

第四章：守恒定律

李 阳

中国科学技术大学近代物理系



力学A · 2025年秋

§1. 动量守恒

- 动量与能量守恒是惠更斯在研究碰撞中提出来的，迄今为止它们在经典碰撞与量子碰撞中仍然起到关键性的作用，而量子碰撞更是相互作用的微观理论的基础
- 但是这两个概念在历史上一直未理解清楚，因此存在着巨大的争议
- 牛顿提出他的三大定律以后，在动力学基础上建立了动量守恒的概念
- 而能量守恒的概念则一直要到十九世纪中叶才完全确立，这主要是因为能量可以存在为不同的形式（例如动能、热、势能、化学能、电磁能等），而能量守恒则涉及到力学以外的领域。也正是因此，能量守恒一经建立，便成为物理学中统一不同领域的核心概念。

- 动量(momentum): $\vec{p} = m\vec{v}$
- 两个质点组成的孤立体系:

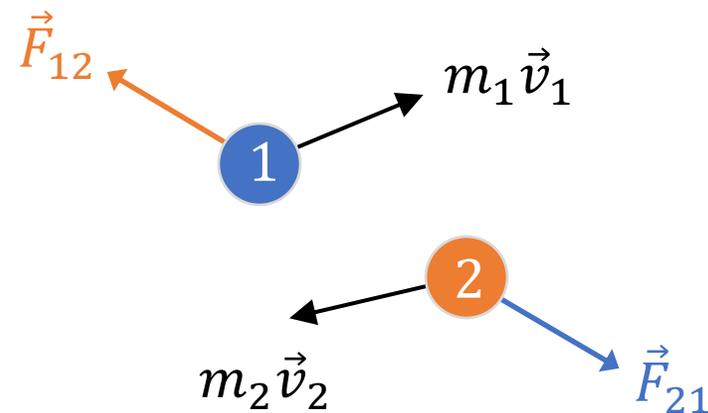
$$\vec{F}_{12} = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt}$$

$$\vec{F}_{21} = m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

牛顿第三定律: $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = 0$$

$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$ 不随时间变化, 总动量 $\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$ 守恒



推广到 n 个质点组成的孤立体系:

$$\vec{F}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

其中, 第 i 个质点所受到的合力为,

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \dots + \vec{F}_{in} = \sum_j \vec{F}_{ij}$$

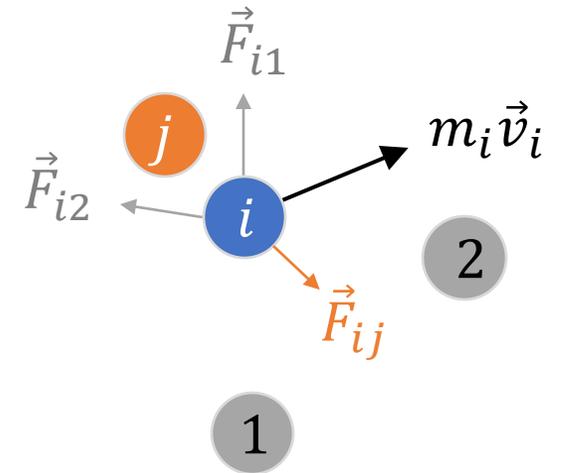
考虑,

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij}$$

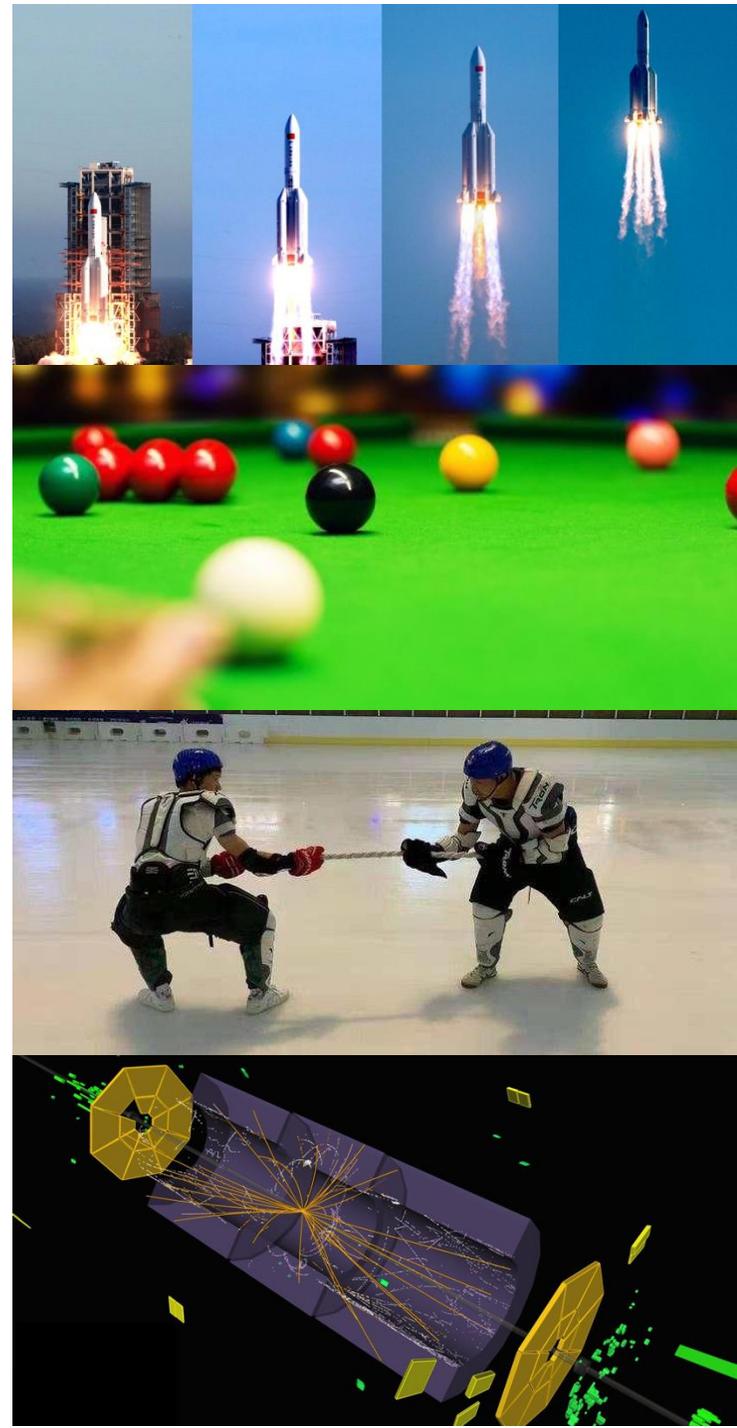
牛顿第三定律: $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij} \Rightarrow \sum_i \vec{F}_i = 0$

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$$

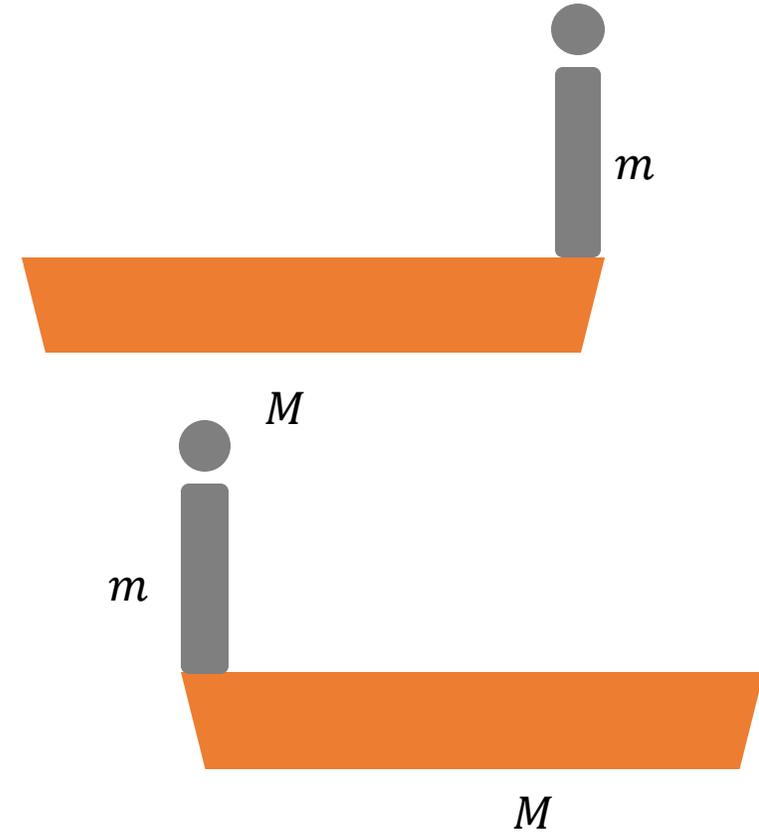
孤立体系的总动量 $\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$ 守恒



- 适用范围
 - 孤立体系或近似孤立的体系
 - 例子：微观粒子、天体
 - 过程发生很快，外力来不及作用
 - 例子：碰撞、爆炸
 - 外力合力为零
 - 例子：光滑的冰面
 - 任何一个方向合外力为零
- 动量是一个矢量
- 动量守恒与能量守恒相互独立



【例子】平静湖面上停着一只质量为 M 长度为 l 的木船，一个质量为 m 的人从船的一端走到另一端，问船的位移。



【例子】平静湖面上停着一只质量为 M 长度为 l 的木船，一个质量为 m 的人从船的一端走到另一端，问船的位移。

解：

动量守恒，

$$MV + mv = 0$$

积分得：

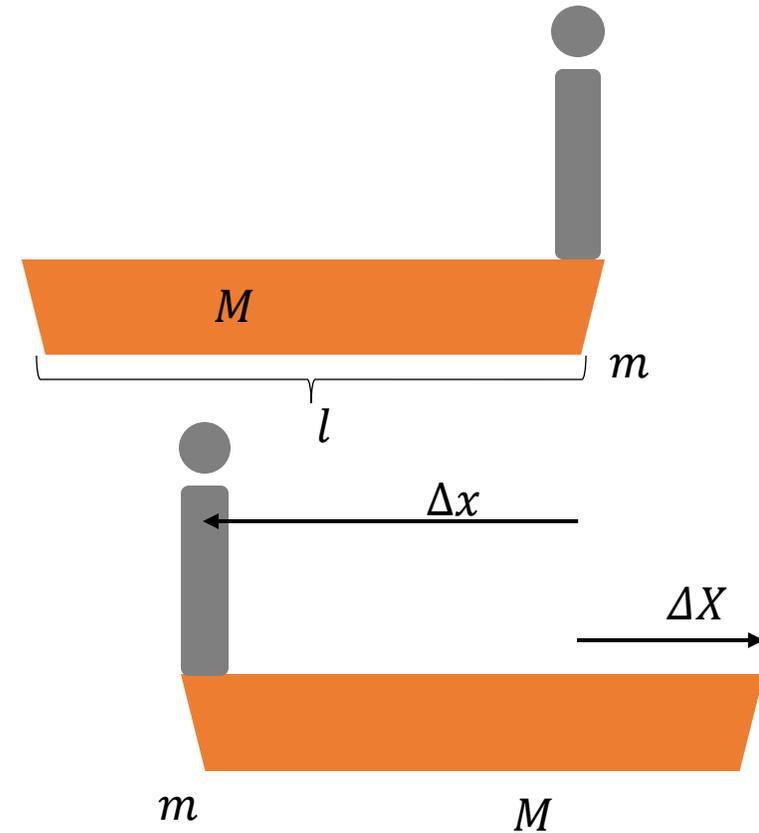
$$\begin{aligned} M \int V dt + m \int v dt &= 0 \\ \Rightarrow M\Delta X + m\Delta x &= 0 \end{aligned}$$

而，人相对于船的运动

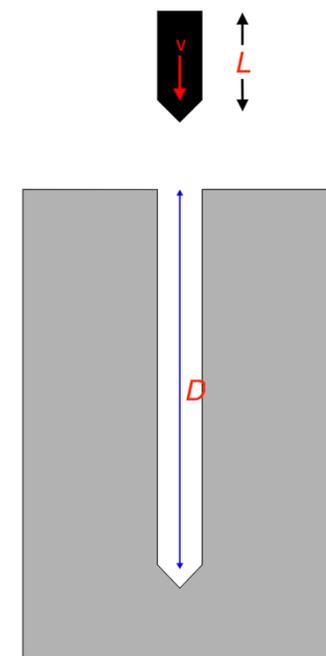
$$\Delta x - \Delta X = l$$

因此，

$$|\Delta X| = \frac{m}{m + M} l$$



【例子】 一个子弹打在沙袋上， 问能子弹能穿透多远？



【例子】一个子弹打在沙袋上，问能子弹能穿透多远？

牛顿的回答：

- 要阻挡子弹，需要子弹将全部动量 mv 转移给沙子
- 子弹将沙粒加速到 v
- 子弹速度很快，只需要考虑子弹前方的沙子

$$m_{\text{子弹}} v = M_{\text{沙子}} v,$$

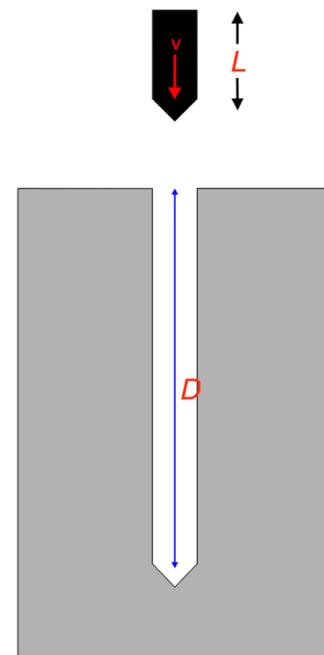
而，

$$m_{\text{子弹}} = \rho_{\text{子弹}} AL, M_{\text{沙子}} = \rho_{\text{沙子}} AD$$

$$\Rightarrow D = \frac{\rho_{\text{子弹}}}{\rho_{\text{沙子}}} L$$

思考：该答案的适用条件是什么？

应用：穿甲弹的设计

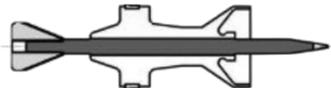


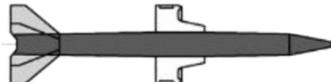
【例子】一个子弹打在沙袋上，问能子弹能穿透多远？

牛顿的回答：
$$D = \frac{\rho_{\text{子弹}} L}{\rho_{\text{沙子}}}$$



动能侵彻弹体
(kinetic energy penetrator)

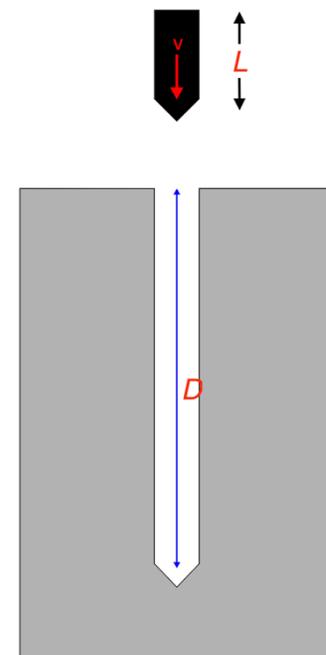
>1975  钨、铀

1965  钢

1955  碳化钨

1940  钢

1910s  钢



a. 冲量定理

- 在动能定理中，动能的改变来源于外力做功。那么动量的改变该如何用外力来描述呢？
- 根据牛顿第二定律，

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

积分可以得到，

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

这个结论叫做冲量定理，其中力对时间的积分就叫做冲量(impulse)

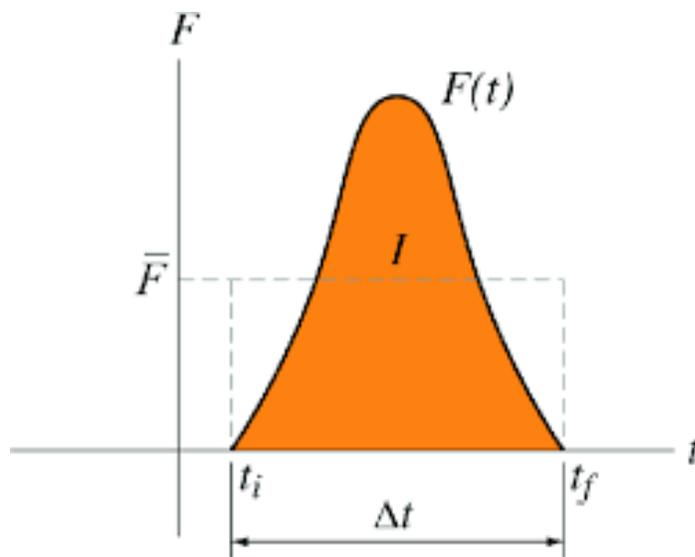
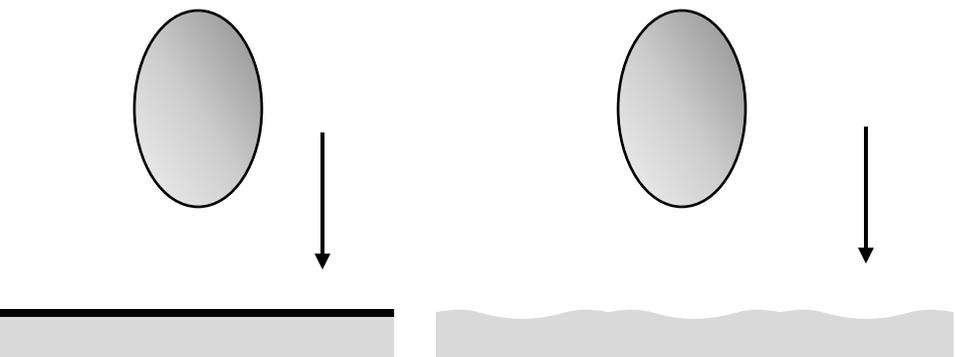
$$I = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

【例子】鸡蛋落地

$$\Delta p = \int F dt = \bar{F} \Delta t$$

如果蛋壳受到的力超过了其临界强度，就会碎。在 Δp 不变的情况下，如何减小 F ？答案是增加相互作用时间： Δt

- 应用：安全气囊、头盔



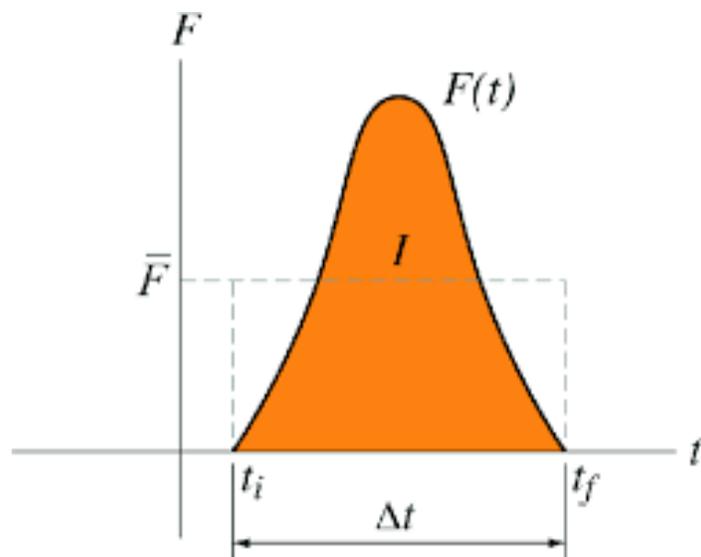
- 卸力 (体育)



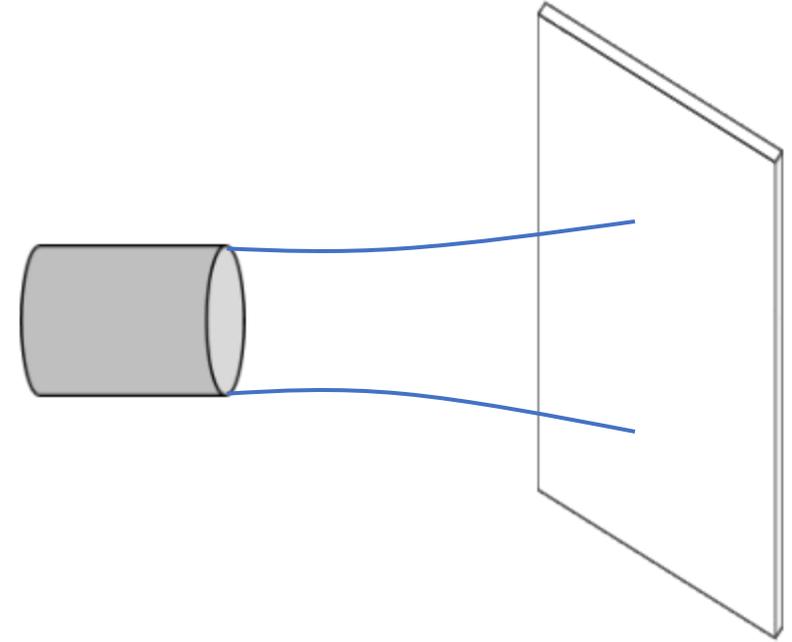
【例子】 网球

$$\Delta p = \int F dt = \bar{F} \Delta t$$

网球运动员希望获得击球最大速度。一个方面是增加力，当然运动员的力量是有极限的，并且增加力主要靠增大挥拍速度会降低击球准确性。另外一个办法是增加接触时间。在专业术语中，这项技术叫做随挥。



【例子】一个水管对着一个墙冲水，水的速度与墙垂直，水撞到平面后沿着平面流走。已知水管横截面面积为 A ，出水速度为 v ，求墙面冲水时受到的力。



【例子】一个水管对着一个墙冲水，水的速度与墙垂直，水撞到平面后沿着平面流走。已知水管横截面面积为 A ，出水速度为 v ，求墙面冲水时受到的力。

求解：

根据冲量定理，

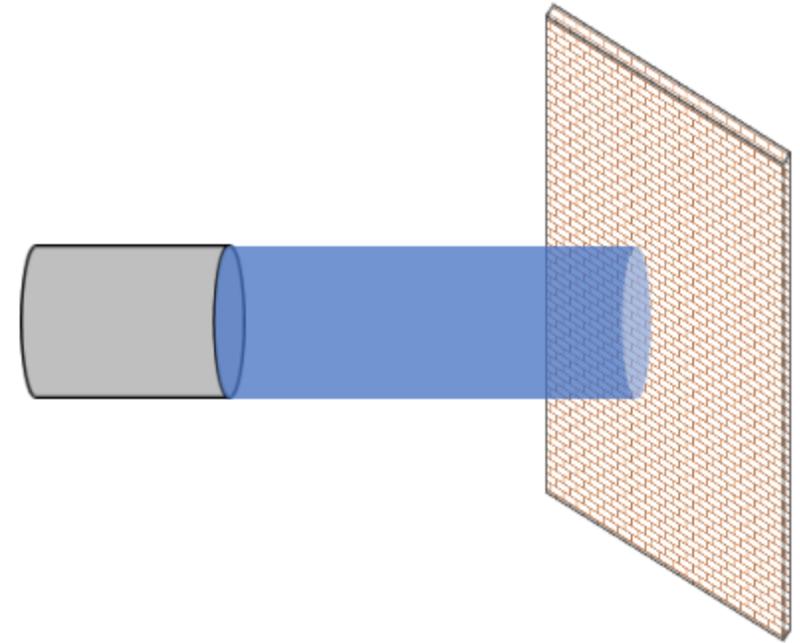
$$\Delta \vec{p} = \int_{\Delta t} \vec{F} dt = \vec{F} \Delta t$$

因此，水对于墙面转移的动量会形成一个等效的力 $\vec{F} = \Delta p / \Delta t$ 。 Δt 时间内动量的转移为，

$$\Delta \vec{p} = \rho A v \Delta t \vec{v}$$

因此，墙面受到的力为，

$$\vec{F} = \rho A v^2$$



【例子】喷气式战斗机进气量（单位时间内吸入空气的体积）为 $Q = \frac{dV}{dt}$ ，经过发动机燃烧加速后，以 u 的速度相对于战斗机向后喷出相同质量的气体。已知战斗机速度为 v ，求发动机提供的推力。



【例子】喷气式战斗机进气量（单位时间内吸入空气的体积）为 $Q = \frac{dV}{dt}$ ，经过发动机燃烧加速后，以 u 的速度相对于战斗机向后喷出相同质量的气体。已知战斗机速度为 v ，求发动机提供的推力。

解：

对于战斗机 Δt 时间内吸入的空气用冲量定理：

$$\Delta p = \bar{F} \Delta t$$

空气经过加速后，动量的改变为，

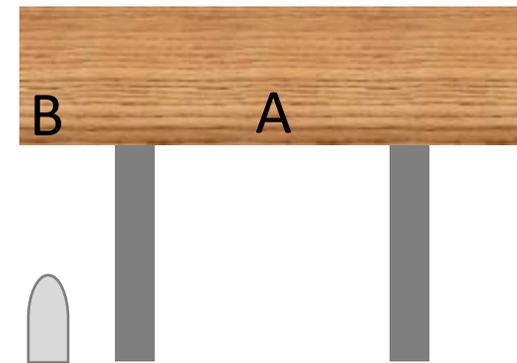
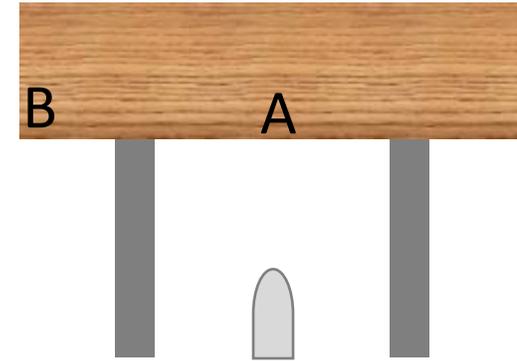
$$\Delta p = \Delta m(u - v) = \rho Q \Delta t(u - v)$$

因此，平均推力为，

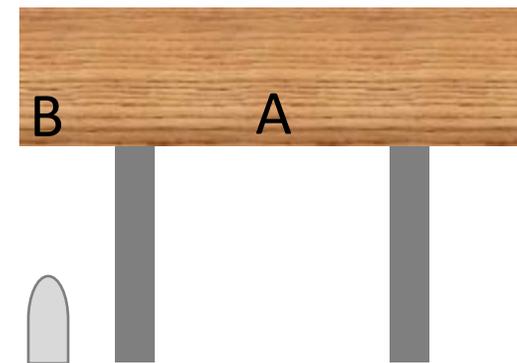
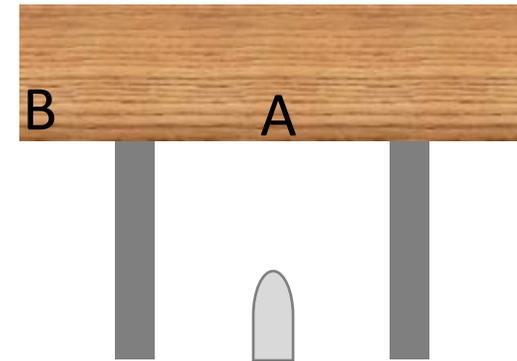
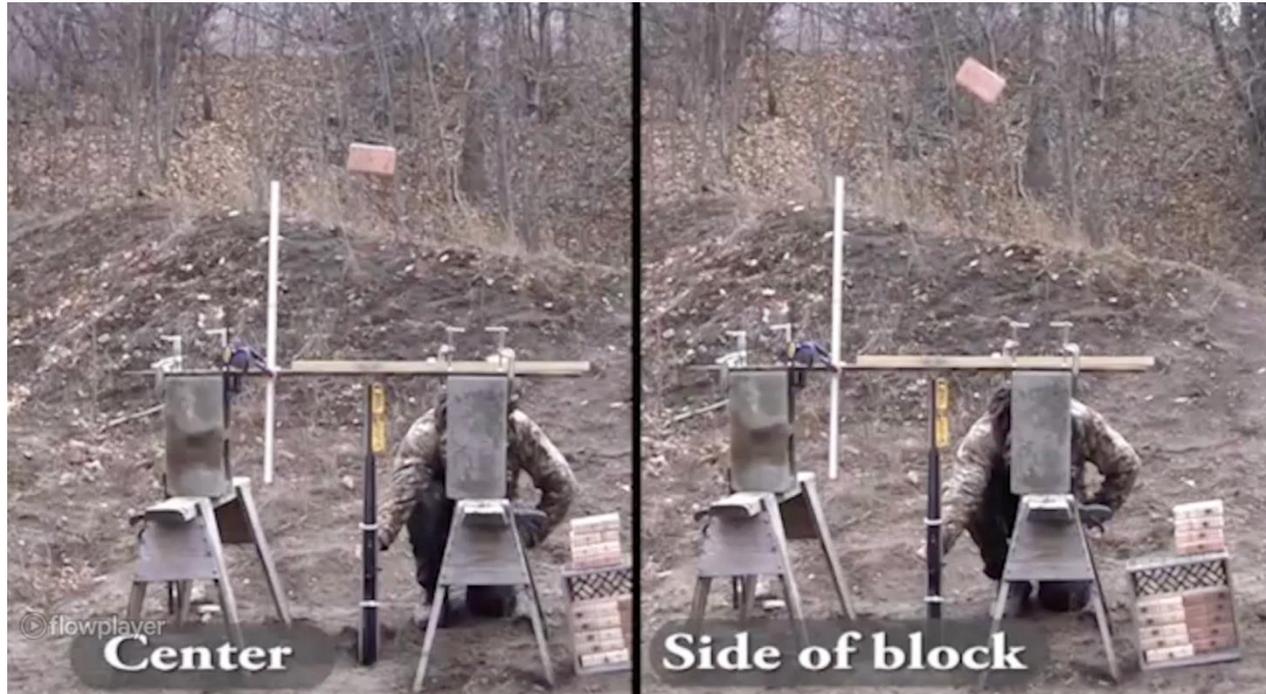
$$\bar{F} = \rho Q(u - v)$$



【例子】一颗子弹垂直向上击中并嵌入如图所示的木块中。问子弹击中A点与击中B点，哪种方式中木块质心上升的高度更高



【例子】一颗子弹垂直向上击中并嵌入如图所示的木块中。问子弹击中A点与击中B点，哪种方式中木块质心上升的高度更高



§2. 动能定理

- 动能 (kinetic energy): 定义为物体质量乘以速度平方乘以1/2:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

注意, $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, 因此, $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

- 莱布尼茨和伯努利引入了动能 mv^2 , 并将其称为活力 (死力: ma)
- 法国女科学家埃米莉·夏特莱首先提出动能定理及能量守恒的概念
- 动能与动量的争论
- 能量的概念一直到十九世纪中叶才被广泛接受



埃米莉·夏特莱

- 动量与能量是体系两个不同的特征物理量，动量守恒与能量守恒互相独立
- 在现代物理中，能、动量守恒比牛顿力学更基本。它们的本质是时空平移不变性，这种不变性叫做庞加莱对称性
- 思考：是否还有其他的对称性

动量	能量
$\vec{p} = m\vec{v}$	$T = \frac{1}{2}mv^2, U(r), \dots$
矢量	标量
牛顿第三定律	牛顿第二定律
合外力为零：动量守恒	保守力：能量守恒
空间平移不变性	时间平移不变性



埃米·诺特

【例子】自由落体（匀加速直线运动），

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2, \\ v = v_0 + g t, \end{cases}$$

【例子】斜抛运动（匀加速运动），

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2, \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} t, \end{cases}$$

【例子】自由落体（匀加速直线运动），

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2, \\ v = v_0 + g t, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_0^2 + 2g(x - x_0),$$

$$T - T_0 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = m g (x - x_0)$$

【例子】斜抛运动（匀加速运动），

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2, \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} t, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_0^2 + 2\vec{g} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0),$$

$$T - T_0 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = m \vec{g} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

【例子】 匀速圆周运动:

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = T_0$$

【例子】 天体运动:

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m (v_r^2 + v_\theta^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

a. 功

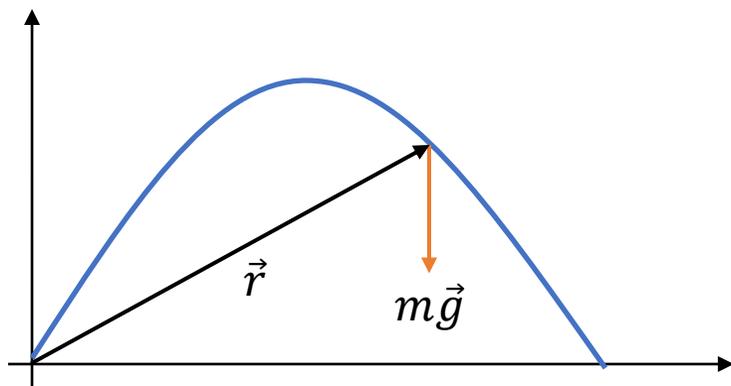
【例子】自由落体（匀加速直线运动），

$$T - T_0 = mg(x - x_0) = F\Delta x$$

斜抛运动（匀加速运动），

$$T - T_0 = m\vec{g} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

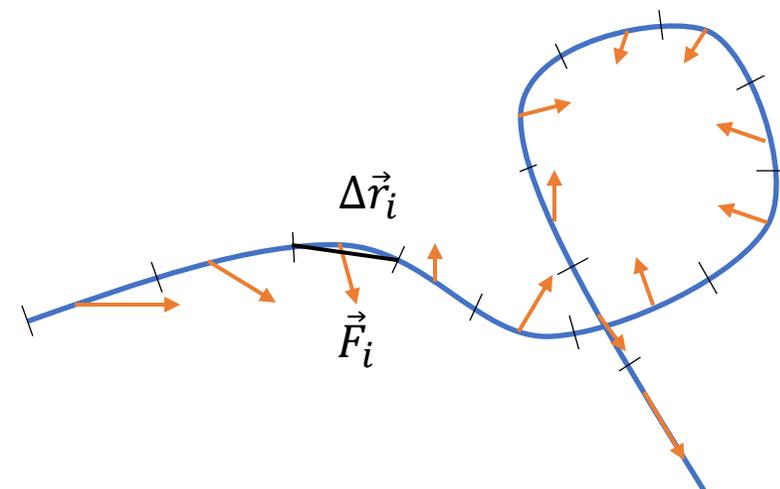
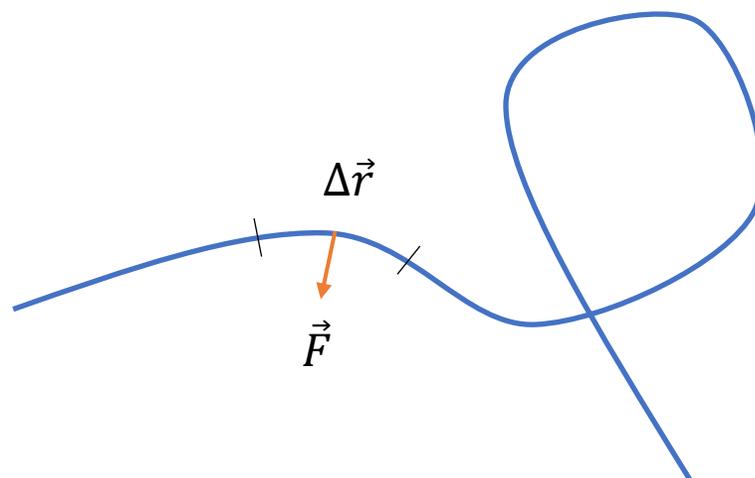
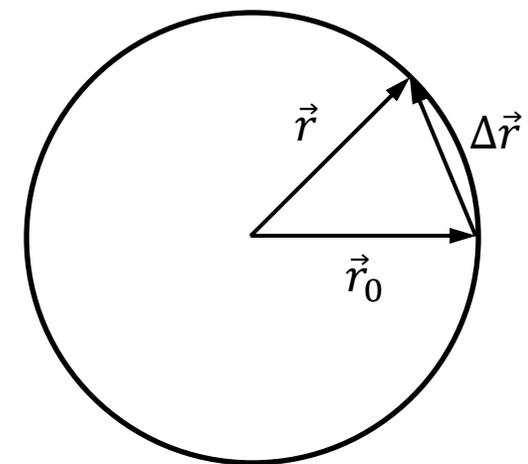
$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ 叫做功(work)。上面的表达式可以表述为：动能的改变等于恒外力所做的功



【例子】 匀速圆周运动

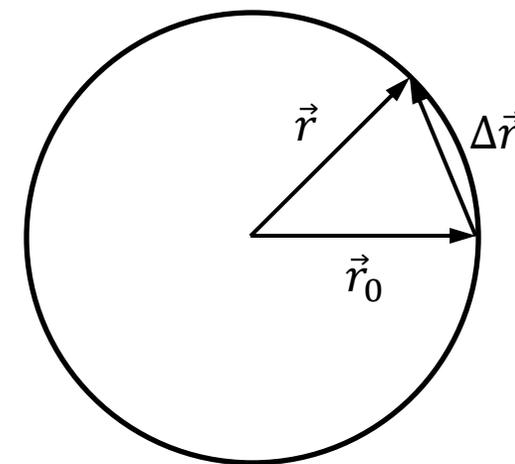
$$T - T_0 = 0 \stackrel{?}{=} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \Delta\vec{r} \neq 0$$

对于一般运动,



【例子】 匀速圆周运动

$$T - T_0 = 0 \stackrel{?}{=} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \Delta\vec{r} \neq 0$$



对于一般运动，我们可以先把运动轨迹划分成线段（微元），
然后在每一个线段上运用匀加速运动的结论，即

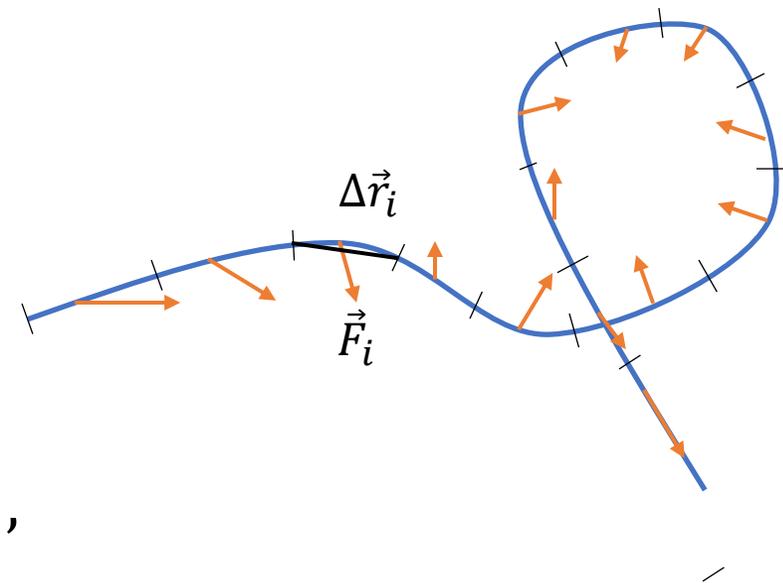
$$\Delta T_i = \Delta W_i,$$

其中功的微元（元功）定义为 $\Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$ 。

运动过程中的总功可以定义为元功之和，

$$W = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = \int \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

而总的动能的改变等于外力所做的总功： $T - T_0 = W$



动能定理:

$$\frac{1}{2}m\vec{v}^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_0^2 = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

证明:

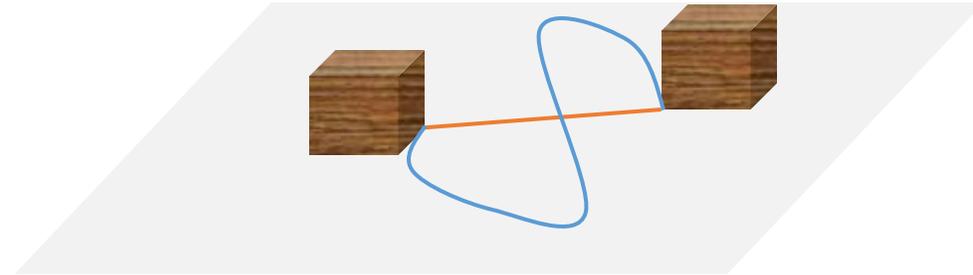
根据牛顿第二定律:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

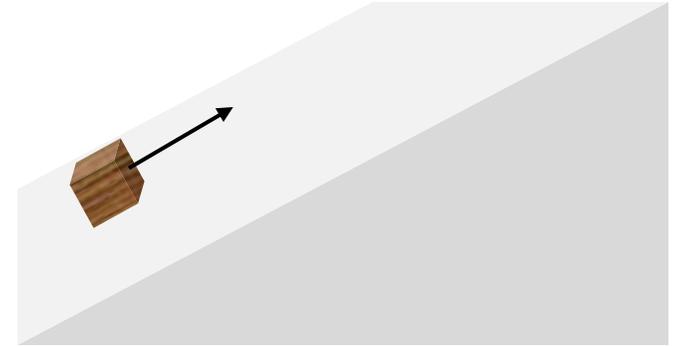
两边乘以 $d\vec{r}$, 并积分:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} dt = \int d\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right)$$

- 功的单位是焦耳，符号表示为 J
- 做功与路径有关
 - 【例子】摩擦力做功
- 作用力与反作用力做功之和不一定为零
 - 【例子】木块对桌子的摩擦力所做的功为零
- 功是一个实数，可以正也可以负
- 与速度垂直的力不做功：
 - 【例子】匀速圆周运动、科里奥利力、洛伦兹力
- 做功与动能与参考系有关

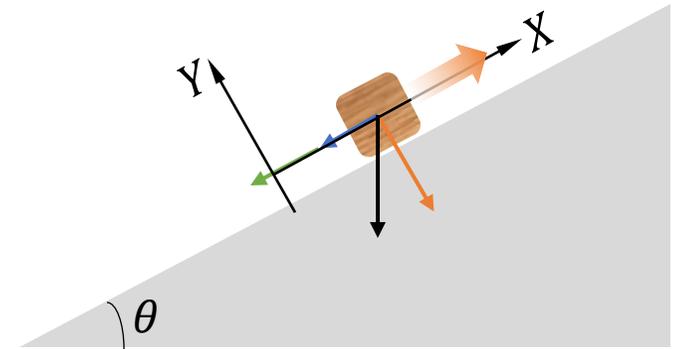


【例子】一个质量为 $m = 1 \text{ kg}$ 的小方块，放在倾角为 $\theta = 30^\circ$ 的斜面上，方块与斜面之间的摩擦系数为 $\mu = 0.1$ 。初始时刻，方块速度为 $v_0 = 3 \text{ m/s}$ ，方向为沿着斜面向上。求： $t = 1 \text{ s}$ 时刻摩擦力与重力做的功。



【例子】一个质量为 $m = 1 \text{ kg}$ 的小方块，放在倾角为 $\theta = 30^\circ$ 的斜面上，方块与斜面之间的摩擦系数为 $\mu = 0.1$ 。初始时刻，方块速度为 $v_0 = 3 \text{ m/s}$ ，方向为沿着斜面向上。求： $t = 1 \text{ s}$ 时刻摩擦力与重力做的功。

解：运动分为两个阶段，第一个阶段方块速度沿斜面向上，摩擦力方向沿斜面向下；第二个阶段方块速度向下，摩擦力方向向上。



阶段一：

$$a_1 = -g \sin \theta - \mu g \cos \theta = 5.8 \text{ m/s}^2,$$

$$t_1 = \frac{0 - v_0}{a_1} = \frac{v_0}{g \sin \theta - \mu g \cos \theta} = 0.52 \text{ s},$$

$$\Delta x_1 = \frac{v_0^2}{2a_1} = 0.78 \text{ m},$$

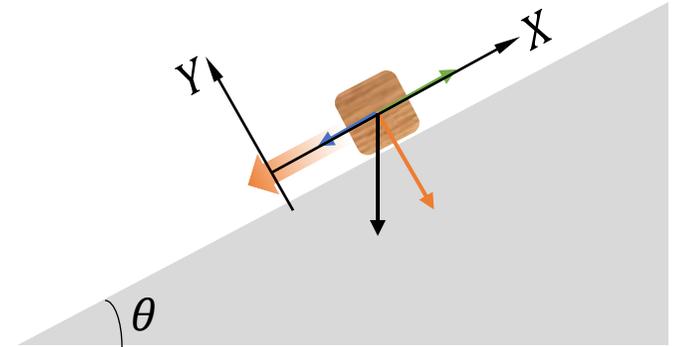
$$W_1^{(F)} = -mg\mu \cos \theta \Delta x_1 = -0.66 \text{ J}, W_1^{(G)} = -mg \sin \theta \Delta x_1 = -3.8 \text{ J}$$

