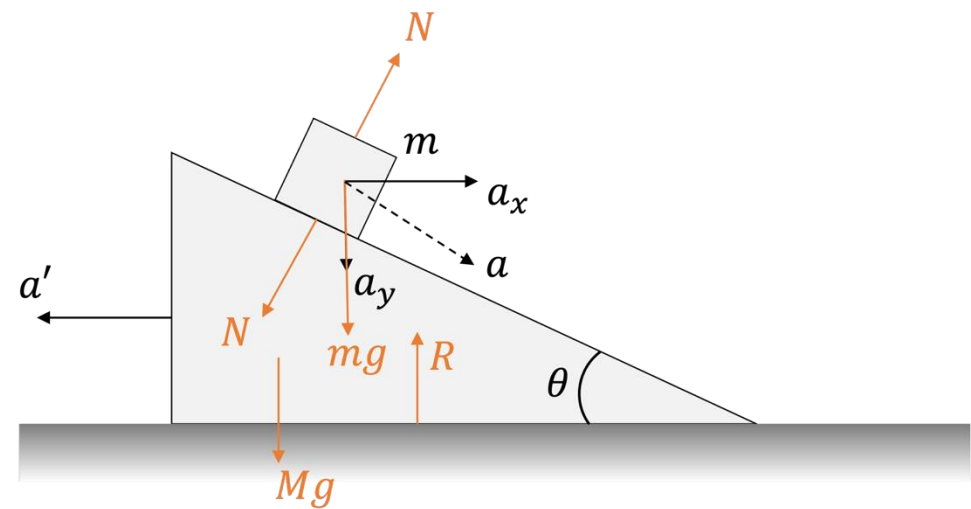
【例子】如右图动滑轮问题。求已知所有物体质量，求其加速度。



【例子】如图斜面约束问题。已知质量为 M 的板与斜面之间的摩擦系数为 μ 且 $\mu \leq \frac{M}{M+m} \tan \alpha$ ，木块之间摩擦可以忽略。求两个木块的加速度。



【例子】木块与斜面、斜面与水平面之间的摩擦力可以忽略。求木块与斜面的加速度。



【例子】一个木块初速度为3 m/s在一个斜面上向上运动。斜面与水平面倾角为30度，斜面与木块之间的摩擦系数为0.1。求1s以后木块与初始位置的距离。

【例子】一个质量为 M 的薄木板静置在水平桌面上，木板与桌面大小相同且一端与桌边对齐。木板中心放着一个质量为 m 的小木块。现在将一个恒定的水平力 F 作用在木板上，要将木板从木块下抽出来，又要是木块不掉到地上。假定各个接触面的摩擦系数均为 μ ，求 F 至少多大。



§4. 常微分方程求解*

运用牛顿第二定律，经过化简之后最终所要求解的问题形式一般为一个常微分方程，形如：

$$\ddot{x}(t) = F(x, \dot{x}, t)$$

这是一个二阶微分方程。对于保守系统，利用能量守恒可以把二阶微分方程化简为一阶微分方程，

$$G(x, \dot{x}, t) = 0$$

或者，进一步将 $v = \dot{x}$ 表示出来，

$$\dot{x} = \Phi(x, t)$$

常微分方程求解没有统一地求解方法。这里列举几类基本的求解方法。除此之外，有一些方程虽然比较复杂，但可以通过变量代换以后采用这里的方法求解。需要指出力学课程不涉及过于复杂的常微分方程的求解。

a. 直接积分法

如果常微分方程

$$\dot{x} = \Phi(x, t)$$

可以写成全微分的形式，即

$$\Phi(x, t) = -F'_t / F'_x$$

可以通过直接积分得到解（隐函数解）。方程可以化简为，

$$F'_x(x, t) dx + F'_t(x, t) dt = 0$$

$$\Rightarrow F(x, t) = C$$

特别是，如果能够分离变量，

$$\Phi(x, t) = f(t)/g(x)$$

则，

$$g(x)dx = f(t)dt \Rightarrow \int g(x) dx = \int f(t) dt$$

两边积分可以得到方程的解。此时需要注意初始条件的确认。这相当于取

$$F(x, t) = \int f(t) dt - \int g(x) dx$$

b. 一阶线性常微分方程

一阶线性常微分方程是指形如：

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)$$

的方程。齐次一阶线性常微分方程以及一阶线性常系数常微分方程可以通过前面的直接积分方法得到：

$$\dot{x} = a(t)x$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = a(t)dt$$

$$\Rightarrow x = Ce^{\int a(t)dt}$$

为了求解一般的一阶线性常微分方程，可以采用常数变异法，即取齐次方程的解，但将待定常数 C 作为一个待定函数 $C(t)$ ，由此可以得到：

$$\dot{C}e^{A(t)} = b(t)$$

$$\Rightarrow C(t) = \int e^{-A(t)} b(t) dt$$

其中, $A(t) = \int a(t)dt$ 。最终, 一阶线性常微分方程的通解为,

$$x(t) = x_0 e^{\int a(t)dt} + e^{\int a(t)dt} \int_{t_0}^t e^{-\int a(\tau)d\tau} b(\tau) d\tau$$

c. 常系数常微分方程

一般而言，常系数常微分方程总是可以求解的。这里主要讨论力学上比较有用的二阶常系数常微分方程，

$$\ddot{x} + b \dot{x} + c = 0$$

其中， b, c 是常数。这个方程的解与二次方程有关：

$$x^2 + b x + c = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

根据根的情况，分情况讨论：

1. $b^2 - 4c > 0$ ，有两个实数根：

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

2. $b^2 - 4c < 0$ ，有两个复数根： $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \\ &= e^{\alpha t} [c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t] \end{aligned}$$

3. $b^2 - 4c = 0$, 有重根的情况:

$$x(t) = e^{rt}[c_1 + c_2 t]$$

§5. 非惯性参考系

牛顿三大定律仅在惯性参考系成立。因此，在经典物理中，我们应当优先选择惯性参考系来考察力学问题。但是，在很多情况下，选择惯性系并不是最方便的选择。例如，地球本身在自转，角速度为

$$\Omega_E = \frac{2\pi}{T_d} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s.}$$

当以地球-太阳为参考系时，地日系统也在旋转，角速度为

$$\Omega_S = \frac{2\pi}{T_y} = 2 \times 10^{-7} \text{ rad/s.}$$

在考虑精确测量、或者大尺度物理效应时，这些效应会显示出来。

a. 平动加速参考系

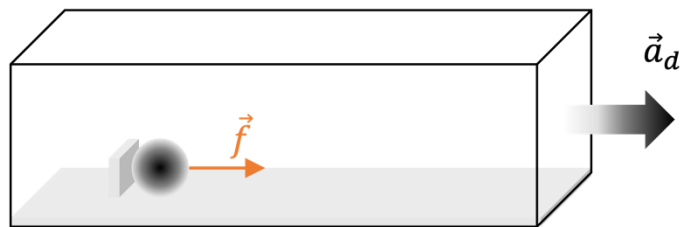
考虑两个参考系 K, K' 之间具有相对平动运动，即坐标轴仍然保持平行，但坐标原点之间的位移为 $\vec{d}$ ：

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{d}$$

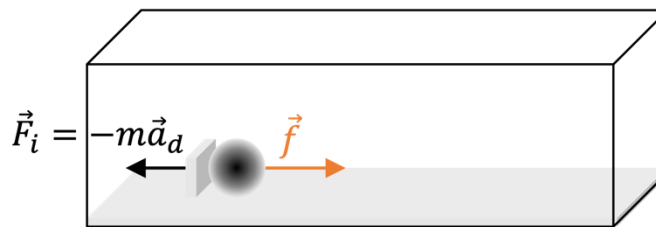
根据伽利略变换，速度与加速度的变换为，

$$\begin{cases} \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_d, \\ \vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_d \end{cases}$$

当牵连加速度 $\vec{a}_d = \ddot{\vec{d}}$ 不为零时，两个参考系内的加速度不再相等，相应的，如果参考系 K 为惯性参考系，则惯性定律和牛顿第二定律在参考系 K' 不再成立。



实验室参考系



高铁参考系

但可以引入惯性力(inertial force)又叫做虚拟力、达朗贝尔力,

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_d$$

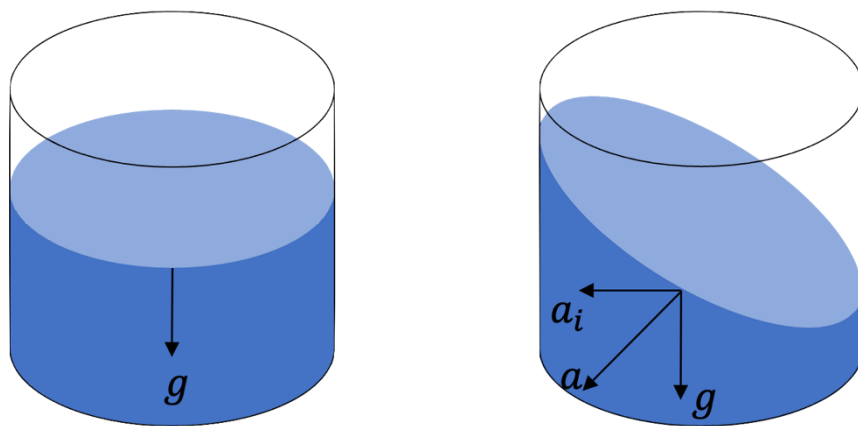
使得在非惯性参考系 K' 中, 牛顿第二定律在形式上仍然成立:

$$\vec{F}' = m\vec{a}'$$

其中, $\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_i$ 。

【例子】加速的高铁上的水杯

理想流体不能承受剪切力, 否则就会沿着剪切方向发生流动。因此在流体静止参考系, 其表面的合力一定是垂直于流体表面的。



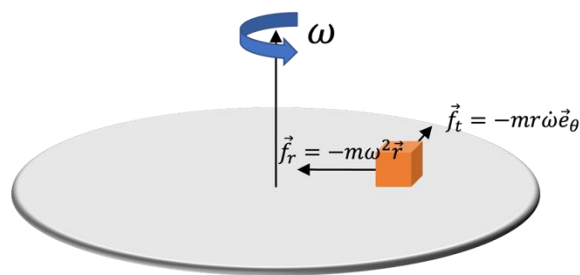
b. 转动参考系

首先，我们考虑一个简单却不失一般性的情况。 K 是个惯性参考系，参考系 K' 与 K 原点重合，且相对于 K 在转动，角速度为 ω ，转动轴为 z 方向，如图所示。

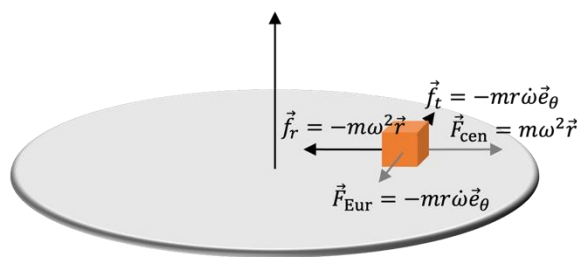
参考系 K' 包括其所有的点都在相对于 K 旋转。例如， K' 里静止的一个点 P ，在 K 观察者看来也在运动，且做匀速圆周运动，加速度为，

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

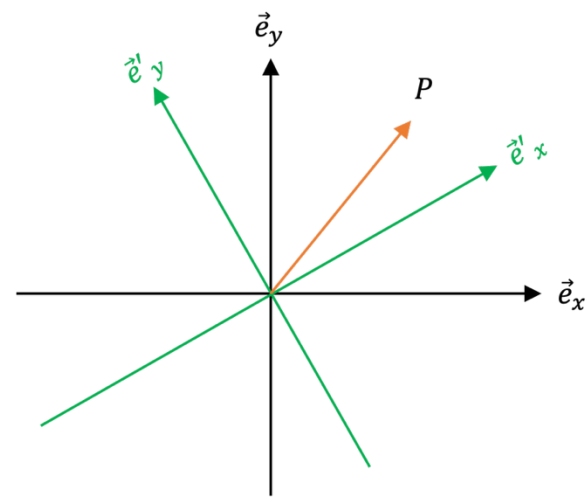
另一方面， $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_d = 0$ ，这里 $\vec{a}_d$ 为牵连加速度。不难得到， $\vec{a}_d = -\omega^2 \vec{r}$ 。类似地，可以引入惯性力， $\vec{F}_i = -m\vec{a}_d = m\omega^2 \vec{r}$ 叫做(惯性)离心力。