注意正负号

【例子】一个质量为 $m = 1 \text{ kg}$ 的小方块，放在倾角为 $\theta = 30^\circ$ 的斜面上，方块与斜面之间的摩擦系数为 $\mu = 0.1$ 。初始时刻，方块速度为 $v_0 = 3 \text{ m/s}$ ，方向为沿着斜面向上。求： $t = 1 \text{ s}$ 以后摩擦力与重力做的功。

解：运动分为两个阶段，第一个阶段方块速度沿斜面向上，摩擦力方向沿斜面向下；第二个阶段方块速度向下，摩擦力方向向上。

阶段二：



【例子】一个质量为 $m = 1 \text{ kg}$ 的小方块，放在倾角为 $\theta = 30^\circ$ 的斜面上，方块与斜面之间的摩擦系数为 $\mu = 0.1$ 。初始时刻，方块速度为 $v_0 = 3 \text{ m/s}$ ，方向为沿着斜面向上。求： $t = 1 \text{ s}$ 以后摩擦力与重力做的功。

解：运动分为两个阶段，第一个阶段方块速度沿斜面向上，摩擦力方向沿斜面向下；第二个阶段方块速度向下，摩擦力方向向上。

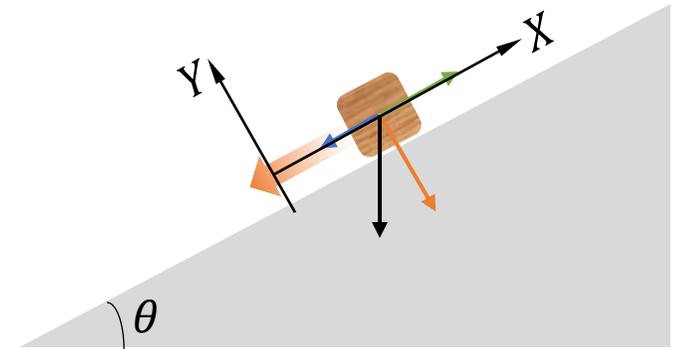
阶段二：

$$a_2 = -g \sin \theta + \mu g \cos \theta = -4.1 \text{ m/s}^2,$$

$$t_2 = 1 \text{ s} - t_1 = 0.48 \text{ s},$$

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = -0.47 \text{ m}, \quad v_f = v_2 = a_2 t_2 = -1.97 \text{ m/s}$$

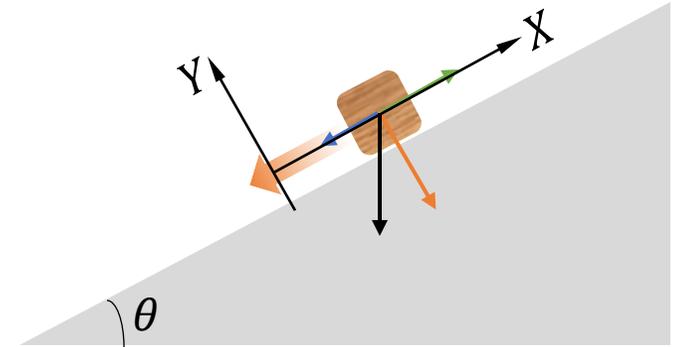
$$W_2^{(F)} = +mg\mu \cos \theta \Delta x_2 = -0.40 \text{ J}, \quad W_2^{(G)} = -mg \sin \theta \Delta x_2 = 2.3 \text{ J}$$



注意正负号

【例子】一个质量为 $m = 1 \text{ kg}$ 的小方块，放在倾角为 $\theta = 30^\circ$ 的斜面上，方块与斜面之间的摩擦系数为 $\mu = 0.1$ 。初始时刻，方块速度为 $v_0 = 3 \text{ m/s}$ ，方向为沿着斜面向上。求： $t = 1 \text{ s}$ 以后摩擦力与重力做的功。

解：运动分为两个阶段，第一个阶段方块速度沿斜面向上，摩擦力方向沿斜面向下；第二个阶段方块速度向下，摩擦力方向向上。



阶段二：

$$a_2 = -g \sin \theta + \mu g \cos \theta = -4.1 \text{ m/s}^2,$$

$$t_2 = 1 \text{ s} - t_1 = 0.48 \text{ s},$$

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = -0.47 \text{ m}, \quad v_f = v_2 = a_2 t_2 = -1.97 \text{ m/s}$$

$$W_2^{(F)} = +mg\mu \cos \theta \Delta x_2 = -0.40 \text{ J}, \quad W_2^{(G)} = -mg \sin \theta \Delta x_2 = 2.3 \text{ J}$$

$$\text{总功: } W_1^{(F)} + W_2^{(F)} = -1.06 \text{ J}, \quad W_1^{(G)} + W_2^{(G)} = -1.5 \text{ J}$$

$$\text{动能的改变: } \Delta T = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -2.56 \text{ J}$$

注意正负号：

1. 采用统一的坐标系
2. 对于每个计算结果自行判断正负号

【例子】 已知汽车以90km/h速度行驶时， 制动距离为45m， 求：

- a) 刹车时路面与轮胎之间的摩擦系数 μ
- b) 若汽车以120 km/h速度行驶时的制动距离
- c) 已知下雨天路面与轮胎之间的摩擦系数降低50%， 若要保持制动距离不变， 汽车行驶的速度需要降低为多少？

【例子】已知汽车以90km/h速度行驶时，制动距离为45m，求：

- a) 刹车时路面与轮胎之间的摩擦系数 μ
- b) 若汽车以120 km/h速度行驶时的制动距离
- c) 已知下雨天路面与轮胎之间的摩擦系数降低50%，若要保持制动距离不变，汽车行驶的速度需要降低为多少？

求解：这个题目既可以用牛顿第二定律，也可以直接用动能定理，

$$-mg\mu \cdot s = 0 - \frac{1}{2}mv^2$$

$$a) \quad \mu = \frac{v^2}{2gs} = \frac{\left(90 \times \frac{10^3}{60 \times 60} \text{m/s}\right)^2}{2 \times 9.8 \text{m/s}^2 \times 45 \text{m}} = 0.71$$

$$b) \quad s = \frac{v^2}{2g\mu} = \frac{\left(120 \times \frac{10^3}{60 \times 60} \text{m/s}\right)^2}{2 \times 9.8 \text{m/s}^2 \times 0.71} = 81 \text{ m}$$

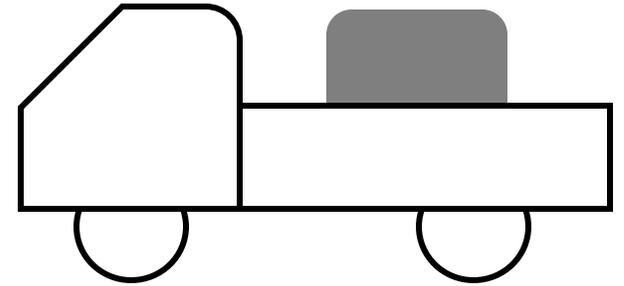
$$c) \quad v = \sqrt{2g\mu s} = 64 \text{ km/h}$$

超速行驶不可取：

超速30%，时间降低30%，制动距离（危险性）增加90%。实际还有反应时间带来的距离的增加。

安全距离：>100米

【例子】质量为 M 的卡车载有质量为 m 的箱子以 v 的速度沿平直路面行驶。因故紧急刹车，车轮在地面做纯滑动，卡车滑行一段距离后停下来，而箱子相对于卡车也滑动了一段距离。已知卡车与地面的滑动摩擦系数为 μ_1 ，箱子与卡车之间的滑动摩擦系数为 μ_2 。求卡车相对路面滑行的距离 L 与箱子相对于卡车滑动的距离 l 。



【例子】质量为 M 的卡车载有质量为 m 的箱子以 v 的速度沿平直路面行驶。因故紧急刹车，车轮在地面做纯滑动，卡车滑行一段距离后停下来，而箱子相对于卡车也滑动了一段距离。已知卡车与地面的滑动摩擦系数为 μ_1 ，箱子与卡车之间的滑动摩擦系数为 μ_2 。求卡车相对路面滑行的距离 L 与箱子相对于卡车滑动的距离 l 。

解：针对卡车和箱子分别做受力分析。

水平方向上，两个摩擦力对卡车做功：

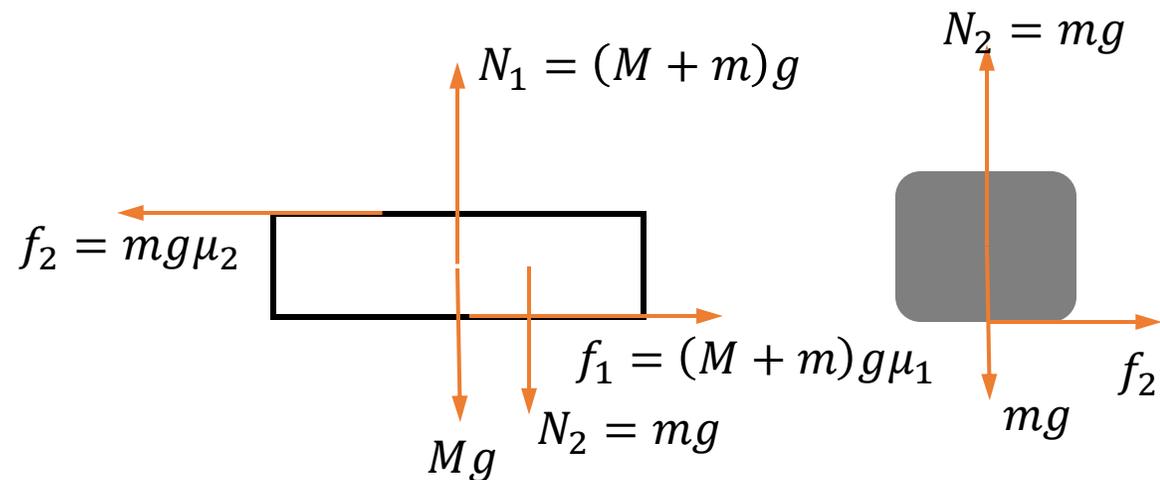
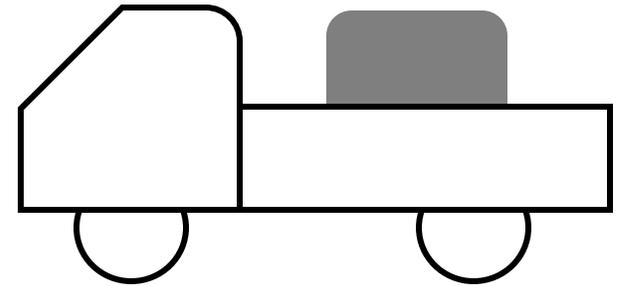
$$[mg\mu_2 - (M + m)g\mu_1]L = -\frac{1}{2}Mv^2,$$

摩擦力对箱子做功：

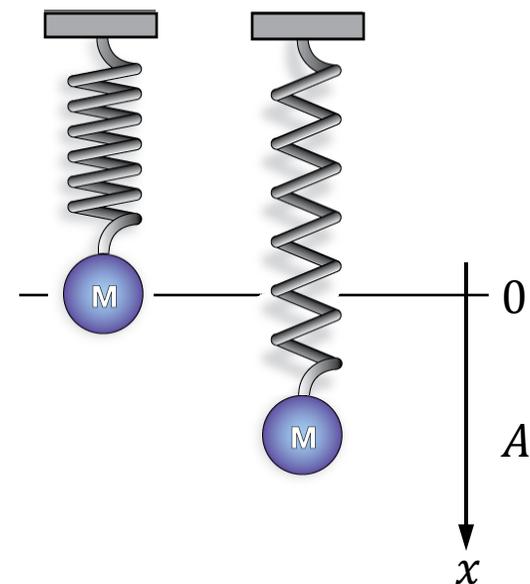
$$-mg\mu_2(L + l) = -\frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{Mv^2}{2[(M + m)g\mu_1 - mg\mu_2]},$$

$$l = \frac{mv^2}{2g\mu_2} - L$$



【例子】 已知弹簧弹性系数为 k ，求将弹簧从平衡位置拉长 A 长度时弹簧所做的功。

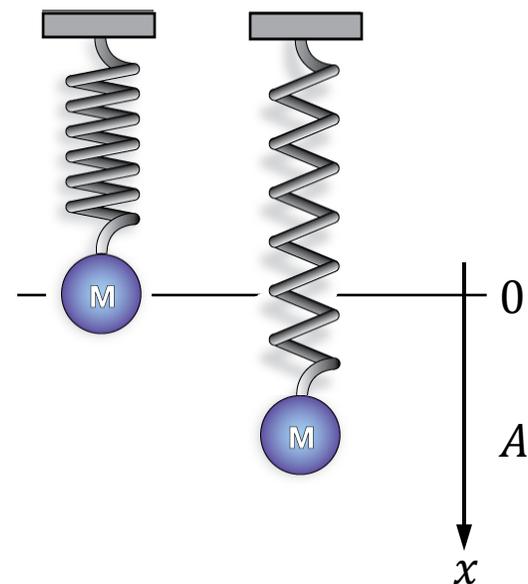


【例子】 已知弹簧弹性系数为 k ，求将弹簧从平衡位置拉长 A 长度时弹簧所做的功。

求解：

$$F = -kx,$$

$$W = \int_0^A F dx = \int_0^A -kx dx = -\frac{1}{2}kA^2$$



- 功率(power): 单位时间内所做的功叫做功率

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

- 功率是个瞬时量, 与路径无关

$$W = \int P dt$$

【例子】 已知力 $F(t) = Ct$ 作用在质量为 m 的小方块上，其中 C 是个常数。 $t = 0$ 时刻，小方块速度为0。求 $t = T$ 时刻该力所做的功。

【例子】已知力 $F(t) = Ct$ 作用在质量为 m 的小方块上，其中 C 是个常数。 $t = 0$ 时刻，小方块速度为0。求 $t = T$ 时刻该力所做的功。

求解：牛顿第二定律

$$m \frac{dv}{dt} = Ct$$

对积分可以得到，

$$v = \frac{C}{2m} t^2$$

功率：

$$P = Fv = \frac{C^2}{2m} t^3$$

功：

$$W = \int_0^T P dt = \frac{C^2}{2m} \int_0^T t^3 dt = \frac{C^2}{8m} T^4$$

- 做功与动能与参考系有关

考虑两个惯性参考系 K 和 K' ，其中 K' 相对于 K 的速度为 \vec{u} ，质点在 K 的位置为 \vec{r} ，速度为 \vec{v} ，根据伽利略变换，在 K' 质点的位置与速度分别为，

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t, \\ \vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} \end{cases}$$

- 参考系 K 中的动能与外力 \vec{F} 做功分别为：

$$T = \frac{1}{2}mv^2, \quad W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- 在 K' 中，动能为与外力做功分别为：

$$T' = \frac{1}{2}mv'^2 = T + \frac{1}{2}mu^2 - m\vec{v} \cdot \vec{u}, \quad W' = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}' = W - \vec{u} \cdot \int \vec{F} dt$$

- 动能定理：

$$T' - T'_0 = T - T_0 - m(\vec{v} - \vec{v}_0) \cdot \vec{u} = W - \vec{u} \cdot (m\vec{v} - m\vec{v}_0) = W - \int \vec{F} dt = W'$$

倒数第二个等号来自牛顿第二定律： $\int \vec{F} dt = m(\vec{v} - \vec{v}_0)$ 。因此在 K' 中动能定理仍然成立

§3. 机械能守恒

- 保守力 (conserved force): 如果一个力所做的功与路径无关, 则称该力为保守力, 反之则称为非保守力或耗散力。
 - 保守力做功仅与初、末时刻位置有关

【例子】重力做功

【例子】摩擦力做功

- 保守力的例子: 引力/重力、弹性力、库仑力、基本相互作用
- 非保守力的例子: 摩擦力、阻力

a. 势能

考虑一个保守力 \vec{F} ，其所做的功，

$$W(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

仅依赖于初末态位置 \vec{r}_1, \vec{r}_2 。根据牛顿-莱布尼茨定理，

$$W(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W(\vec{r}_0, \vec{r}_1) + W(\vec{r}_0, \vec{r}_2)$$

其中， \vec{r}_0 是空间中任意一点。因此可以定义一个函数，

$$U(\vec{r}) = -W(\vec{r}_0, \vec{r})$$

注意这里的符号

其中， \vec{r}_0 是任选的一个参考点。这样以来，任意两点之间的功，

$$W(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$$

函数 $U(\vec{r})$ 就叫做保守力 \vec{F} 所对应的势能(potential energy)。

- 势能的选择依赖于参考点的选择，假如重新选择新的一点 \vec{r}'_0 作为参考点，则势能改变为，

$$U'(\vec{r}) = -W(\vec{r}'_0, \vec{r}) = -W(\vec{r}'_0, \vec{r}_0) - W(\vec{r}_0, \vec{r}) = U(\vec{r}) - U(\vec{r}'_0)$$

换句话说，所有势能会改变一个常数。例如：

- 重力势能的参考点一般选择为地面
- 弹性力的参考点一般选择为平衡位置
- 引力势能、库伦势的参考点一般选择为无穷远

- 重力势能：

$$W(\vec{r}_0, \vec{r}) = -mg\hat{z} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

可以选择地面作为势能零点，即 $U(z = 0) = 0$ ，这样以来，

$$U(\vec{r}) = mgz$$

- 引力场中做功：

$$\begin{aligned}
 W(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\frac{GMm}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} \\
 &= \int_{r_1}^{r_2} -\frac{GMm}{r^2} dr = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1}
 \end{aligned}$$

势能

$$U(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r_0} + U_0$$

其中， r_0 是参考点的位置。如果选无穷远作为势能零点，即 $U(\infty) = 0$ ，引力势能可以简化为，

$$U(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r}$$

• 弹性力做功：

$$W(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

势能:

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x^2 - x_0^2) + U_0$$

取平衡位置为势能零点, 即 $U(x = 0) = 0$, 则势能可以化简为,

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

• 如果知道势能, 也可以求相应的力。例如, 对于弹性力,

$$U(x) - U(x_0) = \int_x^{x_0} F dx$$

因此, U 是 F 的原函数。根据牛顿-莱布尼茨定理,

$$F(x) = -U'(x)$$

应用到弹性力, $F = -kx$ 。对于三维的情形, 需要定义方向导数,

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

b. 机械能守恒

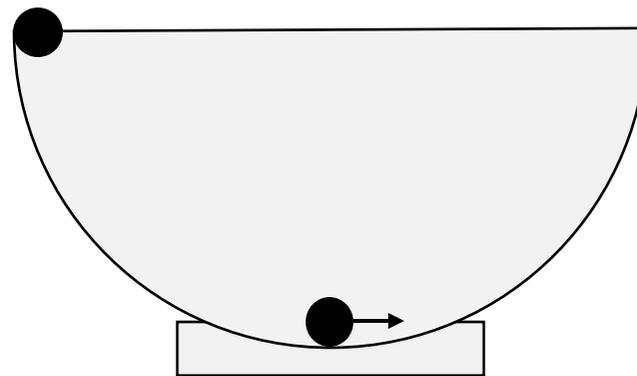
- 根据动能定理,

$$T_2 - T_1 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2),$$
$$\Rightarrow T_1 + U(\vec{r}_1) = T_2 + U(\vec{r}_2)$$

这个式子对于运动过程中任意两点都成立。换句话说, 在运动过程中, $T + U(\vec{r})$ 是个守恒的量, 我们把这个量叫做机械能 (mechanical energy)。

- 能量守恒: 一个闭合体系的不同形式的能量可以转化, 但体系的总能量是守恒的

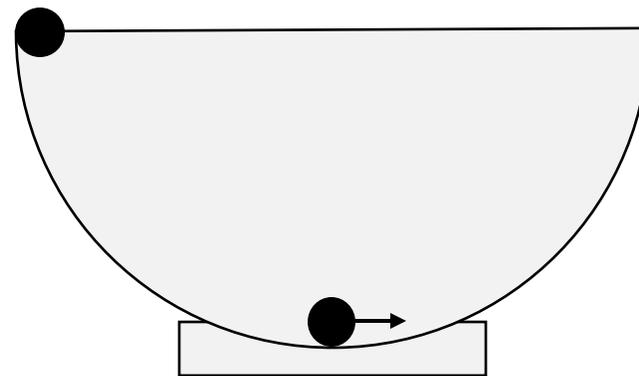
【例子】一个小球从一个半圆形的光滑的碗的边缘静止下落，碗的半径为 R ，忽略球和碗之间的摩擦。求小球到达碗底时的速度。



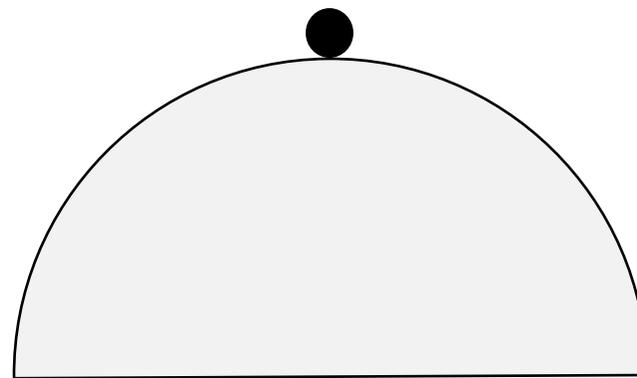
【例子】一个小球从一个半圆形的光滑的碗的边缘静止下落，碗的半径为 R ，忽略球和碗之间的摩擦。求小球到达碗底时的速度。

解：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 &= mgR \\ \Rightarrow v &= \sqrt{2gR}\end{aligned}$$



【例子】一个小球在一个半圆形的穹顶顶部从静止开始下滑，穹顶半径为 R ，忽略穹顶和小球之间的摩擦。求小球脱离穹顶时的位置。



【例子】一个小球在一个半圆形的穹顶顶部从静止开始下滑，穹顶半径为 R ，忽略穹顶和小球之间的摩擦。求小球脱离穹顶是的位置。

解：

设小球脱离穹顶的角度为 θ 。此时，穹顶对于小球的支撑力为0。而重力的分量完全用来提供小球所需要的向心力：

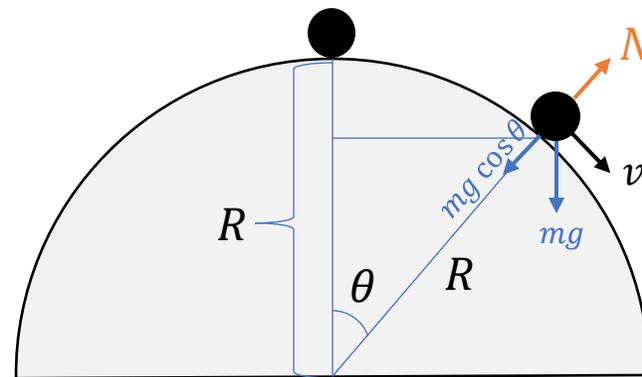
$$\frac{v^2}{R} = g \cos \theta$$

而速度可以通过机械能守恒得到：

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(R - R \cos \theta),$$

联立可得，

$$2(1 - \cos \theta) = \cos \theta \Rightarrow \theta = \arccos \frac{2}{3} \approx 48.2^\circ$$



【例子】如图所示，质量为 m_1, m_2 的两个木块由一个弹性系数为 k 的弹簧相连。垂直放在水平面上。弹簧在力 F 的作用下被压缩。初始时刻，该外力撤去。在此后运动过程中， m_2 从地面跳起。求外力 F 至少多大。

解：以平衡位置为 $z = 0$ 。初始时刻，弹簧在重力和外力的作用下被压缩至 z_0 ：

$$kz_0 = m_1g + F$$

所储存的弹性势能为，

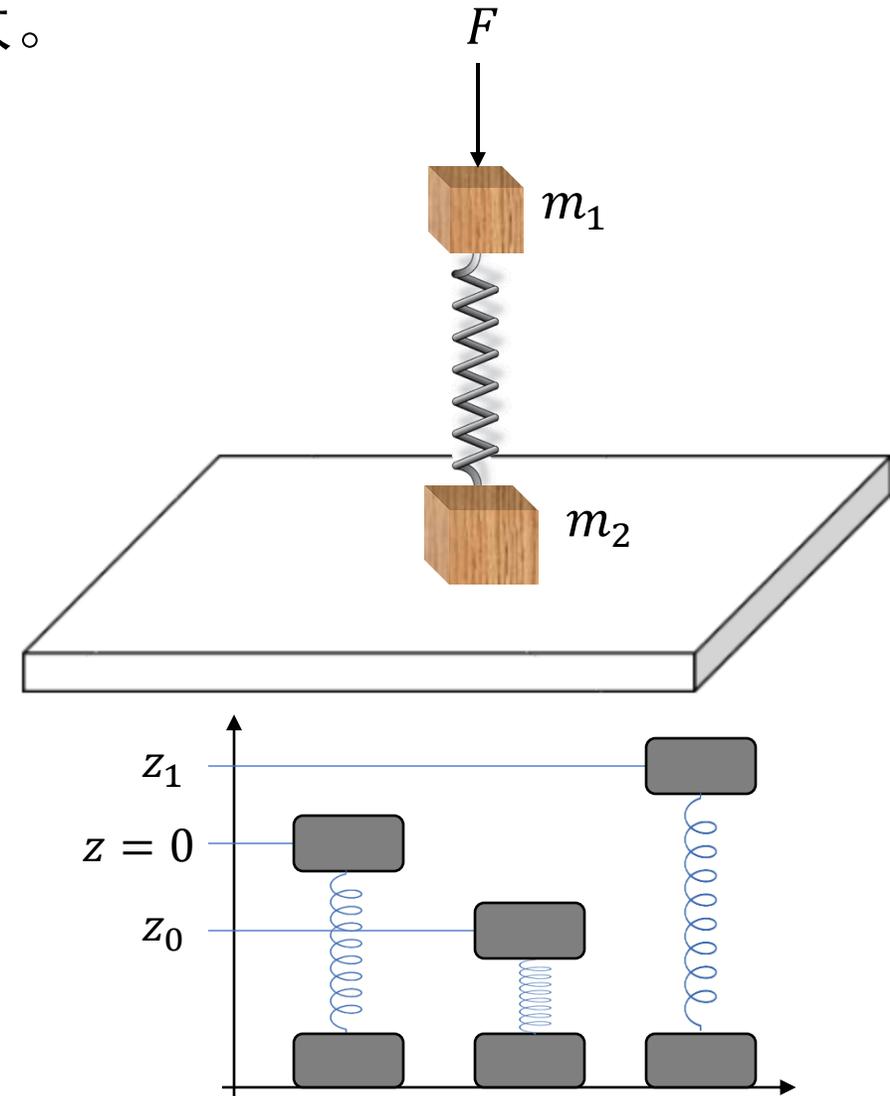
$$U = \frac{1}{2}kz_0^2$$

该势能在外力撤除后使得弹簧伸长最大至 z_1 ，

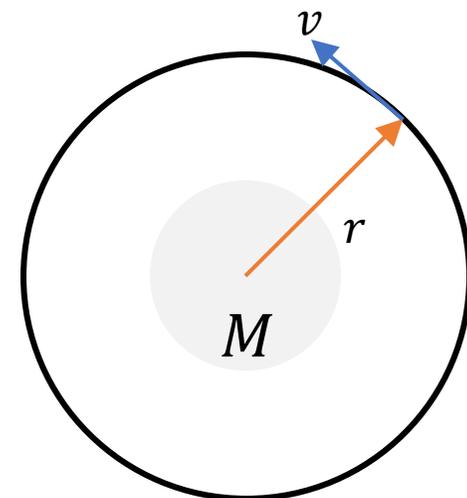
$$kz_1 \geq m_2g$$

从而木块从地面跳起。在这一过程中，机械能守恒，

$$\frac{1}{2}kz_0^2 = \frac{1}{2}kz_1^2 + m_1g(z_0 + z_1) \Rightarrow F \geq (m_1 + m_2)g$$



【例子】 卫星沿着圆轨道运动，轨道半径为 r ，求卫星的总机械能。



【例子】卫星沿着圆轨道运动，轨道半径为 r ，求卫星的总机械能。

解：

根据机械能的定义：

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r},$$

根据牛顿第二定律：

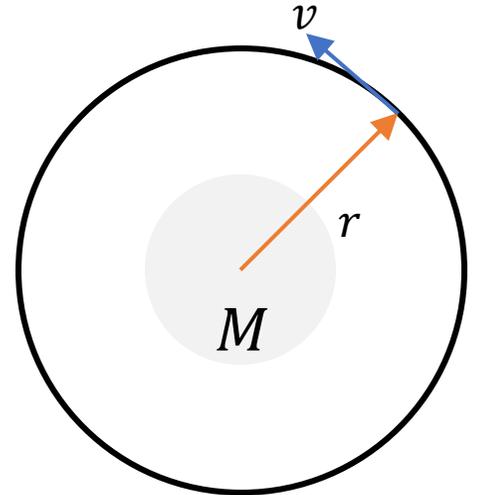
$$m\frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r}$$

由此可得：

$$E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r} < 0$$

因此卫星总能量为负。相对于地面的能量： $\Delta E = mgR_E \left(1 - \frac{R_E}{2(R_E+h)}\right)$

$$r \uparrow, \quad v \downarrow, \quad E \uparrow, \quad T \uparrow$$



【例子】卫星沿着椭圆轨道运动，轨道近地点和远地点距离分别为 r_{min}, r_{max} ，求卫星近地点速度和远地点速度。

【例子】卫星沿着椭圆轨道运动，轨道近地点和远地点距离分别为 r_{min}, r_{max} ，求卫星近地点速度和远地点速度。

解：

能量守恒：

$$\frac{1}{2}mv_{min}^2 - \frac{GMm}{r_{max}} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 - \frac{GMm}{r_{min}}$$

开普勒第二定律：

$$r_{min}v_{max} = r_{max}v_{min}$$

带入能量守恒，消去 v_{min} 可以得到，

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2GM}{r_{min} + r_{max}} \frac{r_{max}}{r_{min}}}, \quad v_{min} = \sqrt{\frac{2GM}{r_{min} + r_{max}} \frac{r_{min}}{r_{max}}}$$

【例子】卫星沿着椭圆轨道运动，已知卫星近地点与远地点距离分别为 r_{min} , r_{max} ，求卫星总能量为 E 。

解：

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 - \frac{GMm}{r_{min}} = E$$

其中，

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2GM}{r_{min} + r_{max}} \frac{r_{max}}{r_{min}}}$$

因此，总能量

$$E = -\frac{GMm}{r_{min} + r_{max}} = -\frac{GMm}{2a}$$

§4. 能量与能源

- 热：理解热的本质是将机械能守恒推广到能量守恒的关键一步
 - 耗散力做功，转化为热（摩擦生热）；热机（蒸汽机）将热转换为功
 - 热功当量：1卡=4.2焦耳
 - 热是一种普遍现象：热力学是现代科学（物理、化学、生物……）宏观理论的基础
- 能量形式：
 - 动能： $\frac{1}{2}mv^2$
 - 势能：弹性力、引力、基本相互作用
 - 热能：
 - 电磁能：
 - 化学能、生物能：
 - 核能：
 - ……

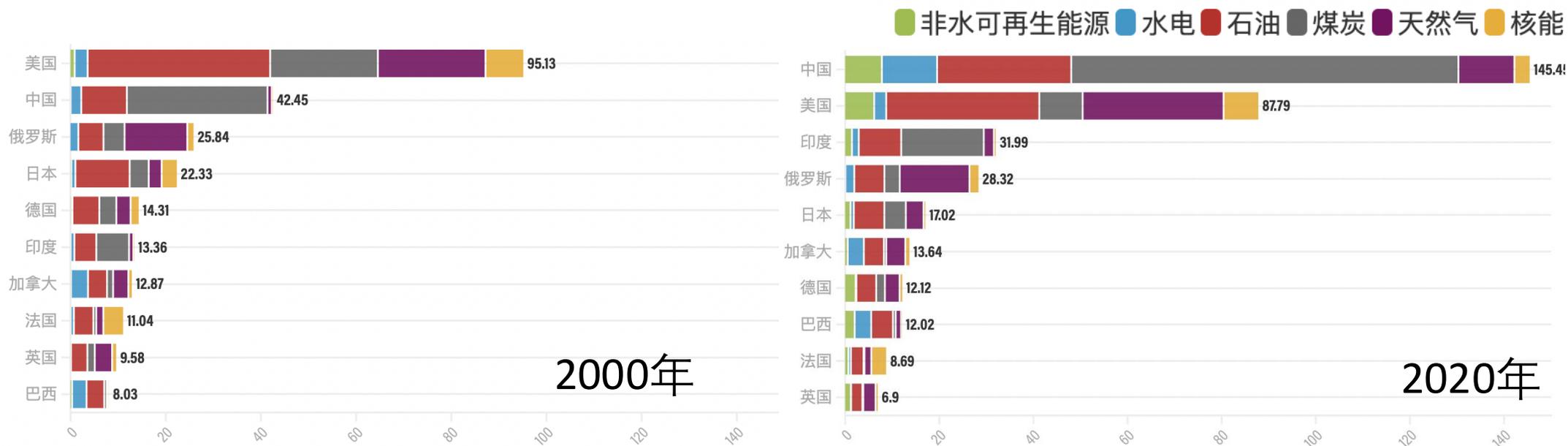
• 能量的转化

	动能	弹性能	引力势/ 重力势能	热能	电磁能	化学能	生物能	核能
动能								
弹性能								
引力势/ 重力势能								
热能								
电磁能								
化学能								
生物能								
核能								

- 能源是人类文明进步的基础和动力，攸关国计民生和国家安全，关系人类生存和发展，对于促进经济社会发展、增进人民福祉至关重要

——《新时代的中国能源发展》白皮书

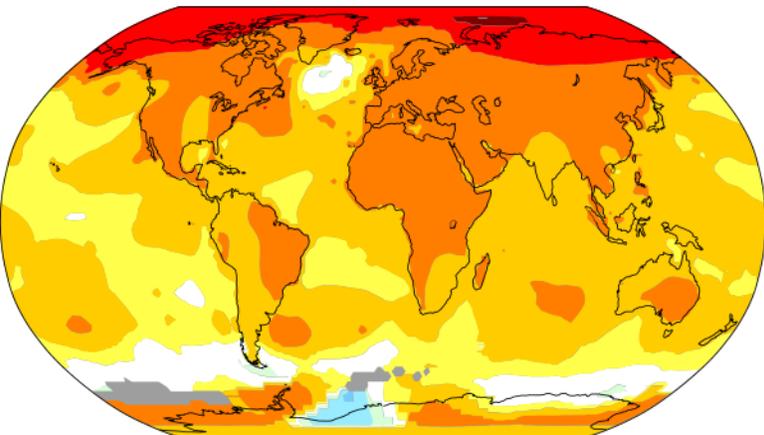
- 现代社会能源结构



“绿水青山就是金山银山”

• 当前能源结构的挑战：

- 化石能源的大量使用带来温室气体CO₂等的排放，由此引发全球气候变化，这是人类在21世纪面临的巨大挑战
- 《巴黎协定》提出全球各国应共同努力确保将全球温升控制在2°C以内，并力争控制在1.5°C以内，以避免灾难性的后果
- 我国已经将应对气候变化全面融入国家经济社会发展的总战略
- 我国的目标：力争于2030年前达到二氧化碳排放峰值、2060年前实现碳中和

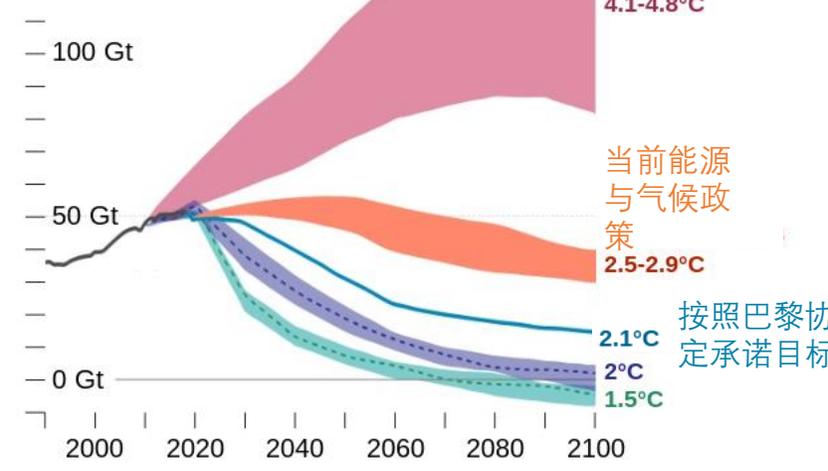


过去50年全球平均温度变化

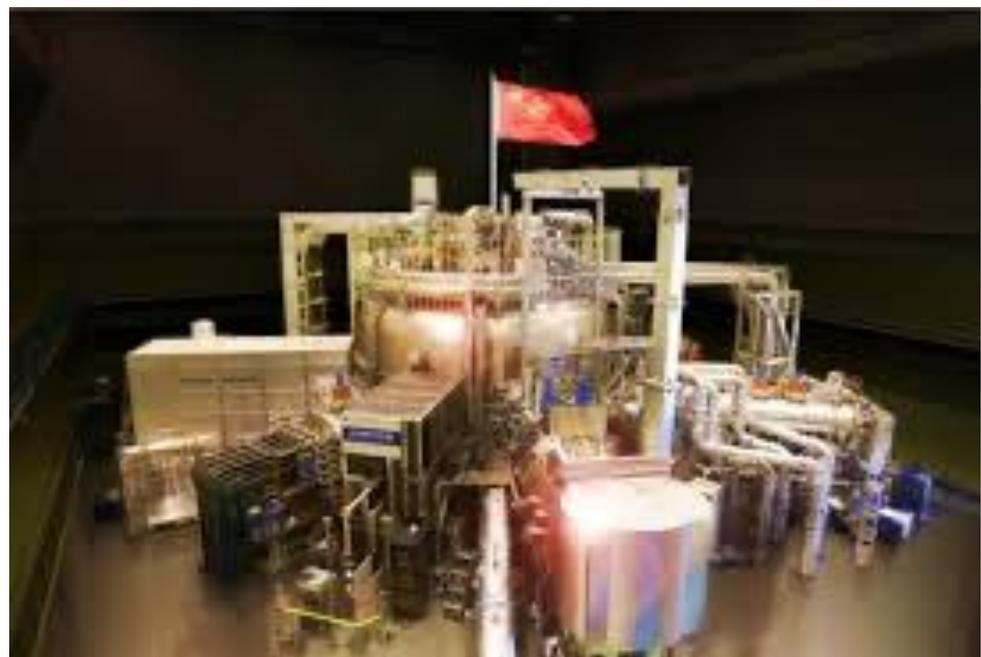
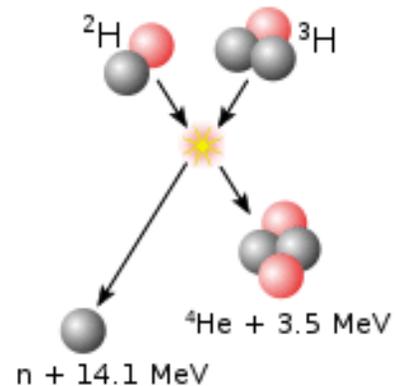


全球变暖的后果：森林火灾、珊瑚礁退化、洪水、沙化

全球等效碳排放量预测(10⁹吨)



- 终极能源之梦
 - 核聚变能源：“人造太阳”



EAST: 世界上第一个全超导托卡马克实验装置

§5. 两体问题

- 对于一个质点在外场中的运动,

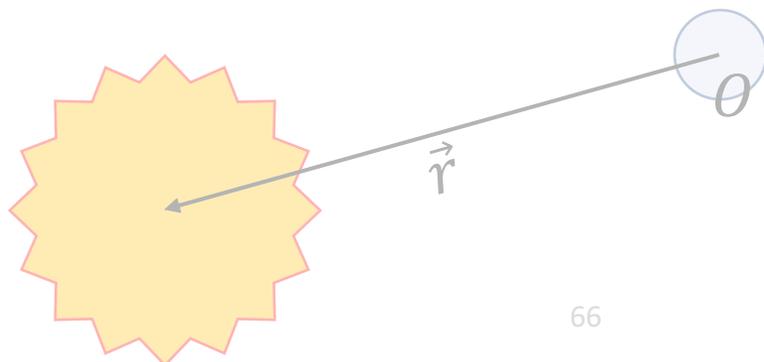
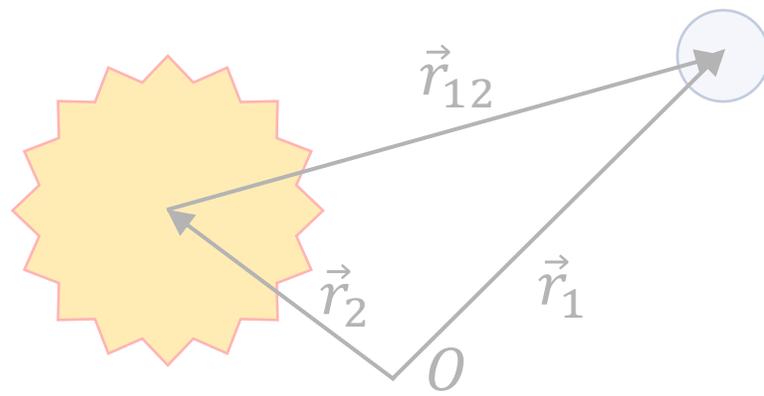
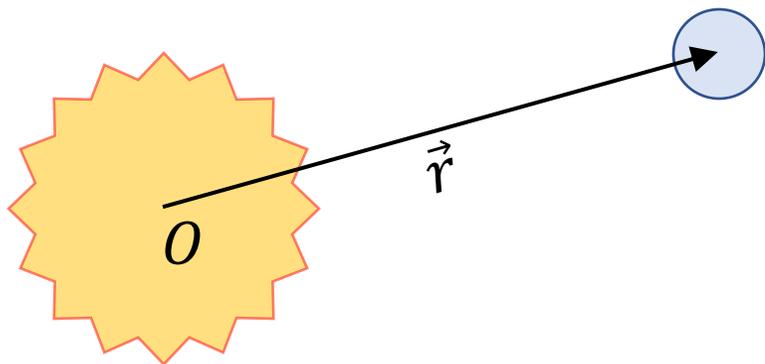
$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = m \frac{d\vec{v}}{dt},$$

可以通过解微分方程求解

- 动能定理、机械能守恒: ($\vec{F} = -\nabla U$)

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r}) = E,$$

单体问题



- 考虑两个质点组成的体系,

两体问题

$$\vec{F}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}, \quad (i = 1, 2)$$

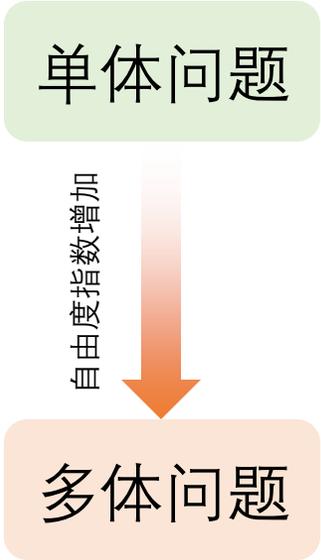
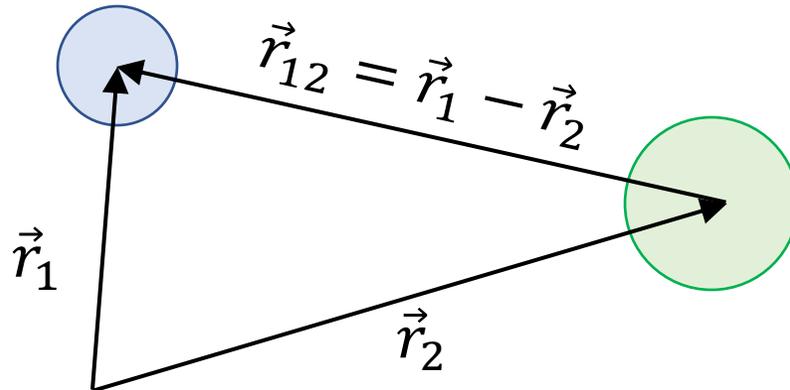
其中, \vec{F}_i 是第 i 个质点的合力 —— 既包括质点之间的相互作用 $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, 也包括其他物体对第 i 个质点的力 \vec{F}_i^{ext} ,

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \vec{F}_{ij}$$

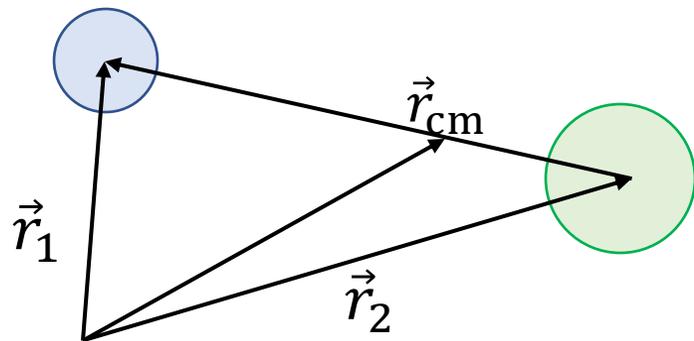
一般把质点系之外物体所施加的力 \vec{F}_i^{ext} 叫做外力。质点之间的力叫做内力。内力仅依赖于质点之间的相对坐标或者相对速度:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

由于两个质点都在运动, 我们需要同时求解这两个质点 \vec{r}_1, \vec{r}_2 。



a. 质心定理



- 考虑一种特殊情况，两个质点组成的孤立体系，即 $F^{\text{ext}} = 0$,

$$\vec{F}_{12} = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt}, \quad \vec{F}_{21} = m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

- 首先，总动量守恒，

$$\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \frac{d}{dt} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$$

- 定义质心坐标和质心速度：

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{v}_{\text{cm}} = \frac{d\vec{r}_{\text{cm}}}{dt}$$

这样以来，总动量 $\vec{p} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{\text{cm}}$ 。由动量守恒我们可以得到，孤立的两体体系的质心保持静止或者匀速直线运动。

- 由于质心保持静止或做匀速直线运动，我们可考虑质点1相对于质心的位移，

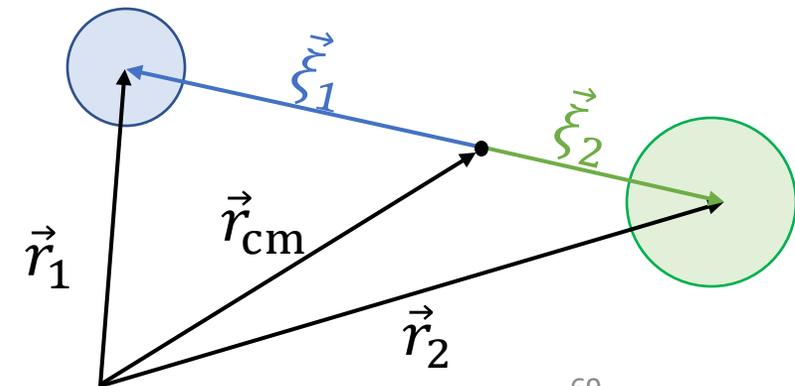
$$\vec{\xi}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_{\text{cm}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

其运动：

$$m_1 \frac{d^2 \vec{\xi}_1}{dt^2} = \vec{F}$$

此处， $\vec{F} = \vec{F}_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{F}(\vec{\xi}_1)$ 。因此，质点1相对于质心的运动类似于一个质点在外场中的运动。

因此，孤立体系的两体问题总可以化为单体问题



【例子】

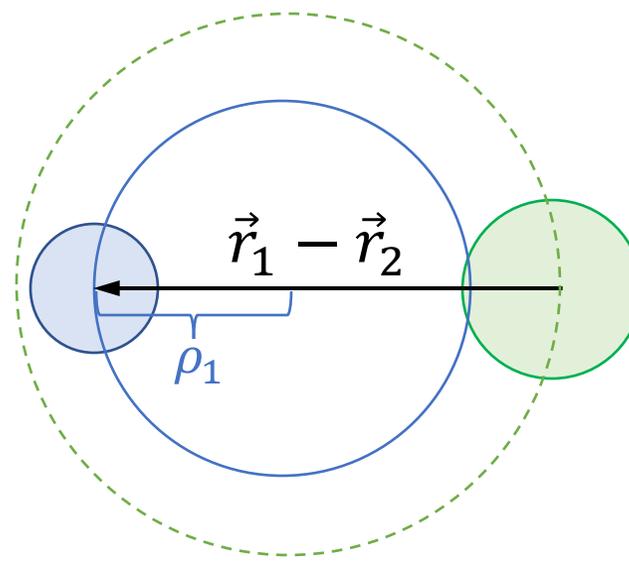
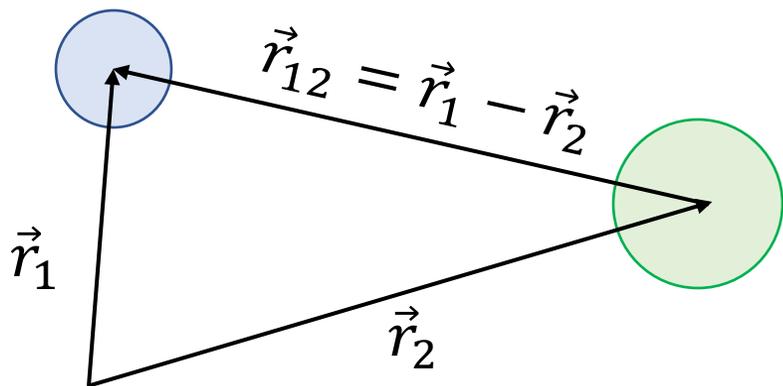
- 单体问题：质量为 m 的天体在质量为 $M \gg m$ 的天体引力作用下做圆周运动

$$-\frac{GMm}{r^3}\vec{r} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}, \quad (\vec{r} = \vec{r}_m - \vec{R}_M)$$

- 两体问题：质量为 m_1 和 m_2 的天体在引力作用下做圆周运动

$$-\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} \Rightarrow \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} = \frac{m_1v_1^2}{\rho_1}$$

$$-\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}$$



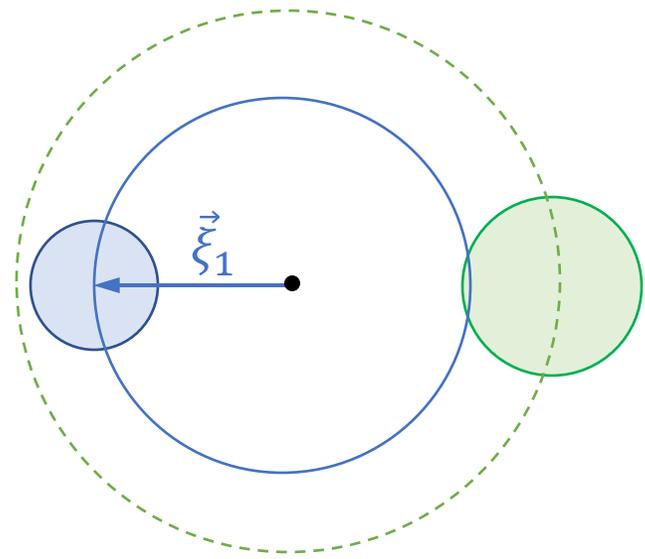
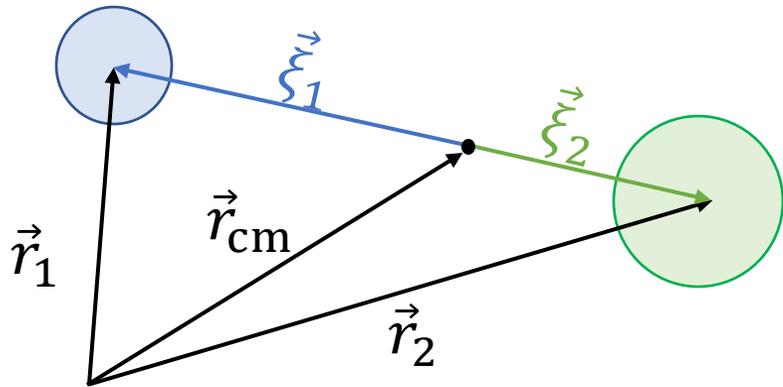
【例子】

- 两体问题：质量为 m_1 和 m_2 的天体在引力作用下做圆周运动

$$-\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} \Rightarrow \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} = \frac{m_1 v_1^2}{\rho_1},$$

- 单体问题：相对于质心的运动: ($\vec{\xi}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_{cm} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$)

$$-\frac{Gm_1m_2}{\left|\frac{m_1+m_2}{m_2}\vec{\xi}_1\right|^3} \frac{m_1+m_2}{m_2} \vec{\xi}_1 = m_1 \frac{d^2\vec{\xi}_1}{dt^2} \Rightarrow \frac{Gm_1m_2}{\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right)^2 \xi_1^2} = \frac{m_1 u_1^2}{\xi_1}$$



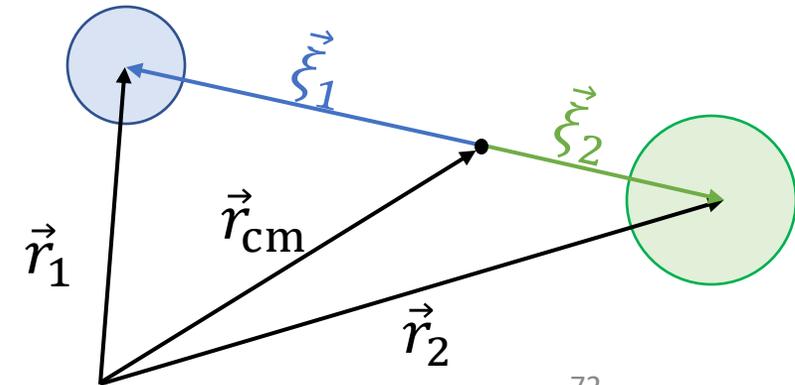
类似地，考虑质点2相对于质心的位移，

$$\vec{\xi}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_{\text{cm}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

其运动：

$$m_2 \frac{d^2 \vec{\xi}_2}{dt^2} = -\vec{F}$$

因此，孤立体系的两体问题总可以化为单体问题



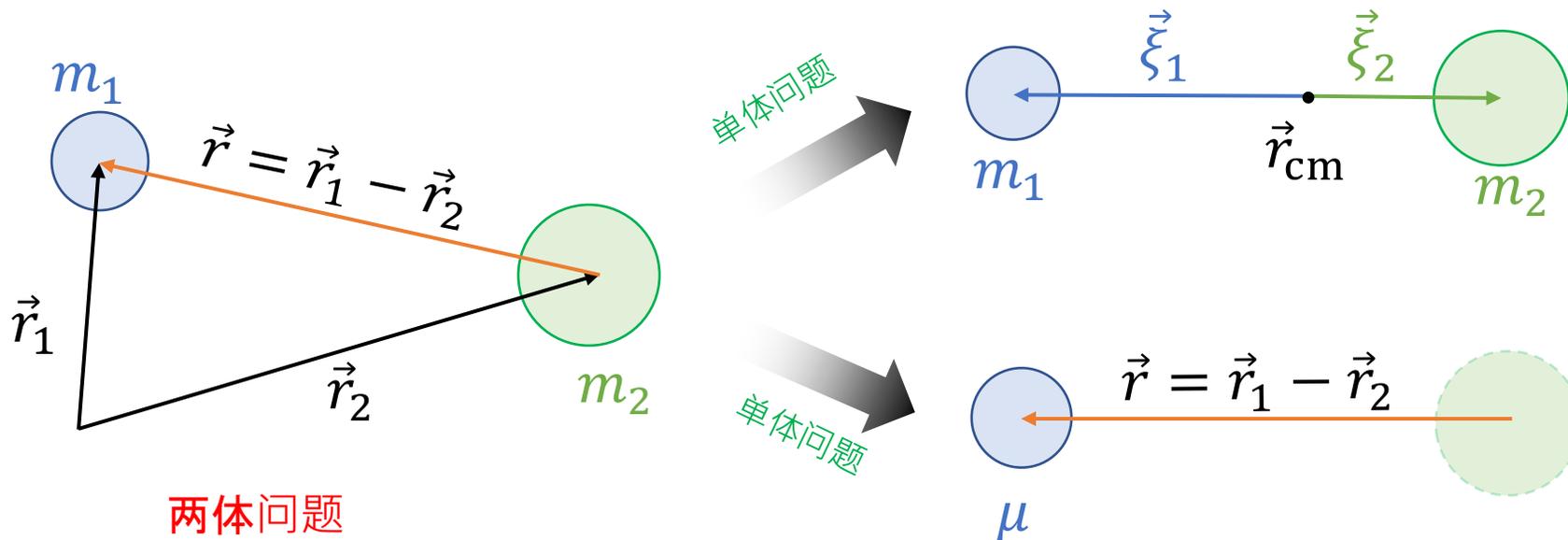
实际上，两个方程并不独立，很显然，

$$m_1 \vec{\xi}_1 = -m_2 \vec{\xi}_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

因此也可以直接考虑相对位置： $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_2$ ，其满足动力学方程，

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

此处， $\vec{F} = \vec{F}_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ 不变， $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ 叫做折合质量。因此，两体之间的相互作用也可以视为两个质点之间的相对运动，但取质量为折合质量。



两体问题

【例子】

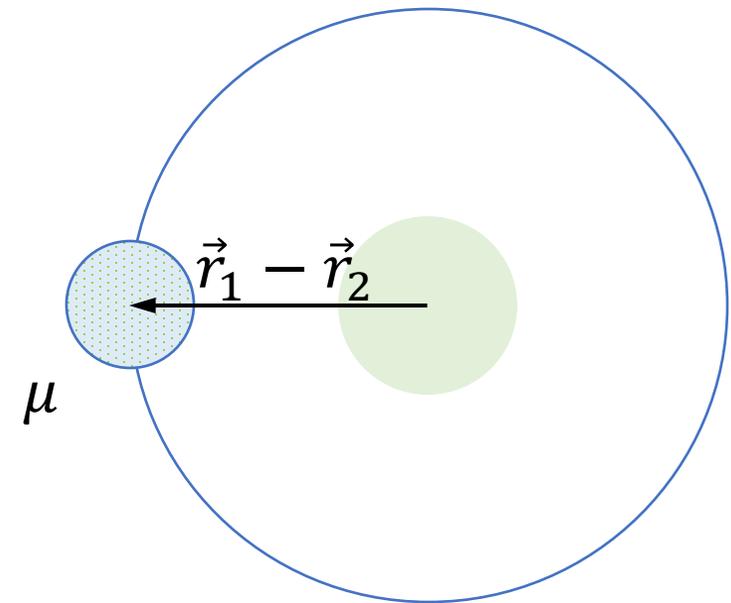
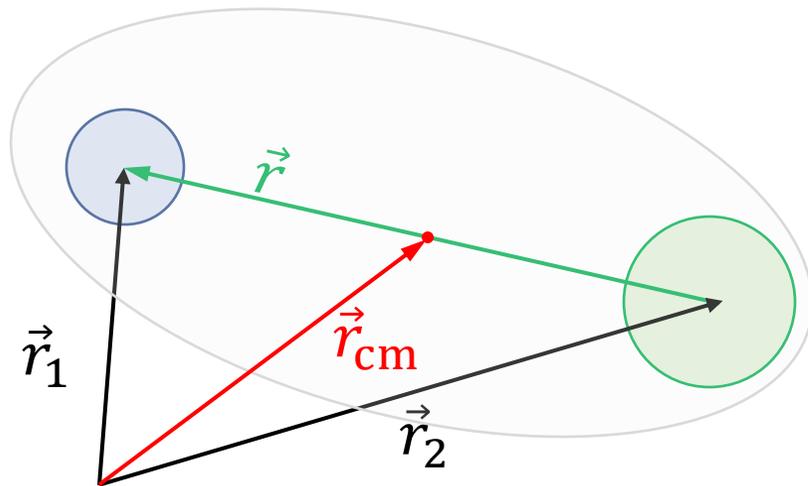
- 两体问题：质量为 m_1 和 m_2 的天体在引力作用下做圆周运动

$$-\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} \Rightarrow \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} = \frac{m_1 v_1^2}{\rho_1},$$

- 单体问题：质点之间的相对运动: ($\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$)

$$-\frac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{r} = \mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \Rightarrow \frac{Gm_1m_2}{r^2} = \frac{\mu v^2}{r}$$

注意，力不变

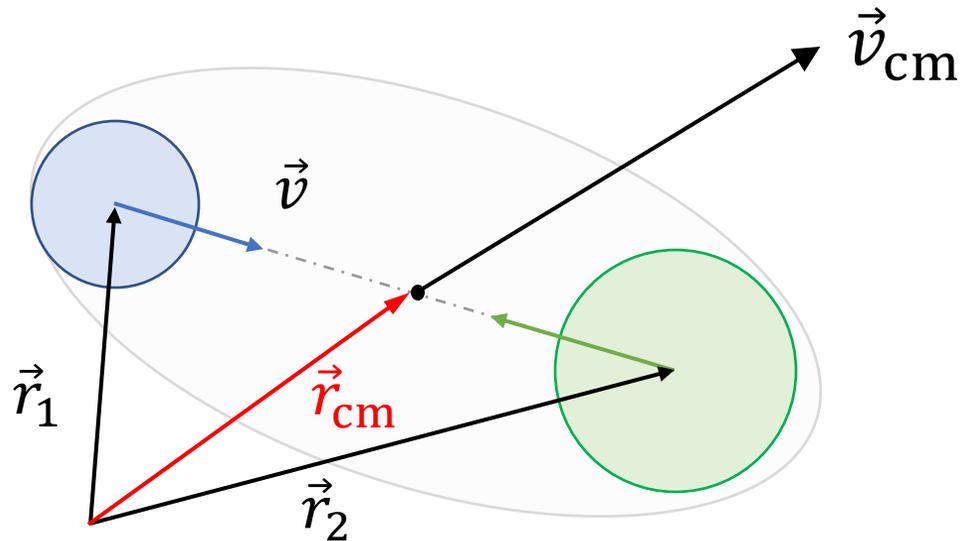


- 总结一下：孤立体系的两体运动可以视为质心运动与相对运动的叠加，

$$\frac{d^2 \vec{r}_{\text{cm}}}{dt^2} = 0,$$

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

这里， $\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$



也可以直接引入相对于质心的坐标：

$$m_i \frac{d^2 \vec{\xi}_i}{dt^2} = \vec{F}_i$$

【例子】地球绕太阳运动，等效于地球绕地日之间的质心运动。由于太阳质量远大于地球质量，质心位置非常靠近太阳中心，

$$\xi_S = \frac{M_E}{M_S + M_E} R_{ES} \approx \frac{M_E}{M_S} R_{ES} = 4 \times 10^5 \text{m} < R_S = 7 \times 10^8 \text{m}$$

【例子】地球绕太阳运动，也可以等效为太阳不动，地球以折合质量绕太阳运动。地日折合质量为，

$$\mu = \frac{M_E M_S}{M_E + M_S} \approx M_E \left(1 - \frac{M_E}{M_S} \right)$$

【例子】地球与月球之间的折合质量

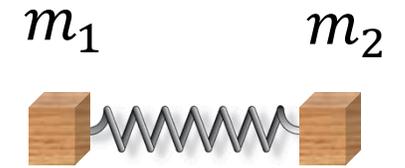
$$\mu = \frac{M_E M_M}{M_E + M_M} \approx 0.99 M_M$$

【例子】等质量双星之间的折合质量，

$$\mu = \frac{m^2}{2m} = \frac{1}{2} m$$

$$\begin{aligned} \frac{M_S}{M_E} &= 3.3 \times 10^5 \\ \frac{M_M}{M_E} &= 1.23 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

【例子】 质量为 m_1 和 m_2 的木块连在弹性系数为 k 的轻弹簧两端。整个系统放在光滑平面上振动。求振动周期。



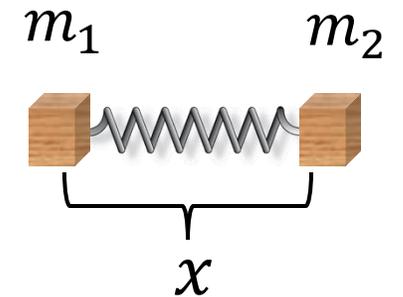
【例子】质量为 m_1 和 m_2 的木块连在弹性系数为 k 的轻弹簧两端。整个系统放在光滑平面上振动。求振动周期。

解：

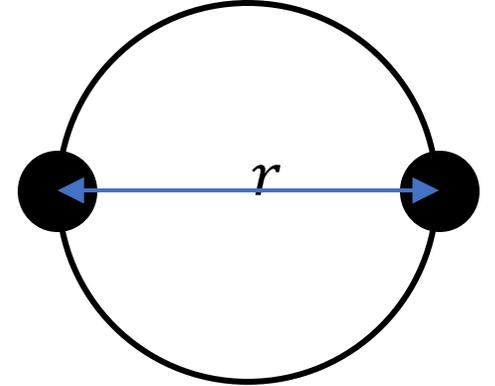
$$\mu a = -kx$$

这里， $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ 为折合质量， x 为木块之间的相对距离， $a = \ddot{x}$ 为相对加速度。类比弹簧振子的情形，该系统的振动周期为，

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)k}}$$



【例子】质量相等的双星在万有引力作用下做圆周运动，已知双星距离为 r ，每个恒星质量为 m 。求轨道周期。



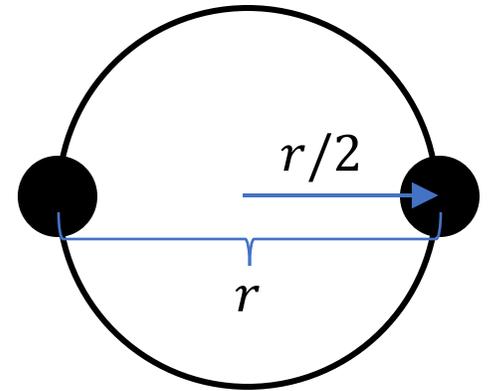
【例子】质量相等的双星在万有引力作用下做圆周运动，已知双星距离为 r ，每个恒星质量为 m 。求轨道周期。

解：每个恒星绕质心做圆周运动，轨道半径为 $\rho = \frac{1}{2}r$

$$m \frac{v^2}{r/2} = \frac{Gm^2}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{Gm}{2r}}$$

这里 v 为任一恒星速度。周期，

$$T = \frac{2\pi r/2}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{2Gm}}$$



【例子】质量相等的双星在万有引力作用下做圆周运动，已知双星距离为 r ，每个恒星质量为 m 。求轨道周期。

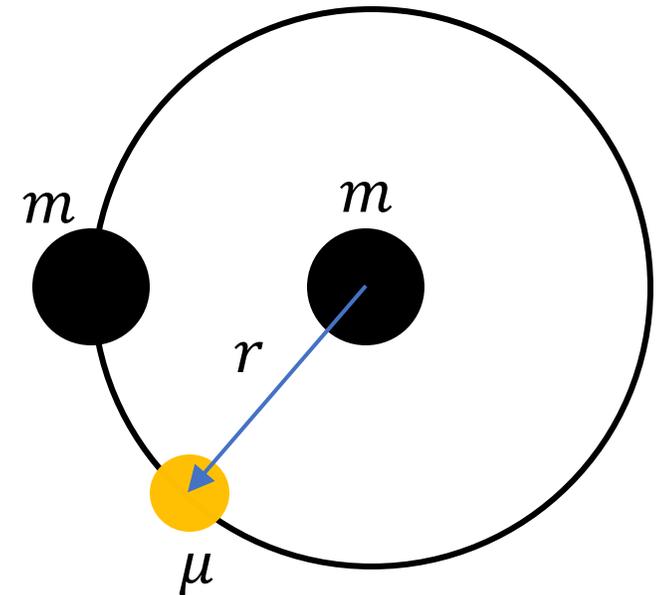
解：采用相对运动与折合质量 $\mu = \frac{m^2}{2m} = \frac{1}{2}m$,

$$\mu \frac{v^2}{r} = \frac{Gm^2}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Gm}{r}}$$

注意，引力
质量不变

这里 r, v 为两个恒星之间的相对距离与相对速度。周期，

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{2Gm}}$$



最著名的双星系统是天狼星。双星系统(binary star)提供了测量远处恒星质量的工具。宇宙中大约有一半的恒星处于双星系统中。

b. 柯尼希定理 (König's theorem)

- 根据前面的分析，从动力学的视角看，孤立体系的两体运动可以视为质心运动与相对运动的叠加。
- 很多问题从能量的角度分析更方便。因此一个自然的问题是，体系的能量是否也能分解为质心运动与相对运动？
- 柯尼希定理：两体动能可以分解为质心动能与相对运动动能之和：

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}\mu v^2$$

这里， $\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}$ 是质心速度， $M = \sum_i m_i$ 为总质量， $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$

为相对速度， $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ 为折合质量。



Johann S. König

证明:

证明:

右

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{m_1^2 \vec{v}_1^2 + m_2^2 \vec{v}_2^2 + 2m_1 m_2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(m_1^2 + m_1 m_2)}{m_1 + m_2} v_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2^2 + m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_2^2 + \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \\ &= \text{左} \end{aligned}$$

• 势能:

$$W_1 = \int \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 = -\phi(\vec{r}_1) + \phi(\vec{r}_1^{(0)}),$$

$$W_2 = \int \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 = -\varphi(\vec{r}_2) + \varphi(\vec{r}_2^{(0)})$$

根据动能定理,

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = W_1 + W_2$$

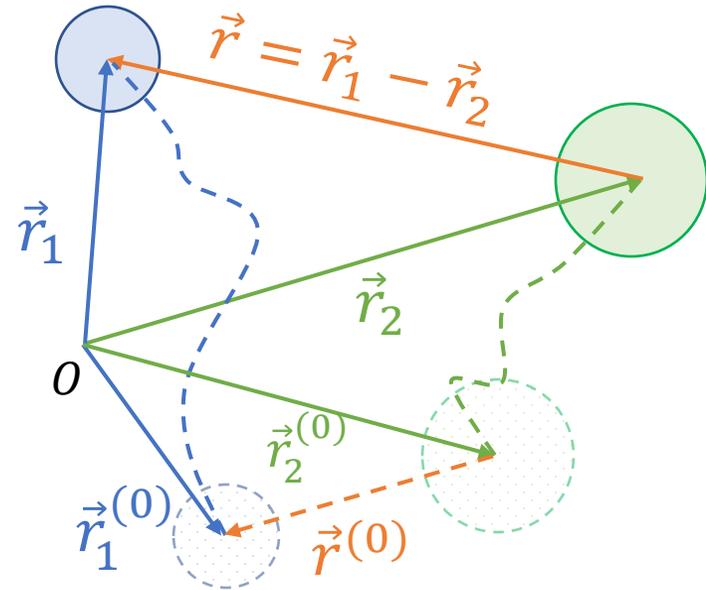
根据牛顿第三定律,

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$

因此,

$$W_1 + W_2 = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \equiv V(\vec{r}^{(0)}) - V(\vec{r})$$

其中, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ 为相对坐标, $\vec{F} = \vec{F}_{21} = \vec{F}(\vec{r})$ 仅依赖于相对坐标。因此, 可以引入一个相对势能, $V(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_1) + \varphi(\vec{r}_2)$, 它仅依赖于相对坐标。



- 因此，对于孤立的两质点体系，能量守恒可以写成，

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m_1(v_1^{(0)})^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2^{(0)})^2 + V(\vec{r}^{(0)})$$

- 定义总能量(总机械能)，

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

- 根据柯尼希定理，总能量可以写成，

$$E = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 + V(\vec{r})$$

其中，第一部分仅与质心运动有关，第二部分仅与内部相互作用有关。

- 对于孤立的两粒子体系，质心静止或做匀速直线运动。因此存在一个特殊参考系，质心是静止的。这个参考系叫做质心参考系(center of mass frame)。在质心参考系，粒子之间仅有相对运动，总能量 E 在质心参考系最低，仅包含相对动能和势能

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + V(r)$$

【例子】计算两个质点之间的相对万有引力势能，已知质点的质量为 m_1, m_2 ，距离为 r 。

解：相对势能

$$U(r) - U(\infty) = - \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

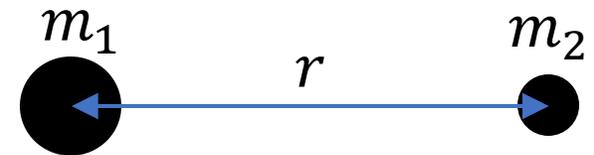
此处取了无穷远为相对势能零点，即取 $U(\infty) = 0$ 。

$$\vec{F} = \vec{F}_{12} = - \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

$\vec{r} = \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ 为相对位置。积分可以得到，

$$U(r) = - \frac{Gm_1m_2}{r}$$

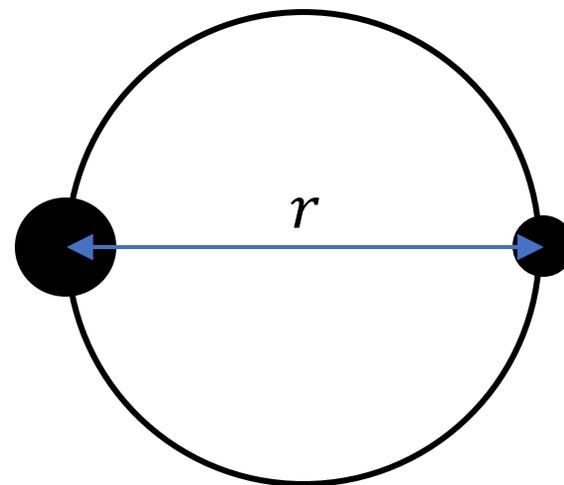
结果与单个质点在引力场中的势能相同



【例子】质量为 m_1, m_2 的双星在万有引力作用下做圆周运动，已知双星距离为 r ，求在质心参考系中，双星系统的总机械能。

解：

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{Gm_1m_2}{r}$$



此处， r, v 是双星之间的相对坐标和相对速度。 $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ 为折合质量。圆轨道运动满足，

$$\frac{\mu v^2}{r} = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \Rightarrow \mu v^2 = \frac{Gm_1m_2}{r}$$

因此总机械能为，

$$E = -\frac{Gm_1m_2}{2r}$$

- 考虑非孤立的两质点体系，其质心满足：

$$\frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = \frac{m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt}}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow M \frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = \vec{F}_{\text{tot}}$$

其中， $\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ ， $M = m_1 + m_2$ 为总质量，而 \vec{F}_i 为第 i 个质点所受的合力，
 $\vec{F}_1 = \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_{12}$ ， $\vec{F}_2 = \vec{F}_2^{\text{ext}} + \vec{F}_{21}$

其中， \vec{F}_i^{ext} 为第 i 质点所受的合外力， \vec{F}_{ij} 为该质点受到的第 j 个质点的相互作用，即内力。根据牛顿第三定律， $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ ，因此

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}} \equiv \vec{F}^{\text{ext}}$$

- 推广形式的质心定理*:

$$M \frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}$$

这是外力不为零时质心定理，在刚体运动中有比较重要的应用。

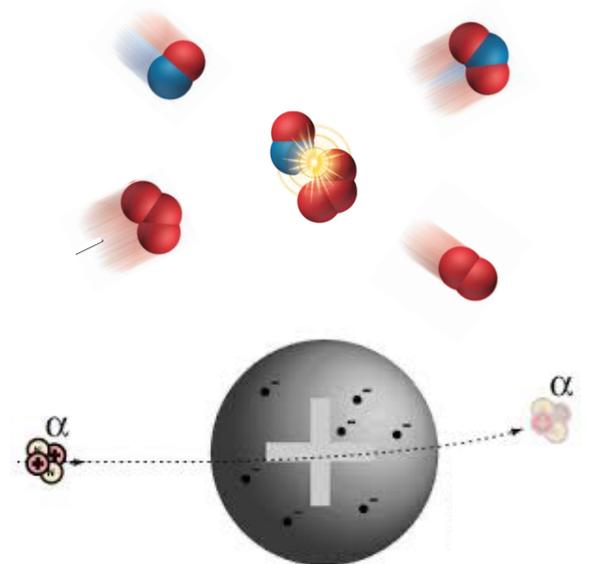
类似地，容易得到外力不为零时的柯尼希定理：

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + V_1(\vec{r}_1) + V_2(\vec{r}_2) + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ &= \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + V_1(\vec{r}_{\text{cm}} + x_2 \vec{r}) + V_2(\vec{r}_{\text{cm}} + x_1 \vec{r}) + \frac{1}{2} \mu v^2 + V(\vec{r}) \end{aligned}$$

此处， $x_i = m_i/M$ ， V_i 为外力 \vec{F}_i^{ext} 所对应的势能。注意，此时不能保证质心运动与相对运动的分离。

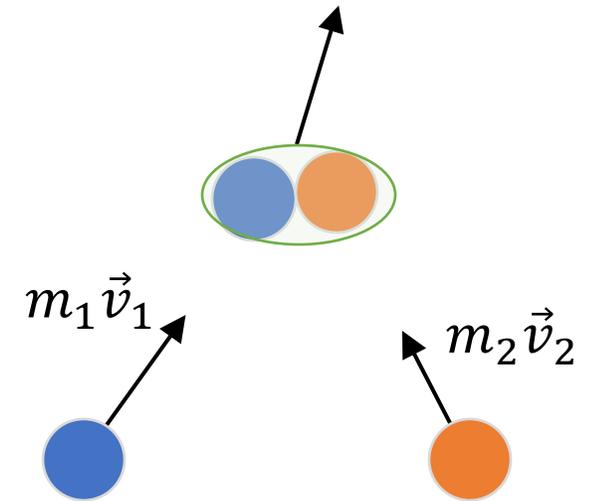
§6. 碰撞 (collision)

- 碰撞是一类广泛的相互作用过程，尤其在微观世界有着主导性的应用
 - 微观粒子之间的反应和相互作用可以用碰撞来描述
 - 微观粒子的碰撞——粒子对撞机——是我们研究微观世界的主要手段
- 基本特征：
 - 碰撞前后，物体距离很远，可以视为自由运动状态
 - 碰撞过程发生的时间很短，动力学细节并不重要 —— 动量守恒
 - 可以通过碰撞前后的状态来推测相互作用的性质
 - 碰撞过程中可能存在机械能与其他能量的转化 —— 机械能不一定守恒



【例子】 质量为 m_1 的粒子以 \vec{v}_1 的速度撞上质量为 m_2 、速度为 \vec{v}_2 粒子。已知碰撞过后两个粒子黏在一起，求，

- a) 碰撞后两个粒子的速度 \vec{v}' ;
- b) 碰撞前后动能的改变。



【例子】质量为 m_1 的粒子以 \vec{v}_1 的速度撞上质量为 m_2 、速度为 \vec{v}_2 粒子。已知碰撞过后两个粒子黏在一起，求，

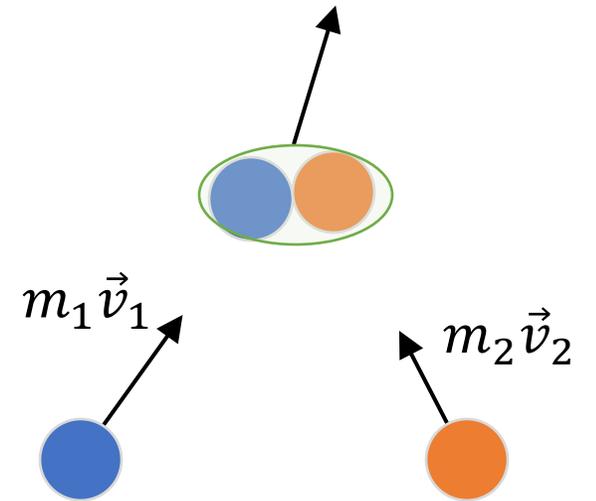
- a) 碰撞后两个粒子的速度 \vec{v}' ;
- b) 碰撞前后动能的改变。

解：

a) 动量守恒：

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &= (m_1 + m_2) \vec{v}' \\ \Rightarrow \vec{v}' &= \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \Delta T &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \vec{v}'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ &= -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 \leq 0 \end{aligned}$$



【例子】质量为 m 的粒子以 \vec{v}_1 的速度撞上质量为 m_2 、速度为 \vec{v}_2 粒子。已知碰撞过后两个粒子黏在一起，求，

- a) 碰撞后两个粒子的速度 \vec{v}' ;
- b) 碰撞前后动能的改变。

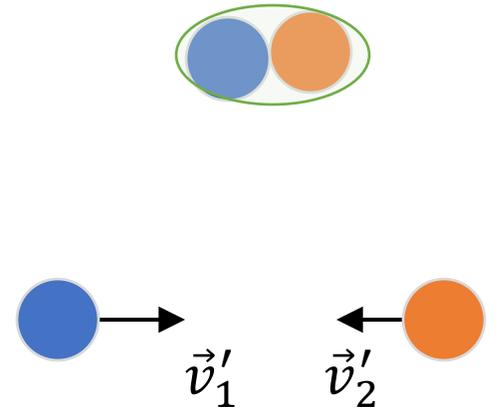
如果我们重新在质心参考系分析这个问题，会发现问题变得非常简单：

在质心参考系，碰撞前两个粒子做相对运动，相对速度为 $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ ；碰撞后，两个粒子静止。

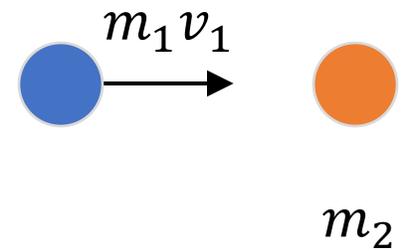
因此，粒子的相对动能在碰撞过程中损失掉了，即

$$\Delta T = -\frac{1}{2}\mu v^2$$

动能的损失转变成了热能



【例子】 质量为 m 的粒子以 v_1 的速度对心撞上质量为 m_2 的静止粒子。已知碰撞过程中能量守恒，求碰撞后两个粒子的速度 v'_1, v'_2 。



【例子】质量为 m 的粒子以 v_1 的速度对心撞上质量为 m_2 的静止粒子。已知碰撞过程中能量守恒，求碰撞后两个粒子的速度 v'_1, v'_2 。

解：

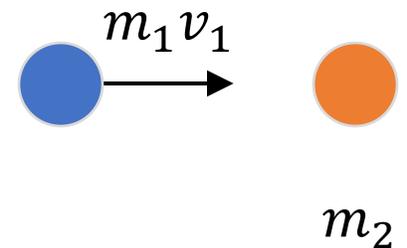
动量守恒

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

能量守恒

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

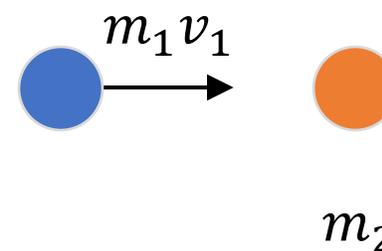
$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$



思考：特殊情况 $m_1 = m_2$ 、
 $m_1 \ll m_2$ 、 $m_1 \gg m_2$

【例子】质量为 m 的粒子以 v_1 的速度对心撞上质量为 m_2 的静止粒子。已知碰撞过程中能量守恒，求碰撞后两个粒子的速度 v'_1, v'_2 。

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$



思考：特殊情况 $m_1 = m_2$ 、
 $m_1 \ll m_2$ 、 $m_1 \gg m_2$

【例子】质量为 m 的粒子以 v_1 的速度对心撞上质量为 m_2 的静止粒子。已知碰撞过程中能量守恒，求碰撞后两个粒子的速度 v'_1, v'_2 。

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

1. $m_1 = m_2$:

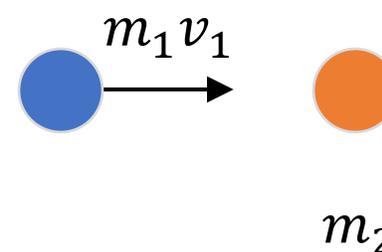
$$v'_1 = 0, v'_2 = v_1$$

2. $m_1 \gg m_2$:

$$v'_1 = v_1, v'_2 = 2v_1$$

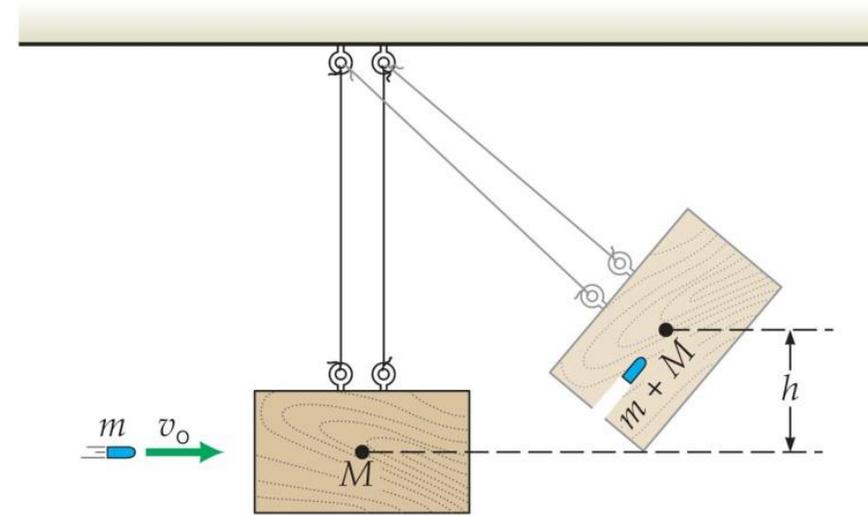
3. $m_1 \ll m_2$:

$$v'_1 = -v_1, v'_2 = 0$$



思考：特殊情况 $m_1 = m_2$ 、
 $m_1 \ll m_2$ 、 $m_1 \gg m_2$

【例子】 质量为 m 的子弹以 v_0 的速度射向质量为 M 的垂直悬挂的木块中，并嵌入其中。已知受击打后，木块上升的最高点高度为 h 。求子弹速度 v_0 。



【例子】质量为 m 的子弹以 v_0 的速度射向质量为 M 的垂直悬挂的木块中，并嵌入其中。已知受击打后，木块上升的最高点高度为 h 。求子弹速度 v_0 。

求解：

子弹打击木块前后动量守恒，

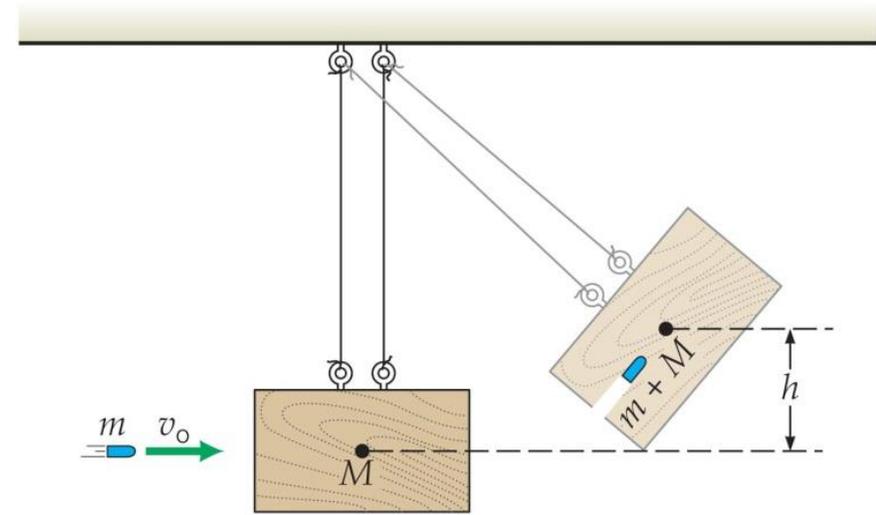
$$mv_0 = (m + M)v$$

木块此后的运动过程中机械能守恒，

$$\frac{1}{2}(m + M)v^2 = (m + M)gh$$

$$v_0 = \sqrt{2gh} \left(1 + \frac{M}{m} \right)$$

子弹打击木块过程中能量守恒吗？



【例子】质量为 m 的子弹以 v_0 的速度射向质量为 M 的垂直悬挂的木块中，并嵌入其中。已知受击打后，木块上升的最高点高度为 h 。求子弹速度 v_0 。

求解：

子弹打击木块前后动量守恒，

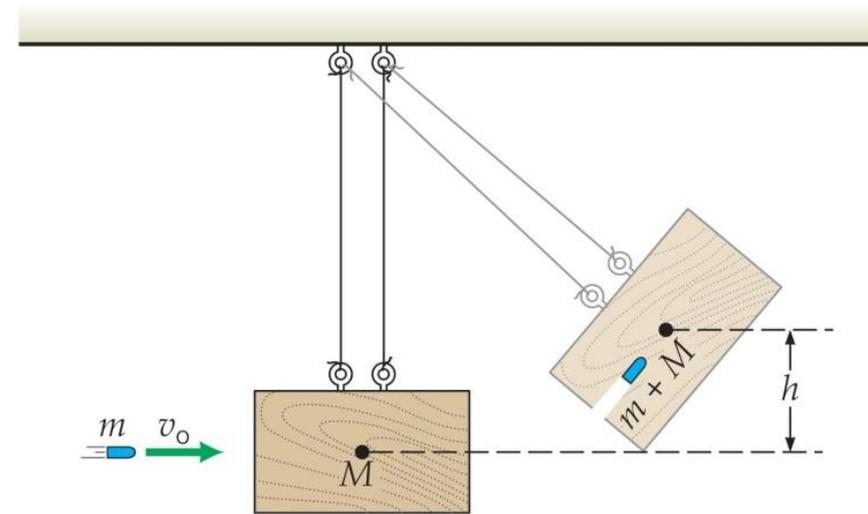
$$mv_0 = (m + M)v$$

木块此后的运动过程中机械能守恒，

$$\frac{1}{2}(m + M)v^2 = (m + M)gh$$

$$v_0 = \sqrt{2gh} \left(1 + \frac{M}{m}\right)$$

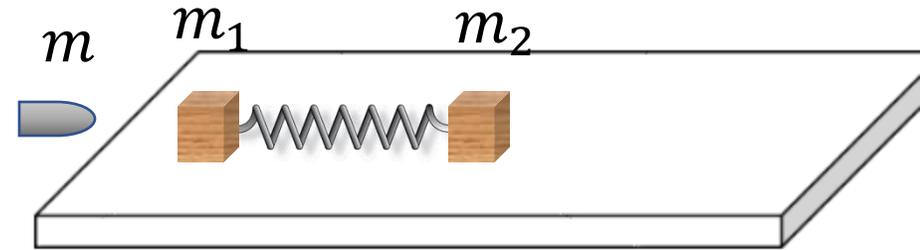
子弹打击木块过程中能量守恒吗？



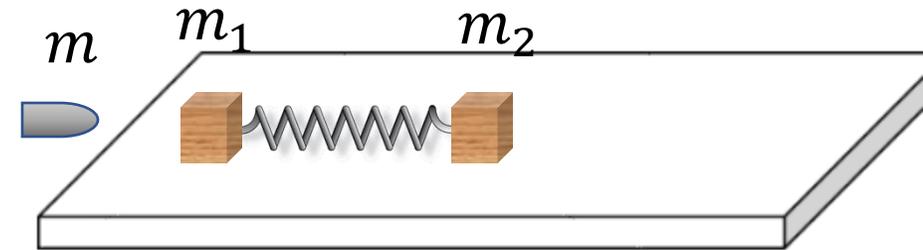
$$T_0 = \frac{1}{2}mv_0^2,$$
$$T = \frac{1}{2}(m + M)v^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2}{m + M} v_0^2,$$
$$\frac{T}{T_0} = \frac{m}{m + M} < 1$$