实验室参考系



转盘参考系



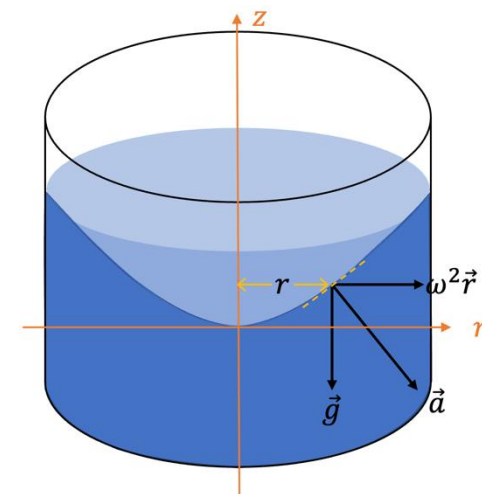
换句话说，在一个匀速旋转参考系 K' 静止的质点，会感受到一个离心惯性力。这个力需要由额外的力（如摩擦力、支撑力）来平衡。从 K 来看，质点 P 在做匀速圆周运动，而这个额外的平衡力实际上提供了向心加速度。

【例子】牛顿水桶实验。考虑一桶水以角速度 ω 旋转，求桶内水面的形状。已知水桶的半径为 R ，桶内的水足够深。

解：在水桶参考系，有离心力和重力。液体可以承受压力但不能承受剪切力，因此平衡状态下，水面与合力的方向垂直。因此，

$$\frac{dz}{dr} = \tan \alpha = \frac{\omega^2 r}{g}$$
$$\Rightarrow z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

因此液面形状为抛物线。



c. 一般转动参考系

如果参考系是加速转动的，则相对于参考系静止的质点相对于实验室参考系还会多一个角向加速度： $\vec{a}_d = r\omega\vec{e}_\theta$ 。这个加速度仍需要外力还提供。在旋转参考系中，为了保持力平衡，需要引入另外一个惯性力， $\vec{F}_i = -r\omega\vec{e}_\theta$ 。这个力叫做欧拉力。

我们下面考虑最一般的情形，但仍假设非惯性参考系与惯性参考系没有平动且原点重合。在惯性参考系 K 中，质点的加速度为，

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

类似地，在非参考系 K' 中，质点加速度的形式为，

$$\vec{a}' = (\ddot{r}' - r'\dot{\theta}'^2)\vec{e}'_r + (r'\ddot{\theta}' + 2\dot{r}'\dot{\theta}')\vec{e}'_\theta$$

两个参考系之间的坐标根据伽利略变换为，

$$\begin{cases} t' = t \\ \vec{r}' = \vec{r} \\ \theta' = \theta - \Theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r' = r \\ \vec{e}'_r = \vec{e}_r \\ \vec{e}'_\theta = \vec{e}_\theta \\ \dot{\theta}' = \dot{\theta} - \omega \end{cases} \quad (\omega = \dot{\Theta})$$

代入表达式可以得到,

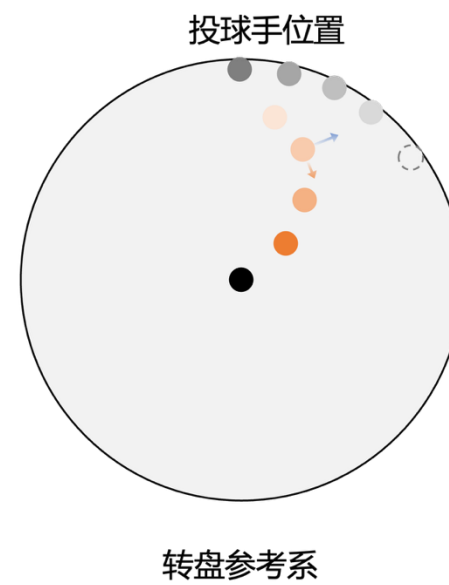
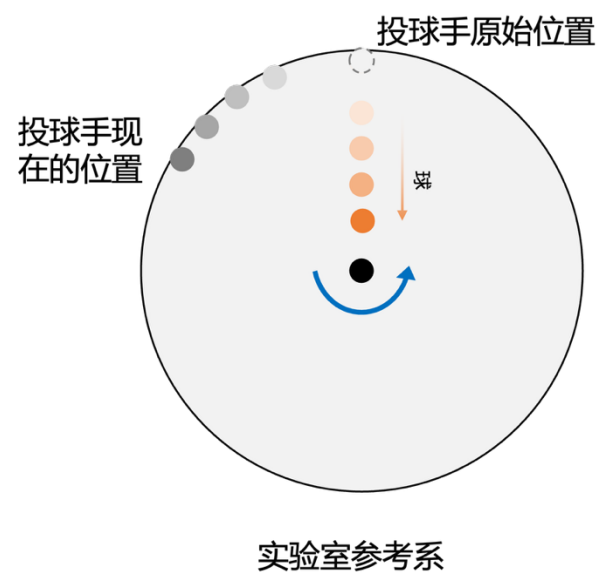
$$\begin{aligned} \vec{a}_d &= \vec{a} - \vec{a}' \\ &= -\omega^2 \vec{r}' + 2\omega \dot{r}' \vec{e}'_\theta - 2\omega \dot{\theta}' \vec{e}'_r + r' \dot{\omega} \vec{e}'_\theta \\ &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' \end{aligned}$$

其中, $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ 。相应的惯性力为,

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_d = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'$$

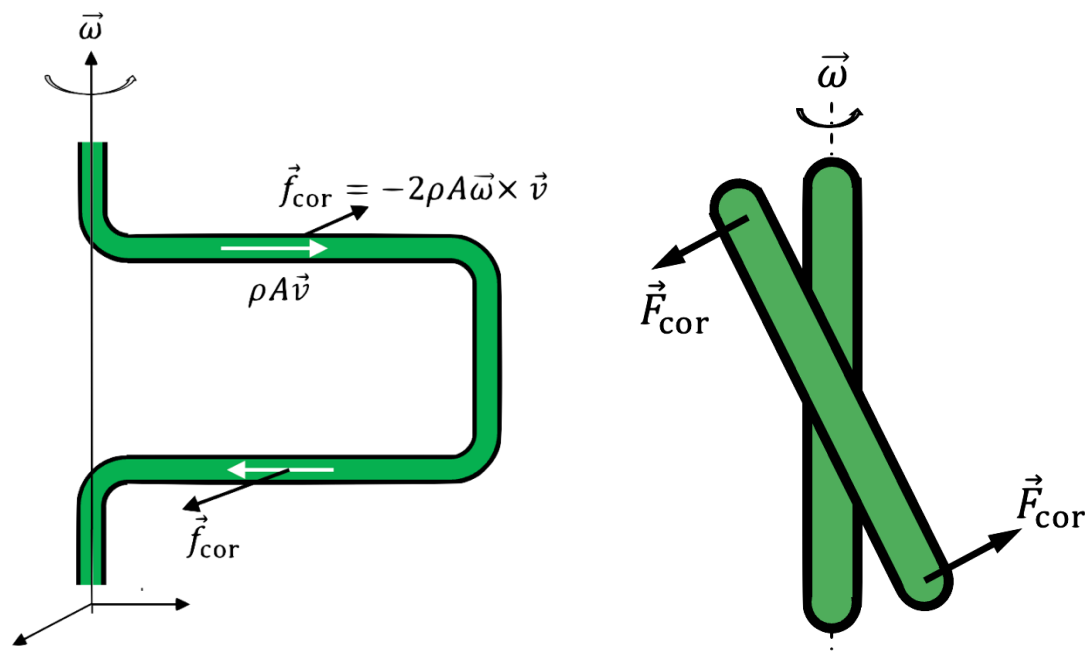
其中, $\vec{F}_{cen} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m\omega^2 \vec{r}$ 是离心力 (centrifugal force); $\vec{F}_{Eur} = -m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$ 叫做欧拉力 (Euler force); $\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$ 叫做科里奥利力 (Coriolis force)。

【例子】转盘上的抛球手



【例子】科里奥利流量计 (Coriolis mass flowmeter)

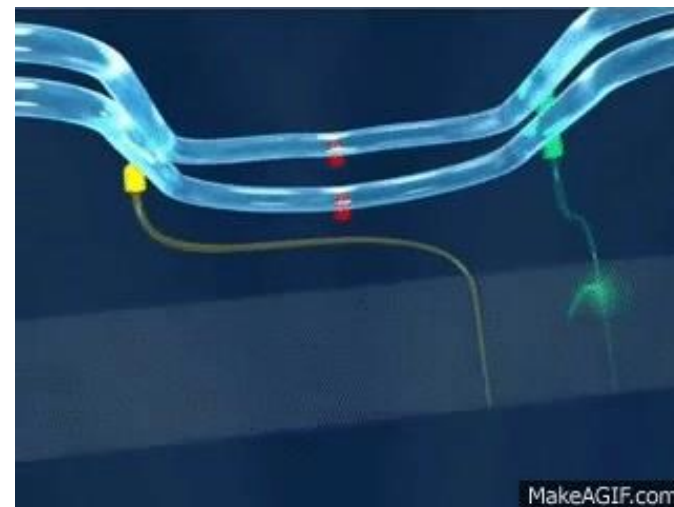
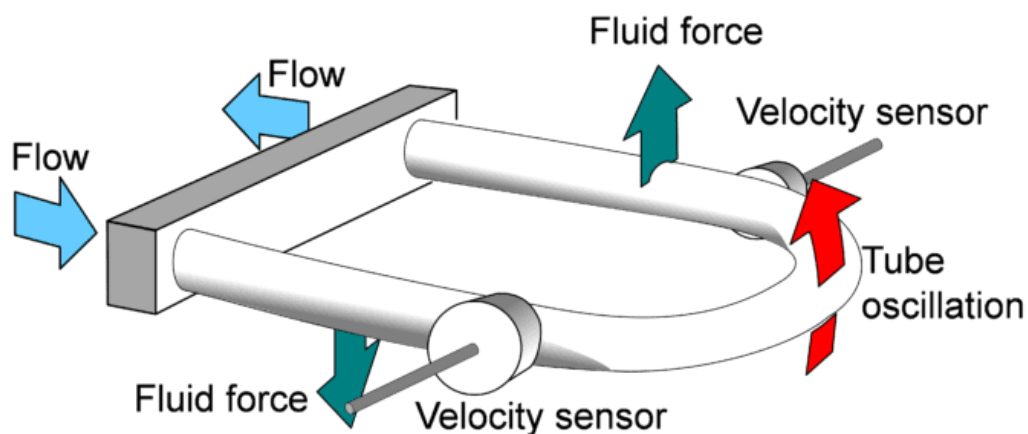
科里奥利流量计为一段U形弯管，接到待测流体上。这段弯管在驱动力的作用下绕中心轴转动，角速度为 ω 。在弯管静止的参考系，流体受到一对科里奥利力的作用，因此以反作用会施加到弯管上。这对反作用力会使得弯管略微弯曲。而这一效应可以通过探测器检测出来。弯管弯曲程度与单位时间内通过横截面的质量有关，从而可以用来测量流过流量计的质量流量 $q = \rho A v$ 。