摩擦力做了负功

【例子】如图所示，质量为 m_1, m_2 的两个木块静止在光滑水平面上，中间连着弹性系数为 k 的弹簧。一颗质量为 m 的子弹，以的水平速度 v 击中并嵌入 m_1 。求弹簧最多压缩多少。



【例子】如图所示，质量为 m_1, m_2 的两个木块静止在光滑水平面上，中间连着弹性系数为 k 的弹簧。一颗质量为 m 的子弹，以的水平速度 v 击中并嵌入 m_1 。求弹簧最多压缩多少。



解：第一阶段，子弹击中并嵌入 m_1 ，动量守恒，

$$mv = (m + m_1)v'$$

子弹- m_1 系统总动能：

$$T = \frac{1}{2}(m + m_1)v'^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2}{m + m_1} v^2$$

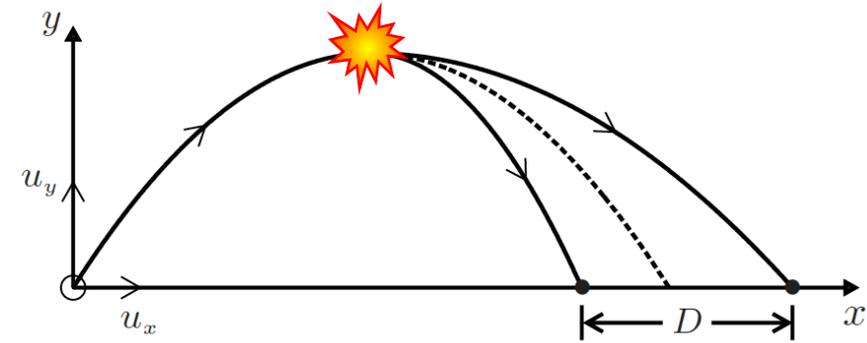
子弹最大压缩时，子弹- m_1 和 m_2 系统速度相同，根据动量守恒为，

$$mv = (m + m_1 + m_2)v''$$

总体机械能守恒， $T = \frac{1}{2}(m + m_1 + m_2)v''^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2$

$$\Rightarrow \Delta x = mv \sqrt{\frac{m_2}{k(m_1 + m_2 + m)(m_1 + m)}}$$

【例子】一个质量为 M 的炮弹以初速度 $\vec{u} = (u_x, u_y)$ 发射。在飞行至最高点时炮弹发生爆炸碎成质量为 m_1 和 m_2 的两片($M = m_1 + m_2$)，两个碎片分别沿着炮弹原始方向飞行，已知爆炸产生的动能为 T ，忽略阻力和炸药的质量。求，落地时两片碎片之间的距离。



【例子】一个质量为 M 的炮弹以初速度 $\vec{u} = (u_x, u_y)$ 发射。在飞行至最高点时炮弹发生爆炸碎成质量为 m_1 和 m_2 的两片($M = m_1 + m_2$)，两个碎片分别沿着炮弹原始方向飞行，已知爆炸产生的动能为 T ，忽略阻力和炸药的质量。求，落地时两片碎片之间的距离。

求解：

两片之间的相对速度为， $v = v_1 - v_2$ ，落地时距离为
 $D = vt = vu_y/g$ 。

爆炸前后动量守恒，

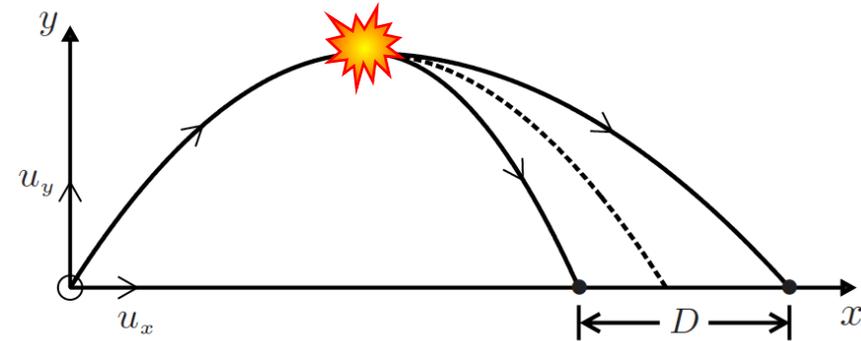
$$Mu_x = m_1v_1 + m_2v_2$$

动能增加 T ，

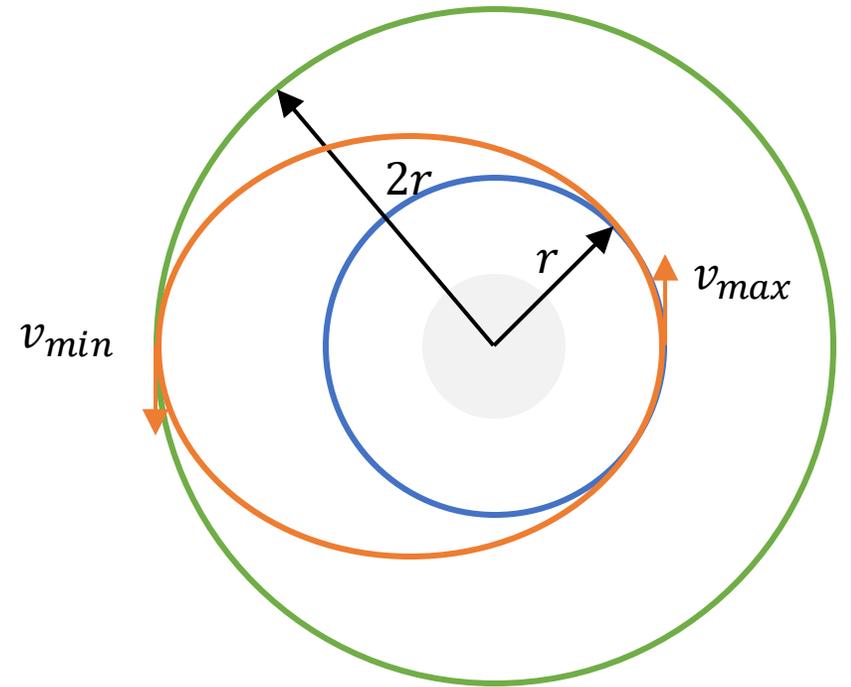
$$\frac{1}{2}Mu_x^2 + T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

将 u_x 带入第二个表达式，整理可以得到，

$$\frac{1}{2} \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 = T \Rightarrow D = \frac{u_y}{g} \sqrt{\frac{2T(m_1 + m_2)}{m_1m_2}}$$



【例子】质量为 m 的卫星沿着圆轨道运动，轨道半径为 r 。卫星可以在极短的时间内喷出燃料进行轨道转移，燃料相对于卫星的速度为 $u \gg v_{\text{sat}}$ 。现在希望卫星进行一次轨道转移后卫星沿椭圆轨道运动，其远地点的距离为 $2r$ ，求卫星需要喷出的燃料的质量 Δm 。



【例子】质量为 m 的卫星沿着圆轨道运动，轨道半径为 r 。卫星可以在极短的时间内喷出燃料进行轨道转移，燃料相对于卫星的速度为 $u \gg v_{\text{sat}}$ 。现在希望卫星进行一次轨道转移后卫星沿椭圆轨道运动，其远地点的距离为 $2r$ ，求卫星需要喷出的燃料的质量 Δm 。

解：

轨道转移前，卫星在原轨道运动，速度为，

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

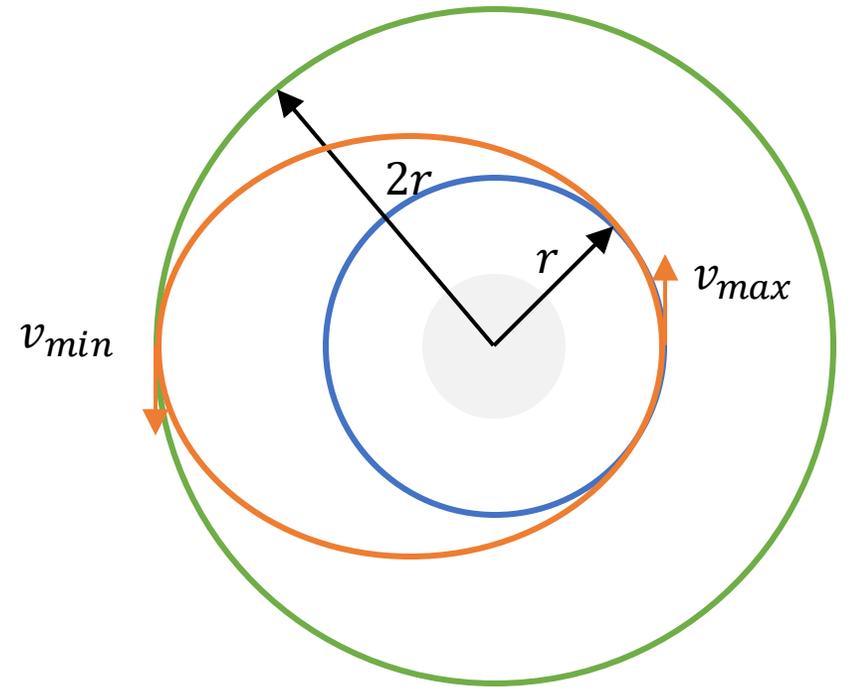
轨道转移后，卫星在椭圆轨道运动，近地点和远地点距离分别为 $r, 2r$ 。根据开普勒第二定律，

$$rv_{\max} = 2rv_{\min}$$

同时，总机械能守恒，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_{\max}^2 - \frac{GMm}{r} &= \frac{1}{2}mv_{\min}^2 - \frac{GMm}{2r} \\ &= \frac{1}{8}mv_{\max}^2 - \frac{GMm}{2r} \end{aligned}$$

可以求出， $v_{\max} = \sqrt{\frac{4GM}{3r}}$



【例子】质量为 m 的卫星沿着圆轨道运动，轨道半径为 r 。卫星可以在极短的时间内喷出燃料进行轨道转移，燃料相对于卫星的速度为 $u \gg v_{\text{sat}}$ 。现在希望卫星进行一次轨道转移后卫星沿椭圆轨道运动，其远地点的距离为 $2r$ ，求卫星需要喷出的燃料的质量 Δm 。

卫星轨道转移的过程满足动量守恒，

$$mv_0 = (m - \Delta m)v_{\max} - \Delta m(u - v_0)$$

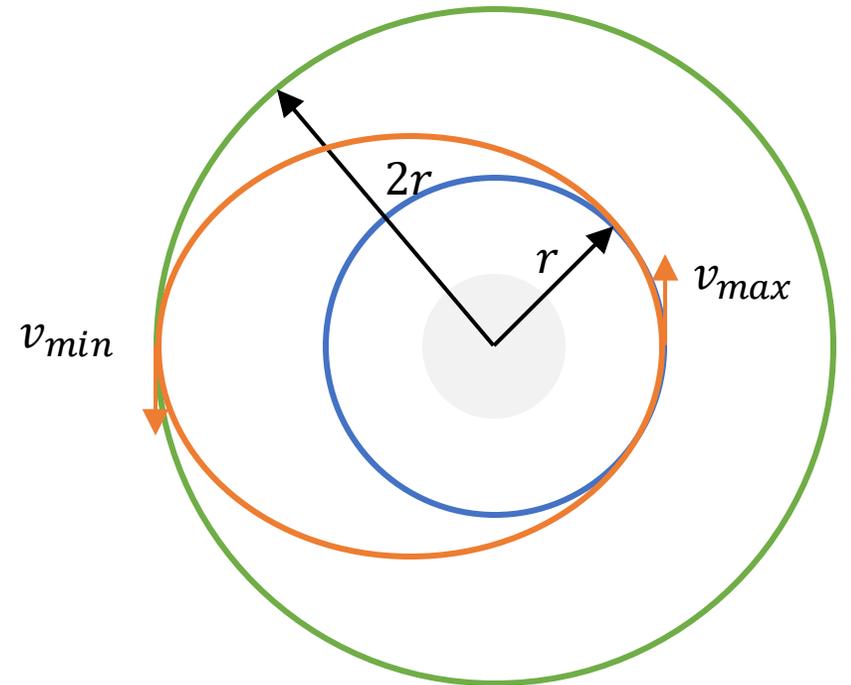
$$\Rightarrow \Delta m = \frac{m(v_{\max} - v_0)}{u + v_{\max} - v_0} = m \frac{\sqrt{4/3} - 1}{\sqrt{4/3} - 1 + f}$$

$$\approx \frac{m}{f} (\sqrt{4/3} - 1)$$

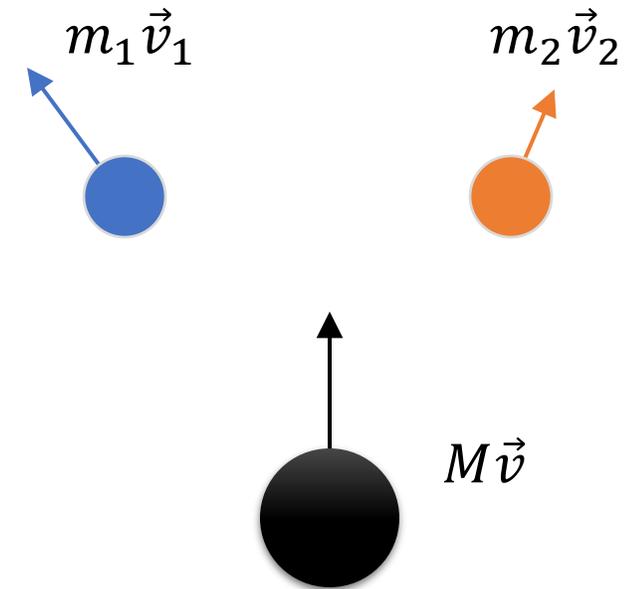
其中， $f = \frac{u}{v_0} = u \sqrt{\frac{r}{GM}}$

计算椭圆轨道部分，也可以直接用椭圆轨道总能量为，

$$E = -\frac{GMm'}{2a}$$



【例子】质量为 M 的炮弹以 \vec{V} 的速度飞行，某一时刻发生爆炸，碎裂为质量为 m_1, m_2 的两片。已知爆炸过程中能量释放为 Q ，忽略炸药质量，求爆炸后两个碎片的动能。

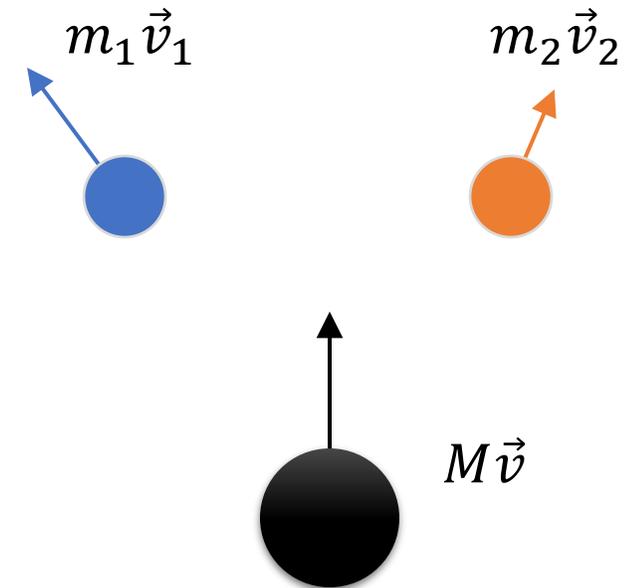


【例子】质量为 M 的炮弹以 \vec{V} 的速度飞行，某一时刻发生爆炸，碎裂为质量为 m_1, m_2 的两片。已知爆炸过程中能量释放为 Q ，忽略炸药质量，求爆炸后两个碎片的动能。

解：能动能守恒

$$M\vec{V} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2,$$
$$\frac{1}{2}MV^2 + Q = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

4个方程，6个未知数

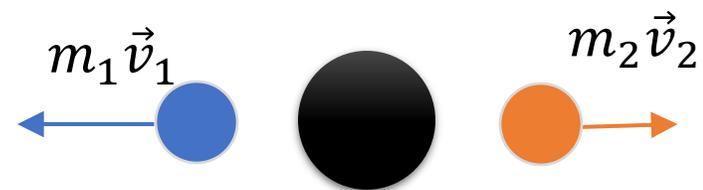


【例子】质量为 M 的炮弹垂直上抛，在最高点发生爆炸，碎裂为质量为 m_1, m_2 的两片。已知爆炸过程中能量释放为 Q ，忽略炸药质量，求爆炸后两个碎片的动能。

解：能动量守恒

$$0 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2,$$
$$Q = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$T_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} Q, \quad T_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} Q$$



【例子】质量为 M 的炮弹垂直上抛，在最高点发生爆炸，碎裂为质量为 m_1, m_2 的两片。已知爆炸过程中能量释放为 Q ，忽略炸药质量，求爆炸后两个碎片的动能。

可见在质心参考系，问题确实比较简单的。而在地面参考系，根据伽利略变换，

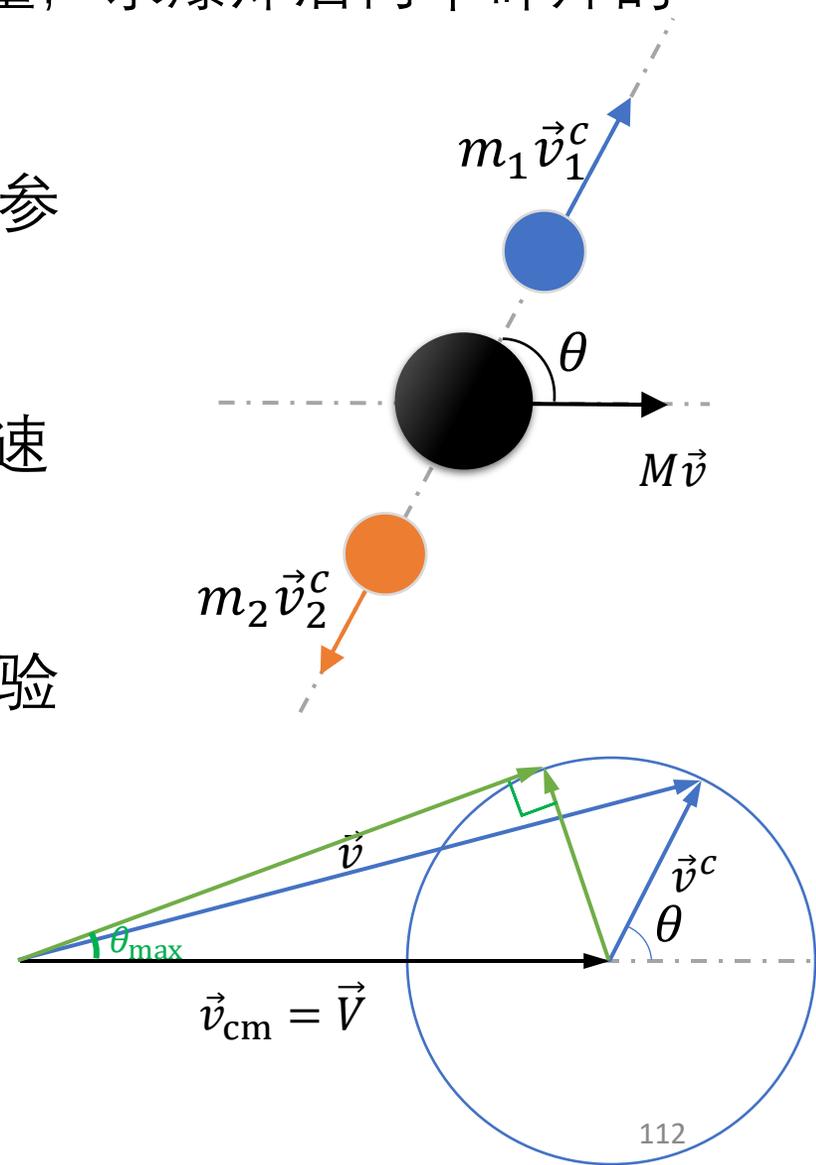
$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^c + \vec{V}$$

这是一个矢量相加。要想确定 \vec{v}_i ，需要额外知道炮弹速度 \vec{V} 与碎片速度 \vec{v}_i 或者质心系速度 \vec{v}_i^c 之间的夹角。

如果在质心系，碎片的速度方向是随机分布的，在实验室参考系，碎片分布在半张角为

$$\theta_{\max} = \arcsin \frac{v^c}{V}$$

的圆锥内。



- 弹性碰撞与非弹性碰撞：
 - 弹性碰撞：碰撞前后物体本身以及物体内部状态未发生变化 —— 机械能守恒
 - 非弹性碰撞：碰撞过程前后物体发生改变或者内部状态发生改变 —— 机械能转化为其他能量
- 质心参考系：
 - 采用质心参考系往往能够简化求解
 - 实验室参考系：真实实验未必发生在质心参考系，这时候需要参考系之间的转换
 - 其他参考系：布莱特参考系（厚墙参考系），碰撞前后所考察的物体速度大小不变，方向相反
- 资用能(available energy)
 - 根据柯尼希定理，并非所有能量都能够转化为其他能量。一部分能量需要来提供质心的动能。相对运动部分的动能叫做资用能
 - 现代加速器采用粒子对撞的方式使得质心参考系与实验室参考系重合，这样以来，资用能最大

【例子】 质量为 m 的粒子以 v_1 的速度对心撞上质量为 m_2 、速度为 v_2 的粒子。已知碰撞过程中能量守恒，求碰撞后两个粒子的速度 v'_1, v'_2 。



【例子】质量为 m 的粒子以 v_1 的速度对心撞上质量为 m_2 、速度为 v_2 的粒子。已知碰撞过程中能量守恒，求碰撞后两个粒子的速度 v'_1, v'_2 。

解：

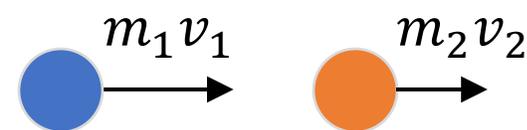
动量守恒

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ \Rightarrow m_1 (v_1 - v'_1) &= m_2 (v'_2 - v_2) \end{aligned}$$

能量守恒

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \\ \Rightarrow m_1 (v_1^2 - v_1'^2) &= m_2 (v_2'^2 - v_2^2) \\ \Rightarrow v_1 + v_1' &= v_2 + v_2' \end{aligned}$$

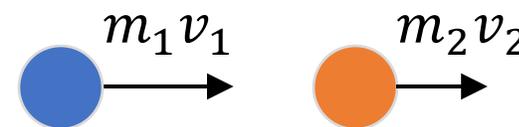
$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$



思考：特殊情况 $m_1 = m_2$ 、
 $m_1 \ll m_2$ 、 $m_1 \gg m_2$

【例子】质量为 m_1 的粒子以 v_1 的速度对心撞上质量为 m_2 、速度为 v_2 的粒子。已知碰撞过程中能量守恒，求碰撞后两个粒子的速度 v'_1, v'_2 。

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$



思考：特殊情况 $m_1 = m_2$ 、
 $m_1 \ll m_2$ 、 $m_1 \gg m_2$

【例子】质量为 m_1 的粒子以 v_1 的速度对心撞上质量为 m_2 、速度为 v_2 的粒子。已知碰撞过程中能量守恒，求碰撞后两个粒子的速度 v_1' 、 v_2' 。

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

1. $m_1 = m_2$:

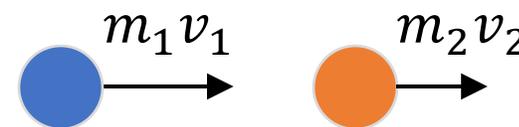
$$v_1' = v_2, v_2' = v_1$$

2. $m_1 \gg m_2$:

$$v_1' = v_1, v_2' = 2v_1 - v_2$$

3. $m_1 \ll m_2$:

$$v_1' = -v_1 + 2v_2, v_2' = v_2$$

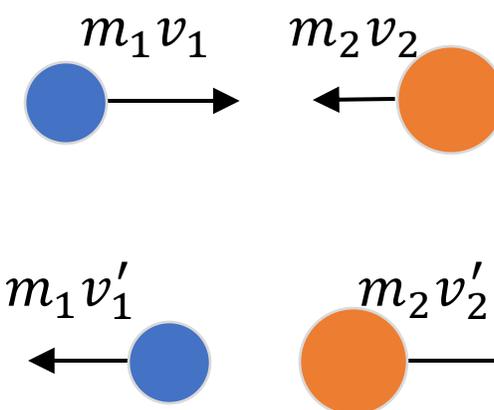


思考：特殊情况 $m_1 = m_2$ 、
 $m_1 \ll m_2$ 、 $m_1 \gg m_2$

- 牛顿引入了恢复系数(coefficient of restitution)

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}$$

- $e = 1$: 弹性碰撞;
- $e = 0$: 完全非弹性碰撞;
- $0 < e < 1$: 部分弹性碰撞/非完全弹性碰撞



球/测试平面	恢复系数
网球	0.74-0.78
乒乓球	0.876
高尔夫球	<0.83
篮球	0.73-0.81

- 牛顿引入了恢复系数(coefficient of restitution)

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}$$

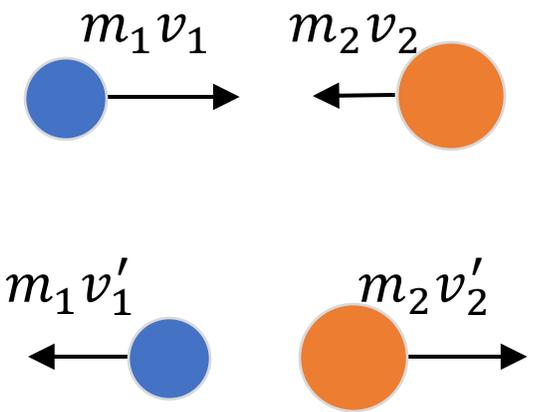
- $e = 1$: 弹性碰撞;
- $e = 0$: 完全非弹性碰撞;
- $0 < e < 1$: 部分弹性碰撞/非完全弹性碰撞

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2',$$

$$\Rightarrow v_1' = \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2(1+e)}{m_1 + m_2} v_2,$$

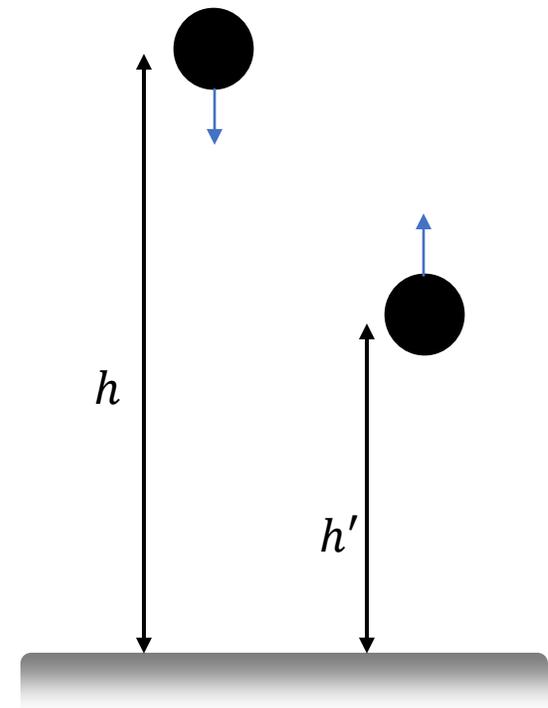
$$v_2' = \frac{m_2 - em_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1(1+e)}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\Delta T = -\frac{1}{2}(1-e^2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$$



球/测试平面	恢复系数
网球	0.74-0.78
乒乓球	0.876
高尔夫球	<0.83
篮球	0.73-0.81

【例子】一个球与地面垂直碰撞的恢复系数为 e ，从距离地面 h 的高度静止下落，求反弹后的最大高度。



【例子】一个球与地面垂直碰撞的恢复系数为 e ，从距离地面 h 的高度静止下落，求反弹后的最大高度。

解：

机械能守恒：

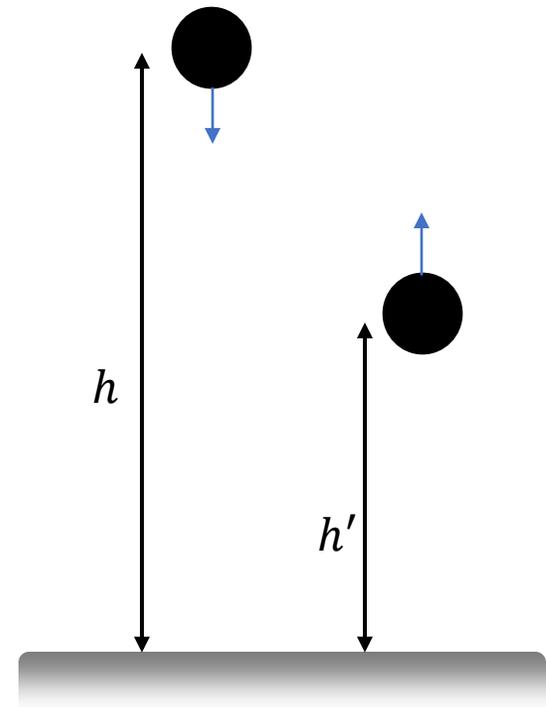
$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh, \quad \frac{1}{2}mv'^2 = mgh'$$

恢复系数的定义：

$$v' = ev,$$

$$\Rightarrow h' = e^2h$$

球经过多久能停下来？是无穷长时间吗？



【例子】一个球与地面垂直碰撞的恢复系数为 e ，从距离地面 h 的高度静止下落，求反弹后的最大高度。

解：

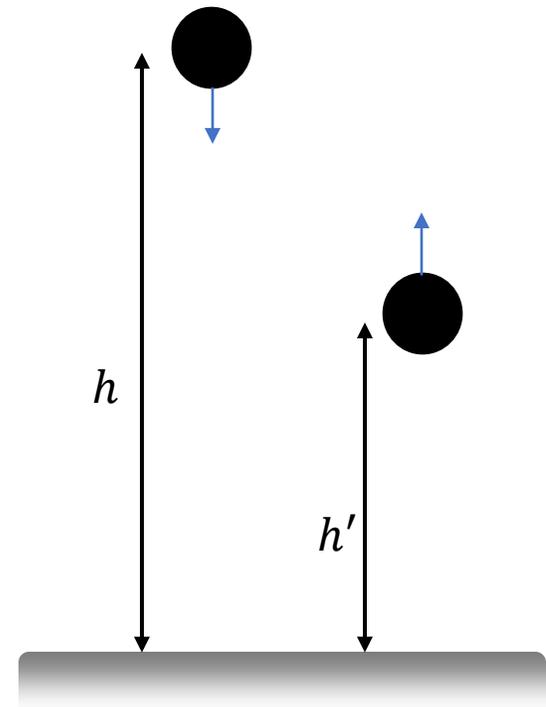
球经过多久能停下来？

$$h_{n+1} = e^2 h_n$$

下落时间：

$$\frac{1}{2} g t_n^2 = h_n$$
$$\Rightarrow t_n = \sqrt{\frac{2h_n}{g}} = \sqrt{\frac{2e^2 h_{n-1}}{g}} = e t_{n-1}$$

上升时间： $t'_n = t_n$ 。



【例子】一个球与地面垂直碰撞的恢复系数为 e ，从距离地面 h 的高度静止下落，求反弹后的最大高度。

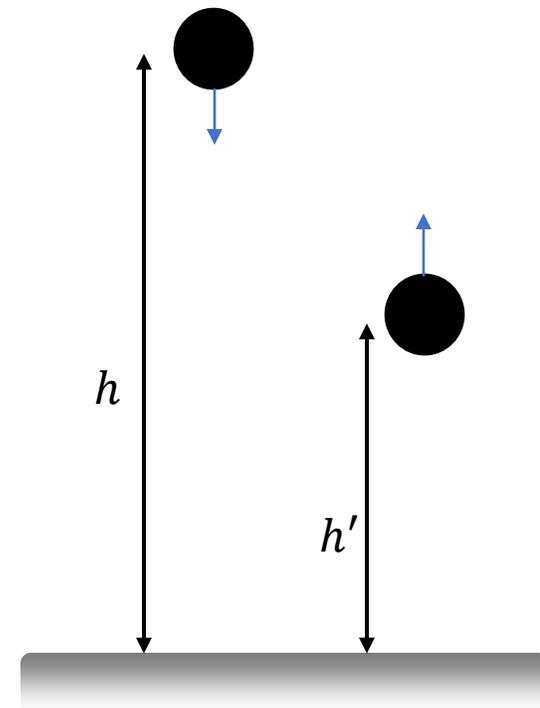
解：

$$t_n = et_{n-1}$$

$$\Rightarrow t_n = \frac{t_n}{\underbrace{t_{n-1}}_e} \frac{t_{n-1}}{\underbrace{t_{n-2}}_e} \cdots \frac{t_1}{\underbrace{t_0}_e} t_0 = e^n \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

因此，总时间

$$T = t_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2t_n = \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^n \right) = \frac{1+e}{1-e} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$



【例子】一个球以 v_0 的速度从地面抛出，抛射角为 θ 。已知球与地面垂直碰撞的恢复系数为 e ，碰撞过程中水平方向的速度不变。求球开始滑行前与初始位置的水平距离。

【例子】一个球以 v_0 的速度从地面抛出，抛射角为 θ 。已知球与地面垂直碰撞的恢复系数为 e ，碰撞过程中水平方向的速度不变。求球开始滑行前与初始位置的水平距离。

求解：

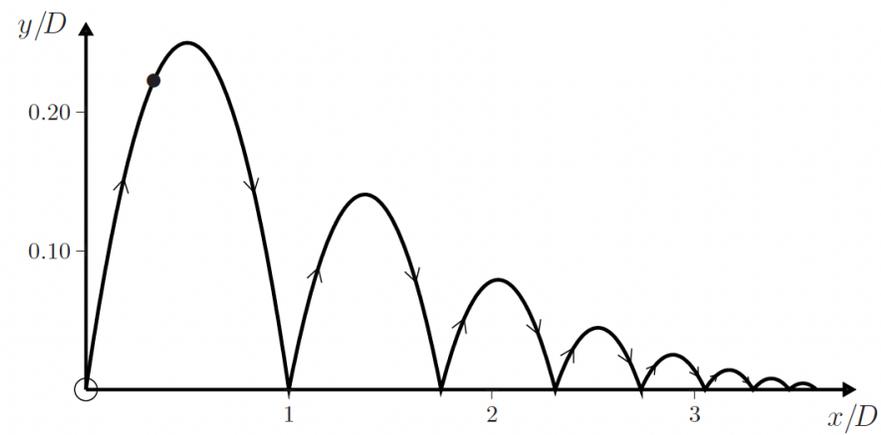
假设垂直方向速度为 v_{yn} ，则 $v_{y(n+1)} = ev_{yn}$ ，因此，

$$v_{yn} = \frac{v_{yn}}{v_{y(n-1)}} \frac{v_{y(n-1)}}{v_{y(n-2)}} \dots \frac{v_{y1}}{v_{y0}} v_{y0} = e^n v_{y0}$$

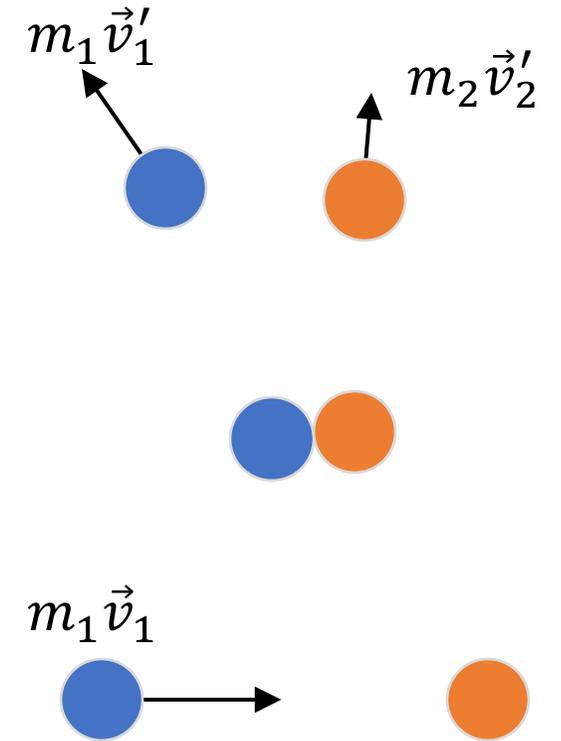
抛射时间为，

$$t_n = \frac{2v_{yn}}{g} = \frac{2v \sin \theta}{g} e^n, \quad d_n = \frac{2v^2}{g} \sin \theta \cos \theta e^n$$

$$\Rightarrow d = \frac{2v^2}{g} \sin \theta \cos \theta \sum_{n=0}^{\infty} e^n = \frac{1}{1-e} \frac{v^2}{g} \sin 2\theta$$



【例子】 质量为 m 的粒子以 \vec{v}_1 的速度撞上质量为 m_2 的静止粒子。已知碰撞过程是弹性的，求碰撞后两个粒子的速度 \vec{v}'_1, \vec{v}'_2 。



【例子】质量为 m 的粒子以 \vec{v}_1 的速度撞上质量为 m_2 的静止粒子。已知碰撞过程是弹性的，求碰撞后两个粒子的速度 \vec{v}'_1, \vec{v}'_2 。

解：动量守恒：

$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

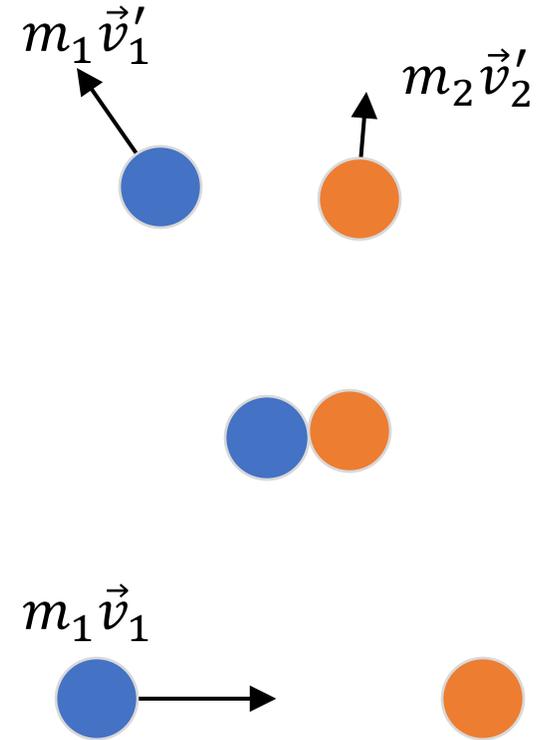
能量守恒：

$$\frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}'_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}'_2^2$$

1维：2个方程，2个未知数

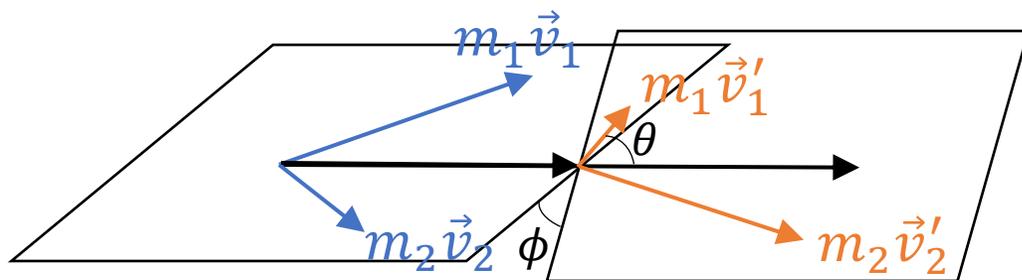
2维：3个方程，4个未知数

3维：4个方程，6个未知数；

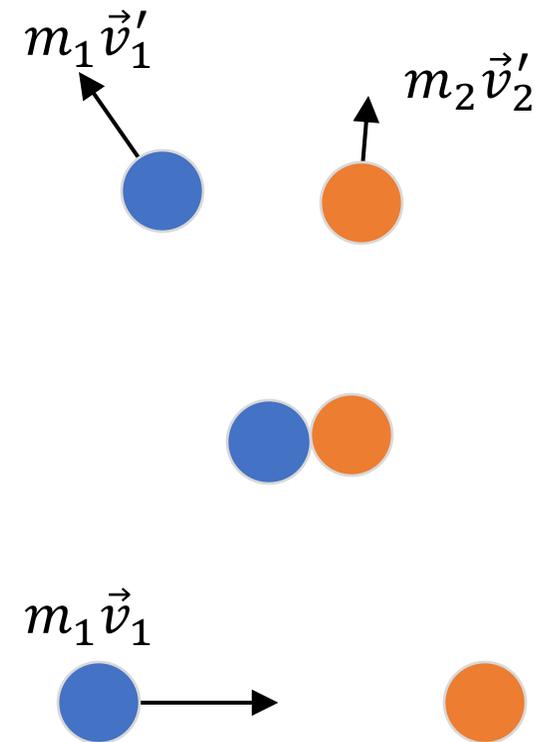
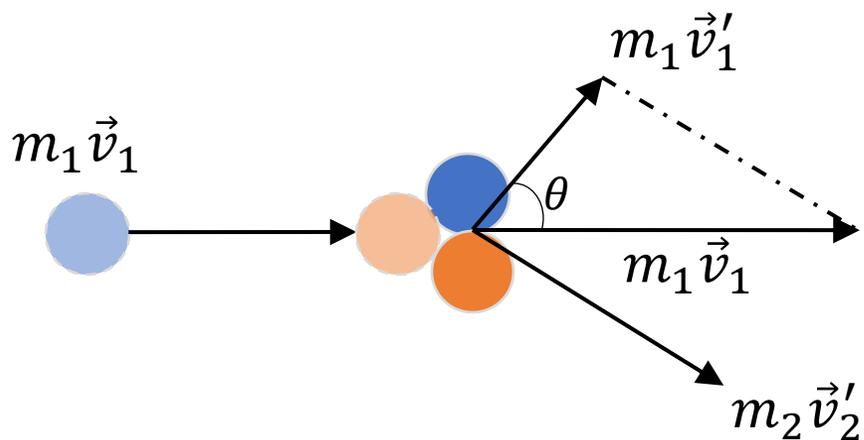


【例子】 质量为 m 的粒子以 \vec{v}_1 的速度撞上质量为 m_2 的静止粒子。已知碰撞过程是弹性的，求碰撞后两个粒子的速度 \vec{v}'_1, \vec{v}'_2 。

三维:



二维:

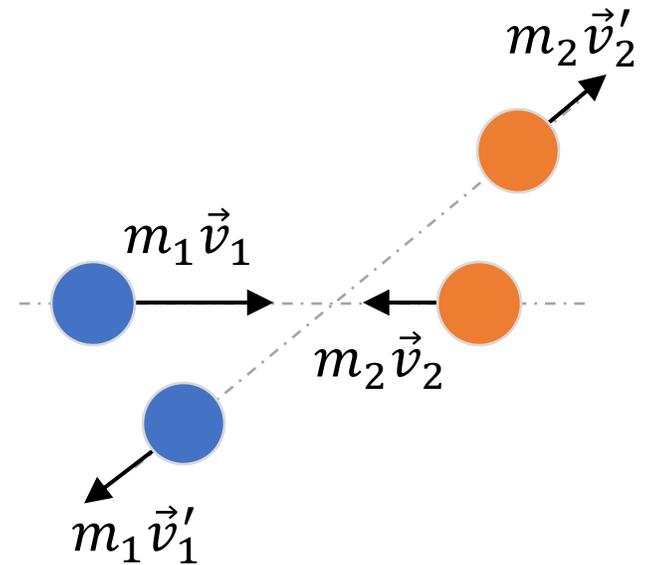


【例子】质量为 m 的粒子以 \vec{v}_1 的速度撞上质量为 m_2 的静止粒子。已知碰撞过程是弹性的，求碰撞后两个粒子的速度 \vec{v}'_1, \vec{v}'_2 。

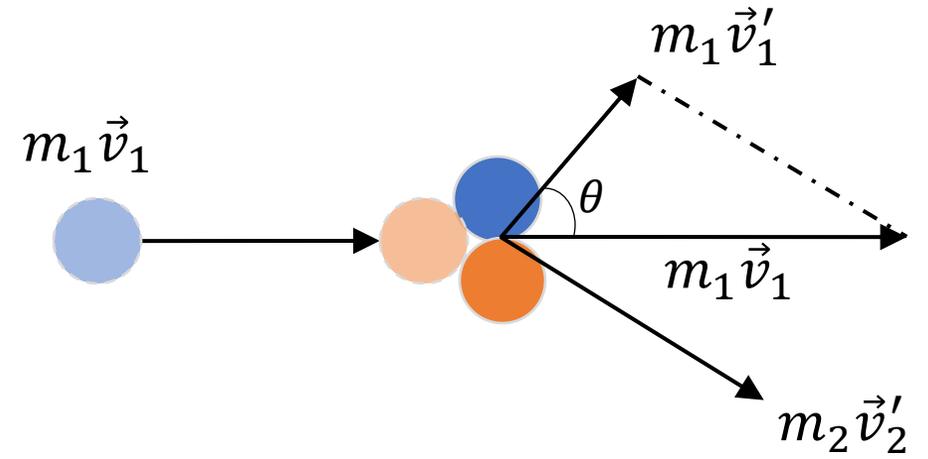
质心参考系：

$$\begin{aligned}m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &= 0, \\m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 &= 0, \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \\ \Rightarrow v'_1 &= v_1, \quad v'_2 = v_2\end{aligned}$$

可见当发生弹性碰撞时，在质心参考系粒子速度仅改变方向，大小不变。



【例子】 质量为 m 的粒子以 \vec{v}_1 的速度撞上质量为 m_2 的静止粒子。已知碰撞过程是弹性的，求碰撞前后粒子1的最大偏转角。



【例子】质量为 m 的粒子以 \vec{v}_1 的速度撞上质量为 m_2 的静止粒子。已知碰撞过程是弹性的，求碰撞前后粒子1的最大偏转角。

解：动量、能量守恒：

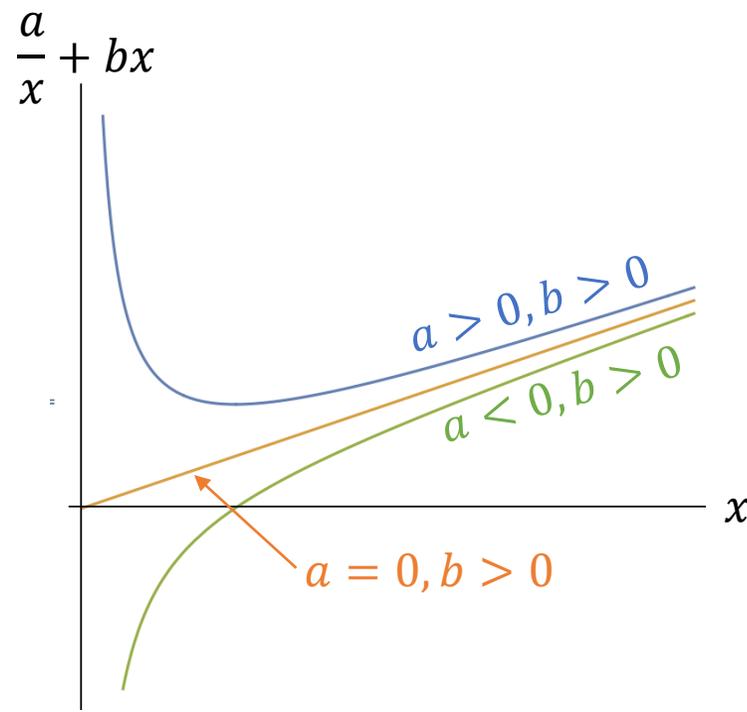
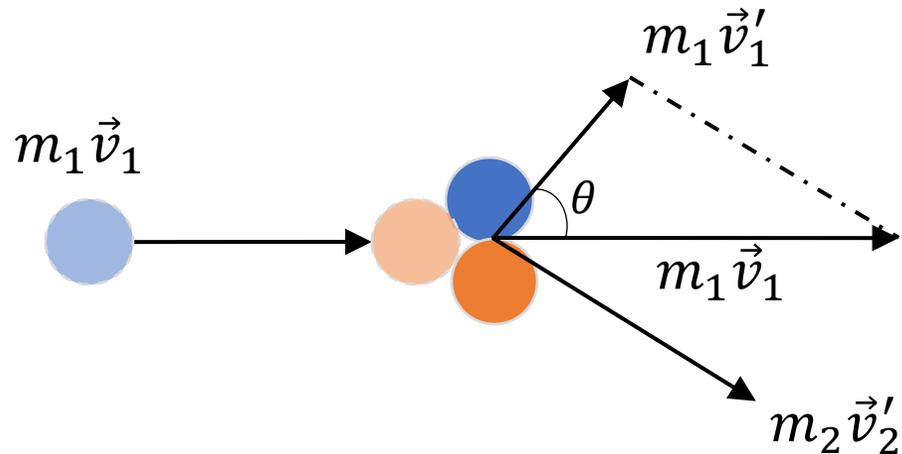
$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 &= m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \\ \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 - m_1 \vec{v}'_1 &= m_2 \vec{v}'_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \end{aligned}$$

消去 v_2' ,

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{(m_1 - m_2) v_1^2 + (m_1 + m_2) v_1'^2}{2m_1 v_1 v_1'} = \frac{a}{x} + bx$$

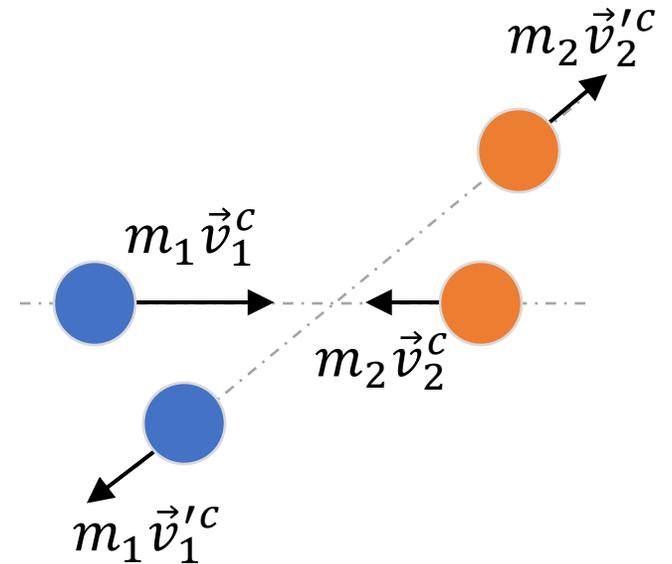
$$x = \frac{v_1'}{v_1}, \quad a = \frac{m_1 - m_2}{2m_1}, \quad b = \frac{m_1 + m_2}{2m_1}$$

- 如果 $m_1 \leq m_2$, $\theta_{max} = 180^\circ$ (粒子1被弹回)
- 如果 $m_1 \geq m_2$, $\theta_{max} = \arccos \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}} = \arcsin \frac{m_2}{m_1}$



【例子】 质量为 m 的粒子以 \vec{v}_1 的速度撞上质量为 m_2 的静止粒子。已知碰撞过程是弹性的，求碰撞前后粒子1的最大偏转角。

质心参考系求解：



【例子】质量为 m 的粒子以 \vec{v}_1 的速度撞上质量为 m_2 的静止粒子。已知碰撞过程是弹性的，求碰撞前后粒子1的最大偏转角。

质心参考系求解：

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_1^c = \vec{v}_1 - \vec{v}_{\text{cm}} = \frac{m_2 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$

弹性碰撞前后质心速度大小不变，仅方向发生改变，

因此， $v_1'^c = v_1^c = \frac{m_2 v_1}{m_1 + m_2}$ 。

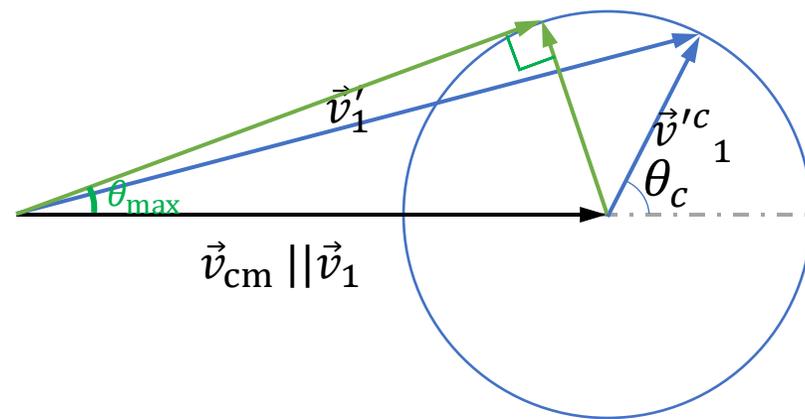
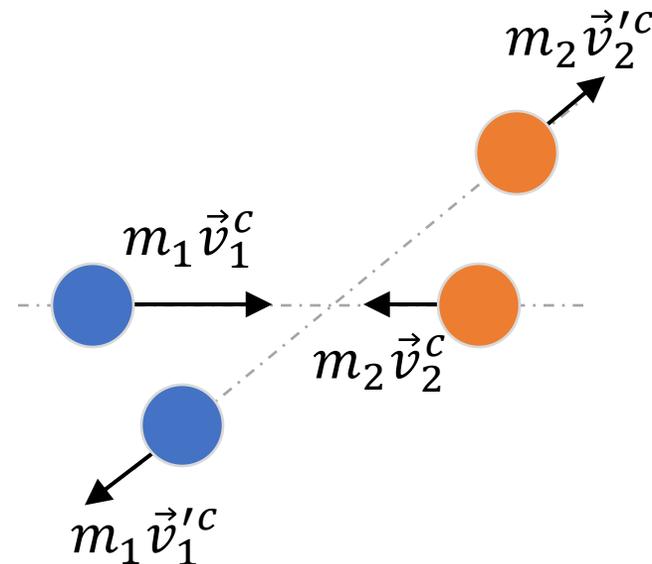
变换到实验室参考系（如右图所示），

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1'^c + \vec{v}_{\text{cm}}$$

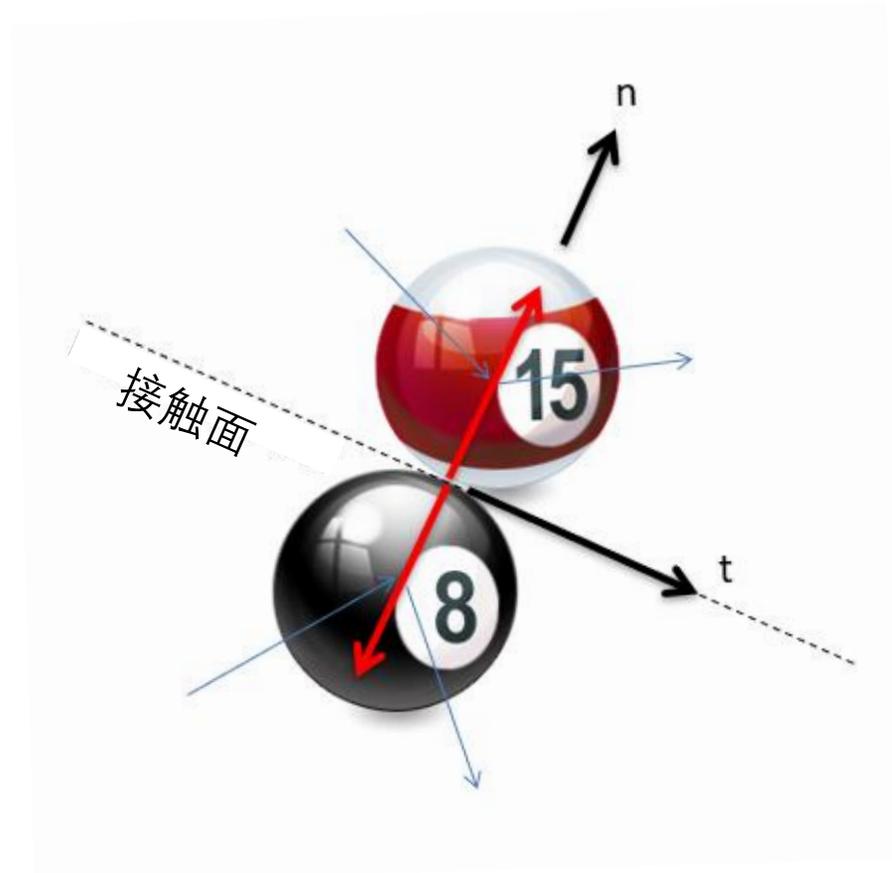
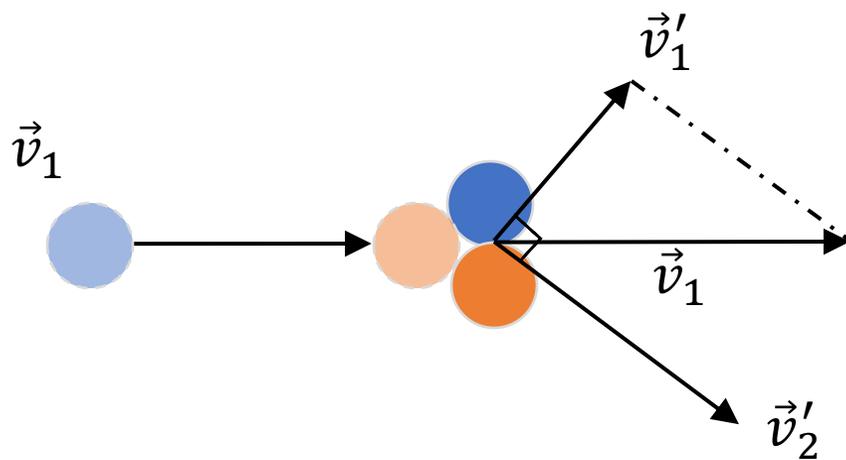
如果 $v_{\text{cm}} \leq v_1'^c$ 即 $m_1 \leq m_2$ ，最大偏转角为 $\theta_{\text{max}} = 180^\circ$ ；

如果 $v_{\text{cm}} > v_1'^c$ 即 $m_1 > m_2$ ，最大偏转角为，

$$\theta_m = \arcsin \frac{v_1'^c}{v_{\text{cm}}} = \arcsin \frac{m_2}{m_1}$$



【例子】 质量为 m 的粒子以 \vec{v}_1 的速度撞上质量相等的静止粒子。已知碰撞过程是弹性的，证明碰撞后两个粒子的速度相互垂直。



【例子】质量为 m 的粒子以 \vec{v}_1 的速度撞上质量相等的静止粒子。已知碰撞过程是弹性的，证明碰撞后两个粒子的速度相互垂直。

解：动量守恒：

$$m\vec{v}_1 = m\vec{v}'_1 + m\vec{v}'_2$$

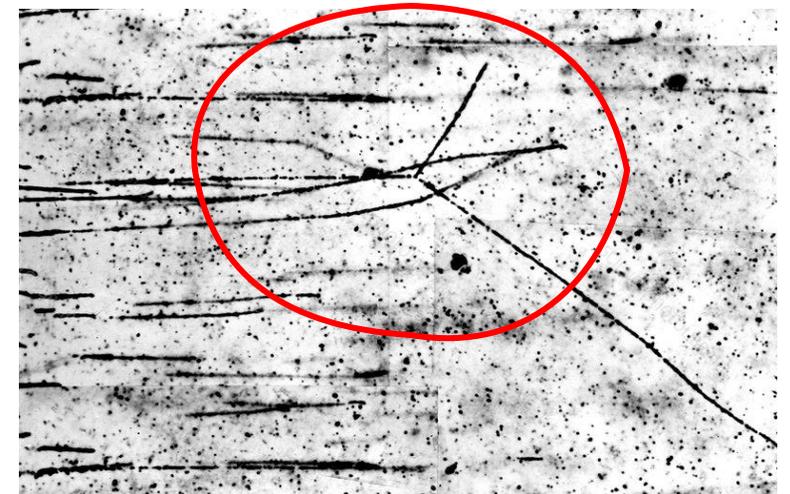
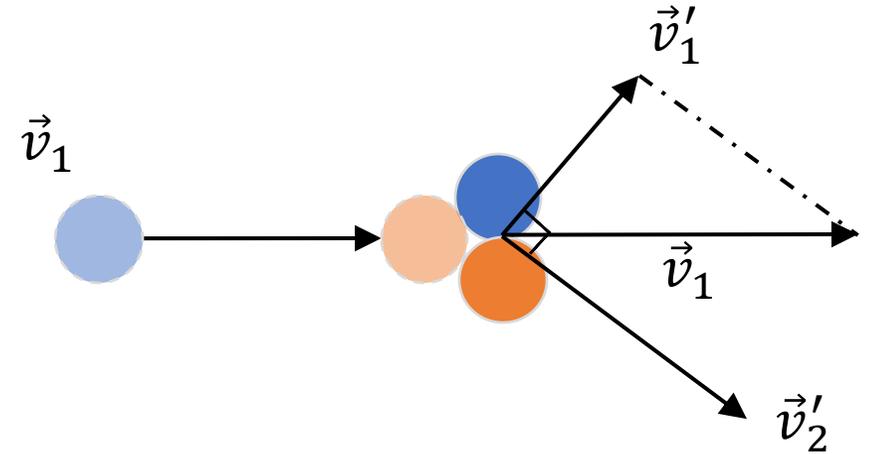
能量守恒：

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_1^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}'_1{}^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}'_2{}^2$$

消去质量 m ,

$$\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 \Rightarrow v_1^2 = \vec{v}'_1{}^2 + \vec{v}'_2{}^2 + 2\vec{v}'_1 \cdot \vec{v}'_2$$
$$\vec{v}_1^2 = \vec{v}'_1{}^2 + \vec{v}'_2{}^2$$

因此， $\vec{v}'_1 \cdot \vec{v}'_2 = 0$ ，即 $\vec{v}'_1 \perp \vec{v}'_2$



【例子】 化学反应中，质量为 m 的原子A对心撞上质量为 M 的静止原子B。已知碰撞的结果是有一定的能量 E 被储存在原子B中，求碰撞前原子A的最小速度 v_0 。

【例子】 化学反应中，质量为 m 的原子A对心撞上质量为 M 的静止原子B。已知碰撞的结果是有一定的能量 E 被储存在原子B中，求碰撞前原子A的最小速度 v_0 。

解： 动量守恒：

$$mv_0 = mv + MV$$

能量守恒：

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + E$$

消去 v ,

$$M(m + M)V^2 - 2Mmv_0V + 2mE = 0$$

二次方程根存在的条件（韦达定理），

$$4M^2m^2v_0^2 - 8Mm(M + m)E \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 \geq \frac{E(m + M)}{Mm} \Rightarrow v_0 \geq \sqrt{\frac{2E(m + M)}{Mm}}$$

【例子】 化学反应中，质量为 m 的原子A对心撞上质量为 M 的静止原子B。已知碰撞的结果是有一定的能量 E 被储存在原子B中，求碰撞前原子A的最小速度 v_0 。

【例子】化学反应中，质量为 m 的原子A对心撞上质量为 M 的静止原子B。已知碰撞的结果是有一定的能量 E 被储存在原子B中，求碰撞前原子A的最小速度 v_0 。

解：采用柯尼希定理，反应前的总能量可以写成，

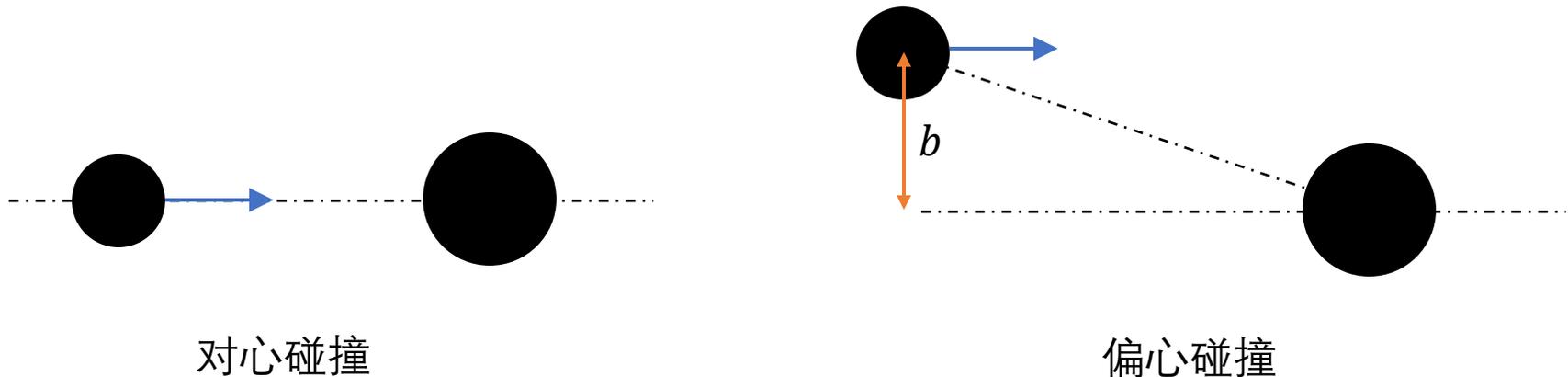
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}\mu v^2$$

这里， $v_{\text{cm}} = \frac{mv_0}{m+M}$ 为质心速度， $\mu = \frac{mM}{m+M}$ 为折合质量， $v = v_0$ 为相对速度

其中根据动量守恒，反应前后质心动量不变，因此资用能为 $\frac{1}{2}\mu v_0^2$ 。欲使能量发生，资用能需要满足：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mu v_0^2 &\geq E \\ \Rightarrow v_0 &\geq \sqrt{\frac{2E(m+M)}{Mm}} \end{aligned}$$

- 对心碰撞与斜碰：
 - 对心碰撞(head-on collision)又叫做正碰，是指碰撞前物体之间的相对速度方向沿着物体之间连线。反之称为偏心碰撞(peripheral collision)，又叫做斜碰撞。
 - 对于球对称的物体以及球对称的力（中心力），对心碰撞前后速度仍然沿着物体之间的连线，因此问题变成一维。但注意，对于非球对称的物体或者力来说，对称碰撞问题仍然可能是二维的。
- 碰撞可以用来探测力的形式和物质结构



【例子】质量为 m 的正电子，与质量为 $M \gg m$ 的原子核发生对心碰撞。已知原子核可以视为半径为 a 的带均匀正电荷的球，总电荷为 Z ，正电子入射速度 v 。求正电子-原子核之间最小距离 r 。

【例子】质量为 m 的正电子，与质量为 $M \gg m$ 的原子核发生对心碰撞。已知原子核可以视为半径为 a 的带均匀正电荷的球，总电荷为 Z ，正电子入射速度 v 。求正电子-原子核之间最小距离 r 。

解：根据机械能守恒，

$$\frac{1}{2}mv^2 = U(r)$$

求势能。带均匀正电荷的球的库仑力为（类比于引力），

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{kZe^2}{a^3} \vec{r}, & (r \leq a) \\ \frac{kZe^2}{r^3} \vec{r}, & (r > a) \end{cases},$$

势能可以通过做功求得，即(取无穷远作为势能零点)

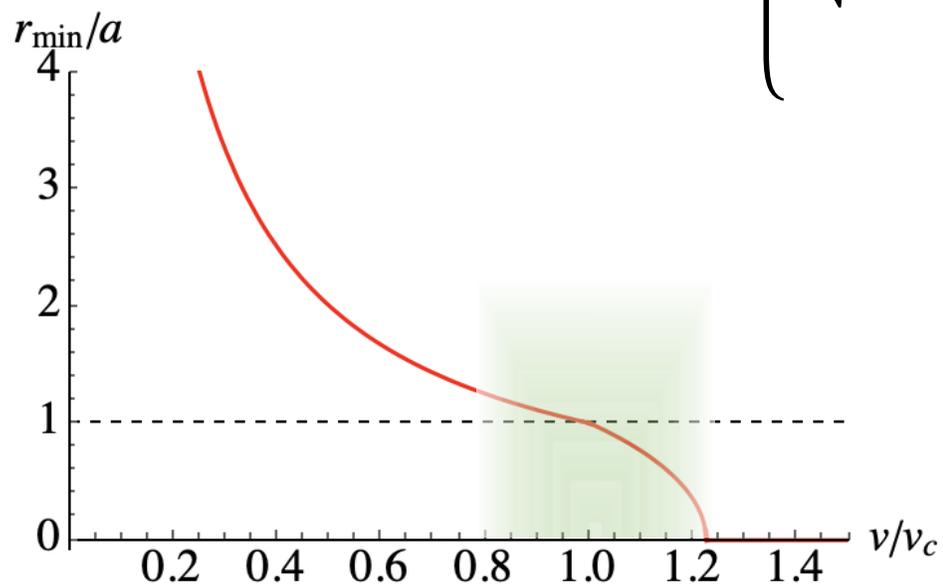
$$U(r) = - \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \begin{cases} \frac{3kZe^2}{2a} - \frac{kZe^2}{2a^3} r^2 & (r \leq a) \\ \frac{kZe^2}{r}, & (r > a) \end{cases}$$

【例子】质量为 m 的正电子，与质量为 $M \gg m$ 的原子核发生对心碰撞。已知原子核可以视为半径为 a 的带均匀正电荷的球，总电荷为 Z ，正电子入射速度 v 。求正电子-原子核之间最小距离 r 。

因此，

$$r = \begin{cases} a \left(\frac{v_c}{v}\right)^2, & (v < v_c) \\ a \sqrt{3 - 2 \left(\frac{v}{v_c}\right)^2}, & (v_c \leq v \leq \sqrt{3/2}v_c) \\ 0, & (v > \sqrt{3/2}v_c) \end{cases}$$

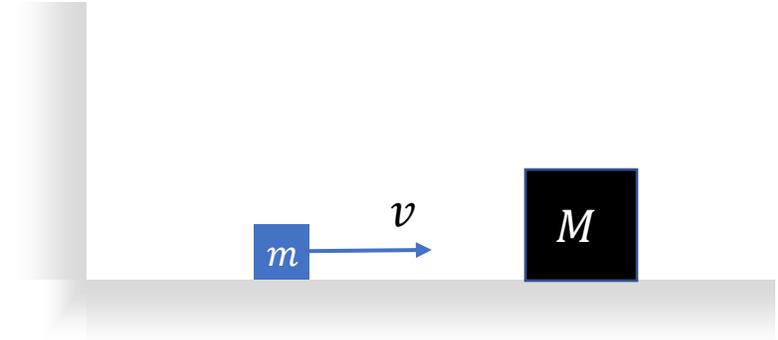
$$v_c = \sqrt{\frac{2kZe^2}{ma}}$$



可见，入射电子能量足够大时($v \geq v_c$)，可以分辨原子核的内部结构

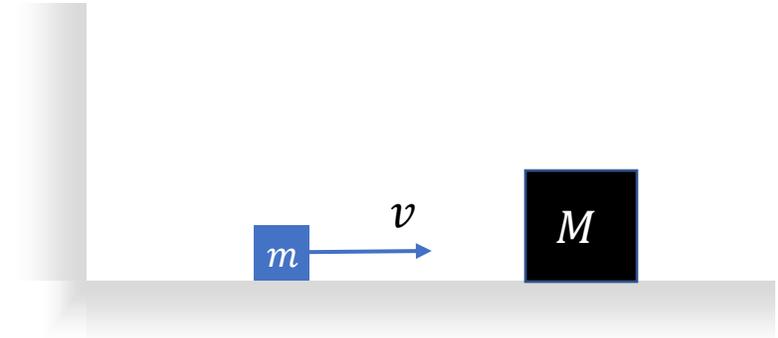
【例子】如图所示充分大的光滑水平面上，质量为 M 的大方块与墙之间放着一个质量为 m 的小方块。初始时刻，外侧方块静止，中间的方块有一个水平方向的初始速度 v_0 。已知所有碰撞都是弹性的，摩擦力可以忽略。

- a) 若 $M = m$ ，求方块之间的碰撞次数；
- b) 若 $M = 4m$ ，求方块之间的碰撞次数；



【例子】如图所示充分大的光滑水平面上，质量为 M 的大方块与墙之间放着一个质量为 m 的小方块。初始时刻，外侧方块静止，中间的方块有一个水平方向的初始速度 v_0 。已知所有碰撞都是弹性的，摩擦力可以忽略。

- a) 若 $M = m$ ，求方块之间的碰撞次数；
 b) 若 $M = 4m$ ，求方块之间的碰撞次数；



解：

$$mv + MV = mv' + MV',$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2$$

$$v' = \frac{m - M}{m + M}v + \frac{2M}{m + M}V,$$

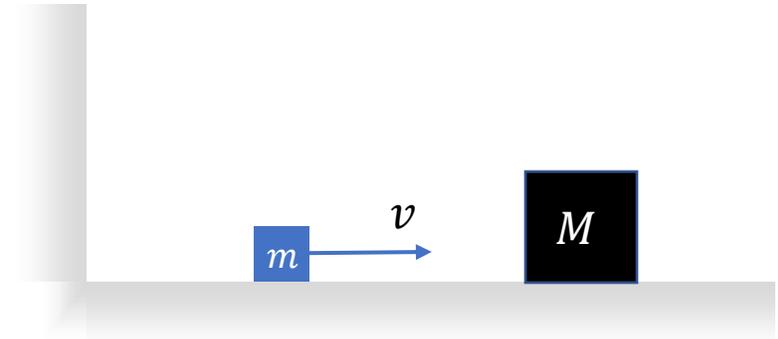
$$V' = \frac{M - m}{m + M}V + \frac{2m}{m + M}v$$

【例子】如图所示充分大的光滑水平面上，质量为 M 的大方块与墙之间放着一个质量为 m 的小方块。初始时刻，外侧方块静止，中间的方块有一个水平方向的初始速度 v_0 。已知所有碰撞都是弹性的，摩擦力可以忽略。

- a) 若 $M = m$ ，求方块之间的碰撞次数；
- b) 若 $M = 4m$ ，求方块之间的碰撞次数；

解：

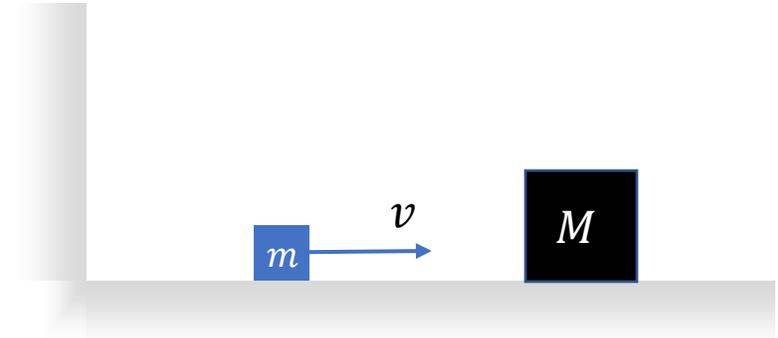
a) 若 $M = m$ ，发生一次碰撞以后，木块 m 停止。因此碰撞次数 $N_{\text{coll}} = 1$



$$\begin{aligned} v' &= V, \\ V' &= v \end{aligned}$$

【例子】如图所示充分大的光滑水平面上，质量为 M 的大方块与墙之间放着一个质量为 m 的小方块。初始时刻，外侧方块静止，中间的方块有一个水平方向的初始速度 v_0 。已知所有碰撞都是弹性的，摩擦力可以忽略。

- a) 若 $M = m$ ，求方块之间的碰撞次数；
 b) 若 $M = 4m$ ，求方块之间的碰撞次数；



解：

b) 若 $M = 4m$,

发生一次碰撞以后， $v' = \frac{3}{5}v, V' = \frac{2}{5}v$

发生第二次碰撞以后， $v'' = \frac{7}{25}v, V'' = \frac{12}{25}v$

$$v' = \frac{8V - 3v}{5},$$

$$V' = \frac{3V + 2v}{5}$$

由于 $v'' < V''$ ，不再有碰撞发生。因此， $N_{\text{coll}} = 2$

【例子】如图所示充分大的光滑水平面上，质量为 M 的大方块与墙之间放着一个质量为 m 的小方块。初始时刻，外侧方块静止，中间的方块有一个水平方向的初始速度 v_0 。已知所有碰撞都是弹性的，摩擦力可以忽略。

a) 若 $M = m$ ，求方块之间的碰撞次数；

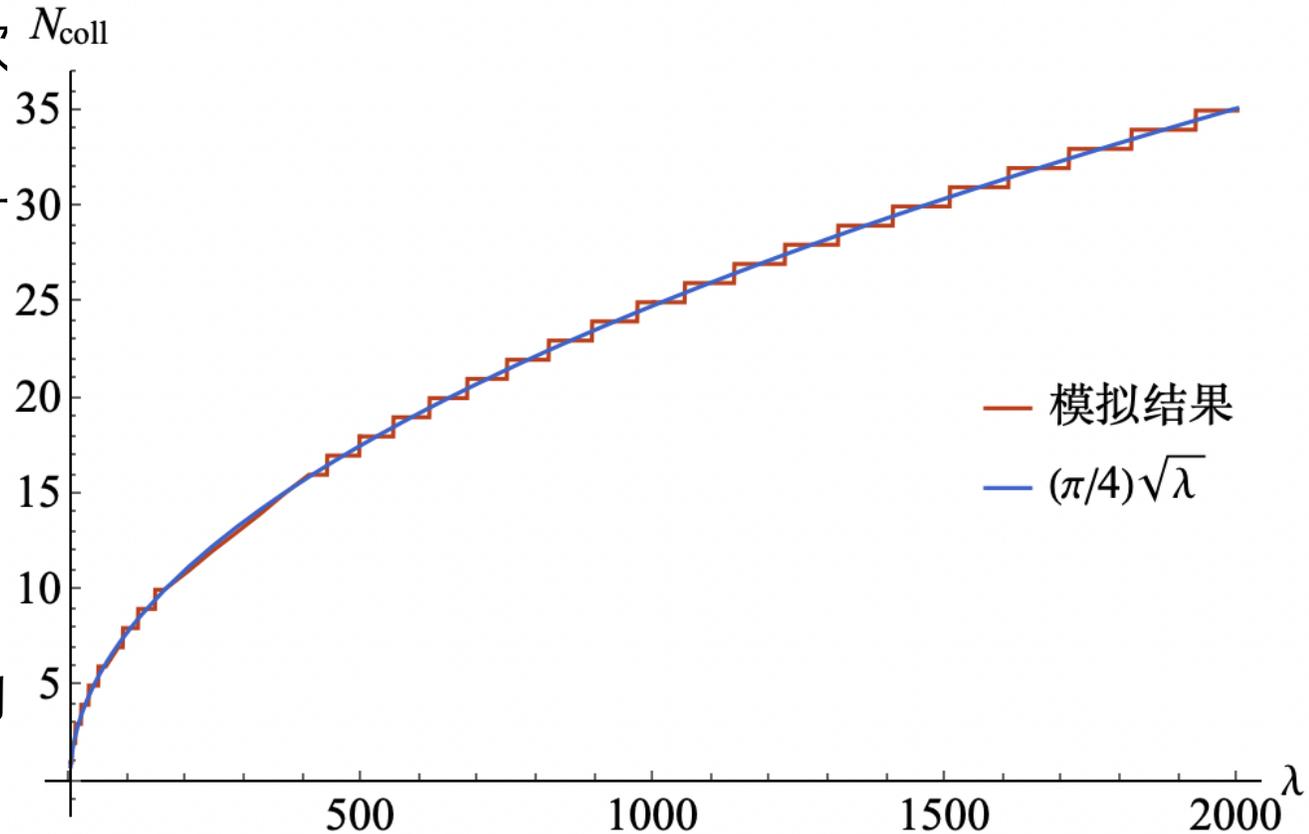
b) 若 $M = 4m$ ，求方块之间的碰撞次数

对于一般情况，大家可以写个程序计

设 $\frac{M}{m} = \lambda$ ，可以证明，当 $M \gg m$ (即 λ 次数满足：

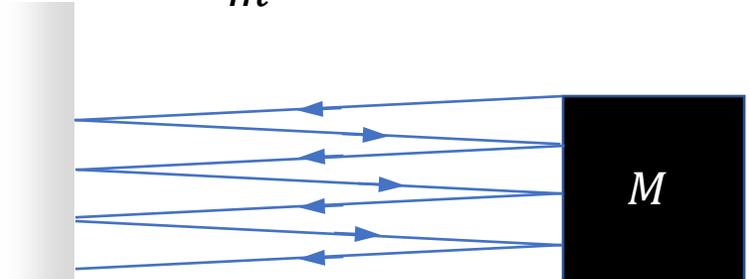
$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{\text{coll}}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{4}$$

网上流行的方法是用矩阵方法证明的以用动量守恒、能量守恒证明。



【例子】如图所示充分大的光滑水平面上，质量为 M 的大方块与墙之间放着一个质量为 m 的小方块。初始时刻，外侧方块静止，中间的方块有一个水平方向的初始速度 v_0 。已知所有碰撞都是弹性的，摩擦力可以忽略。设 $\frac{M}{m} = \lambda$ ，可以证明，当 $M \gg m$ (即 $\lambda \gg 1$)时，碰撞次数满足

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{\text{coll}}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{4}$$



经过充分碰撞以后，设中间小木块速度为 v ，边缘大木块速度为 V 。设发生 ΔN 次碰撞以后，大木块速度增加 ΔV 。由于 $M \gg m$ ，每次碰撞过程中，小木块几乎以相同的速度反弹。根据动量守恒，

$$M\Delta V = 2\Delta N mv$$

另一方面，碰撞过程能量守恒，因此

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - \lambda V^2}$$

因此，

$$\Delta N = \frac{\lambda \Delta V}{2\sqrt{v_0^2 - \lambda V^2}}$$

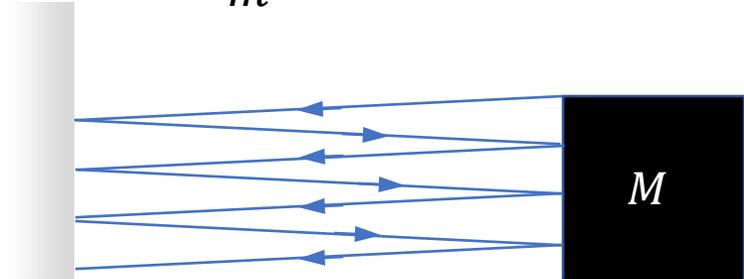
【例子】如图所示充分大的光滑水平面上，质量为 M 的大方块与墙之间放着一个质量为 m 的小方块。初始时刻，外侧方块静止，中间的方块有一个水平方向的初始速度 v_0 。已知所有碰撞都是弹性的，摩擦力可以忽略。设 $\frac{M}{m} = \lambda$ ，可以证明，当 $M \gg m$ (即 $\lambda \gg 1$)时，碰撞次数满足

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{\text{coll}}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{4}$$

$$N_{\text{coll}} = \sum \Delta N = \lambda \sum \frac{\Delta V}{2\sqrt{v_0^2 - \lambda V^2}}$$

由于两个木块质量相差悬殊，大木块速度增加非常缓慢，因此 ΔN 不太大时， $\Delta V \ll v_0$ 。上面的求和可以用积分代替，

$$N_{\text{coll}} \approx \frac{\lambda}{2} \int_0^{\frac{v_0}{\sqrt{\lambda}}} \frac{dV}{\sqrt{v_0^2 - \lambda V^2}} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\lambda}$$



【例子】如图所示充分大的光滑水平面上，质量为 M 的大方块与墙之间放着一个质量为 m 的小方块。初始时刻，外侧方块静止，中间的方块有一个水平方向的初始速度 v_0 。已知所有碰撞都是弹性的，摩擦力可以忽略。设 $\frac{M}{m} = \lambda$ ，可以证明，当 $M \gg m$ (即 $\lambda \gg 1$)时，碰撞次数满足

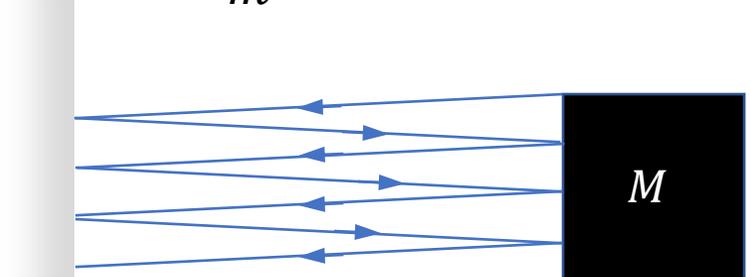
$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{\text{coll}}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{4}$$

$$N_{\text{coll}} = \sum \Delta N = \lambda \sum \frac{\Delta V}{2\sqrt{v_0^2 - \lambda V^2}}$$

由于两个木块质量相差悬殊，大木块速度增加非常缓慢，因此 ΔN 不太大时， $\Delta V \ll v_0$ 。上面的求和可以用积分代替，

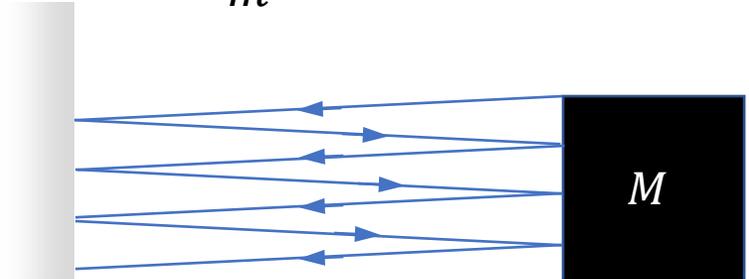
$$N_{\text{coll}} \approx \frac{\lambda}{2} \int_0^{\frac{v_0}{\sqrt{\lambda}}} \frac{dV}{\sqrt{v_0^2 - \lambda V^2}} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\lambda}$$

费曼：有 π 的地方一定有圆。我们的圆在哪里？



【例子】如图所示充分大的光滑水平面上，质量为 M 的大方块与墙之间放着一个质量为 m 的小方块。初始时刻，外侧方块静止，中间的方块有一个水平方向的初始速度 v_0 。已知所有碰撞都是弹性的，摩擦力可以忽略。设 $\frac{M}{m} = \lambda$ ，可以证明，当 $M \gg m$ (即 $\lambda \gg 1$)时，碰撞次数满足

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{\text{coll}}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{4}$$



费曼: 有 π 的地方一定有圆。我们的圆在哪里?