注意，现代科里奥利流量计并没有一个可旋转的部件。原因是科里奥利力并不要求 ω 为常数（即匀速圆周运动）。现代科里奥利流量计将其取为三角函数。这可以通过激发U形管的本征模来实现。科里奥利力策动的振幅 ω 成正比，另一方面， $\omega = \dot{\theta}$ 与U形管的本征振动振幅差 $\pi/2$ 的相位，因此，策动力与U形管的本征振动会差一个相位，这个相位正比于流体质量流量，即

$$\tan \varphi = \frac{Kq}{f}$$

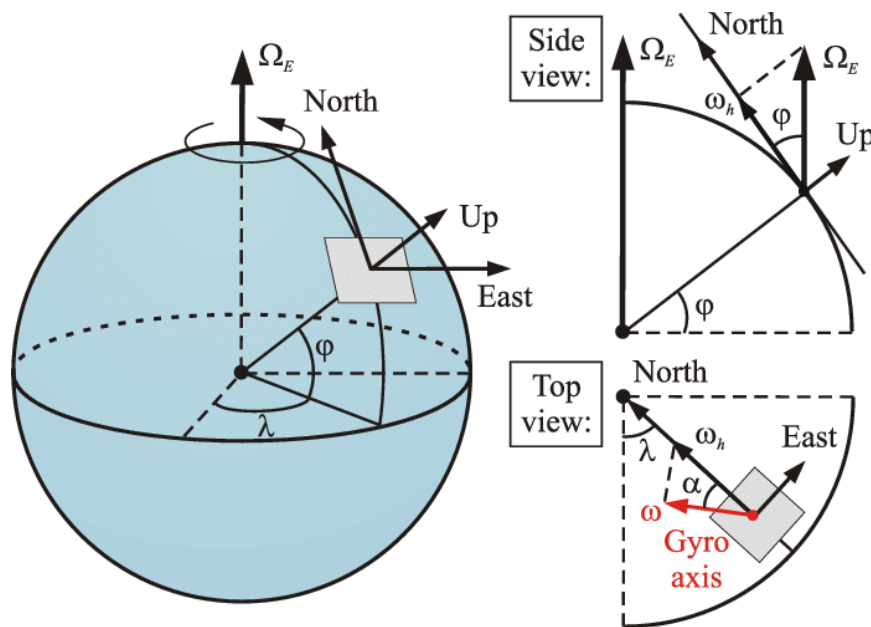
其中， f 是振动频率。 K 是U形管的弹簧常数。这个相位很容易通过电信号差分得到。因此，科里奥利流量计可以高精度获得流体的质量流量。



d. 地球上的非惯性力

地球由于自旋，也是一个非惯性参考系。因此，以地球为参考系时，需要考虑离心力和科里奥利力。这两个力会带来非常重要的效应。

在讨论这些效应之前，我们首先要能够将球坐标 (r, θ, ϕ) 中的矢量与地球表面的坐标系中的矢量互相转化，如图所示。



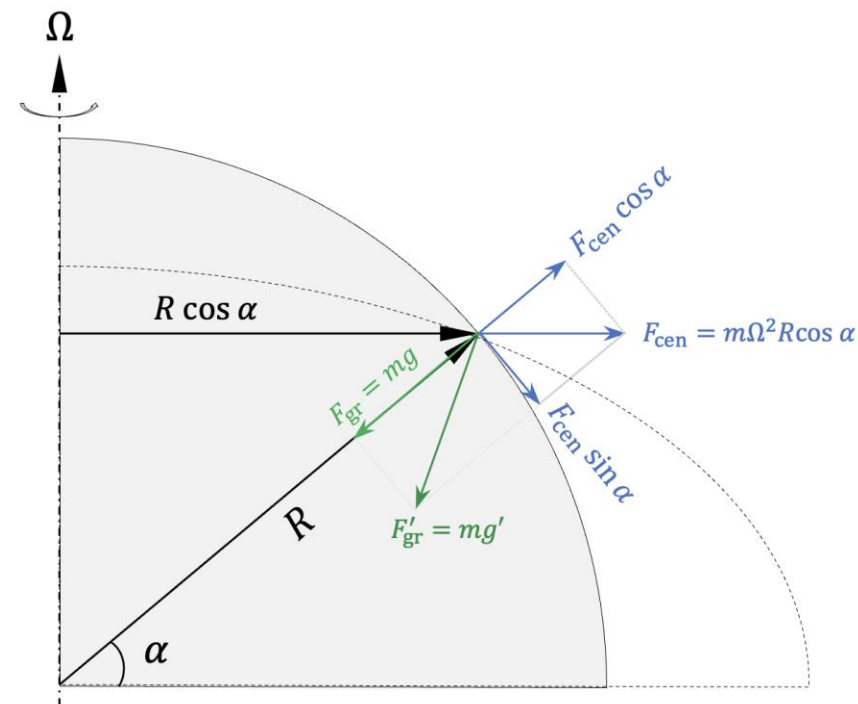
离心力： 根据地球的自转角速度： $\Omega_E = \frac{2\pi}{T_d} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ ，以及地球半径 $R \approx 6400 \text{ km}$ ，地球表面的离心力 $a_\Omega = \Omega_E^2 R \approx 3 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ 。该离心力导致地球表面测量得到的重力加速度随着纬度改变而改变，且其方向也不完全指向地心：

$$\begin{aligned} g' &= \sqrt{(g - \Omega^2 R \cos \alpha)^2 + (\Omega^2 R \sin \alpha)^2} \\ &= \sqrt{g^2 + \Omega^4 R^2 \cos^2 \alpha - 2g\Omega^2 R \cos^2 \alpha} \\ &\approx g - \Omega^2 R \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

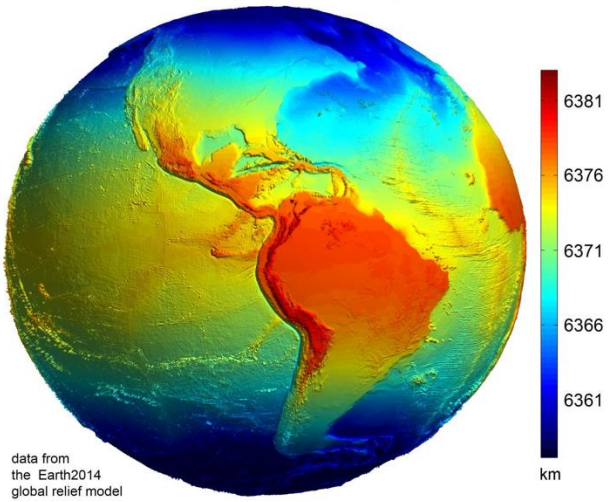
其中， α 是当地的纬度。

【例子】赤道隆起（equatorial bulge - 赤道地球直径比两极直径大43 km）。

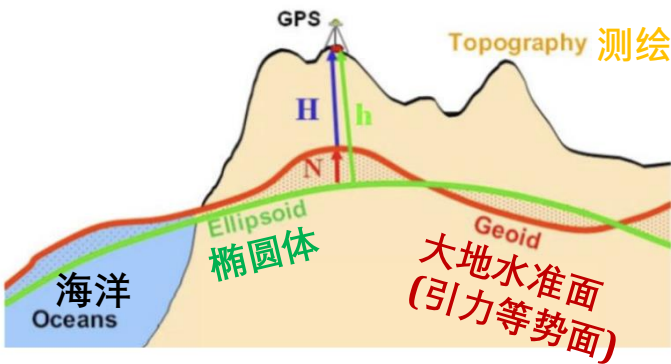
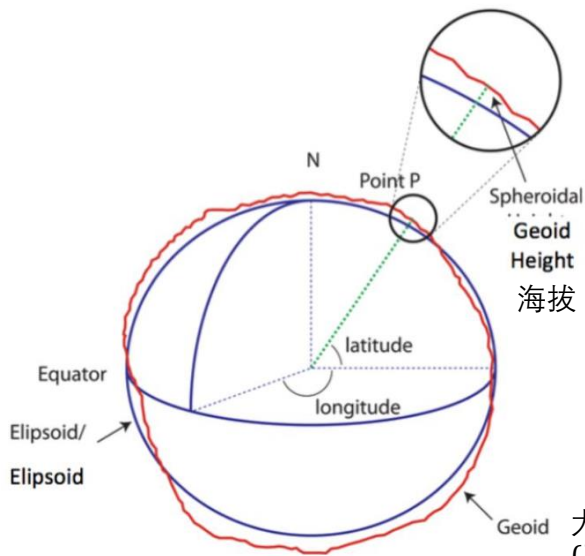
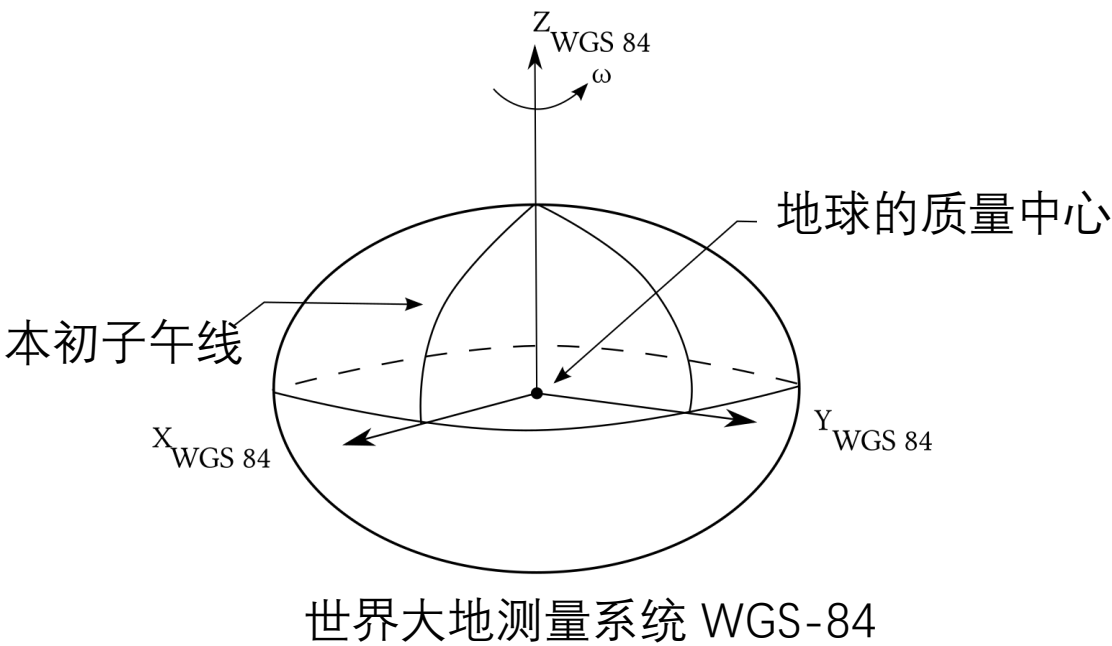
【思考】快速旋转的液态星球的形状是什么样子的？



地球的形状（相对于地心）



受离心力的影响，地球的形状并不是一个理想的球形。世界大地测量系统WGS-84将地球定义为一个扁椭球体，其半长轴为 $a = 6378137.0\text{ m}$ ，扁率为 $f = 1/298.257223563$ ，相应的半短轴为 $b \approx 6356752.3\text{ m}$ 。这一系统是现代地图学、大地测量学和导航（包括全球定位系统GPS）的大地测量系统标准。地球的另一测量基准基于引力等势面，即所谓海拔。



科里奥利力：科里奥利力导致地表运动的物体受到一个平行于地面且垂直于运动方向的偏向力。根据下图，考虑两种情形。

第一：质点沿着东西方向运动，平行于地面的偏向力为科里奥利力的分量：

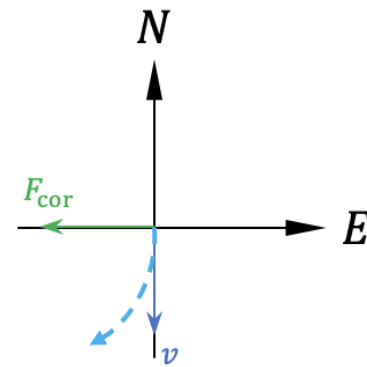
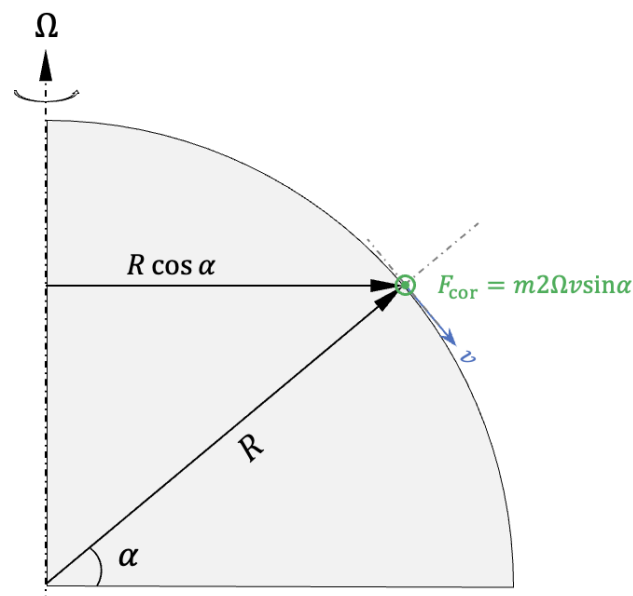
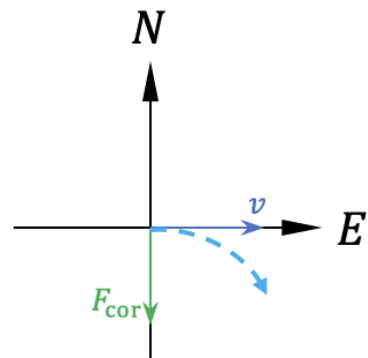
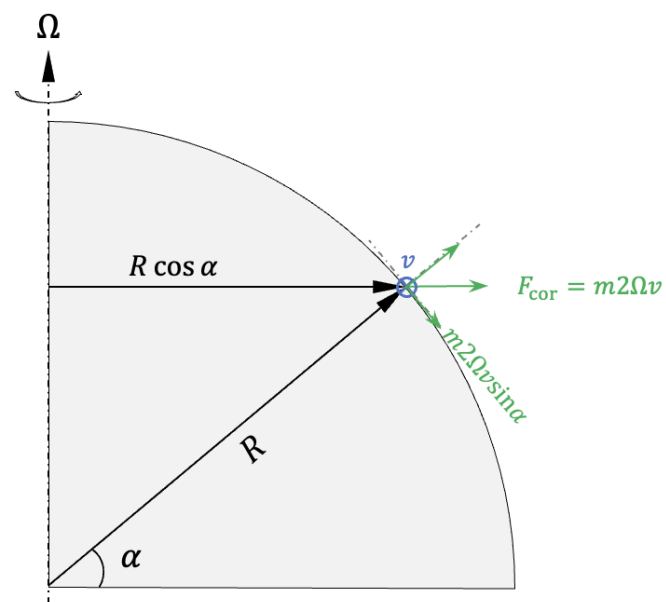
$$F = F_{\text{cor}} \sin \alpha = 2m\Omega v \sin \alpha$$