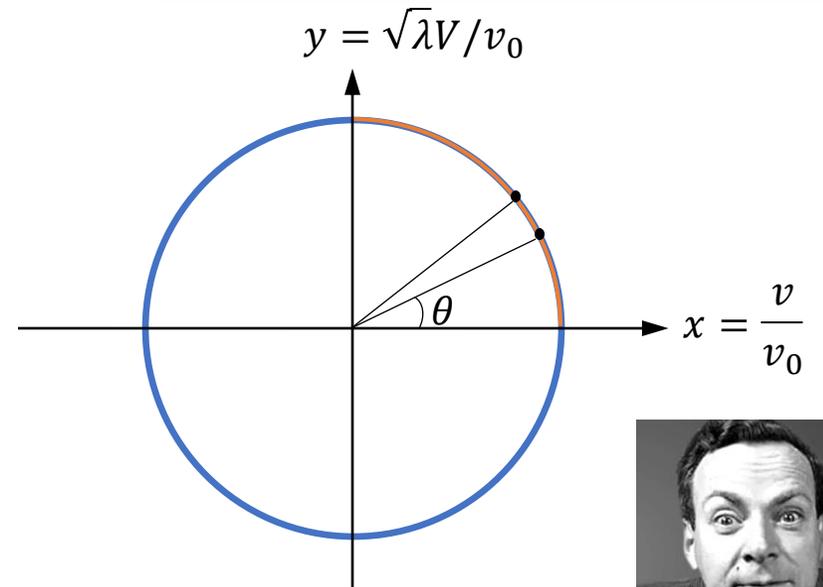
能量守恒: $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 = 1, x = \frac{v}{v_0}, y = \frac{\sqrt{\lambda}V}{v_0}$

动量守恒: $M\Delta V = 2mv \Rightarrow \Delta y = \frac{2x}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow \Delta\theta \approx 2/\sqrt{\lambda}$

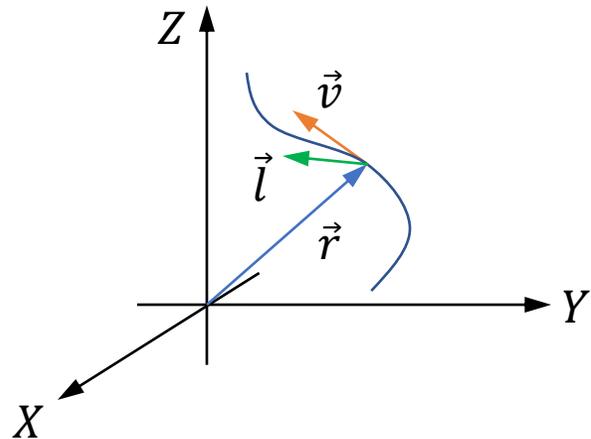
初始位置: $V_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0,$

末态位置: $V_f = v_f \Rightarrow y_f = \sqrt{\lambda}x_f \Rightarrow \theta_f \approx \frac{\pi}{2}$

$$N_{\text{coll}} = \frac{\theta_f}{\Delta\theta} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\lambda}$$



§7. 角动量守恒



角动量:

$$\vec{l} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

孤立体系的总能量守恒、总动量守恒。总角动量是否也守恒呢？考虑孤立的两粒子体系。总角动量为，

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{l}_1 + \vec{l}_2 = m_1\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \vec{v}_2 \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= m_1 \frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) + m_2 \frac{d}{dt}(\vec{r}_2 \times \vec{v}_2)\end{aligned}$$

计算 $\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \cancel{\vec{v}_i \times \vec{v}_i} + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

牛顿第二定律:

$$\vec{F}_{12} = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt}, \quad \vec{F}_{21} = m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

可以得到,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} - \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} \end{aligned}$$

- 质点之间的相互作用力 \vec{F}_{12} 仅依赖于质点之间的相对坐标 $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ 、相对速度 $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, 以及时间 t
- 牛顿假设相互作用力沿着质点连线的方向即 $\vec{F}_{12} \propto \vec{r}_{12}$, 则

$$\vec{r}_{12} \times \vec{F}_{12} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \text{角动量守恒}$$

- 注意，“相互作用力沿着质点连线的方向”这一点是一个独立的假设，无法从牛顿三大定律得到
- 有些作者宣称，“相互作用力沿着质点连线的方向”是牛顿第三定律的结论：
“反作用与作用大小相等、方向相反；两个物体之间的相互作用永远相等、方向相反”

然而并没有……

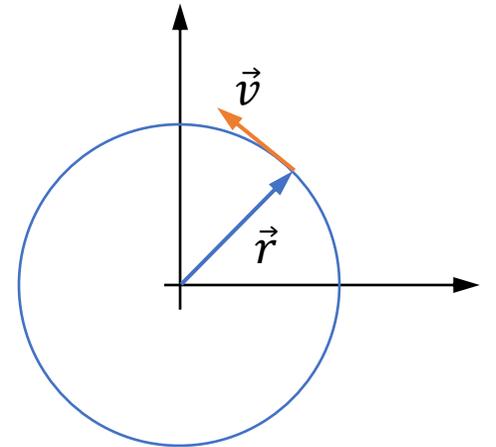
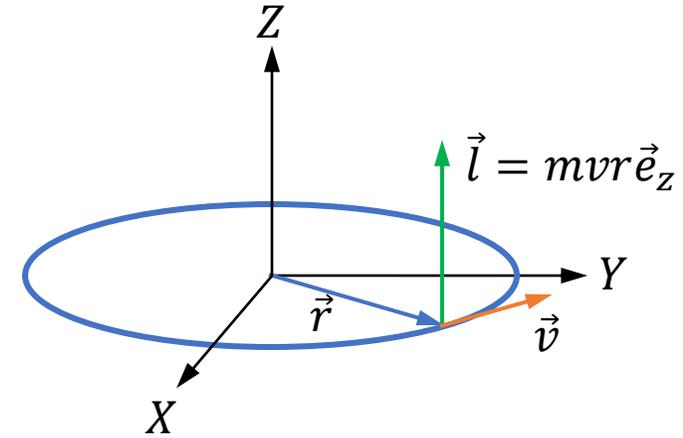
- 实际上角动量守恒是空间转动不变性的结果，即
 - 时空是各向同性的，因此角动量守恒
 - 在粒子不存在内禀角动量（自旋）时，角动量守恒要求相互作用力必然是沿着质点连线方向
 - 当粒子存在内禀角动量时，相互作用力不一定沿着质点连线方向

【例子】质量为 m 的质点做匀速圆周运动，轨道半径为 r ，速度大小为 v ，求其相对于圆心的角动量

解：

角动量是个常数

$$\vec{l} = m\vec{r} \times \vec{v} = mvr\vec{e}_z$$

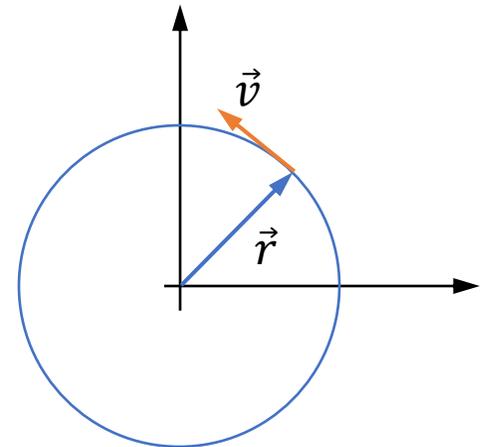
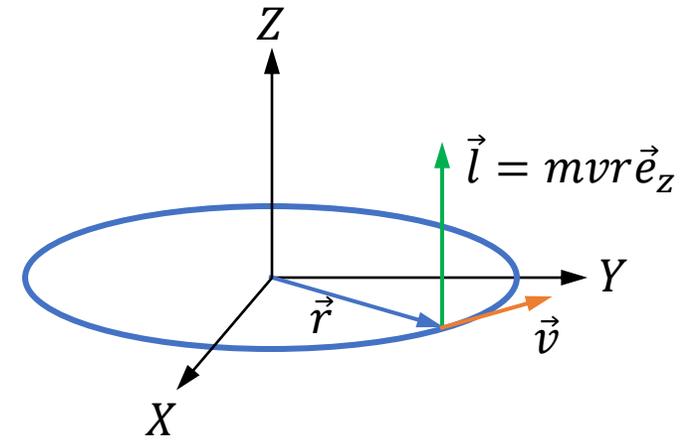


【例子】 计算椭圆轨道的角动量

解：

$$\vec{l} = m\vec{r} \times \vec{v} = mvr\vec{e}_z$$

角动量是个常数

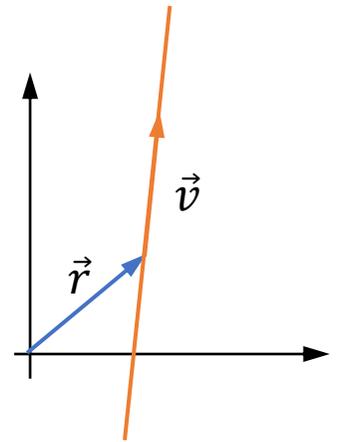
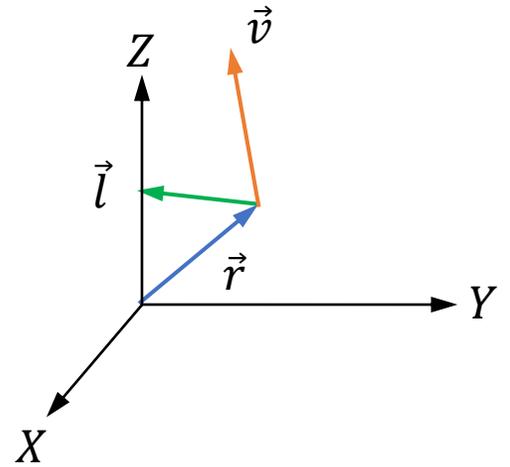


【例子】质量为 m 的质点做匀速直线运动，初始位置为 \vec{r}_0 ，速度为 \vec{v} ，求其相对于原点的角动量

解：

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{v}t \\ \vec{l} &= m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r}_0 \times \vec{v}\end{aligned}$$

角动量是个常数



a. 力矩-角动量定理

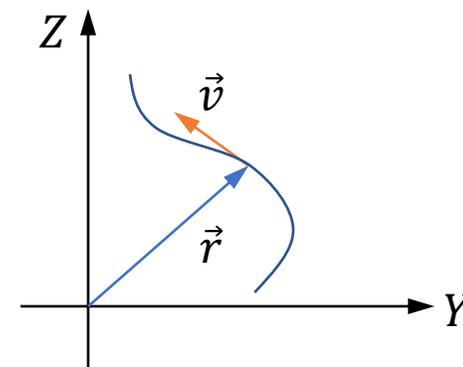
- 动能定理：动能的改变等于外力做功
- 冲量定理：动量的改变等于外力的冲量
- 角动量的改变呢？

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

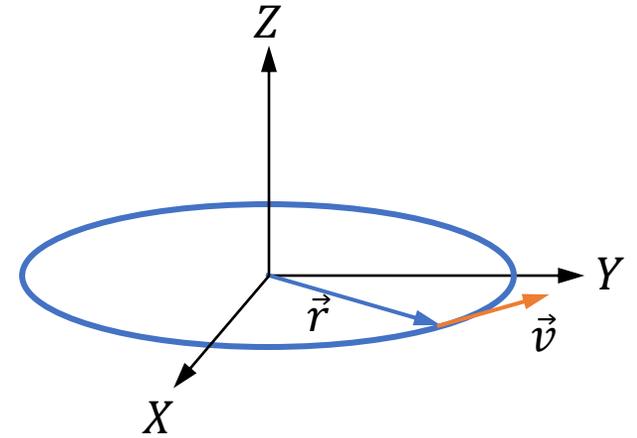
我们把 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ 叫做力矩

$$\Delta\vec{l} = \int \vec{M} dt$$

$\vec{J} = \int \vec{M} dt$ 叫做冲量矩。因此角动量的改变等于外力的冲量矩。



【例子】 质量为 m 的小球穿在一根半径为 r 、固定水平方向的环形细铁丝上。细铁丝与小球之间的摩擦系数为 μ 。小球的初始速度为 v_0 。求其相对于圆心的角动量。



【例子】一根半径为 r 的环形细铁丝固定光滑水平面上。铁丝上穿有一个质量为 m 的小球。已知细铁丝与小球之间的摩擦系数为 μ ，小球的初始速度为 v_0 。求 t 时刻其相对于圆心的角动量。

解：

小球受到铁丝提供的两个力，沿径向的向心力 N 与切向的摩擦力 f ：

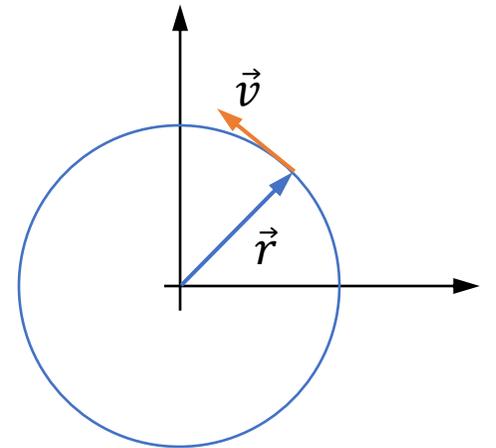
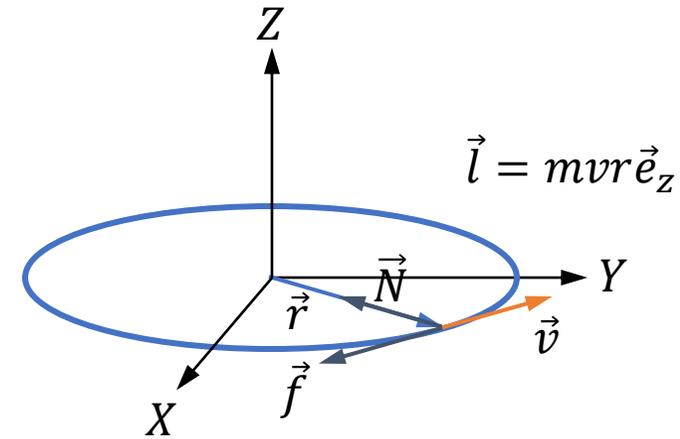
$$N = \frac{mv^2}{r}, f = \mu N = \frac{\mu mv^2}{r}$$

力矩：

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{f} = -\mu mv^2 \vec{e}_z$$

角动量： $\vec{l} = mrv\vec{e}_z$ ，因此，

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\mu l^2}{mr^2}$$



【例子】一根半径为 r 的环形细铁丝固定光滑水平面上。铁丝上穿有一个质量为 m 的小球。已知细铁丝与小球之间的摩擦系数为 μ ，小球的初始速度为 v_0 。求 t 时刻其相对于圆心的角动量。

分离变量并积分

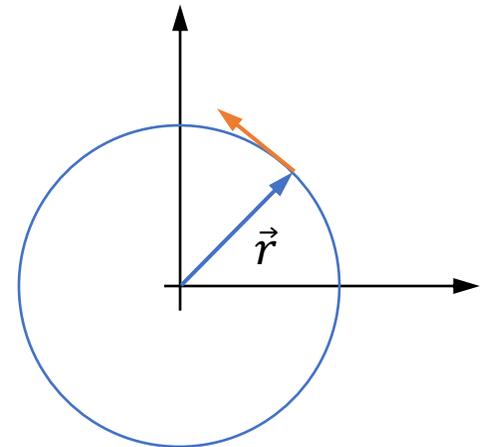
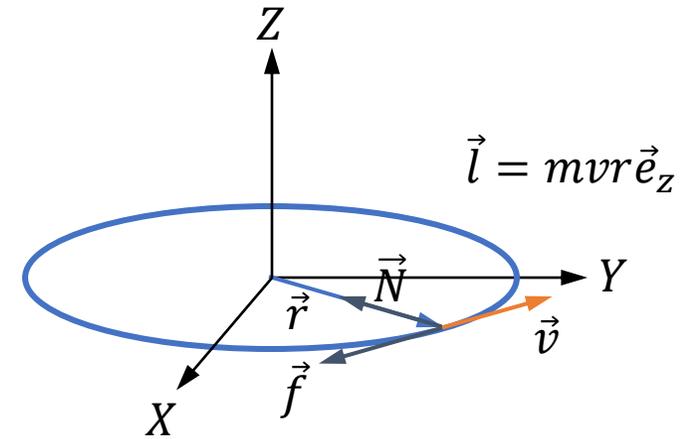
$$\int \frac{dl}{l^2} = -\frac{\mu}{mr^2} \int dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{l} + \frac{1}{l_0} = -\frac{\mu}{mr^2} t$$

这里， $l_0 = mrv_0$

$$\Rightarrow l = \frac{1}{\frac{1}{mrv_0} + \frac{\mu t}{mr^2}} = \frac{mv_0 r}{1 + \mu v_0 t / r}$$

另外一种办法就是按照牛顿第二定律结合曲线运动计算，会稍微有些复杂。



- 动量、能量、角动量是体系三类不同的特征物理量，彼此之间互相独立
- 在现代物理中，能量、动量、角动量守恒比牛顿力学更基本。它们的本质是时空对称性：时间平移不变性、空间平移不变性以及空间旋转不变性
- 诺特定理：连续对称性对应着守恒量

能量	动量	角动量
$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r)$	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{l} = m\vec{r} \times \vec{v}$
标量	矢量	矢量
牛顿第二定律	牛二+牛三	牛二+力沿着质点连线方向
保守力：能量守恒	合外力为零：动量守恒	外力矩为零：角动量守恒
时间平移不变性	空间平移不变性	空间旋转不变性



埃米·诺特

b. 角动量分解

- 总动能可以分解为质心动能加上相对动能（柯尼希定理）
- 总动量等于质心动量
- 总角动量是否可以按照质心运动分解呢？
- 可以证明如下结论：

$$\begin{aligned}\vec{L} &= m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2 \\ &= M \vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm} + \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i\end{aligned}$$

此处， $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{cm}$ ， $\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{cm}$ 。第一项是质心运动的角动量，第二项是相对于质心运动的角动量

- 证明:

• 证明:

$$\begin{aligned} & \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{cm}) \times (\vec{v}_i - \vec{v}_{cm}) \\ &= \sum_i (m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i - m_i \vec{r}_{cm} \times \vec{v}_i - m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_{cm} + m_i \vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm}) \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i - M \vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm} - M \vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm} + M \vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm} \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i - M \vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm} \end{aligned}$$

c. 有心力

- 有心力又叫中心力，是指始终通过某一个固定点的力。这个固定点可以选为原点比较方便

$$\vec{F} = F(r)\hat{r}$$

- 在有心力的作用下，质点运动相对于固定点的角动量守恒

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{r} \frac{F(r)}{r} = 0$$

- 这个结论也可以从牛顿第二定律得到：

$$m(a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta) = F(r)\vec{e}_r$$

其中， $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$ 为角向加速度。根据上式，

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

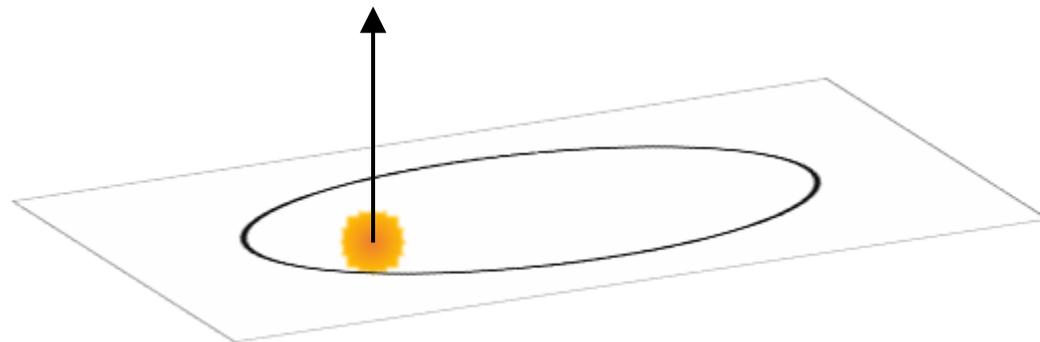
即,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0 \Rightarrow r^2 \dot{\theta} = \text{const.}$$

而角动量: $l = mrv_{\theta} = mr^2\dot{\theta}$

- 角动量的方向与轨道平面垂直: $\vec{l} = m\vec{r} \times \vec{v}$
- 开普勒第二定律:

$$\begin{aligned} \Delta A &= \frac{1}{2} r^2 \Delta \theta = \frac{l}{2m} \Delta t \\ \Rightarrow \frac{dA}{dt} &= \frac{l}{2m} \end{aligned}$$



§8. 天体运动

- 宇宙观是人类文明的重要组成部分
- 抛开人文和社会科学的因素，单纯从科学/物理学的角度，我们关心这样的问题，天上的星星为什么会动、如何运动？
- 回答这个问题的第一步是天文观测。几乎所有文明都有丰富的天文观测史，我国古代在这方面更是非常发达。
 - 司马迁在《史记》中独辟两章《历书》、《天官书》来介绍中国古代天文学的发展。

“昔之传天数者，高辛之前，重、黎；于唐、虞，羲、和；有夏，昆吾；殷商，巫咸；周室，史佚、苾弘；于宋，子韦；郑则裨竈；在齐，甘公；楚，唐昧；赵，尹皋；魏，石申。”

- 丰富的天文现象记录



丰富的天文现象记录

✓ 世界上最早的日食记录

《尚书》：“乃季秋月朔，辰弗集于房，……瞽奏鼓，嗇夫驰，遮人走……”（前2137年）

《竹书纪年》：“懿王元年，天再旦于郑”（前899年）

✓ 世界上最早的超新星的记录

《宋史》“自至和元年五月（公元1054年7月），客星晨出东方，守天关，至是没”

✓ 世界上最早的哈雷彗星的记录

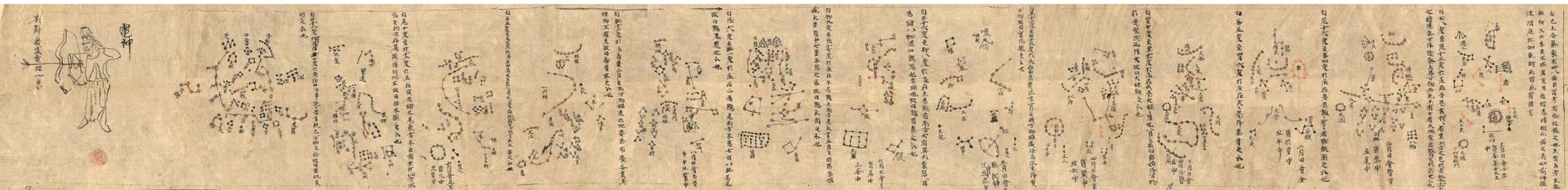
《春秋》，“鲁文公十四年（前613年）秋七月，有星孛入于北斗。”

✓ 世界上最早的星表之一

《甘石星经》作者是战国时期(公元前4世纪)的石申、甘德

✓ 现存世界上最早的星图：

《敦煌星图》，发现于敦煌莫高窟，现藏伦敦大英图书馆。原图绘制于唐代。



- 提出基于天文观测的天体模型

- 秦汉：

- 盖天说模型，《算经十书》（汉~唐），其中最早的《周髀算经》可能出现在周朝（不晚于西汉）【儒家】
 - 浑天说模型，张衡（公元78年-139年），著有《灵宪》、《浑天仪注》、《玄图》等书，其中《灵宪》一书中记载了124个星座，2500多颗恒星。张衡还制作了浑天仪，可以演示天体运动【道家】

《浑天仪注》“天如鸡子，地如鸡中黄，孤居于天内”

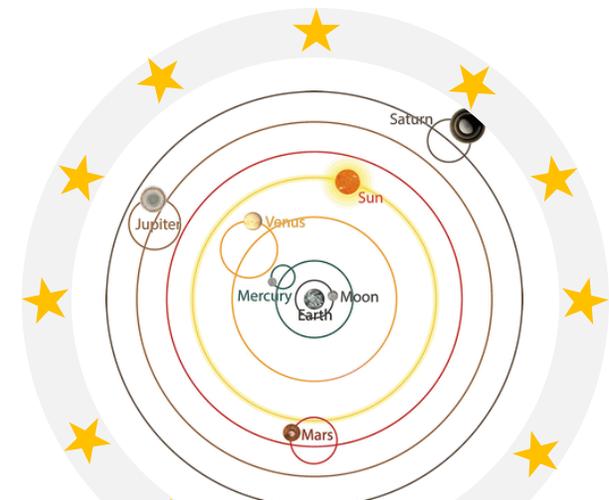
- 罗马：

- 托勒密（Claudius Ptolemy，公元100-170年），著有Syntaxis Mathematica（译：《天文学大成》）一书，书中提出了详细的星表与天体运动模型

- 地心说模型：

- 恒星：地球自转（均轮）
 - 行星：星体自身的运动（本轮）

- 知识传播的重要性



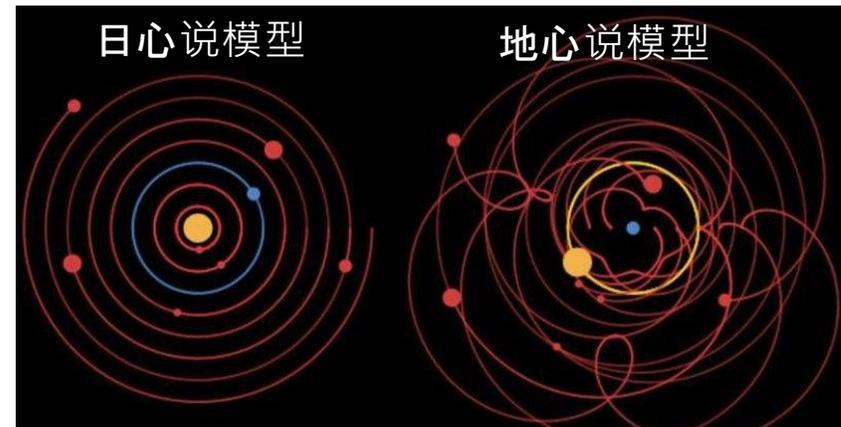
- 日心说模型

- 1543年，哥白尼提出以太阳为中心重新构建天体模型，极大化简了行星的运动模型
- 哥白尼的日心说模型否定了地球作为宇宙中心这一基本理念，这一想法被推广为哥白尼原理：地球在宇宙中的位置并不特殊。

与之相对，人择原理 (anthropic principle)：我们能观测到，因为我们特殊

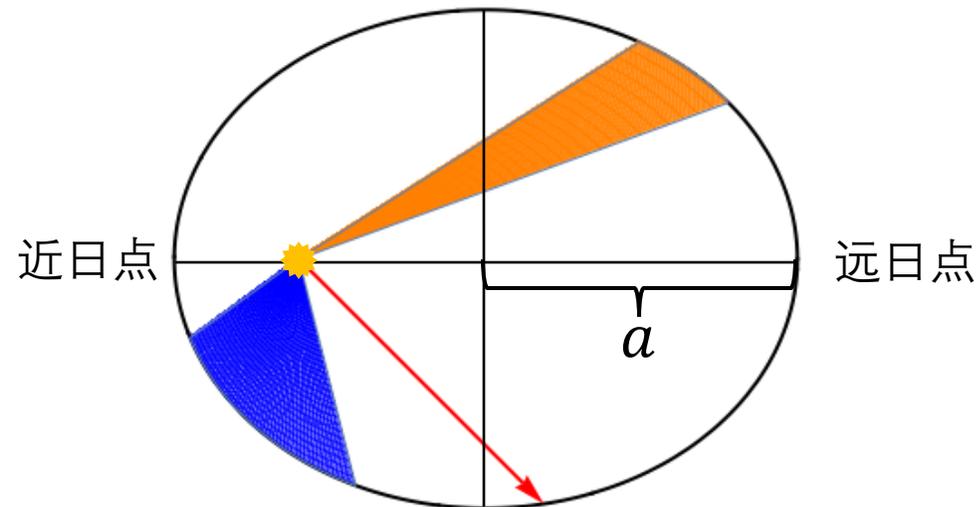
- 开普勒定律

- 开普勒基于第谷更加精确的天文观测和日心说模型，提出了（《新天文学》1609年、《世界的和谐》1619年）描述行星运动的开普勒三大定律
- 与占星学分开，并将天文学作为物理学的一部分：天体物理 (celestial physics)



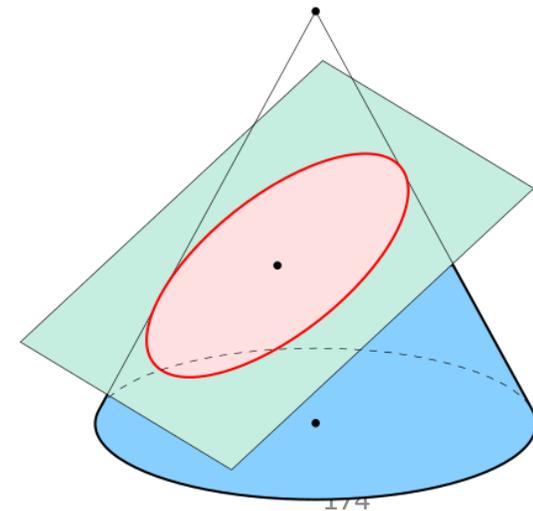
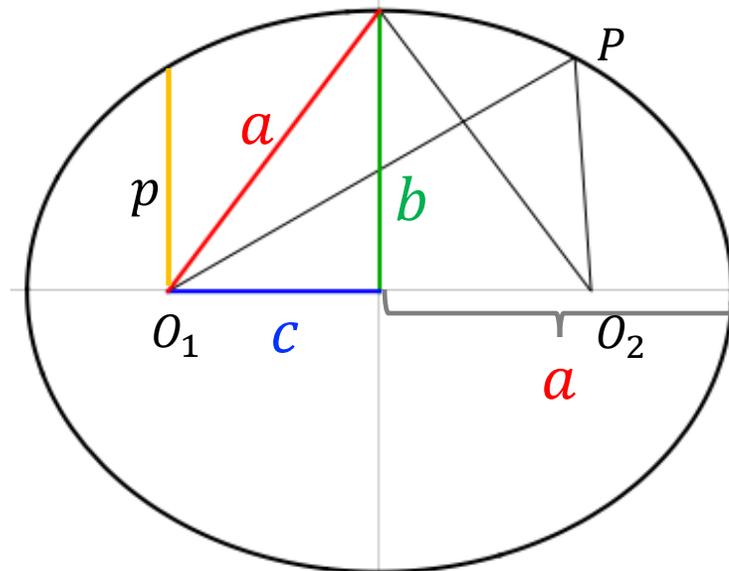
a. 开普勒定律

- 一、行星沿着椭圆轨道运行，太阳位于这些椭圆的一个焦点上。
- 二、行星到太阳的连线在相同的时间内扫过的面积相等。
- 三、行星绕太阳运动的周期 T 的平方与该行星的椭圆轨道的半长轴 a 的立方成正比，即 $T \propto a^{\frac{3}{2}}$



椭圆

- 椭圆有两个焦点，分别记为 O_1, O_2 椭圆上的任意一点 P 到两个焦点的距离之和是个常数： $O_1P + O_2P = 2a$
- 半长轴 a ，半短轴 b ，焦点之间的距离（焦距） $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}$
- 近日距离： $a + c = a(1 + e)$ ，远日距离： $a - c = a(1 - e)$
- 离心率： $e = \frac{c}{a}, (0 \leq e \leq 1)$
- 椭圆的面积： $S = \pi ab$
- 半正焦弦： $p = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a}$



- 椭圆方程:

- 直角坐标: 原点选在椭圆中心

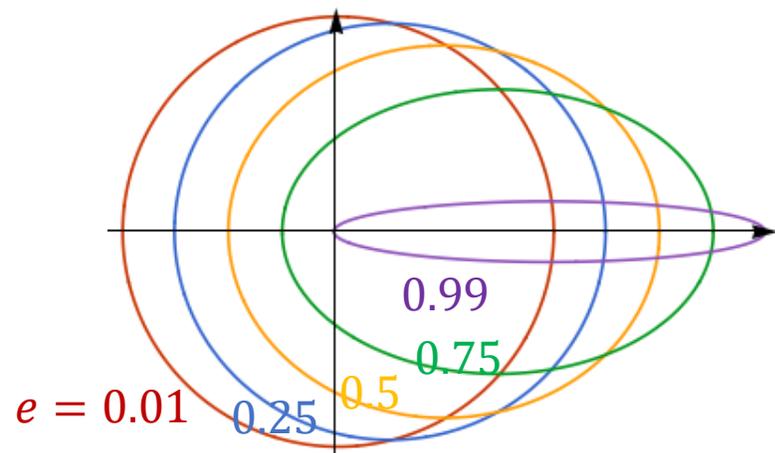
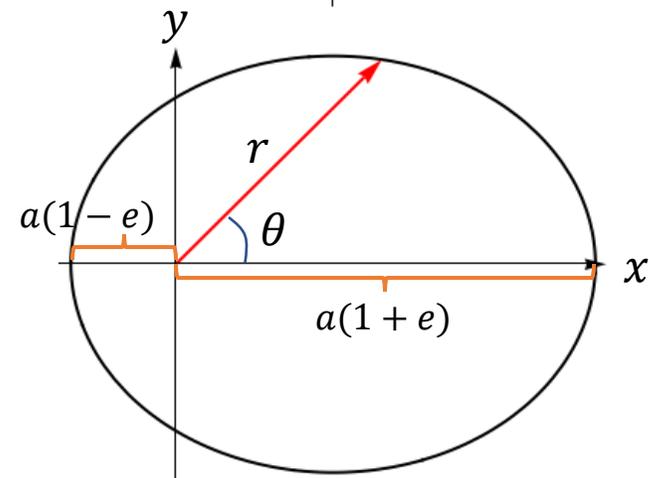
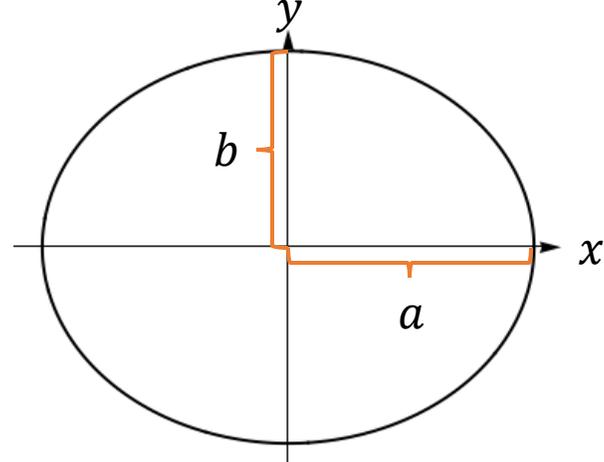
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- 极坐标: 原点选在椭圆其中一个焦点

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}$$

- 退化为圆: $e \rightarrow 0, (a = b = r)$

- 退化为直线: $b \rightarrow 0, (e = 1)$



这里利用守恒定律来推导得到开普勒定律

- 开普勒第二定律：角动量守恒
- 开普勒第三定律：

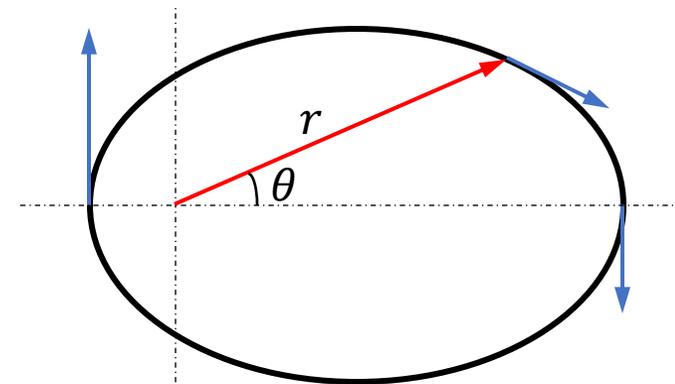
$$T = \frac{\pi ab}{dA/dt} = \frac{2m\pi ab}{l} = \frac{2m\pi a\sqrt{r_{\min}r_{\max}}}{l}$$

- 近地点、远地点： $l = mr_{\min}v_{\max} = mr_{\max}v_{\min}$
- 能量守恒：

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 - \frac{GMm}{r_{\min}} = \frac{1}{2}mv_{\min}^2 - \frac{GMm}{r_{\max}}$$

消去 v_{\min} ：

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{r_{\max}}{r_{\min}}} \Rightarrow l = m \sqrt{\frac{GM}{a} r_{\min} r_{\max}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$



- 开普勒第一定律：行星轨道为椭圆，太阳为其中一个焦点
- 引入一个新的守恒量：拉普拉斯-龙格-楞次矢量(LRL vector),

$$\vec{B} = \vec{v} \times \vec{l} - GMm\hat{r},$$

- 证明, $d\vec{B}/dt = 0$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{a} \times \vec{l} - GMm \frac{d\hat{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}, \quad \frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \frac{l}{mr^2} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} \times \vec{l} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r} \times (m\vec{r} \times \vec{v}) = -\frac{GMm}{r^2} [\vec{r}v_r - r\vec{v}] = +\frac{GMl}{r^2} \vec{e}_\theta$$

综上,

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned} & \vec{r}v_r - r\vec{v} \\ &= rv_r \vec{e}_r - rv_r \vec{e}_r - rv_\theta \vec{e}_\theta \\ &= -rv_\theta \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

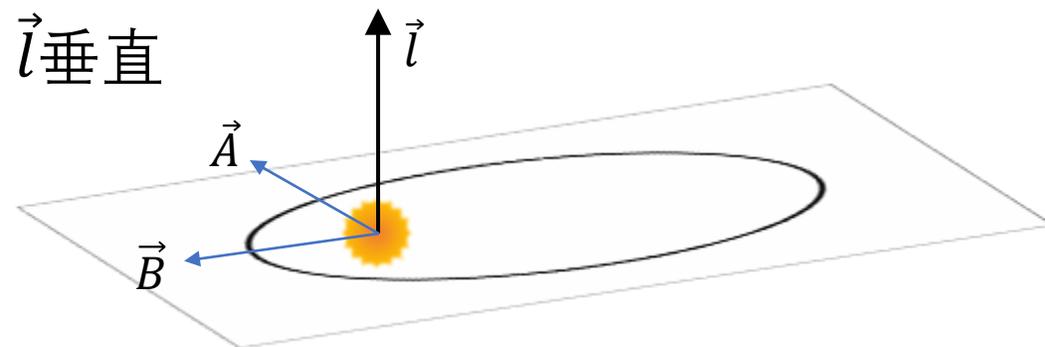
- 龙格-楞次矢量不是龙格(Runge)和楞次(Lenz)发现的! 这两个人只是把这个矢量写进了自己的教科书。这个矢量是赫尔曼和及其导师伯努利首先发现的
- 一个相关的守恒量—哈密顿矢量,

$$\vec{A} = \frac{GM}{rl} \vec{l} \times \vec{r} - l\vec{v},$$

可以证明,

$$\vec{B} \times \vec{l} = l\vec{A}$$

- 可以计算出 $A = B = GMme$, 这里, $e = c/a$ 为椭圆轨道的偏心率, 有时候, 也将LRL矢量称为偏心率矢量
- \vec{B} 的方向为从太阳指向近日点的方向, \vec{A} 与 \vec{B} 、 \vec{l} 垂直



- 利用龙格-楞次矢量可以很容易证明开普勒第一定律：

$$\vec{r} \cdot \vec{B} = -rB \cos \theta$$

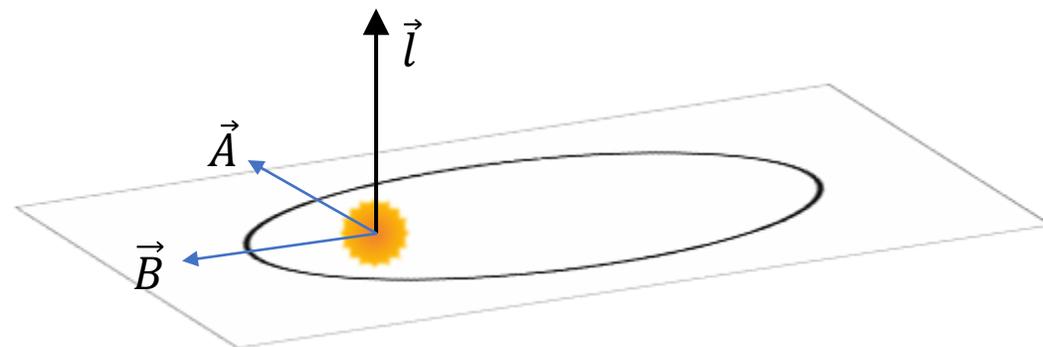
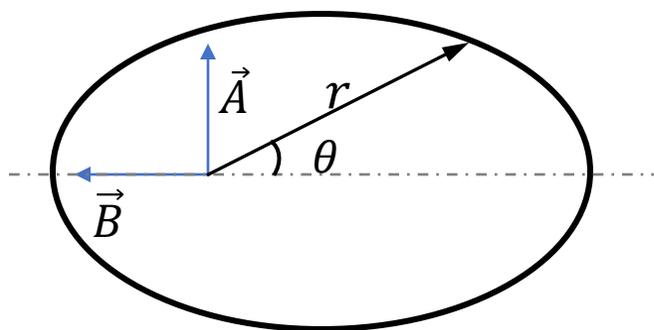
另一方面，

$$\vec{r} \cdot \vec{B} = \vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{l}) - GMmr, B = GMme$$

利用混合积的性质， $\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{l}) = \vec{l} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{l} \cdot \frac{\vec{l}}{m} = \frac{l^2}{m}$ 。因此，

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$

其中， $p = \frac{l^2}{GMm^2}$ 为半正交弦长。这个方程就是极坐标形式下的椭圆方程。



- 轨道参数与物理参量,

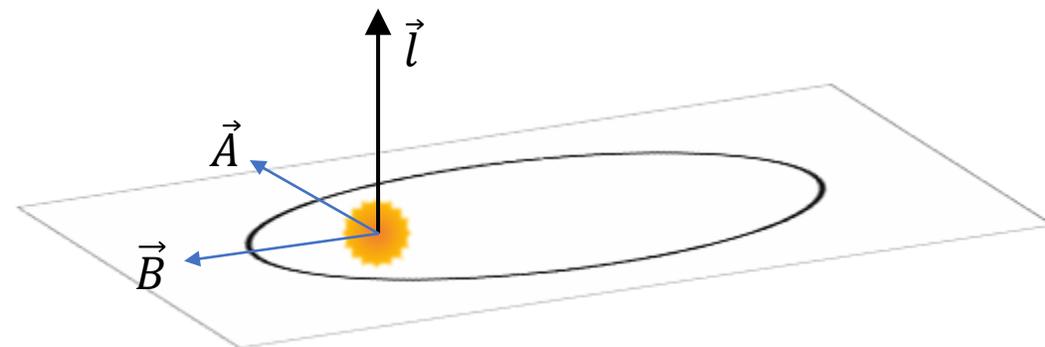
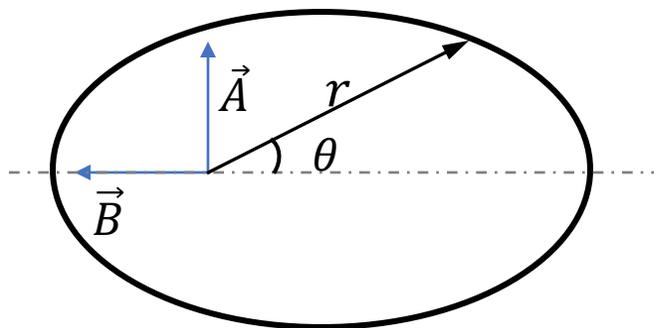
$$\vec{B}^2 = (\vec{v} \times \vec{l} - GMm\hat{r})^2 = \frac{2}{m} \left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \right) l^2 + (GMm)^2 = \frac{2l^2}{m} E + (GMm)^2$$

$$(GMme)^2 = \frac{2l^2}{m} E + (GMm)^2$$

从而,

$$E = -\frac{(GM)^2 m^3}{2l^2} (1 - e^2) \quad p = \frac{b^2}{a}$$

- 之前已经证明, $E = -\frac{GMm}{2a} \Rightarrow l^2 = GMm^2 p$



椭圆的轨道几何参数总结：

- 半长轴 a ：

$$a = -\frac{GMm}{2E}$$

- 半短轴 b ：

$$b = \frac{l}{\sqrt{-2mE}}$$

- 偏心率：

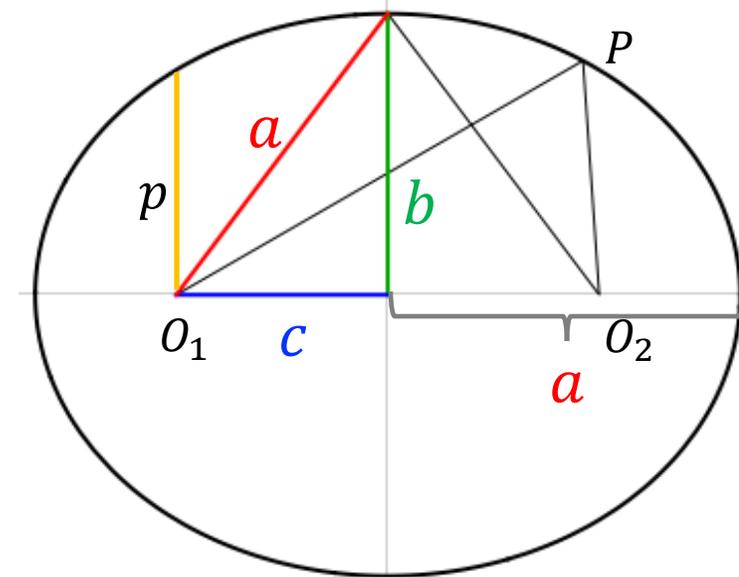
$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{(GM)^2 m^3}}$$

- 半正焦弦：

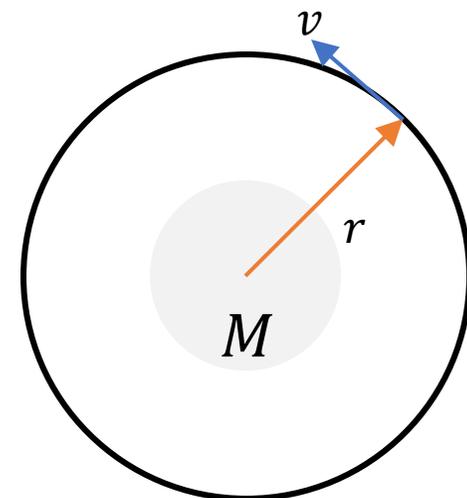
$$p = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a} = \frac{l^2}{GMm^2}$$

- 焦点之间的距离（焦距）

$$c = -\frac{1}{2E} \sqrt{(GM)^2 + \frac{2l^2 E}{m^3}}$$



考虑圆轨道上的卫星。设卫星轨道半径为 r ，求轨道速度 v 和轨道周期 T 。



考虑圆轨道上的卫星。设卫星轨道半径为 r ，求轨道速度 v 和轨道周期 T 。

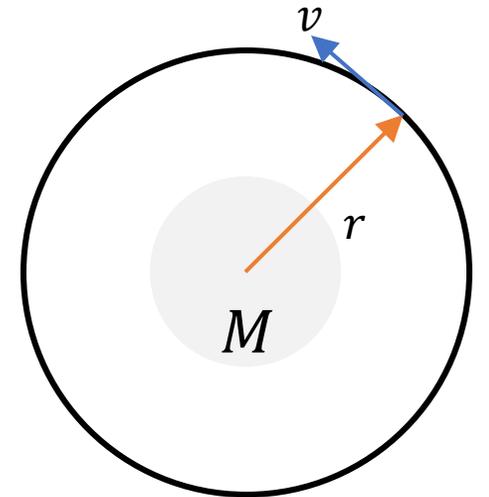
牛顿第二定律： $F = ma$,

其中： $F = \frac{GMm}{r^2}$ (万有引力), $a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$ (向心加速度)

$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{GM/r}, \quad T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

- 轨道半径越大，周期越长，速度越慢



$$v = \omega r, \\ T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi r/v$$

开普勒第三定律

- 第一宇宙速度: $r = R_E$,

$$g = \frac{GM_E}{R_E^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_E}{R_E}} = \sqrt{gR_E} \approx 7.9 \text{ km/s}$$

脱离地面飞行所需要的最低速度。周期:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_E^3}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_E}{g}} \approx 85 \text{ min}$$

【例子】世界上第一颗人造卫星Sputnik, 轨道接近圆周, 已知其轨道周期为96分钟, 求其轨道半径。



牛顿的大炮实验



Sputnik卫星

- 第一宇宙速度： $r = R_E$,

$$g = \frac{GM_E}{R_E^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_E}{R_E}} = \sqrt{gR_E} \approx 7.9 \text{ km/s}$$

脱离地面飞行所需要的最低速度。周期：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_E^3}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_E}{g}} \approx 85 \text{ min}$$

【例子】世界上第一颗人造卫星Sputnik，轨道接近圆周，已知其轨道周期为96分钟，求其轨道半径。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_E}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{gR_E^2}}$$

$$\Rightarrow r = \left(\frac{T^2}{4\pi^2} gR_E^2 \right)^{\frac{1}{3}} \approx 6960 \text{ km}$$

飞行平均高度：560km，平均速度7.6 km/s



牛顿的大炮实验



Sputnik卫星

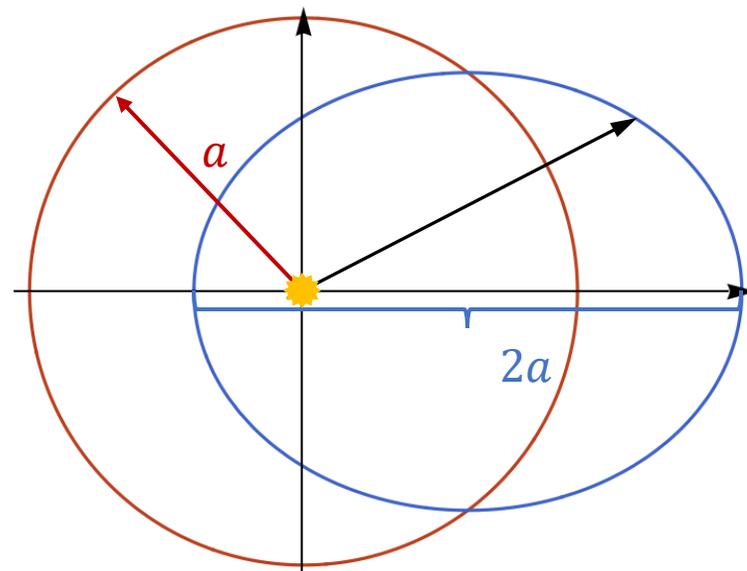
- 开普勒第三定律：行星绕太阳运动的周期 T 的平方与该行星的椭圆轨道的半长轴 a 的立方成正比，即 $T \propto a^{\frac{3}{2}}$

比例系数可以通过圆轨道得到：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

例如，地球的卫星

$$T_{\text{sat}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{gR_E^2}}$$



【例子】 已知月球绕地球一周约30天。求地球到月球之间的距离。



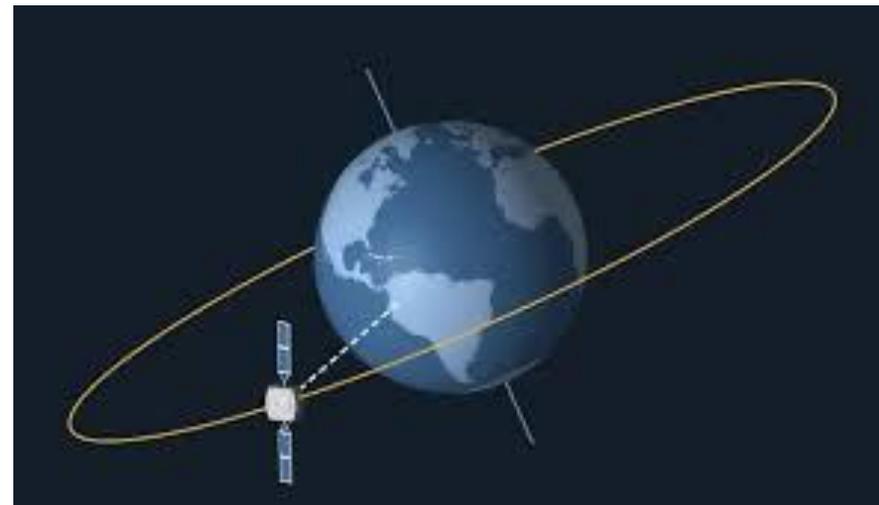
【例子】 已知月球绕地球一周约30天。求地球到月球之间的距离。

解：

$$T_{\text{moon}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{gR_E^2}}$$
$$a = \left(\frac{gR_E^2 T^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 4 \times 10^8 \text{ m}$$



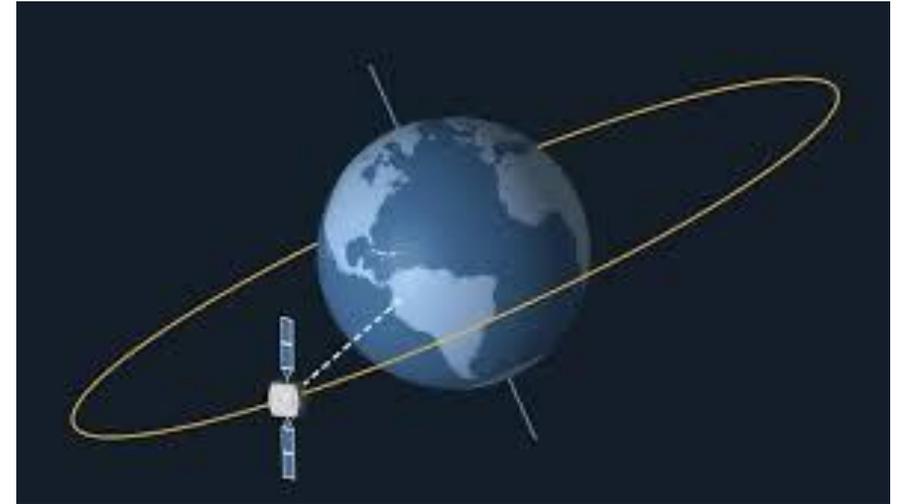
【例子】地球同步轨道上的卫星绕地球一周时间为24小时。因此，处在这一轨道的卫星相对于地面是静止的。求这一轨道距离地面的高度。



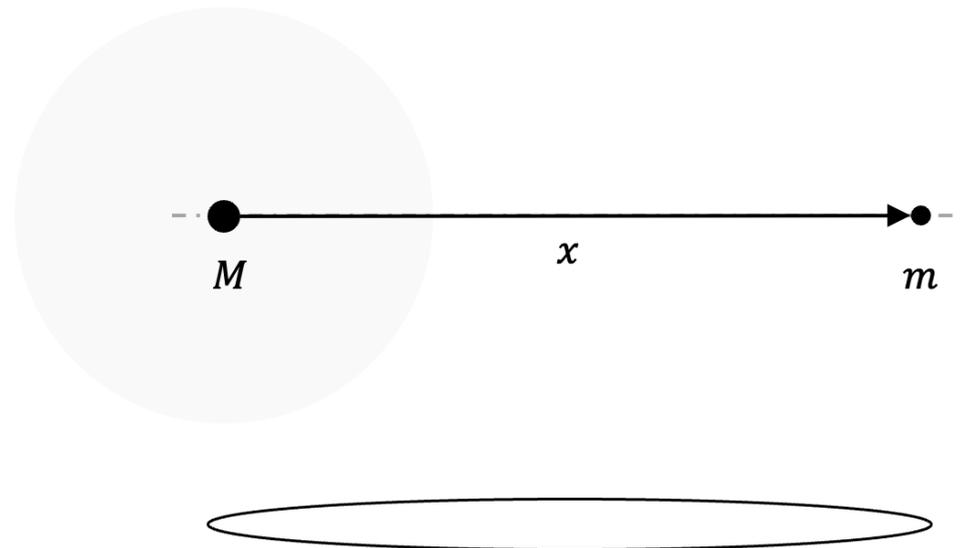
【例子】地球同步轨道上的卫星绕地球一周时间为24小时。因此，处在这一轨道的卫星相对于地面是静止的。求这一轨道距离地面的高度。

解：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{gR_E^2}}$$
$$h = \left(\frac{gR_E^2 T^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} - R_E \approx 3.6 \text{ 万千米}$$



【例子】若月球停止绕地球公转（一些科幻电影里面的常见桥段），经过多长时间月球将与地球相撞？地月之间的距离 D 为38万公里，不考虑月球和地球半径。



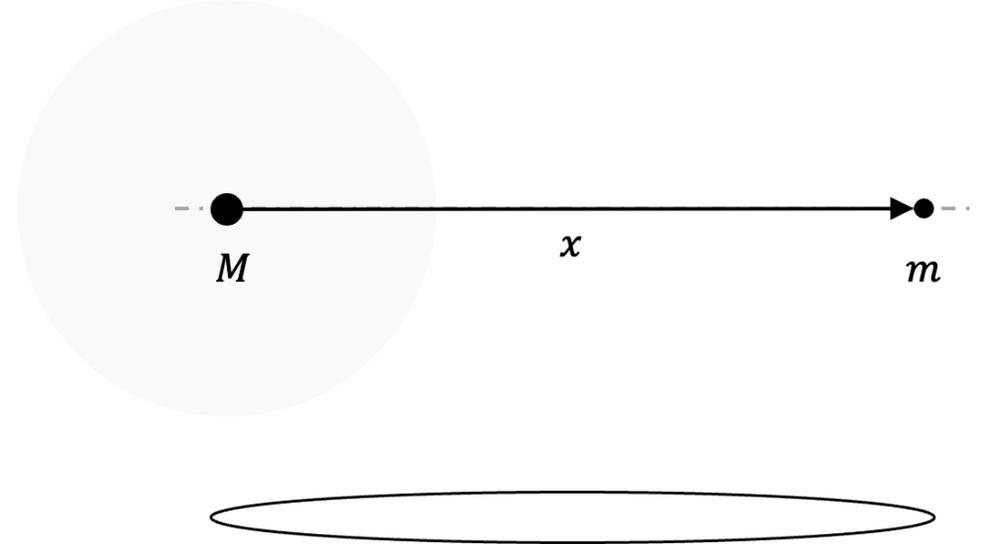
【例子】若月球停止绕地球公转（一些科幻电影里面的常见桥段），经过多长时间月球将与地球相撞？地月之间的距离 D 为38万公里，不考虑月球和地球半径。

解：

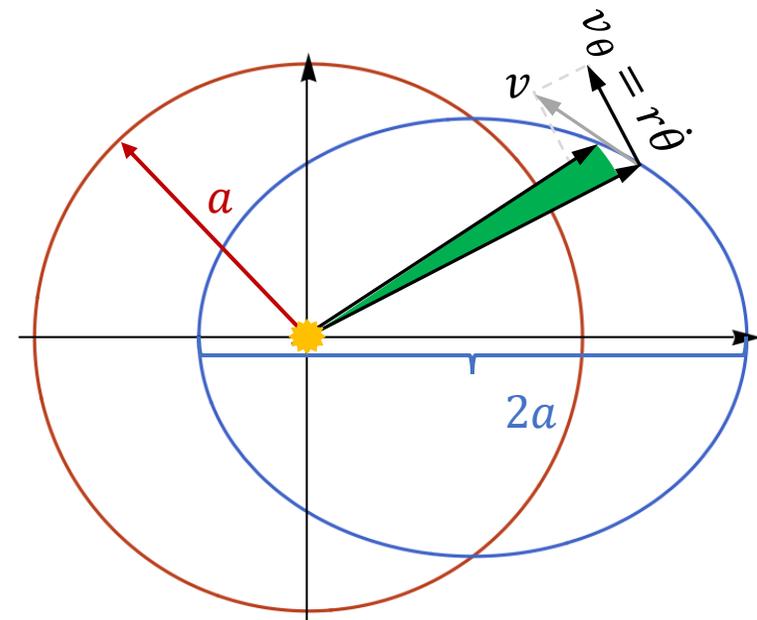
可以将月球的运动视为一个退化的椭圆，其半长轴为地月距离的一半，即 $a = D/2$ 。下落时间为周期的一半 $t = T/2$ 。

根据开普勒第三定律

$$t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} = \pi \sqrt{\frac{D^3}{8gR_E^2}} \approx 4.7 \text{天}$$



- 开普勒第二定律：行星到太阳的连线在相同的时间内扫过的面积相等



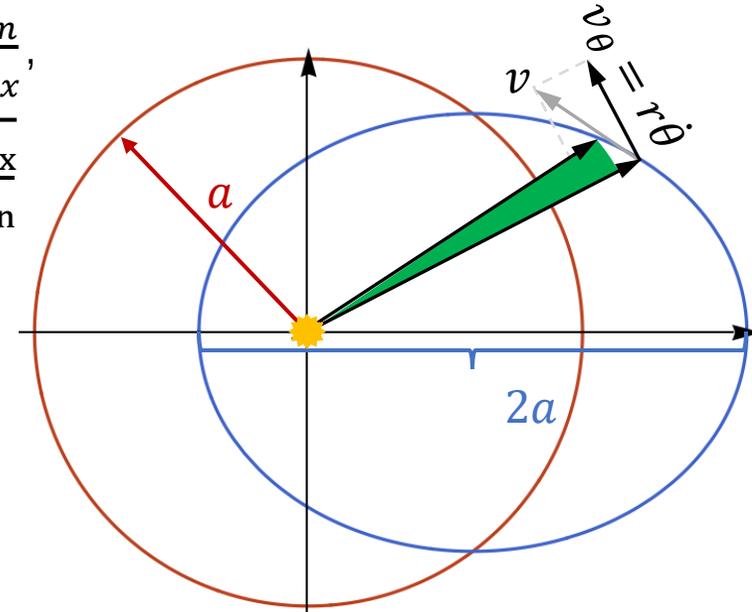
- 开普勒第二定律：行星到太阳的连线在相同的时间内扫过的面积相等

$$\frac{1}{2}\sqrt{pGM} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\frac{1}{2}r\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{2}rv_{\theta} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

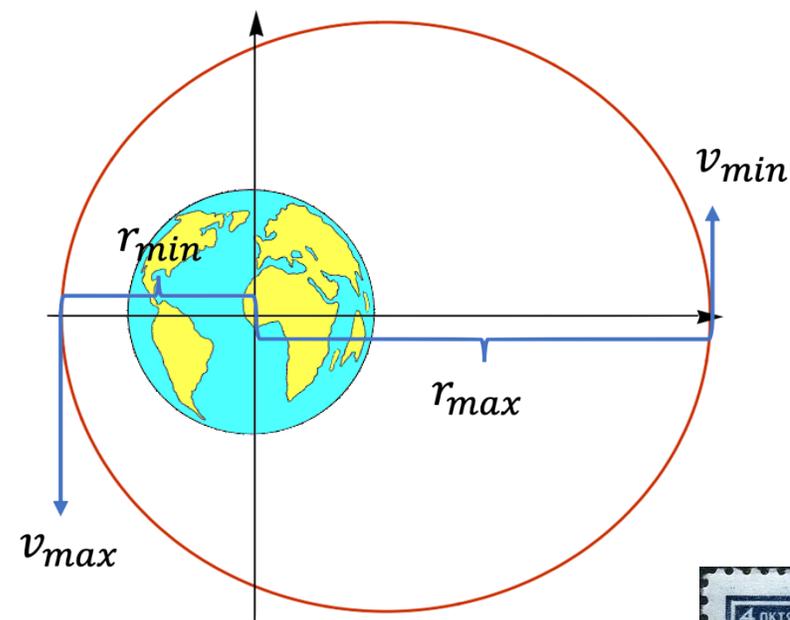
$$\Rightarrow rv_{\theta} = \sqrt{pGM}$$

远日点 $r_{\max} = a + c$, 速度: $v_{\min} = \frac{2\pi ab}{T(a + \sqrt{a^2 - b^2})} = \sqrt{\frac{2GM}{r_{\min} + r_{\max}} \frac{r_{\min}}{r_{\max}}}$,

近日点 $r_{\min} = a - c$, 速度: $v_{\max} = \frac{2\pi ab}{T(a - \sqrt{a^2 - b^2})} = \sqrt{\frac{2GM}{r_{\min} + r_{\max}} \frac{r_{\max}}{r_{\min}}}$



【例子】Sputnik卫星近地点距地面215km，远地点距离地面940km，求其最大速度。

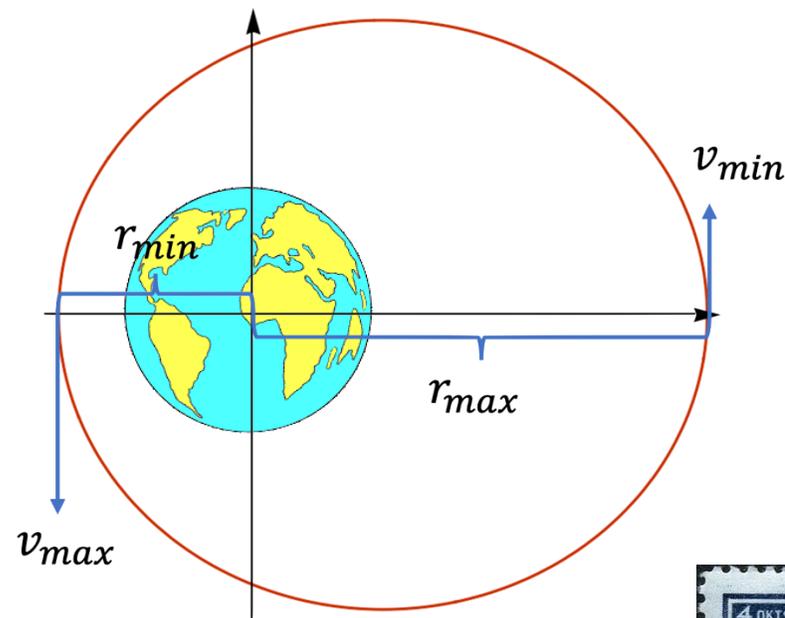


【例子】Sputnik卫星近地点距地面215km，远地点距离地面940km，求其最大速度。

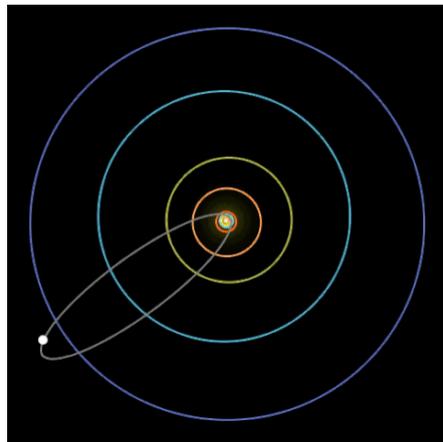
求解：

$$\begin{aligned}r_{\min} &= R_E + h_{\min} \\ r_{\max} &= R_E + h_{\max}, \\ a &= \frac{1}{2}(r_{\max} + r_{\min})\end{aligned}$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{gR_E^2}{a} \frac{r_{\max}}{r_{\min}}} \approx 8.0 \text{ km/s}$$



【例子】哈雷彗星周期约为76年。其近日点距离为0.6AU。求哈雷彗星在近日点处轨道的曲率半径（以AU为单位，1AU为地球到太阳之间的距离）



七年彗星先出東方見北方五月見西方
 八年王弟長安君成蟜死後其民反
 九年王弟長安君成蟜死後其民反
 十年王弟長安君成蟜死後其民反
 十一年王弟長安君成蟜死後其民反
 十二年王弟長安君成蟜死後其民反
 十三年王弟長安君成蟜死後其民反
 十四年王弟長安君成蟜死後其民反
 十五年王弟長安君成蟜死後其民反
 十六日夏太后死
 十七年王弟長安君成蟜死後其民反

哈雷彗星是人类历史上著名的一个彗星。人类最早的纪录来自于《史记》

“始皇七年，彗星先出东方，见北方；五月见西方，十六日”

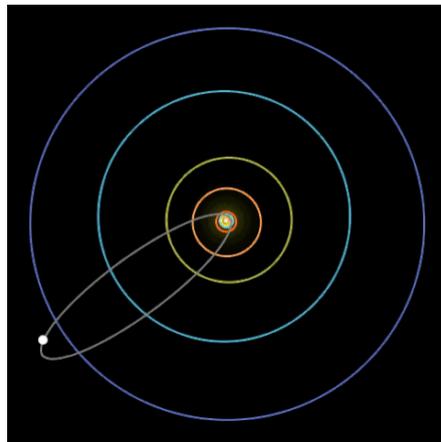
【例子】哈雷彗星周期约为76年。其近日点距离为0.6AU。求哈雷彗星在近日点处轨道的曲率半径（以AU为单位，1AU为地球到太阳之间的距离）

求解：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_S}}, \quad \frac{T_{\text{halley}}}{T_{\text{earth}}} = \left(\frac{a_{\text{halley}}}{a_{\text{earth}}}\right)^{\frac{3}{2}} = 76 \Rightarrow a_{\text{halley}} = 17.9 a_{\text{earth}}$$

$$r_{\min} v_{\max} = \sqrt{pGM_S}$$

$$\frac{GM_S}{r_{\min}^2} = \frac{v_{\max}^2}{\rho} \Rightarrow \rho = p = \frac{b^2}{a} = \frac{r_{\min} r_{\max}}{a} \approx 1.2 \text{ AU}$$



始皇七年，彗星先出东方，见北方；五月见西方，十六日。《史记》

哈雷彗星是人类历史上著名的一个彗星。人类最早的纪录来自于《史记》

“始皇七年，彗星先出东方，见北方；五月见西方，十六日”

b. 开普勒轨道分类

考虑天体在引力作用下的总能量:

$$E = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r}$$

角动量:

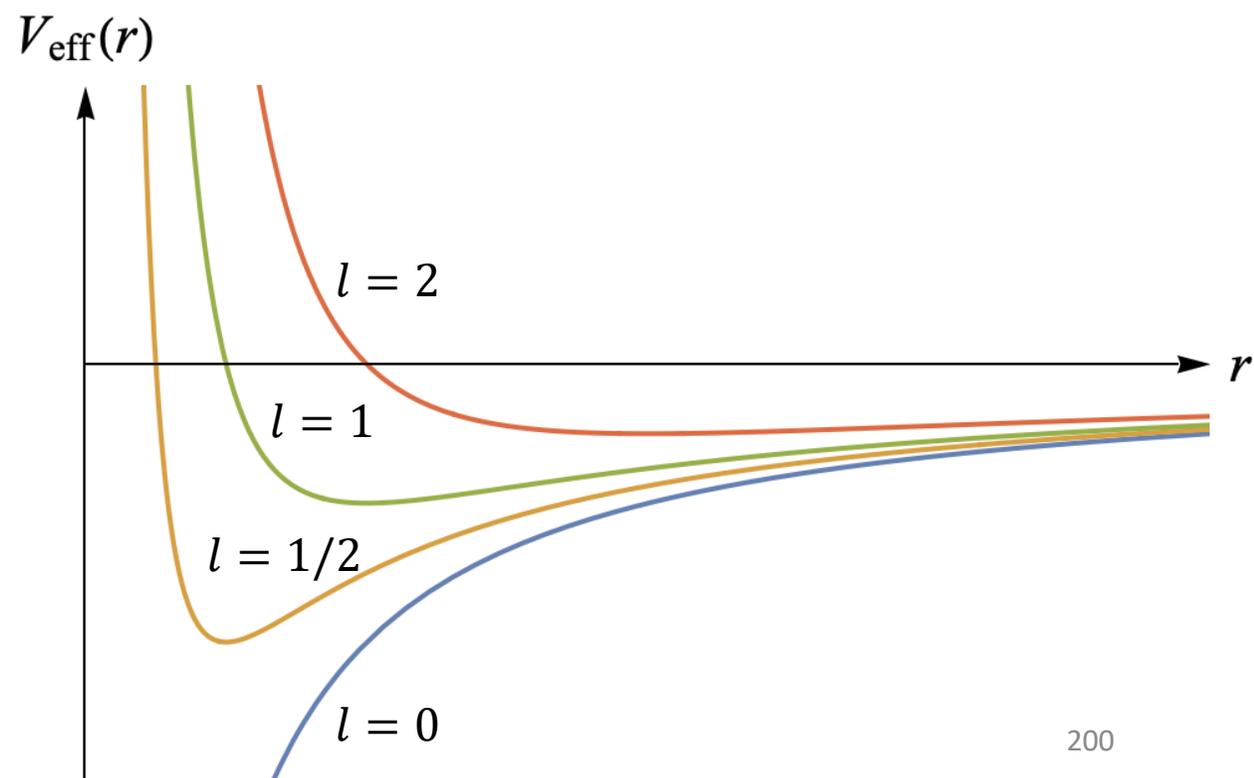
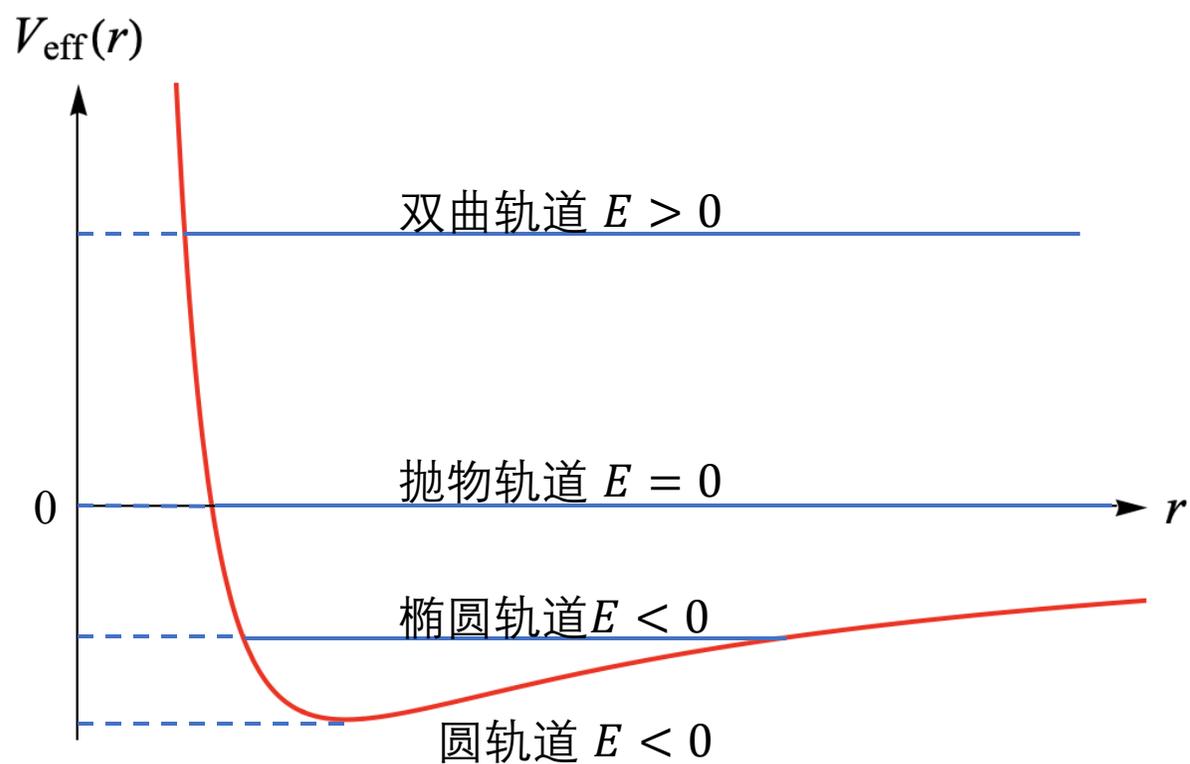
$$l = m r^2 \dot{\theta}$$
$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2 m r^2} - \frac{GMm}{r} = T + V_{\text{eff}}(r)$$

这样以来, 总能量仅包含径向坐标 r 及其时间导数, 也就是说, 原始的三维的问题变成了一个一维问题

• 等效势能:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2 m r^2} - \frac{GMm}{r}$$

- 等效势能曲线与总能量 E 的交点为行星运动时的拱点
- 圆轨道为相同角动量下能量最低的轨道
- 角动量提供了一个有效的排斥力，防止天体落入太阳



- 椭圆轨道对应总能量 $E < 0$
- 总能量 $E = 0$ 的轨道：前面的推导仍然成立， $e = 1$

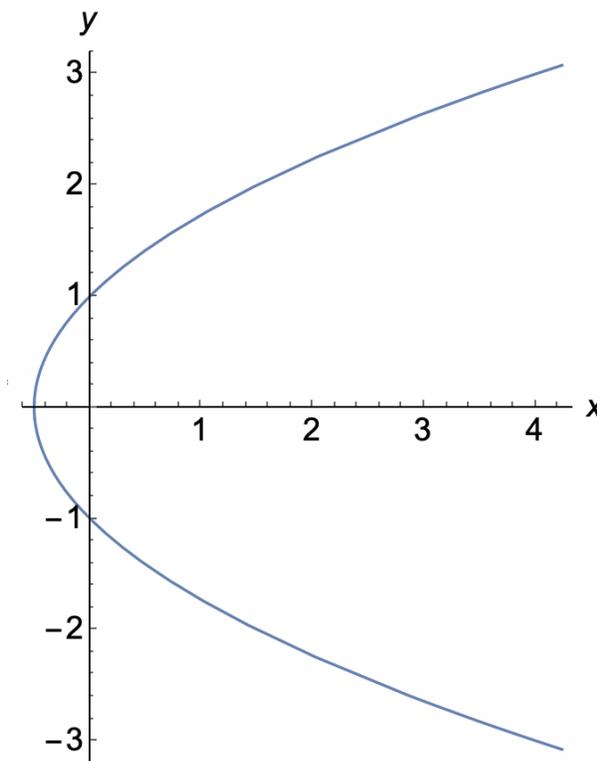
$$r = \frac{p}{1 - \cos \theta}$$

对应的曲线为抛物线

$$y^2 = p^2 + 2px$$

其中，太阳处在抛物线焦点上，焦距 $f = \frac{p}{2}$

- 天体可以运动到充分远的地方，脱离太阳引力



【例子】 第二宇宙速度（逃逸速度）， 挣脱地球引力场所需要的发射速度：

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{R_E} = E = 0$$
$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2gR_E} = \sqrt{2}v_1 \approx 11.2 \text{ km/s}$$

其中， $v_1 = \sqrt{gR_E}$ 为第一宇宙速度。

【例子】 挣脱太阳引力场所需要的发射速度：

$$\frac{1}{2}mv_{\text{esc}}^2 - \frac{GM_S m}{R_{SE}} = E = 0$$
$$\Rightarrow v_{\text{esc}} = \sqrt{2GM_S/R_{SE}} \approx 42.2 \text{ km/s}$$

不过， 这一速度并未考虑地球的运动以及地球的引力场， 因此并非从地球上发射时所需要的速度

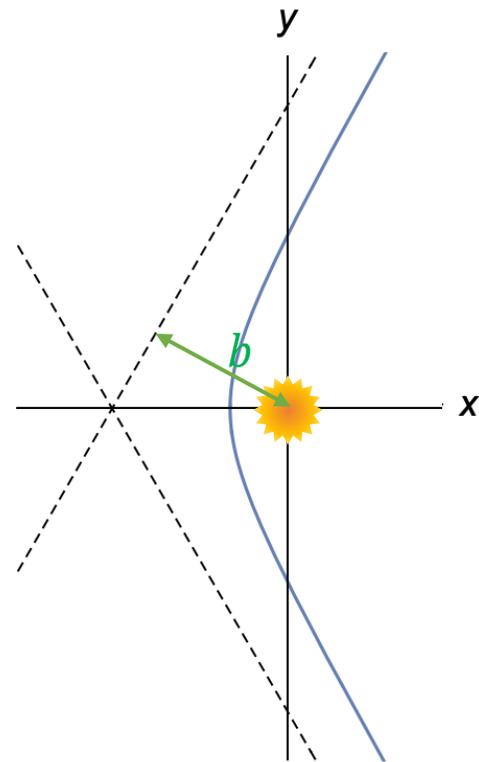
- 总能量 $E > 0$ 的轨道：前面的推导仍然成立， $e > 1$

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta},$$

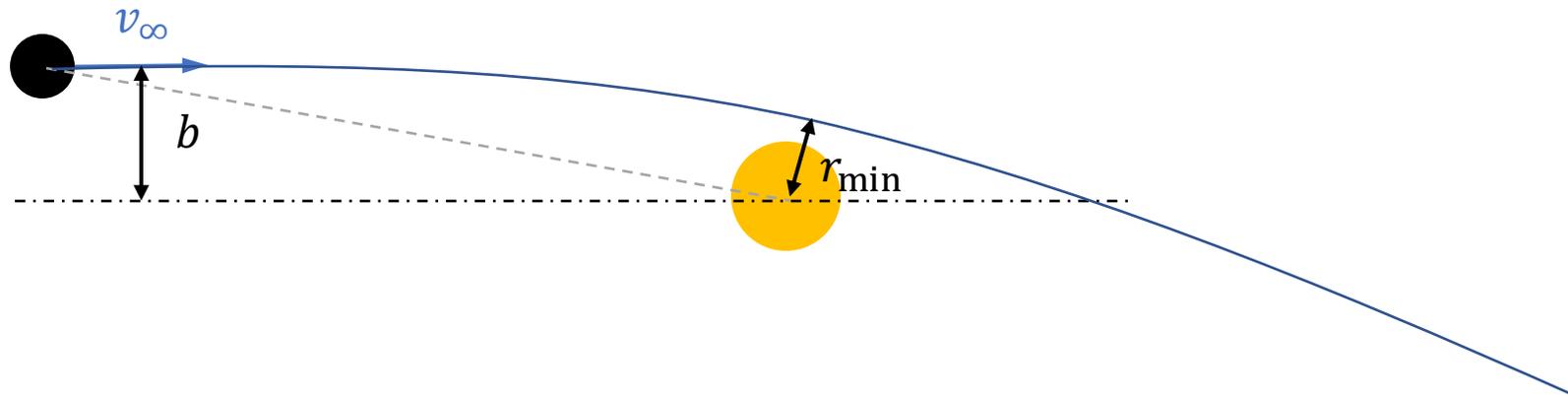
对应的曲线为双曲线，

$$y^2 - (e^2 - 1)x^2 = p^2$$

其中， $p = \frac{l^2}{GMm^2}$ 为半正交弦长， $e = \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{(GMm)^2 m}} > 1$ 为偏心率，太阳处在其中一个焦点上

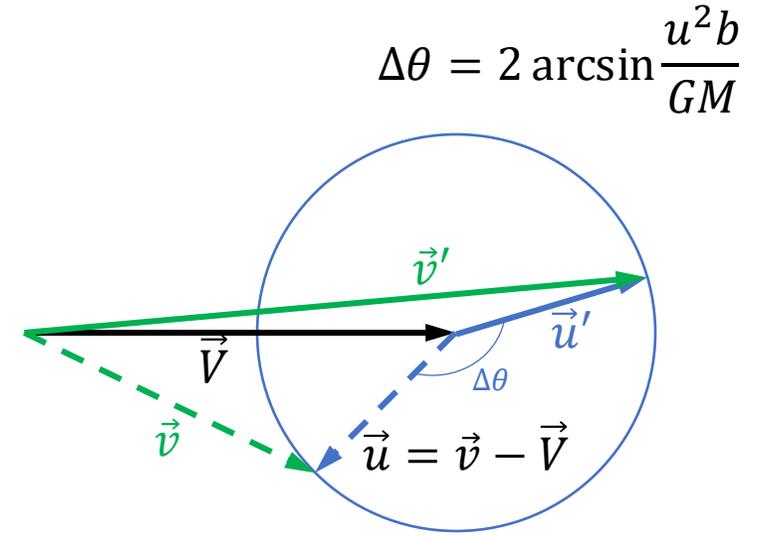
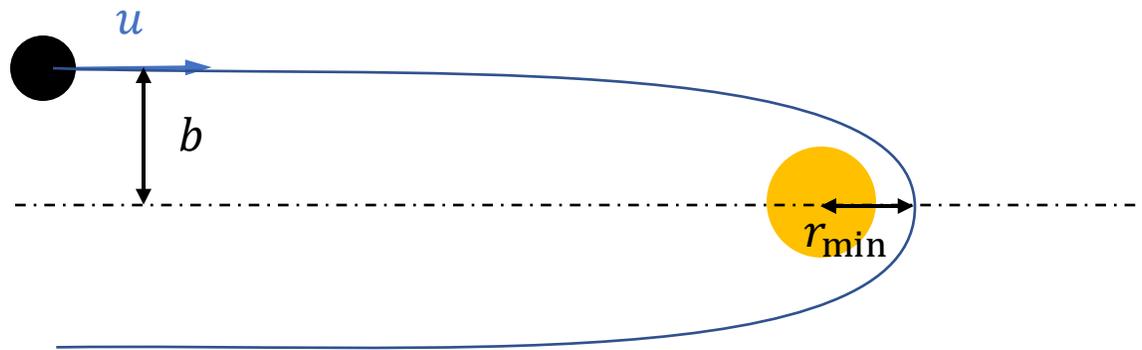


- 应用：引力作用下的散射 —— 可以用偏心碰撞(斜碰撞)来处理
 - 渐进速度 (无穷远时的速度): $\frac{1}{2}mv_{\infty}^2 = E \Rightarrow v_{\infty} = \sqrt{2E/m}$
 - 偏转角: $\Delta\theta = 2 \arccos e^{-1} = 2 \arcsin \frac{lv_{\infty}}{GMm} = 2 \operatorname{arccot} \frac{v_{\infty}^2 b}{GM}$
 - 碰撞距离: $mv_{\infty}b = l \Rightarrow b = \frac{l}{\sqrt{2mE}}$
 - 近日点距离: $r_{\min} = \frac{GMm}{2E} (e - 1)$



- 引力援助/引力弹弓 (Gravity assistance, Slingshot effect)
 - 设天体速度为 \vec{V} ，飞船与天体散射前渐进速度为 \vec{v} ，飞船与天体散射以后，速度为 \vec{v}' 。整个过程能量守恒、动量守恒。
 - 考虑两者的相对运动。飞船相对于天体的初速度为 $\vec{u} = \vec{v} - \vec{V}$ ，散射以后的相对速度大小仍然为 $u = |\vec{v} - \vec{V}|$ ，但方向发射改变。
 - 由于两者质量差非常大，散射以后天体速度 \vec{V} 不变
 - 最大加速的情况：飞船与天体速度方向相反且 $\Delta\theta = 180^\circ$ ，可以由1维碰撞得到