第二：质点沿着南北方向运动，科里奥利力平行于地面：

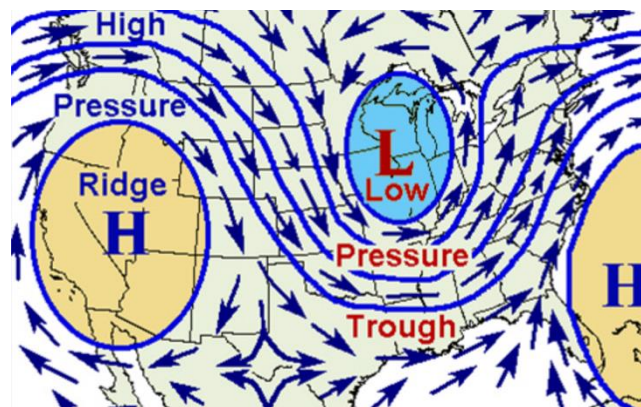
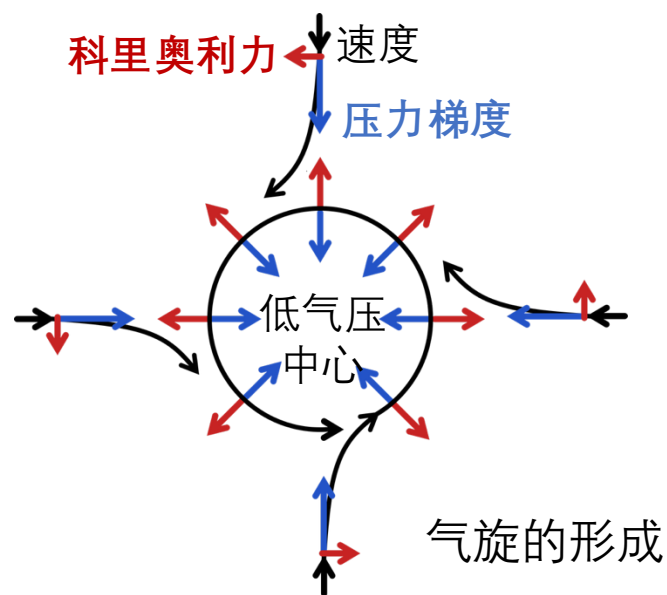
$$F = F_{\text{cor}} = 2m\Omega v \sin \alpha$$

总之，地表物体所受到的平行于地面且垂直于运动速度的偏向力，大小为

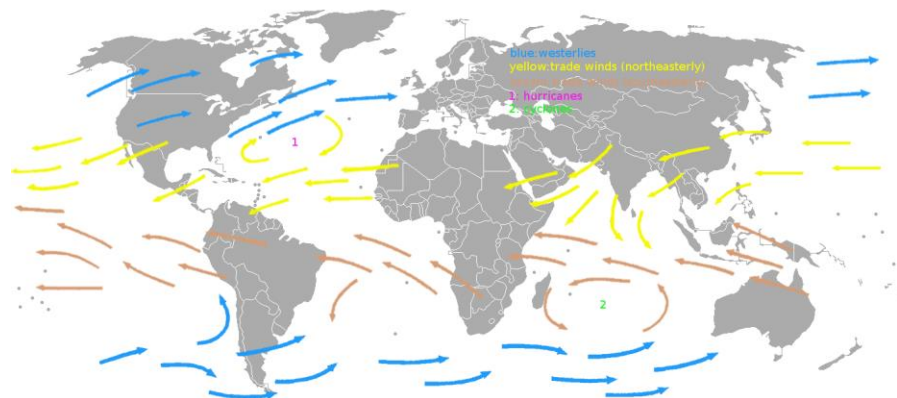
$$F = 2m\Omega v \sin \alpha$$



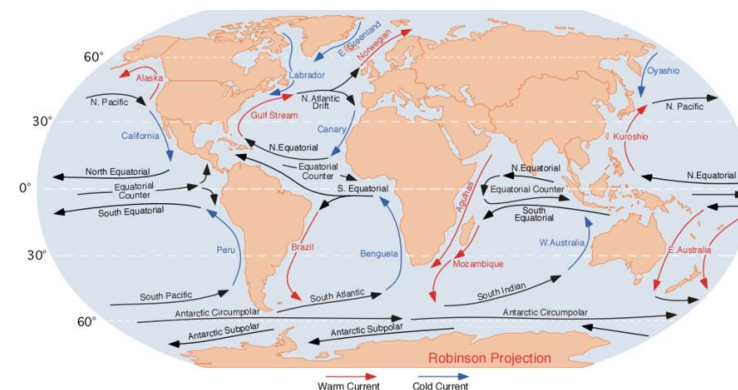
科里奥利力导致气旋的形成、盛行风带（信风、季风）和洋流的形成。



气象图：在压力梯度和科里奥利力的作用下，空气沿着等压线运动形成风



全球空气循环受科里奥利力的影响形成



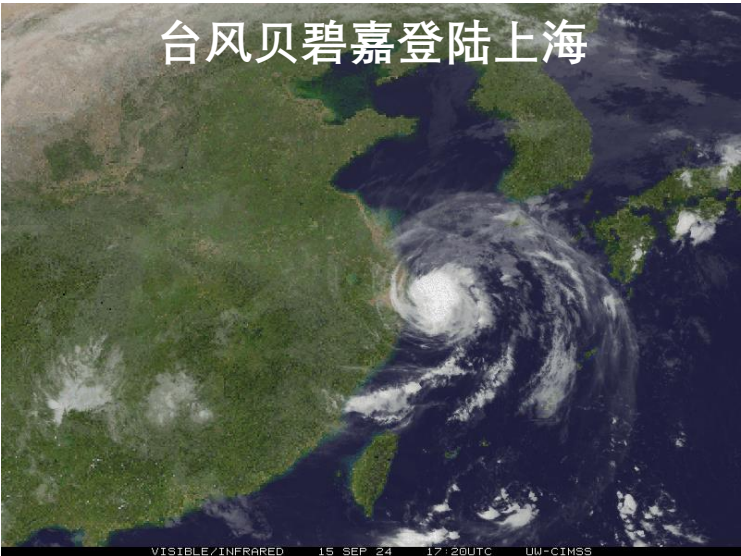
全球洋流的形成受科里奥利力的影响

我们来分析一下，哪些现象科里奥利力起作用呢？罗斯比数(Rossby number)定义为向心力与科里奥利力的比，

$$Ro = \frac{v^2/r}{2\Omega_E v \sin \alpha} = \frac{v}{2\Omega_E r \sin \alpha}.$$

如果一个现象的罗斯比数小于等于1，则向心力可以由科里奥利力提供；反之如果其罗斯比数远大于1，说明科里奥利力无法平衡所需要的向心力，因此不是其主导机制。可见地球上大范围的现象，如台风、季风、洋流一般受到科里奥利力的影响。龙卷风、水槽中的涡流等局部现象受科里奥利力的影响很小。且纬度越低受到科里奥利力的影响越小。

现象	速度	半径	$Ro = v/(2\Omega_E \sin \alpha r)$
龙卷风	50 m/s	100 m	5000
台风	30 m/s	100-1000 km	0.1-10
风	10 m/s	100 km	1
洋流	10 cm/s	1 km	1
水槽中的涡旋	1 cm/s	10 cm	1000

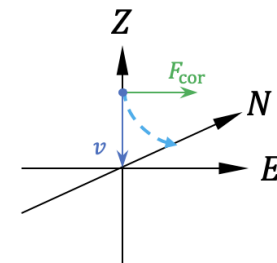
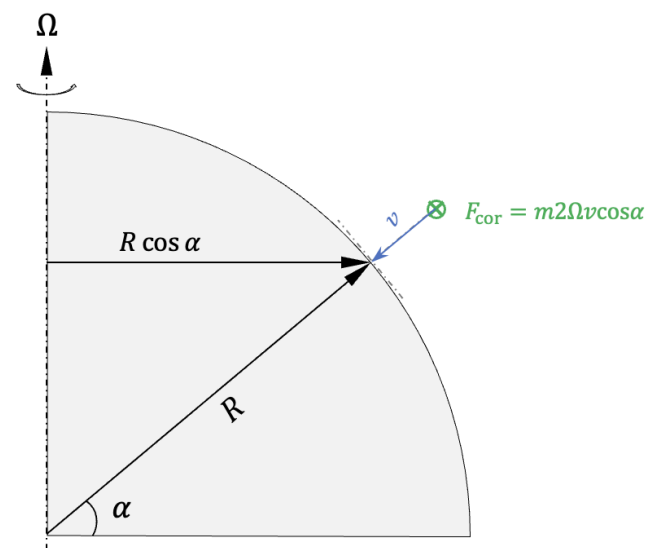


【例子】 受科里奥利力的影响，地球表面的自由落体的落点会偏东。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -2\Omega \cos \alpha \dot{z} \approx 2\Omega \cos \alpha g t$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{3} \Omega g t^3 \cos \alpha = \frac{1}{3} \Omega g \left(\frac{2h}{g} \right)^{\frac{3}{2}}$$

赤道附近百米高空下落：偏离2厘米。赤道附近5000km高空下落(如导弹)：偏离250 km，因此洲际导弹必须要考虑科里奥利效应。



【例子】傅科摆（Foucault pendulum）。单摆的摆面会发生缓慢旋转，其中悬挂在北极的摆，24小时摆面旋转一圈。其他纬度呢？以平衡位置为中心建立极坐标，

$$\begin{cases} r = r_0 \sin \omega t \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -2\Omega \sin \alpha \dot{r} \end{cases}$$

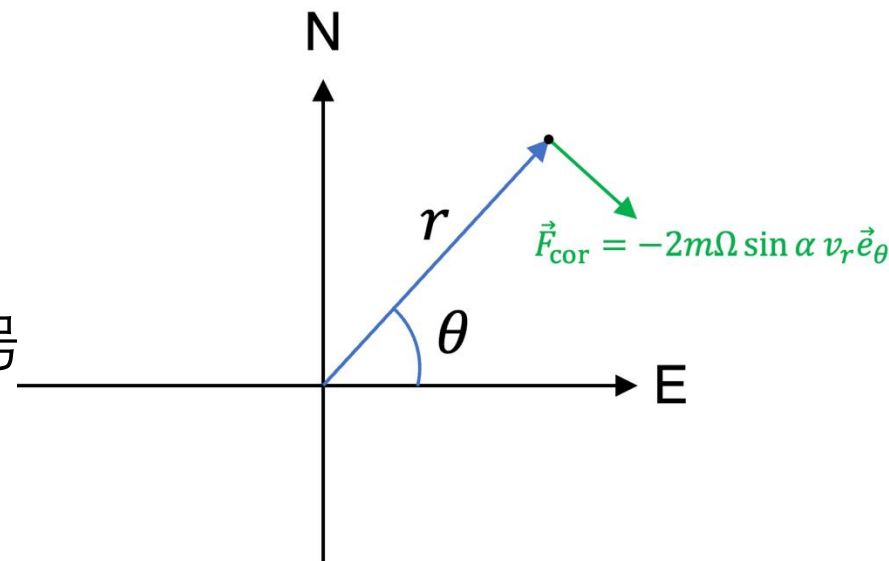
其中， $r(t)$ 为单摆的振幅， θ 描述单摆摆平面的角度。注意到，

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta})$$

上式子可以写出，

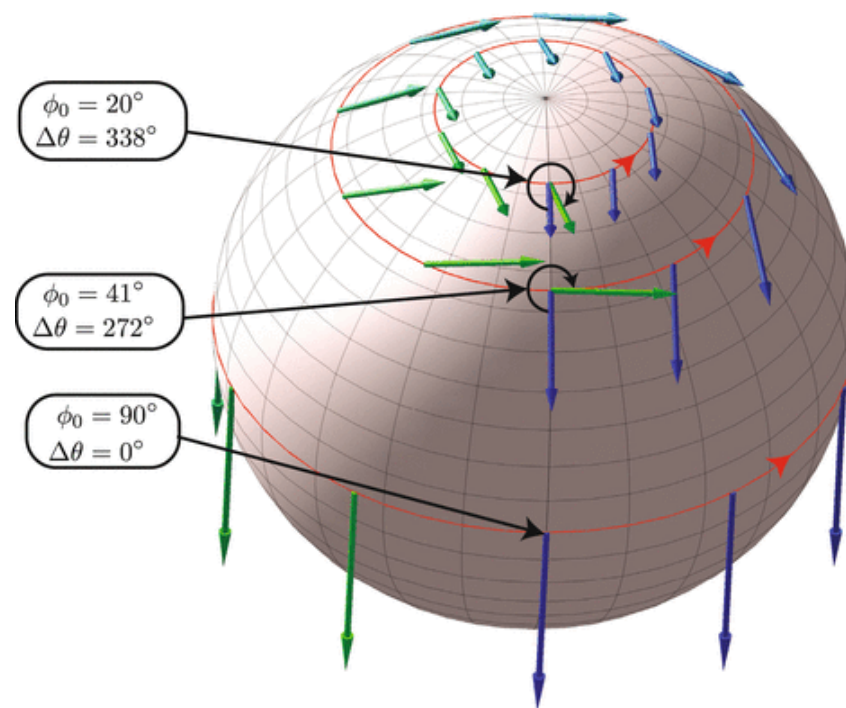
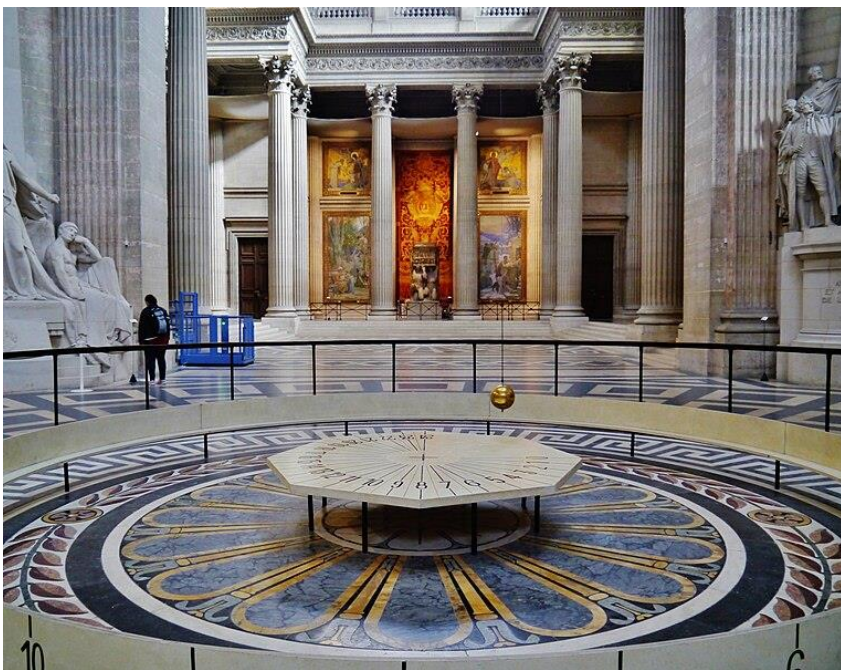
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) &= -\Omega \sin \alpha \frac{dr^2}{dt} \\ \Rightarrow \dot{\theta} &= -\Omega \sin \alpha \end{aligned}$$

因此，摆面将会以 $-\Omega \sin \alpha$ 的角速度进动，这里的负号表示旋转方向与地球自旋方向相反。



悬挂在北极的摆，24小时摆面旋转一圈，而悬挂在赤道的摆则不会发生进动。傅科摆的进动周期与动力学无关，该如何来理解这一结论呢？

由于惯性，摆面所定义的取向矢量在空间相对于远处恒星取向保持不变。矢量沿着球面纬线平行移动一圈以后，与原始矢量之间的夹角度为： $\Delta\theta = \Omega \sin\alpha T_d$ ，因此进动角速度为， $\dot{\theta} = \frac{\Delta\theta}{T_d} = \Omega \sin\alpha$ 。



e. 潮汐

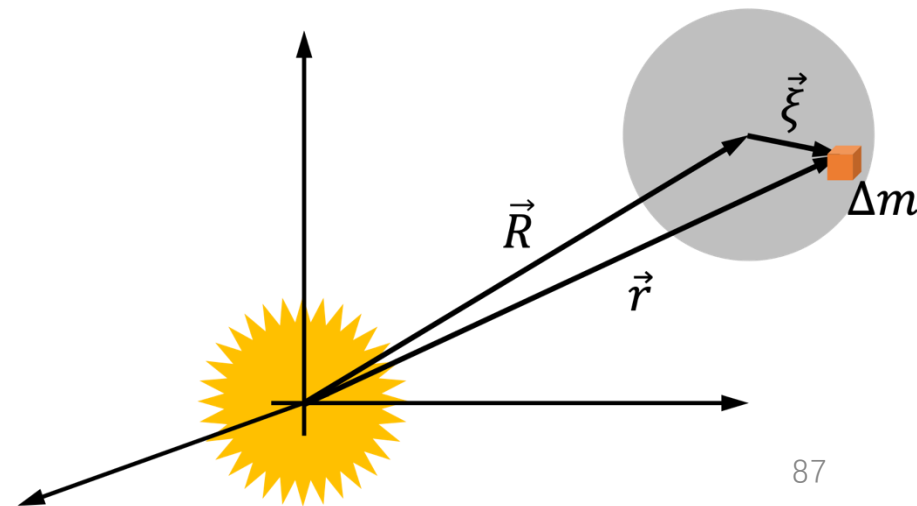
根据壳层定理，两个球之间的引力等价于位于球心的等质量质点之间的引力。一个很自然的问题是，是否在引力场中，球与质点**完全等价**？答案是否定的。根据这一点，引力与惯性力无法完全抵消，这便是潮汐的成因。

如图考虑地球在太阳的引力作用下做圆周运动，其加速度根据壳层定理为，

$$\vec{a}_d = -\frac{GM}{R^3} \vec{R}$$

其中 $\vec{R}$ 是日心到地心的相对位置矢量。当以地球为参考系时，质量为 Δm 的物体受到惯性力为，

$$\vec{F}_d = -\Delta m \vec{a}_d$$



考虑地球上相对于地心位置矢量为 $\vec{\xi}$ 处的一个物体 Δm ，其受到的太阳的引力为，

$$\vec{F}_{gr} = -\frac{GM\Delta m}{r^3}\vec{r} = -\frac{GM\Delta m}{|\vec{R} + \vec{\xi}|^3}(\vec{R} + \vec{\xi})$$

以地球为参考系，物体所受的合力为，

$$\vec{F}_{td} = -\frac{GM\Delta m}{|\vec{R} + \vec{\xi}|^3}(\vec{R} + \vec{\xi}) + \frac{GM\Delta m}{R^3}\vec{R} \neq 0$$

这个合力并不为零，其残余的力叫做潮汐力，又叫做引潮力。由于 $\xi \ll R$ ，可以对潮汐力进行泰勒展开并保留到领头项为，

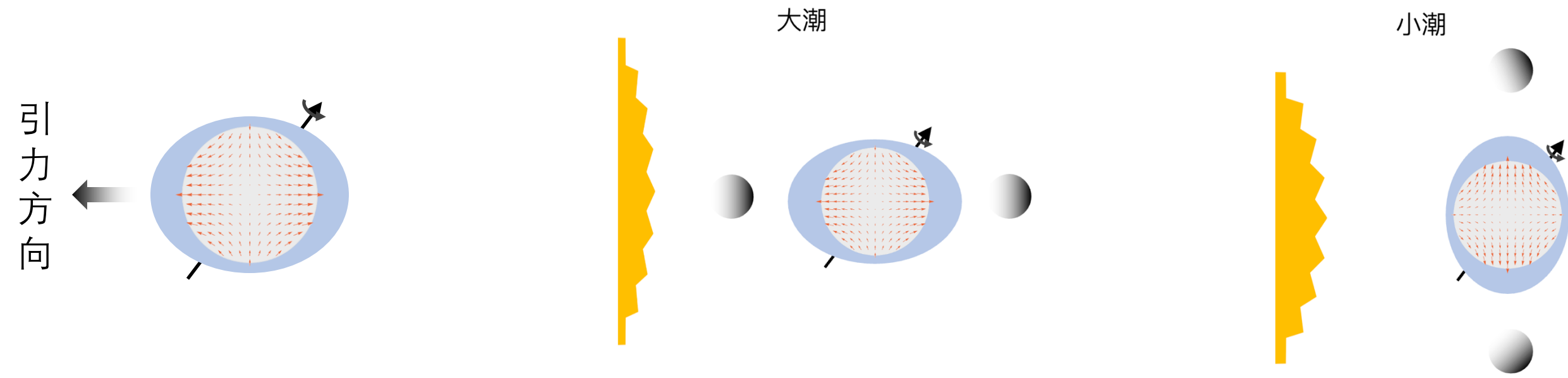
$$\vec{F}_{td} \approx -\frac{GM\Delta m}{R^3}[\vec{\xi} - 3(\hat{R} \cdot \vec{\xi})\hat{R}]$$

潮汐力需要由其他力来平衡，如压力、张力，作用到海水上会使得海水隆起，起，在地球自转作用下形成潮汐。

地球上的潮汐主要受太阳和月球引力的影响。比较月球与太阳的影响，由于潮汐力 $F_{td} \propto M/R^3$,

$$\frac{F_{moon}}{F_{sun}} = \frac{M_{moon}}{R_{moon}^3} : \frac{M_{sun}}{R_{sun}^3} = 2.2:1$$

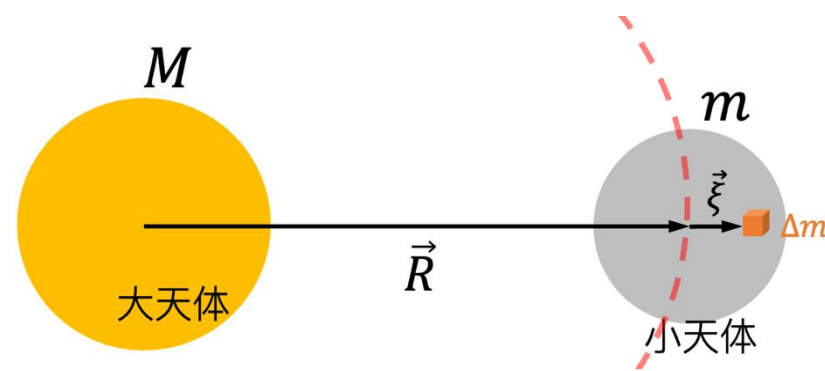
因此，月球影响更大，因此潮汐与月相有关。但根据地、日、月之间的相对位置，潮汐有大潮和小潮之分。



【例子】洛希极限 (Roche limit)：对于较大的天体，其作用在附近小天体（卫星、小行星）的潮汐力主要由这些小天体自身的引力来平衡，当受到潮汐力超过其自身引力时，这些小天体将会被撕碎。

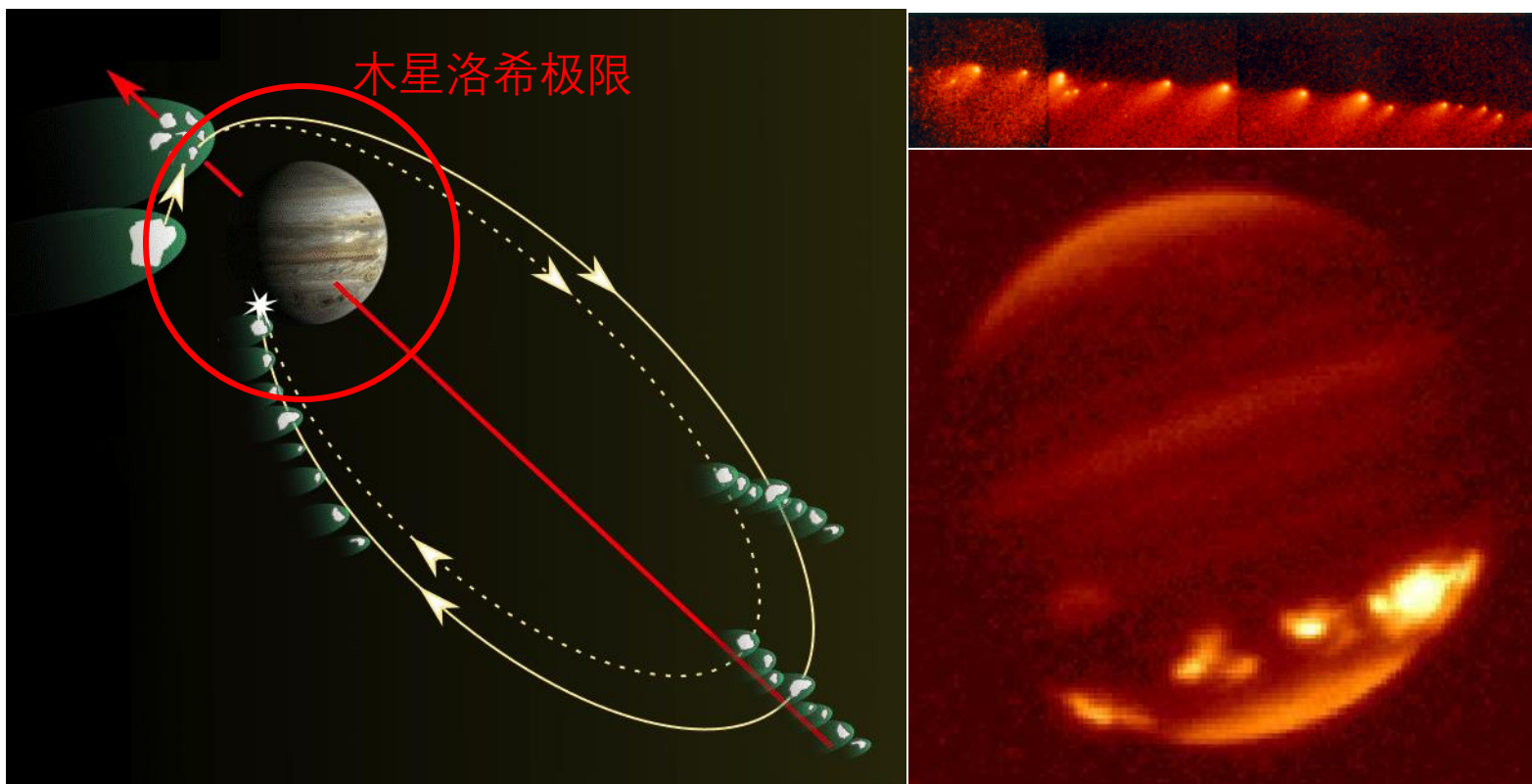
$$F_{td} \approx \frac{2GM\Delta m}{R^3} \xi \gtrsim \frac{Gm\Delta m}{\xi^2}$$
$$\Rightarrow R^3 \lesssim 2R_M^3 \frac{\rho_M}{\rho_m}$$

其中， R 为两个天体之间的距离。 R_M 为大天体的半径。即，当两个天体之间的距离 R 小于 $1.26 R_M \left[\frac{\rho_M}{\rho_m} \right]^{\frac{1}{3}}$ 时，小天体会被大天体的潮汐力所撕碎。《流浪地球》中展示了这样的情形。影片假设月球停止绕地球转动，月球撞向地球，进入地球洛希极限(9600 km)以后被潮汐力所撕碎。



休梅克－利维9号彗星与木星相撞事件：

- 1992年7月，彗星到达木星洛希极限，被撕裂为21个碎片；
- 1994年7月，彗星与木星相撞



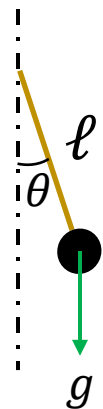
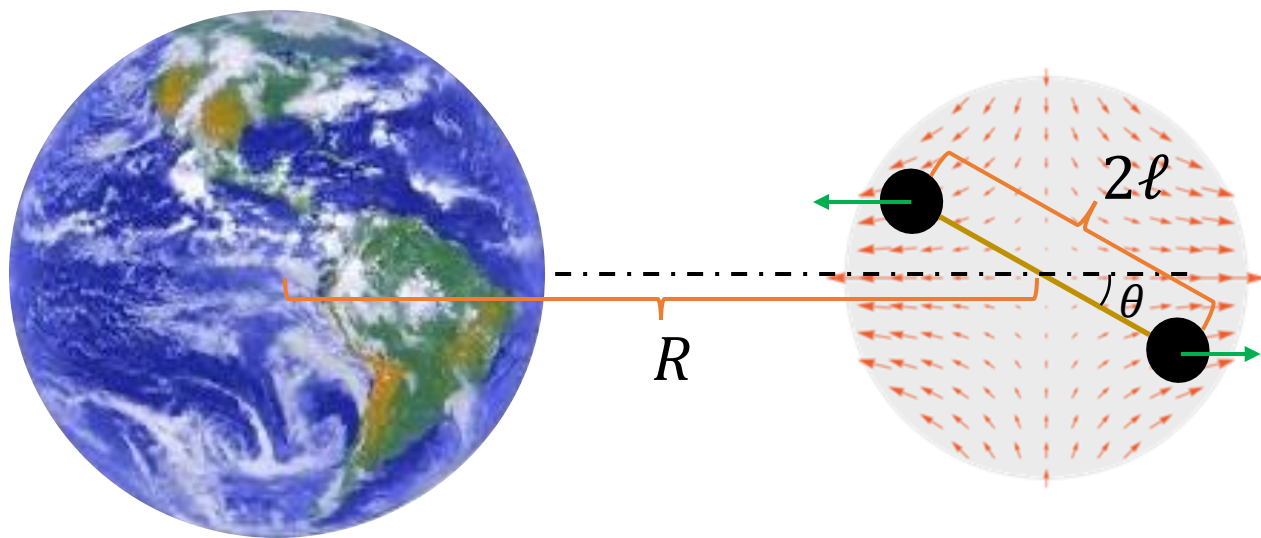
【例子】潮汐摆：考虑地球附近在引力作用下运动的有限大小的物体（如卫星、空间站）。可以将其简化为如图所示的两个质点，每个质点质量为 m ，中间由长度为 2ℓ 的轻杆相连。每个质点所受到的潮汐力为

$$F = \frac{2GMm}{R^3} \ell = mg_{\text{eff}}$$

当系统偏离平衡位置 θ 时，这个力类似单摆的恢复力，因此系统将在平衡位置附近做摆动，其周期与系统大小 2ℓ 无关，

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g_{\text{eff}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{2GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{2g}} \approx 1\text{小时}$$

$$\vec{F}_{\text{tidal}} \approx -\frac{GM\Delta m}{R^3} [\vec{\xi} - 3(\hat{R} \cdot \vec{\xi})\hat{R}]$$



§6. 伽利略相对性原理

在非惯性系，即使没有外力作用，质点的运动状态也会发生改变。所有这些都与参考系的牵连加速度有关。例如转动参考系（地球），我们可以通过测量离心力（水桶实验）和科里奥利力来测量参考系的转动角速度 ω 。一个问题是，我们是否能够测量一个参考系的绝对速度。我们来只需要考虑惯性系。

【例子】高铁平稳行驶时，你吃饭、行走、做事能否感知到高铁在高速行驶？

【例子】地球虽然有微小的角速度，但地表的线速度很大 ~ 500 米/秒，真正是「坐地日行八万里」《毛泽东诗词》。我们能否做实验测量到这一点？

伽利略在其著作《两个世界的对话》中指出，任何力学实验无法区分所在惯性参考系的绝对速度。这一论断被称为伽利略相对性原理。这一原理表明，相对于地面运动的观察者测量到的物理规律与相对地面静止的观察者是完全相同的。伽利略的力学实验是在地球为参考系建立的。

参考系 K 和 K' 之间的坐标由伽利略变换给出：

$$\begin{cases} t' = t \\ \vec{r}' = \vec{r} + \vec{d}_0 + \vec{u}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta t' = \Delta t \\ \Delta \vec{r}' = \Delta \vec{r} \\ \vec{a}' = \vec{a} \end{cases}$$

考察牛顿第一定律：在 K 中做匀速直线运动的质点，在 K' 的观察者看来仍然做匀速直线运动。因此在伽利略变换下，牛顿第一定律仍然是成立的。

现考虑两个参考系之间的动力学规律。设在 K 中，牛顿第二定律成立为，

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

在 K' 中，由于加速度的变换 $\vec{a}' = \vec{a}$ ，

$$m\vec{a}' = m\vec{a} = \vec{F}$$

现在的问题是，力的变换是什么？如果 $\vec{F}' = \vec{F}$ ，则牛顿第二定律在 K' 中仍然成立。考虑引力，

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

仅依赖于两个质点之间的相对坐标 $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ 。根据伽利略变换， $\vec{r}'_{12} = \vec{r}_{12}$ ， $\vec{r}_{12}$ ，因此引力是不变的。

对于粒子之间的一般基本相互作用来说，其相互作用力与粒子之间的相对位置 $\Delta\vec{r}$ 或相对速度 $\Delta\vec{v}$ 有关。而在伽利略变换下，相对位置 $\Delta\vec{r}$ 和时间间隔 Δt 以及相对速度是不变的，因此，只要包含所有需要考察的质点，即考虑一个闭合

系统（孤立系统），力在伽利略变换下也是不变的。换句话说，孤立系统不同参考系得到的力也是相同的。当然，我们无法穷举所有力的情形。但我们可以假设，闭合系统的牛顿定律在伽利略变换下是不变的，也就是说，牛顿定律在所有惯性参考系都是成立的。这就是**伽利略相对论性原理**。

伽利略相对性原理告诉我们，相互匀速运动的参考系是动力学意义上等价的。我们把所有动力学意义上等价的参考系（即所有两两之间相互匀速运动的参考系）构成的集合叫做动力学意义上的参考系等价类。

由于在任意两个惯性参考系中的动力学规律都是相同的，因此在其中做相同的实验，得到的结果是完全相同的。这说明，我们无法通过力学实验区分不同的惯性参考系（比如获得所在的惯性参考系的绝对速度）。我们只能得到不同惯性参考系之间的相对速度。

牛顿曾认为存在一个绝对静止的参考系。所有惯性系都是相对于这一参考系做匀速运动的参考系。但我们看到，根据伽利略相对性原理，这样的绝对静止的参考系是无法通过力学测量得到的。

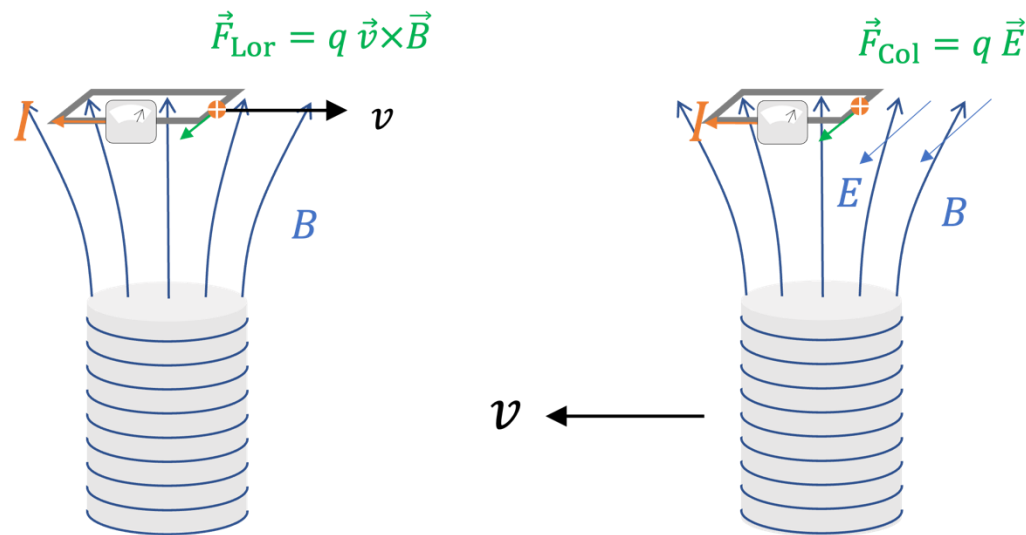
不过，似乎有一个例外，就是洛伦兹力（带电粒子在磁场中受到的力）

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

在伽利略变换下，

$$\begin{aligned}\vec{F}' &= q'\vec{v}' \times \vec{B}' \\ &= q(\vec{v} + \vec{u}) \times \vec{B} \\ &= \vec{F} + q\vec{u} \times \vec{B}\end{aligned}$$

其中， $\vec{u}$ 是两个参考系之间的相对速度。两个参考系之间的磁场 $\vec{B}' = \vec{B}$ 。这似乎表明，我们可以通过电磁学的实验来确定惯性系的绝对速度。问题在哪里？参看下面的例子：



螺线管与导线圈相对运动，安培表上的读数应该是一样的。这是因为，在螺线管参考系，导线切割磁力线，电荷受到洛伦兹力， $\vec{F} = \vec{F}_{Lor} = q\vec{v} \times \vec{B}$ 。在导线参考系，磁场运动产生一个感生电场 $\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}'$ ，因此电荷受到电场力： $\vec{F} = \vec{F}_{Col} = q\vec{E}' = q\vec{v} \times \vec{B}'$ 。根据伽利略相对性原理，在伽利略变换下电磁场的变换遵循，

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \\ \vec{B}' = \vec{B} \end{cases}$$

从而广义洛伦兹力 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ 是不变的。因此我们可以将伽利略相对性原理推广到电磁学，并进一步推广到所有物理规律：任何物理规律在所有惯性参考系中的形式是相同的（强形式的伽利略相对性原理）。现代物理将相对性原理作为更加基础的出发点。

§7. 动力学与时空

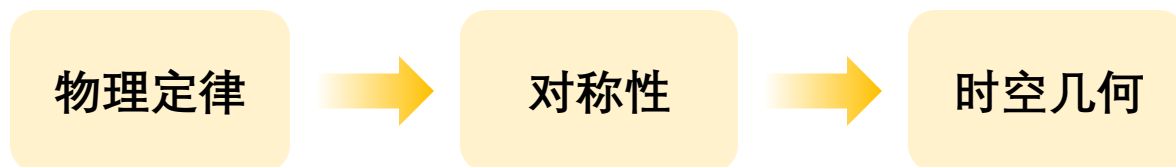
时间、空间是描述物体运动和动力学的基础，它们的本质是什么？

- 参考系
- 一种观点认为，时空是独立于物质的客观存在，恰如舞台之于演员
- 另一种观点认为，时间、空间不是独立的实体，时间只不过是事件发生的先后次序，空间只不过是物体之间的相对位置——一切运动都是相对的。例如，一处话剧由演员组成，而非舞台

根据伽利略建立的科学方法，我们不问时间、空间的本质，转而研究时间、空间的性质

- 时间、空间的性质与物理定律的性质息息相关

a. 对称性与时空几何



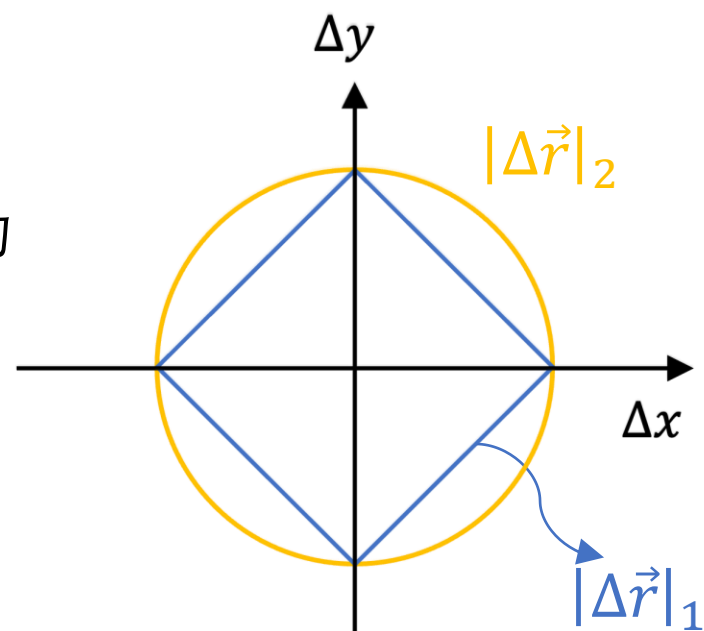
牛顿第二定律在空间转动变换下不变，要求空间距离定义为

$$|\Delta\vec{r}|_2 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

其他距离的定义，如

$$|\Delta\vec{r}|_1 = |\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|$$

则无法保持物理定律的空间转动不变性



$$\begin{cases} x' = \cos\theta x + \sin\theta y \\ y' = -\sin\theta x + \cos\theta y \end{cases}$$

a. 对称性与时空几何

物理定律

对称性

时空几何

例子:

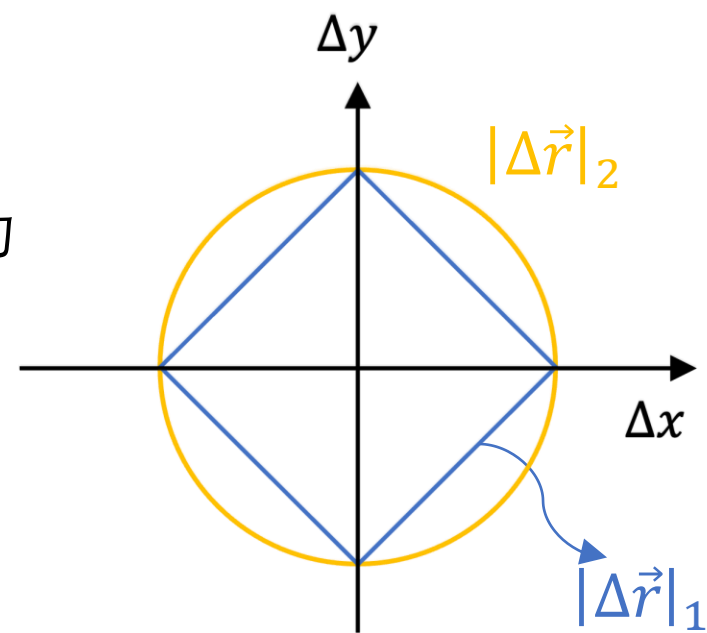
牛顿第二定律在空间转动变换下不变, 要求空间距离定义为

$$|\Delta \vec{r}|_2 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

其他距离的定义, 如

$$|\Delta \vec{r}|_1 = |\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|$$

则无法保持物理定律的空间转动不变性



$$\begin{cases} x' = \cos \theta x + \sin \theta y \\ y' = -\sin \theta x + \cos \theta y \end{cases}$$

a. 对称性与时空几何

物理定律

对称性

时空几何

例子：

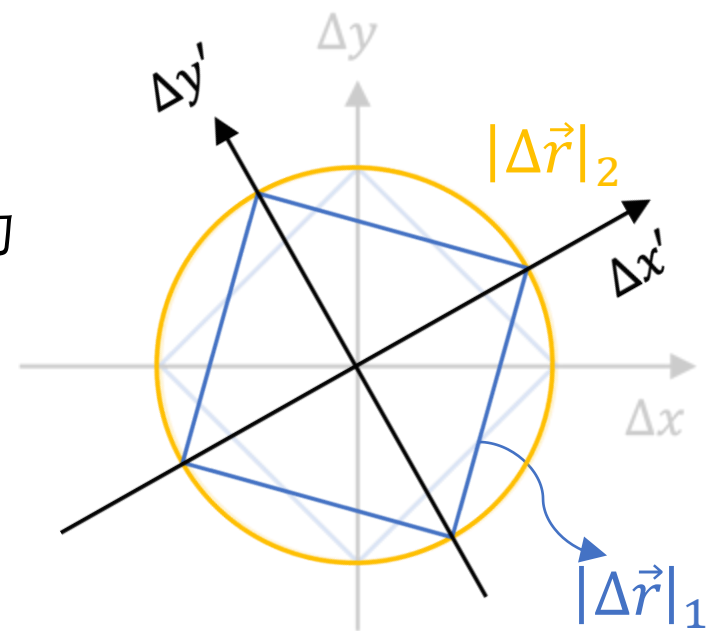
牛顿第二定律在空间转动变换下不变，要求空间距离定义为

$$|\Delta \vec{r}|_2 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

其他距离的定义，如

$$|\Delta \vec{r}|_1 = |\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|$$

则无法保持物理定律的空间转动不变性



$$\begin{cases} x' = \cos \theta x + \sin \theta y \\ y' = -\sin \theta x + \cos \theta y \end{cases}$$

保持物理学规律不变的变换叫做对称性

- 时间：孤立体系的力学定律具有时间平移不变性
- 空间：孤立体系的力学定律具有空间平移不变性、空间旋转不变性
- 物理定律（牛顿力学）在是否在其他变换下不变？

保持物理学规律不变的变换叫做对称性

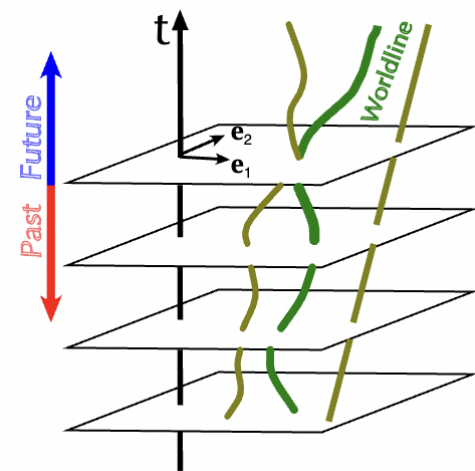
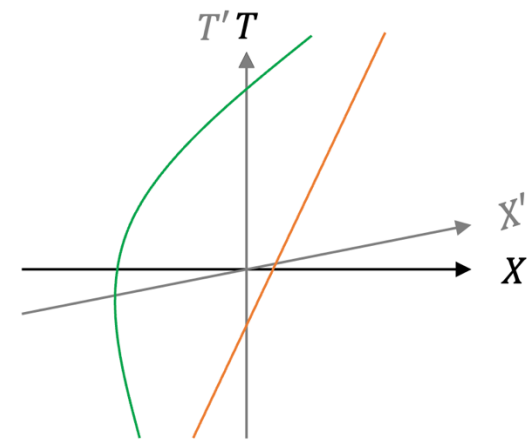
- 时间：孤立体系的力学定律具有时间平移不变性
- 空间：孤立体系的力学定律具有空间平移不变性、空间旋转不变性
- 物理定律（牛顿力学）在是否在其他变换下不变？
 - 伽利略变换（参考系变换）：

$$\begin{cases} t' = t \\ \vec{r}' = \vec{r} + \vec{u}t \end{cases}$$

- 伽利略变换混合时间与空间，因此必须要将时间与空间放在一起考虑其几何——时空（4维）

• 时空图

- 每个点叫一个事件，用四个坐标来表示 (t, x, y, z)
- 时空图中的轨迹叫世界线，完全描述了运动过程
- 匀速直线运动——时空图中的直线



物理定律

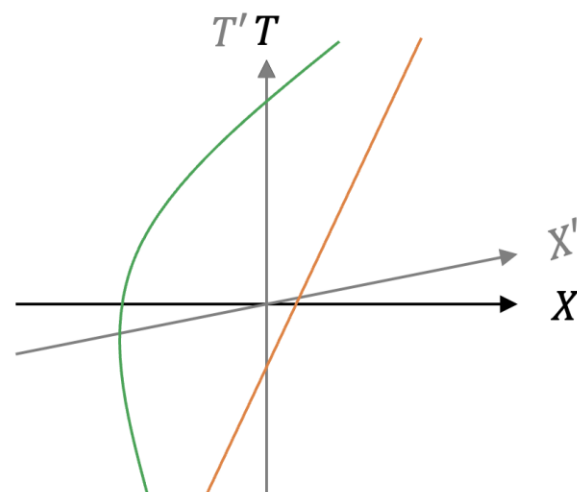
对称性

时空几何

- 物理定律：牛顿三大定律
- 时空对称性：广义伽利略变换

- 时间平移
- 空间平移
- 空间旋转
- 伽利略变换

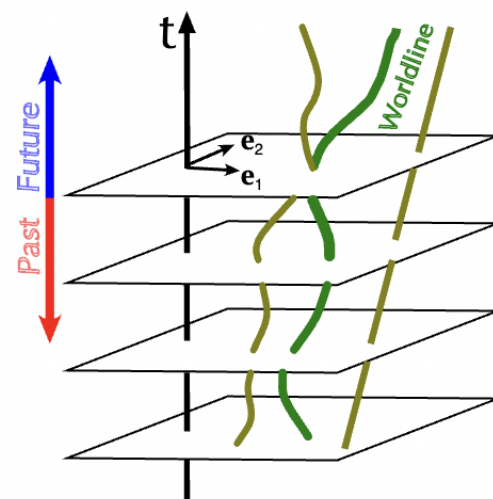
$$\begin{cases} t' = t + t_0 \\ \vec{r}' = R\vec{r} + \vec{u}t + \vec{a}, \end{cases}$$



- 时空几何：
 - 四维时空：事件、世界线、直线
 - 伽利略变换可以视为时空图中的广义旋转，将时空中的直线变换成直线
 - 对应的4维时空距离：

$$d(\Delta\vec{r}, \Delta t) = \begin{cases} \Delta t, & \text{如果 } \Delta t \neq 0 \\ |\Delta\vec{r}|, & \text{如果 } \Delta t = 0 \end{cases}$$

相同时刻，等于三维距离；不同时刻，等于时间距离(不比较空间距离)



物理定律

对称性

时空几何

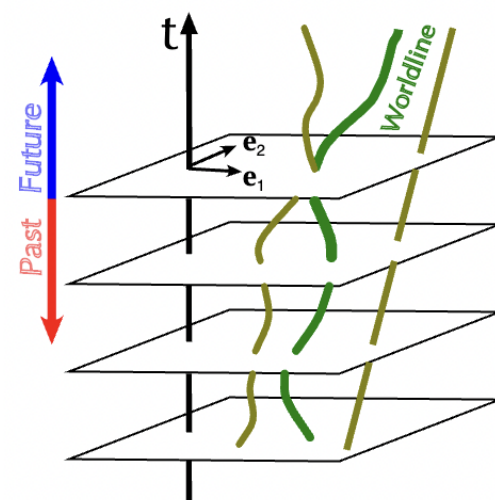
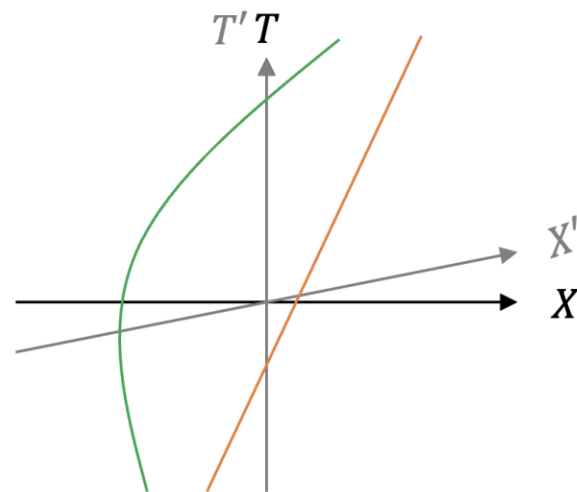
- 物理定律：牛顿三大定律
- 时空对称性：广义伽利略变换

$$\begin{cases} t' = t + t_0 \\ \vec{r}' = R\vec{r} + \vec{u}t + \vec{a}, \end{cases}$$

- 时空几何：
 - 牛顿第二定律在广义伽利略变换下不变，要求空间距离定义为

$$d(\Delta\vec{r}, \Delta t) = \begin{cases} \Delta t, & \text{如果 } \Delta t \neq 0 \\ |\Delta\vec{r}|, & \text{如果 } \Delta t = 0 \end{cases}$$

- 其他例子：狭义相对论——动力学定律在庞加莱变换下不变，要求空间距离定义为 $d(\Delta\vec{r}, \Delta t) = \sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{r}^2}$



b. 物理时空观

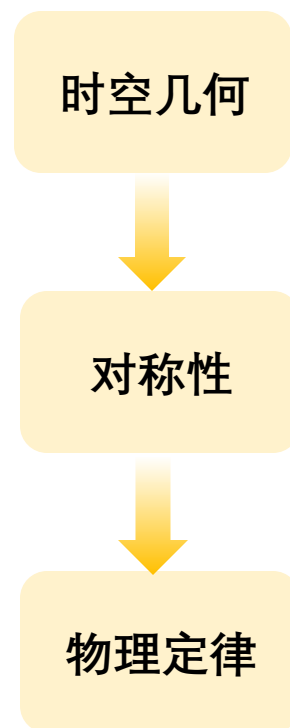
- 时空不是独立的客观存在。时间只不过是事件发生的先后次序，空间只不过是物体之间的相对位置



莱布尼茨：一切都是代数



- 时空是一种独立于物质的客观存在。时空的几何决定了对称性，进一步决定了物质运动规律



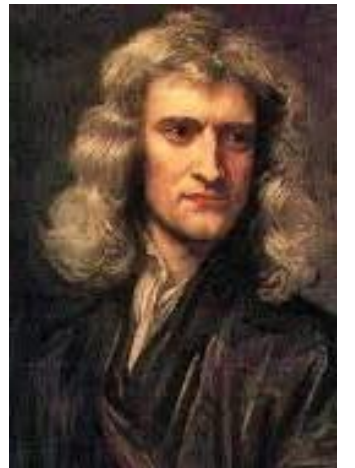
牛顿：一切都是几何

牛顿进一步认为，时间和空间分别都是绝对的存在

- 绝对时空是一个绝对静止的惯性参考系，所有其他惯性参考系都是相对于该绝对时空做匀速直线运动的参考系。任何非惯性参考系都是相对于绝对时空做非惯性运动的参考系
- 绝对时空观挑出了一个特殊的参考系，在这个参考系，牛顿定律具有最简单的形式
- 绝对时空可以认为在宇宙中存在一个巨大的坐标架和时钟

那么该如何验证绝对时空的存在呢？

牛顿提出了有名的水桶实验。



考虑一个水桶装着半桶水，水桶和水都静止。某一时刻开始，水桶开始旋转，开始时由于惯性，水处于静止状态，水面仍然维持水平。过了一段时间以后，由于摩擦水开始随着水桶一起旋转。这时候水面变得凹下去。如果此时水桶停止旋转，水由于惯性继续旋转，水面仍然维持凹下去的形状。



I: 木桶不动，水不动
无惯性力



II: 木桶旋转，水不动
无惯性力



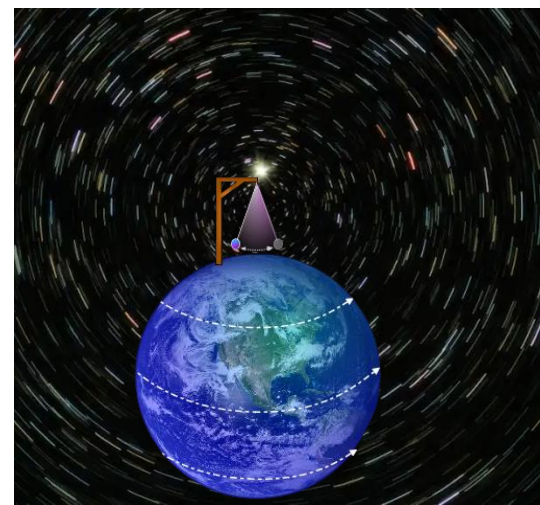
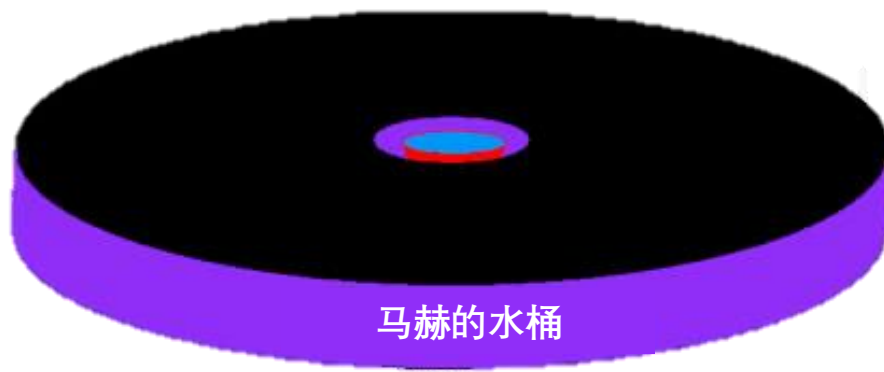
III: 木桶旋转，水旋转
有惯性力



IV: 木桶不动，水旋转
有惯性力

可见，水是否受到惯性力的影响，与水与水桶的相对运动无关，仅仅与水的绝对运动有关。这个绝对运动，牛顿认为，就是水相对于绝对参考系即绝对时空的运动。

- 莱布尼茨：一切运动都是相对的，不存在绝对的运动
 - 伽利略相对性原理，绝对速度并没有任何可以观测的效应
 - 牛顿的绝对时空其实是相对于遥远处恒星静止的参考系
- 马赫：
 - 牛顿水桶实验中产生惯性力的情况，其实是水相对于远处恒星在运动
 - 假如，水桶壁足够厚，以至于水桶对于水的影响超过了远处恒星，那么当水相对于远处恒星静止但相对于水桶旋转时，仍然会有惯性力的产生
- 马赫原理：远处的大质量分布，影响局域的物理定律包括惯性

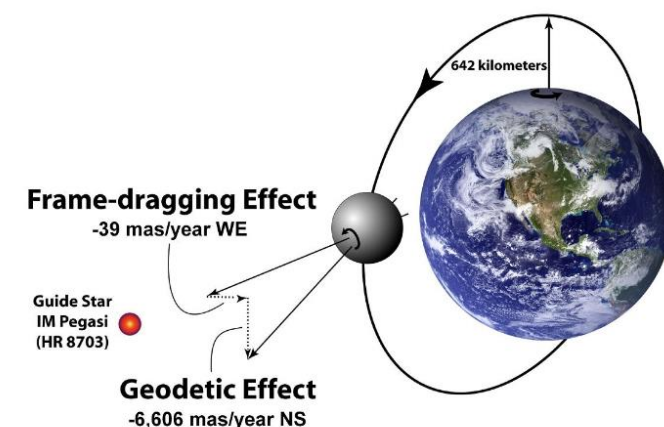
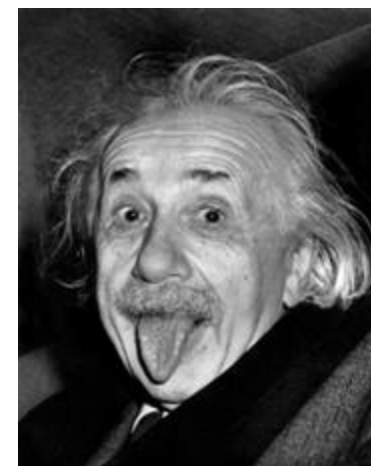


- 牛顿：时空几何决定物理定律，绝对时空决定了牛顿三大定律
- 莱布尼茨-马赫：物质的分布和运动决定时空几何，时空几何不是客观实体
- 爱因斯坦：别吵了，你们两个学派都对！

测地线方程
$$\frac{d^2 X^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dX^\alpha}{ds} \frac{dX^\beta}{ds} = F^\mu$$

爱因斯坦引力场方程
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$

- 实验证据：
 - 爱丁顿实验：经过太阳附近的星光发生偏折
 - Gravity Probe B实验：2011年GP-B实验证明大质量天体附近会发生参考系曳引
 - LIGO引力波探测实验



Gravity Probe B 实验示意图

时空与物理定律的本质

- 时间、空间的本质是什么？它们与物质、物理定律的关系如何？
- 时空是否能够脱离物质存在呢？换句话说，有没有一个不含物质的空间(真空)，但其上的引力却不等于零？这个问题最终由数学家(丘成桐)在1976年解决。
- 物质与物理定律满足量子力学 → 需要引力的量子理论！
- 时空与物质有没有可能是同源的？例如，时空有没有可能从物质中衍生出来?(莱布尼茨)
- from bit to it、全息、超弦理论、圈量子理论……