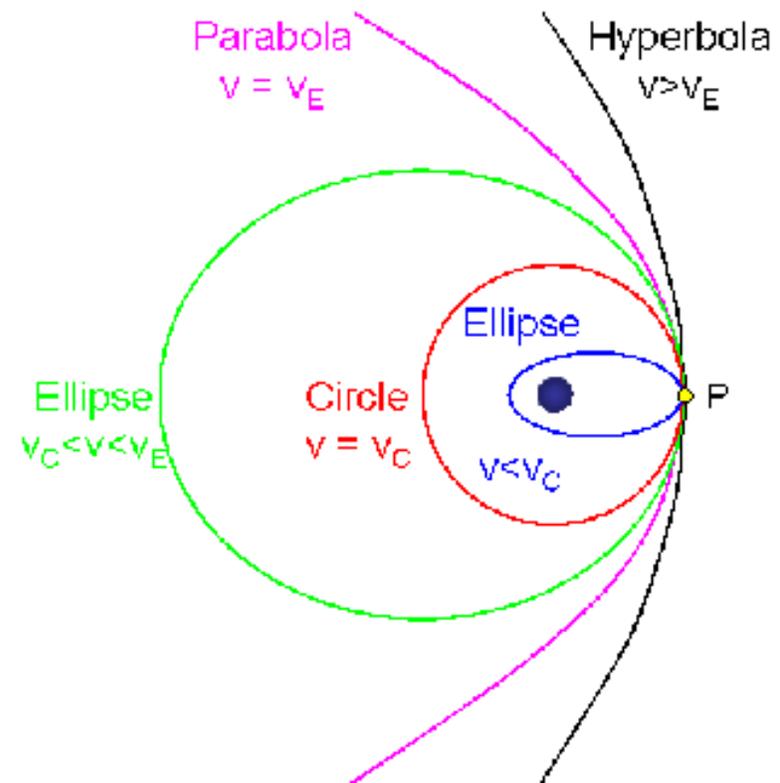
$$v' = 2V - v$$



- 开普勒轨道小结：
 - $E < 0$, 椭圆轨道（包含圆轨道）； $E = 0$, 抛物线轨道； $E > 0$, 双曲线轨道
- 对于距离引力中心距离为 r 的一点 P , 设其速度为 v , 且速度垂直于力心与 P 点的连线, 则
 - $v < v_c$, 轨道为椭圆, 且 P 点为远地点;
 - $v = v_c$, 轨道为圆轨道
 - $v_c < v < v_E$, 轨道为椭圆轨道, 且 P 点为近地点;
 - $v = v_E$, 轨道为抛物线轨道, 且 P 点为近地点;
 - $v > v_E$, 轨道为双曲线, 且 P 点为近地点

此处, $v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, $v_E = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$, 总能量和角动量为,

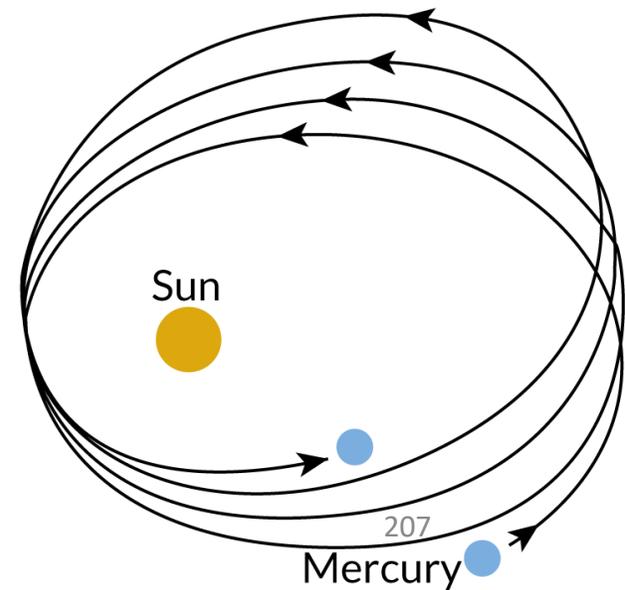
$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}, \quad l = mrv$$



【例子】其他行星对水星的引力影响(叫做摄动力)可以等效为一个中心力，形式为，

$$\vec{F}(r) = \frac{h}{r^4} \vec{r}$$

其中 $h \ll \frac{l^2}{m}$ ， l 为水星角动量。求水星的近日点进动速度。



【例子】其他行星对水星的引力影响(叫做摄动力)可以等效为一个中心力，形式为，

$$\vec{F}(r) = \frac{h}{r^4} \vec{r}$$

其中 $h \ll \frac{l^2}{m}$ ， l 为水星角动量。求水星的近日点进动速度。

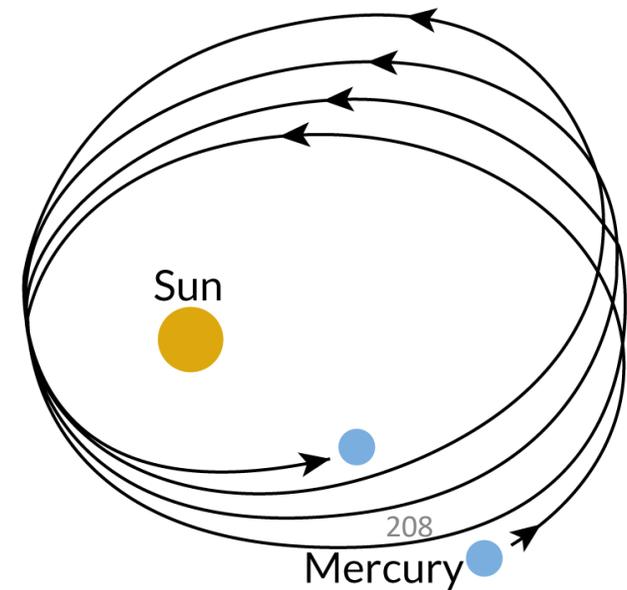
求解：摄动力对应的势能为，

$$V(r) = \frac{h}{2r^2}$$

总有效势能为，

$$V_{\text{eff}} = \frac{l'^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

其中， $l'^2 = l^2 + mh \Rightarrow l' \approx l + \frac{mh}{2l}$



【例子】其他行星对水星的引力影响(叫做摄动力)可以等效为一个中心力，形式为，

$$\vec{F}(r) = \frac{h}{r^4} \vec{r}$$

其中 $h \ll \frac{l^2}{m}$ ， l 为水星角动量。求水星的近日点进动速度。

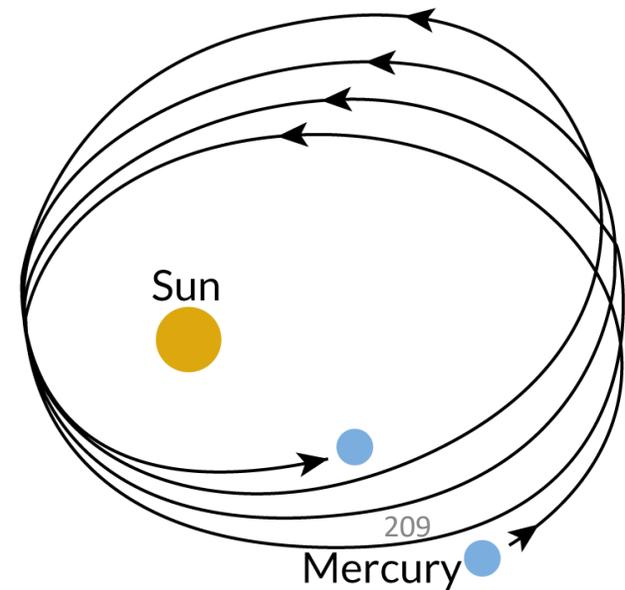
近日点进动产生的原因是，角向周期与径向周期不同。由于角动量守恒，开普勒第二定律仍然成立，角向周期仍然为

$$T_\theta = \frac{2\pi ab}{l}$$

径向周期，

$$T_r = \frac{2\pi ab}{l'}$$

$$\Delta T = T_r - T_\theta = -\frac{2\pi ab}{l} \frac{mh}{l} \approx -\frac{Tmh}{2l^2}$$



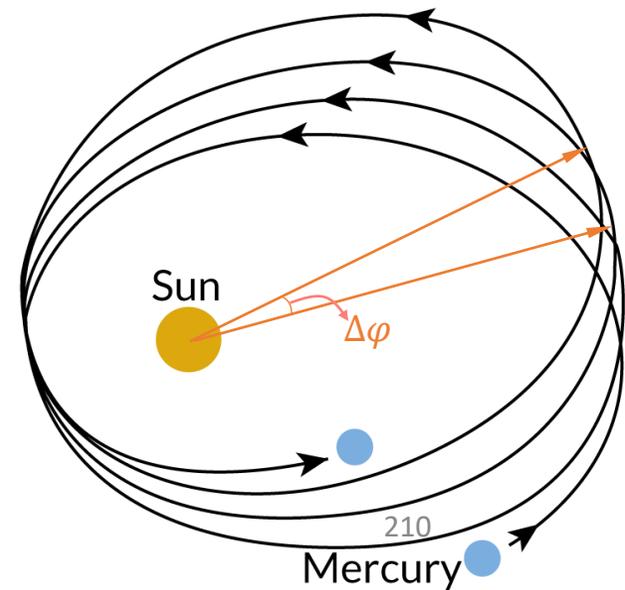
【例子】其他行星对水星的引力影响(叫做摄动力)可以等效为一个中心力，形式为，

$$\vec{F}(r) = \frac{h}{r^4} \vec{r}$$

其中 $h \ll \frac{l^2}{m}$ ， l 为水星角动量。求水星的近日点进动速度。

$$\frac{\Delta T}{T} \approx -\frac{mh}{2l^2}$$

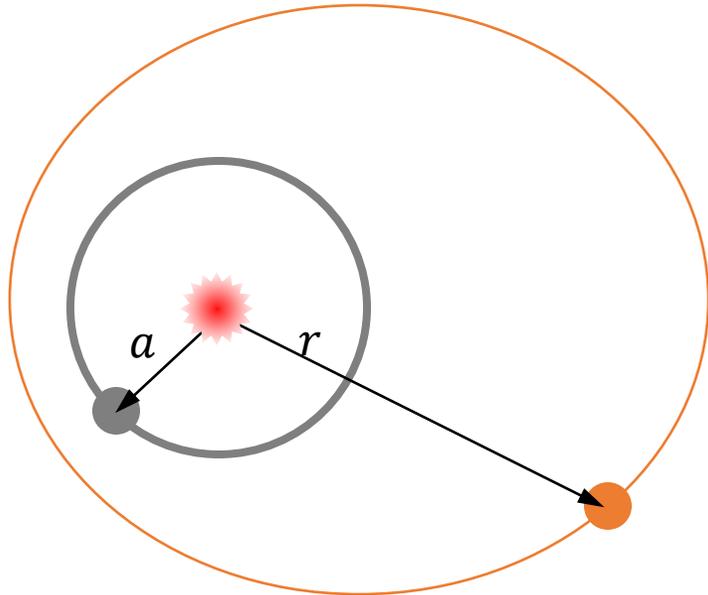
$$\Omega = \frac{\Delta\varphi}{T} = \left| \frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{T'} \right| = \frac{2\pi}{T} \left| \frac{\Delta T}{T} \right| = \frac{mh}{2l^2} \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$$



- 行星摄动

- 摄动行星的贡献可以视为均匀分布的环

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \dots \right)$$



行星	近日点进动角速度 (角秒/年)	
	观测值	理论值
水星	5.75	5.50
金星	2.04	10.75
地球	11.45	11.87
火星	16.28	17.60
木星	6.55	7.42
土星	19.50	18.36
天王星	3.34	2.72
海王星	0.36	0.65

§9. 多质点体系

前面讨论了两体体系，其中很多结论可以直接推广到多质点体系。对于多质点体系的动力学规律，每个质点应用牛顿第二定律，

$$\vec{F}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

- 其中， \vec{F}_i 为第*i*个质点所受到的合力。可以将其分为两类，一类是来自质点系内部的力，又叫做内力，如 \vec{F}_{ij} 为该质点受到的第*j*个质点的相互作用，它仅依赖于*i, j*之间的相对坐标 \vec{r}_{ij} 、相对速度 \vec{v}_{ij} 。另一类是质点系以外来源的力 \vec{F}_i^{ext} ，又叫做外力，

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j(\neq i)} \vec{F}_{ij}$$



根据牛顿第三定律， $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ 。因此， $\sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} = 0$ 。对于孤立体系来说， $\vec{F}_i^{\text{ext}} = 0$ ，系统只受到内力的作用。

- 注意，孤立体系是指每个质点受到的外力 $\vec{F}_i^{\text{ext}} = 0$ 为0，也就是说每个质点仅受到质点系内其他质点的相互作用。不是指体系的合外力 $\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = 0$ 为零。
 - 例如：外力压缩的情况
- N体问题的动力学求解比较复杂，德国数学家布伦斯和法国数学家庞加莱证明，当 $N \geq 3$ 时，一般N体问题不存在解析解。
 - 特殊解析解是存在的，例如欧拉三体问题、拉格朗日问题等，具有非常重要的应用价值
- 对于一般N体质点系的动力学问题，只能采用数值方法求解，包括渐进级数方法



- 对N体问题的定性分析，极大促进了现代数学的发展，并产生了新的数学分支，动力系统和混沌理论
 - 万有引力N体问题：太阳系稳定吗？

- 质点系的动能定理：

$$\Delta T_i = W_i$$

其中功为，

$$W_i = \int \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \int \vec{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_i + \sum_{j(\neq i)} \int \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i$$

- 考虑外力为保守力时，其做功可以写成外力对应的势能差，

$$\int \vec{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_i = -\Delta U_i^{\text{ext}}$$

内力做功仅依赖于质点之间的相对坐标，因此类似两体的情形，可以定义质点之间的相对势能：

$$\int \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \int \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j = \int \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = -\Delta U_{ij}$$

此处， $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ ，质点 i, j 之间的相互作用力 $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ 仅依赖于 \vec{r}_{ij} 。

因此，体系的总机械能可以写成，

$$E = \sum_i T_i + U_i^{\text{ext}} + \sum_{i,j (i \neq j)} U_{ij}$$

a. 质心定理

- 定义质心为:

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

- 质心速度:

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{d\vec{r}_{\text{cm}}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}$$

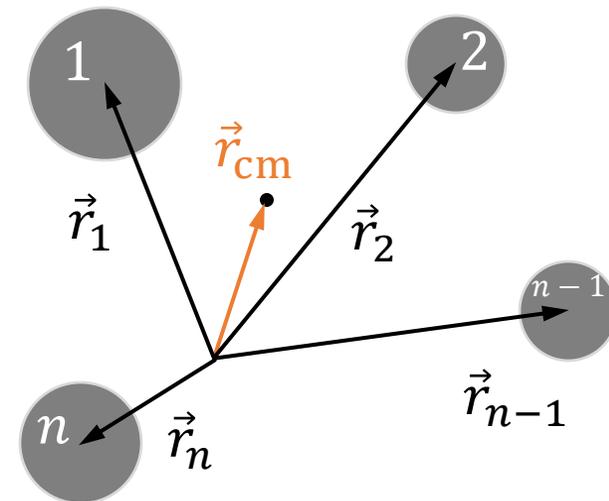
总动量

$$\vec{p} = M \vec{v}_{\text{cm}}$$

其中, $M = \sum_i m_i$ 是体系总质量。

- 由动量守恒我们可以得到,

孤立体系的质心保持静止或者匀速直线运动。



- 集团分解

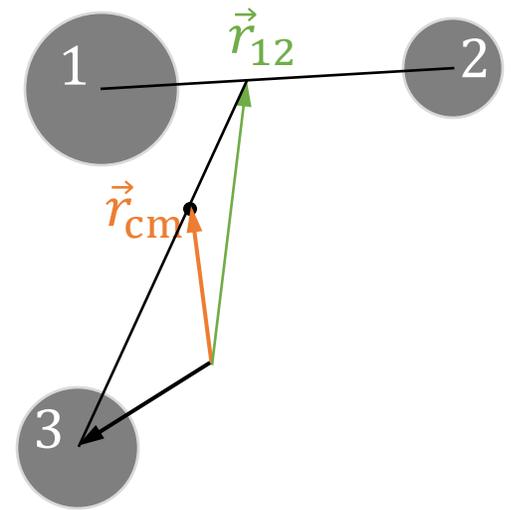
首先考虑三个粒子的质心,

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

证明 \vec{r}_{cm} 可以写成如下形式,

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{m_{12} \vec{r}_{12} + m_3 \vec{r}_3}{m_{12} + m_3}$$

其中, $m_{12} = m_1 + m_2$ 为第1、2个粒子的总质量, $\vec{r}_{12} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ 为第1、2个粒子的质心。



- 集团分解

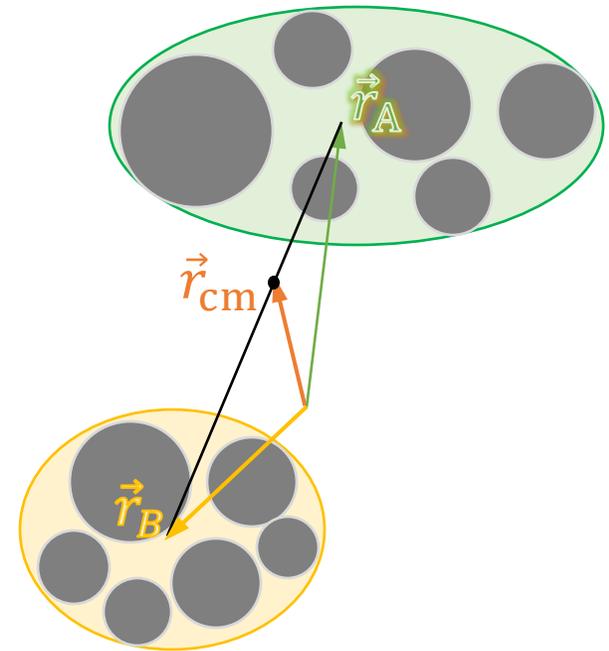
更一般的情形下，考虑 n 个粒子组成的质点系统。我们可以将质点系分成 A, B 两个集团，原质点系的质心坐标，

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B}{m_A + m_B}$$

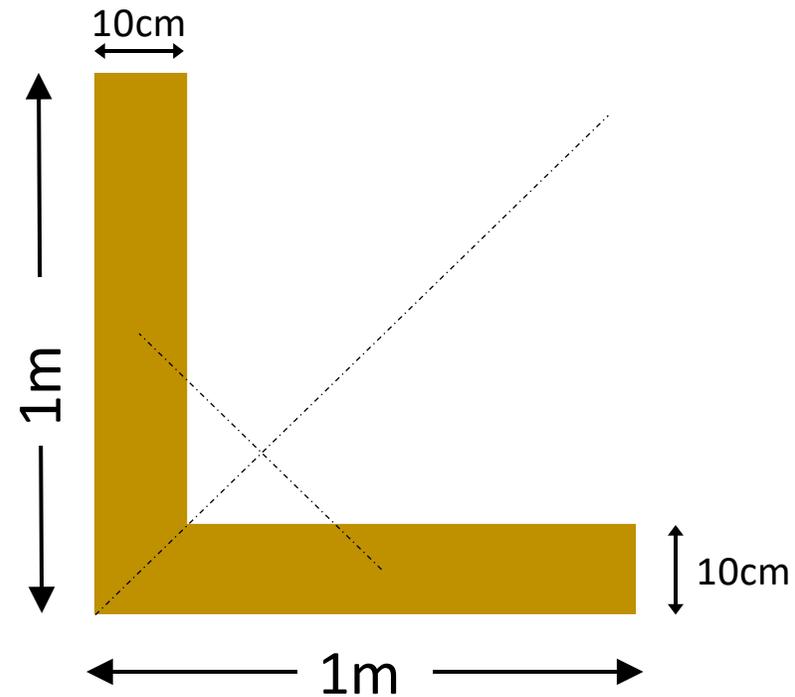
其中， $m_A = \sum_{i \in A} m_i$ ， $m_B = \sum_{i \in B} m_i$ 分别是集团 A, B 的总质量，

$$\vec{r}_A = \frac{\sum_{i \in A} m_i \vec{r}_i}{m_A}, \vec{r}_B = \frac{\sum_{i \in B} m_i \vec{r}_i}{m_B}$$

分别是集团 A, B 的质心坐标。



【例子】如右图所示有一支质量均匀的曲尺，求它的质心位置。



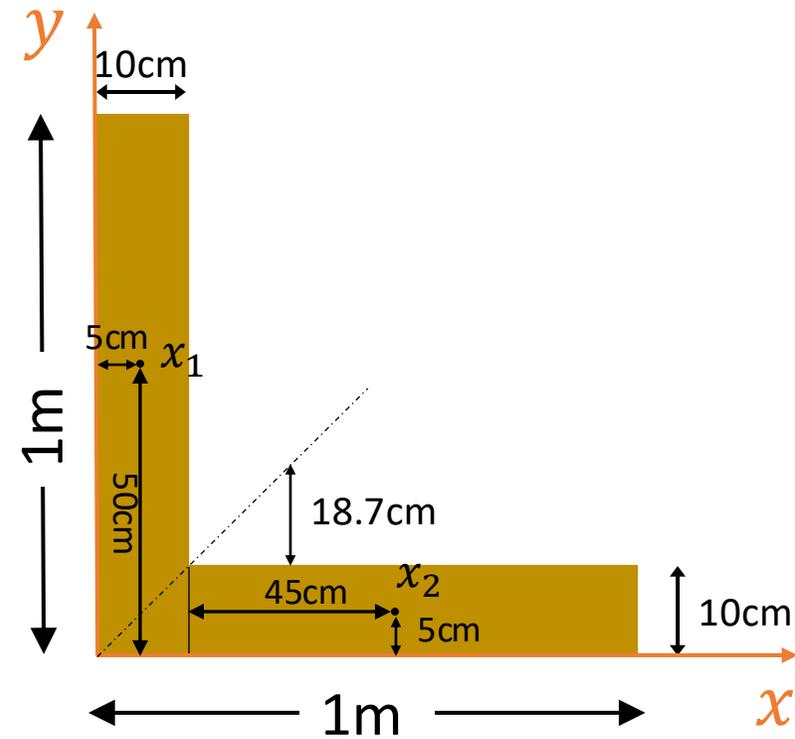
【例子】如右图所示有一支质量均匀的曲尺，求它的质心位置。

解：

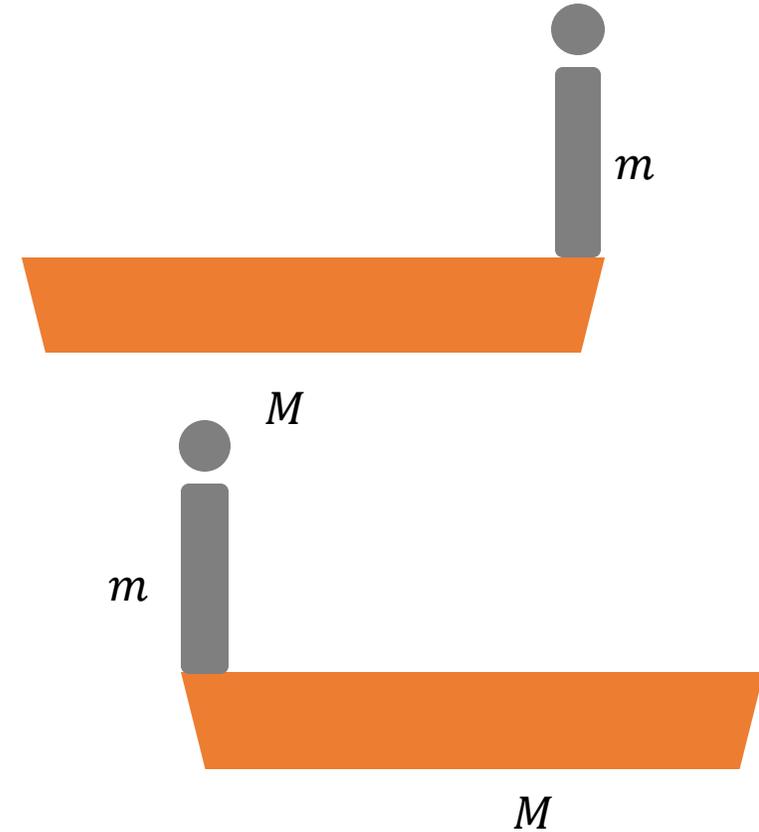
$$\vec{x}_1 = (5, 50)\text{cm}, \quad m_1 = 0.1 \cdot 1,$$

$$\vec{x}_2 = (55, 5)\text{cm}, \quad m_2 = 0.1 \cdot 0.9,$$

$$\vec{x}_{\text{cm}} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2} = (28.7, 28.7)\text{cm}$$



- 【例子】平静湖面上停着一只质量为 M 长度为 l 的木船，一个质量为 m 的人从船的一端走到另一端，问船的位移。



- 【例子】平静湖面上停着一只质量为 M 长度为 l 的木船，一个质量为 m 的人从船的一端走到另一端，问船的位移。

解：

建立一个坐标系，以船的中心为原点，质心的位置为

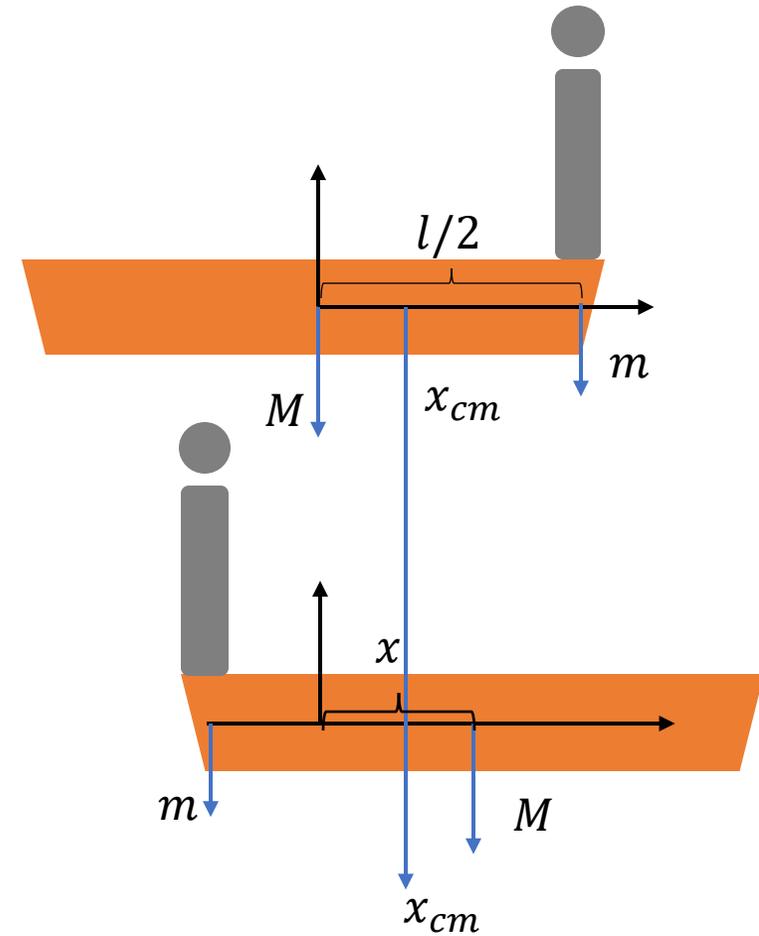
$$x_{cm} = M \times 0 + m \frac{l}{2} = m \frac{l}{2}$$

设船的位移为 x ，则在新的位置，质心位置为，

$$x_{cm} = Mx + m \left(x - \frac{l}{2} \right)$$

根据质心定理，质心位置不变，因此

$$m \frac{l}{2} = Mx + m \left(x - \frac{l}{2} \right) \Rightarrow x = \frac{ml}{m + M}$$



- 在一般情况下，非孤立体系的质心满足：

$$\frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\Rightarrow M \frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = \vec{F}_{\text{tot}}$$

其中， $\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{F}_i$ ，而 \vec{F}_i 为每个质点所受的合力，

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_j \vec{F}_{ij}$$

其中， \vec{F}_i^{ext} 为该质点所受的合外力， \vec{F}_{ij} 为该质点收到的第 j 个质点的相互作用，即内力。

• 根据牛顿第三定律, $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ 。因此, $\sum_i \sum_j \vec{F}_{ji} = 0$ 。这样以来,

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} \equiv \vec{F}^{\text{ext}}$$

因此有推广的质心定理:

$$M \frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}$$

这里, $\vec{F}^{\text{ext}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}}$ 为合外力。

【例子】英文里面有一个概念叫做bootstrap翻译为自举，本意是一个人提着自己的靴子把自己提起来。从物理上看，这是否可能。

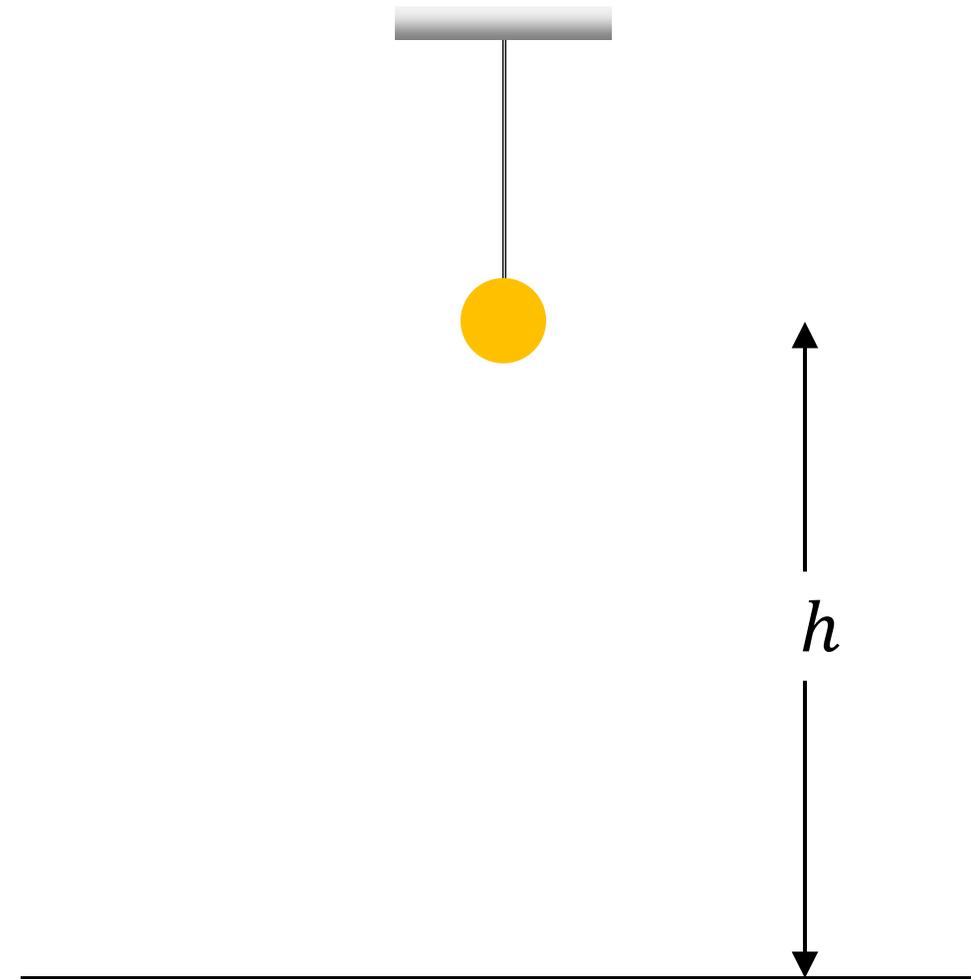


【例子】英文里面有一个概念叫做bootstrap翻译为自举，本意是一个人提着自己的靴子把自己提起来。从物理上看，这是否可能。

提示：质心定理



【例子】一个球形灯泡挂在距离地面高度为 h 处。某一时刻，灯泡突然破碎，碎片均匀分布，初始速度为 v ，方向亦均匀分布。求灯泡碎片落地时分布的范围。灯泡大小可以忽略，碎片不会碰到天花板。



【例子】一个球形灯泡挂在距离地面高度为 h 处。某一时刻，灯泡突然破碎，碎片均匀分布，初始速度为 v ，方向亦均匀分布。求灯泡碎片落地时分布的范围。灯泡大小可以忽略，碎片不会碰到天花板。

解：

根据质心定理，碎片质心的运动做自由落体，

$$y_c = h - \frac{1}{2}gt^2$$

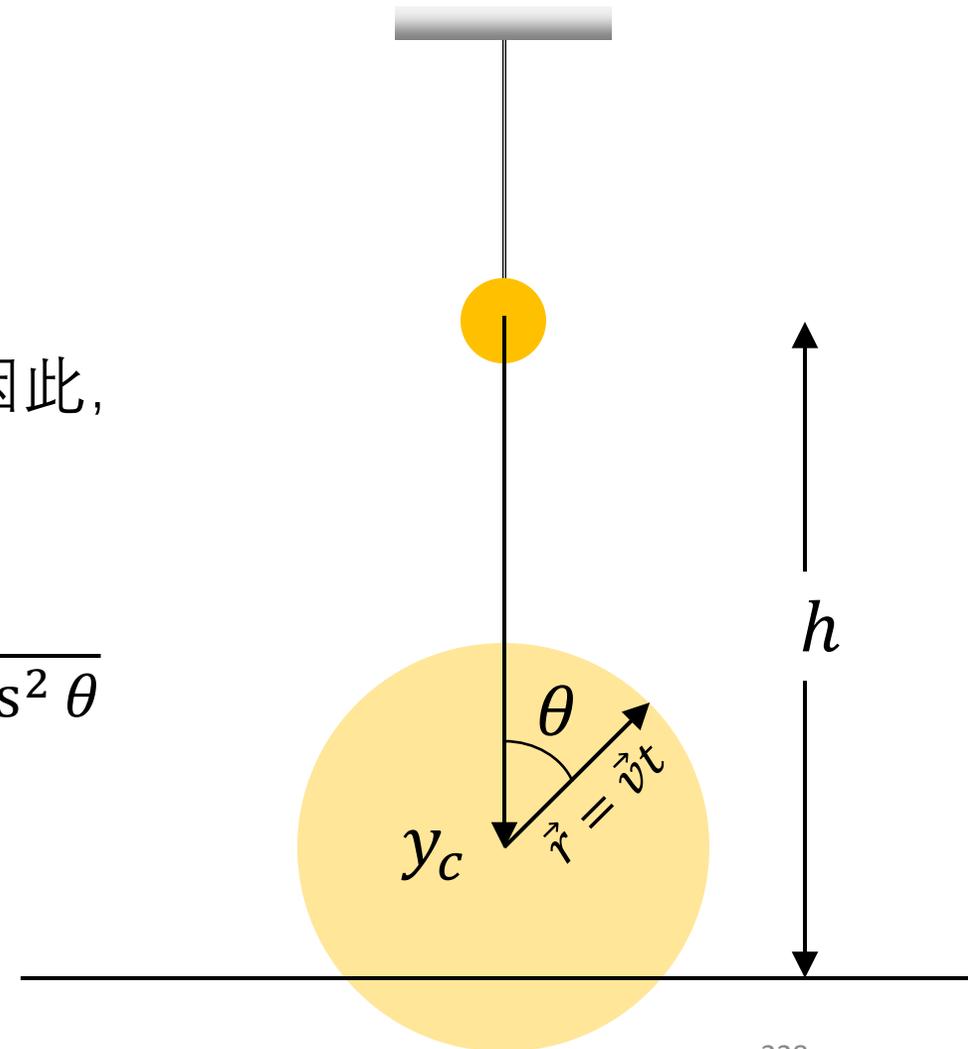
而碎片相对于质心做匀速直线运动，速度为 v 。因此， θ 处的碎片坐标为， $\vec{r} = (0, y_c) + vt(\sin \theta, \cos \theta)$

$$(x, y) = (vt \sin \theta, h - \frac{1}{2}gt^2 + vt \cos \theta)$$

落地时刻为 $y = 0 \Rightarrow t = \frac{v}{g} \cos \theta + \frac{1}{g} \sqrt{2gh + v^2 \cos^2 \theta}$

落地时，碎片水平方向的坐标为，

$$x = \frac{v^2}{2g} \sin 2\theta + \frac{v}{g} \sin \theta \sqrt{2gh + v^2 \cos^2 \theta}$$



b. 柯尼希定理

- 柯尼希定理可以推广到多粒子的情形，此时总动能为，

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

可以证明，总动能可以写成以下形式，

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

其中， $\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}$ 是质心速度， $M = \sum_i m_i$ ， $\vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{v}_{\text{cm}}$ 。

证明:

证明:

$$\begin{aligned} \text{右} &= \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{\text{cm}})^2 \\ &= \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_i^2 + v_{\text{cm}}^2 - 2\vec{v}_i \cdot \vec{v}_{\text{cm}}) \\ &= \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 - \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_{\text{cm}} \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \text{左} \end{aligned}$$

- 根据柯尼希定理，孤立的多粒子体系的总机械能可以写成，

$$\begin{aligned}
 E &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{ij} U(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \\
 &= \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_{ij} U(\vec{r}_i - \vec{r}_j)
 \end{aligned}$$

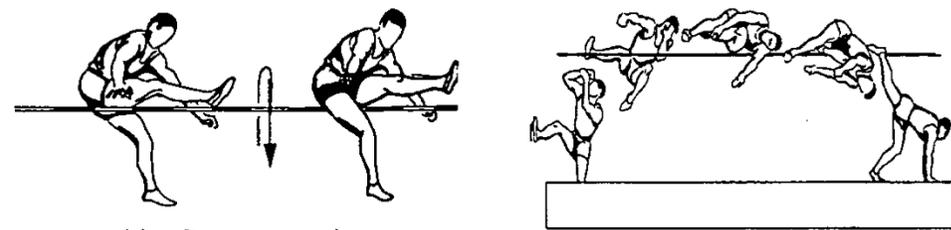
其中，第一部分仅与质心运动有关，第二部分仅与相对运动有关。除此之外，孤立体系的总机械能还可以写成如下形式，

$$\begin{aligned}
 E &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{ij} U(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \\
 &= \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \sum_{ij} \frac{1}{2} m_i m_j (\vec{v}_i - \vec{v}_j)^2 + U(\vec{r}_i - \vec{r}_j)
 \end{aligned}$$

其中，第一部分仅与质心运动有关，第二部分仅与相对运动有关。

【例子】跳高

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_{cm} + \frac{1}{2}mv_{x,cm}^2 + E_{rel}$$

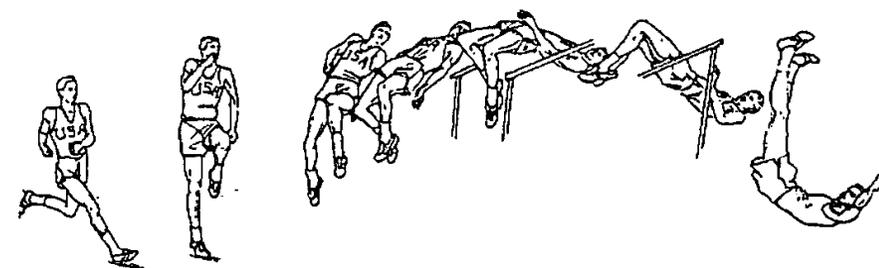


剪式 1895年

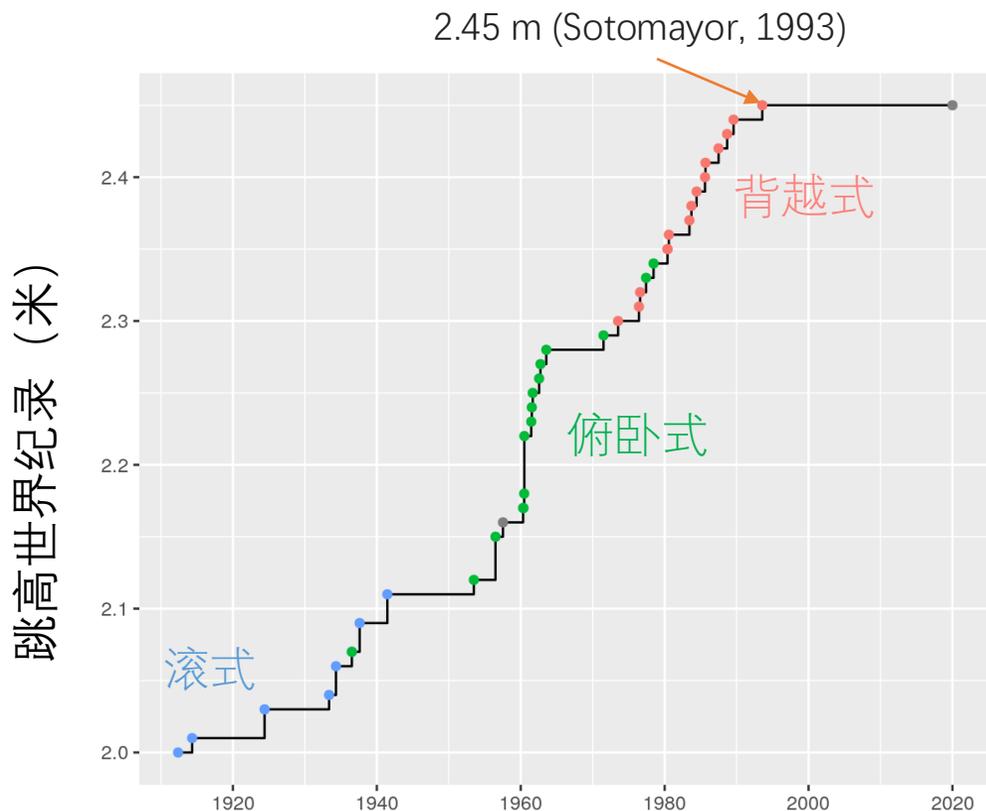
滚式 1912年



俯卧式 1936年



背越式 1968年



c. 变质量体系问题

- 变质量体系：体系在运动过程中与外界交换质量
 - 例子：火箭、滚雪球、下落的绳索、卷、凝结的水滴
- 非常重要的应用
- 反直觉的现象



设质点体系质量为 m ，质心速度为 \vec{v} ，且内部相对运动可以忽略。在 Δt 时间内，质量为 Δm 、速度为 \vec{u} 的质点体系与原质点体系融合，融合后无相对速度，若融合以后体系的质心速度为 $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ 。根据动量守恒，

$$\begin{aligned}\vec{F}^{\text{ext}}\Delta t + \Delta m\vec{u} + m\vec{v} &= (m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) \\ \Rightarrow \vec{F}^{\text{ext}}\Delta t + \Delta m\vec{u} &= \Delta m\vec{v} + m\Delta\vec{v} + O(\Delta t^2) \\ \Rightarrow \vec{F}^{\text{ext}} &= \frac{dm}{dt}(\vec{v} - \vec{u}) + m\frac{d\vec{v}}{dt}\end{aligned}$$

这里 \vec{F}^{ext} 为外力。注意， \vec{v}, \vec{u} 均为相对于地面参考系的速度。



设质点体系质量为 m ，质心速度为 \vec{v} ，且内部相对运动可以忽略。在 Δt 时间内，质量为 $-\Delta m$ 的质点体系与原质点体系脱离，脱离后速度为 \vec{u} ，若脱离以后主体体系的质心速度为 $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ 。根据动量守恒，

$$\begin{aligned}\vec{F}^{\text{ext}}\Delta t + m\vec{v} &= \Delta m\vec{u} + (m - \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) \\ \Rightarrow \vec{F}^{\text{ext}}\Delta t &= \Delta m\vec{u} - \Delta m\vec{v} + m\Delta\vec{v} + O(\Delta t^2) \\ \Rightarrow \vec{F}^{\text{ext}} &= -\frac{dm}{dt}(\vec{v} - \vec{u}) + m\frac{d\vec{v}}{dt}\end{aligned}$$

这里 \vec{F}^{ext} 为外力。注意， \vec{v}, \vec{u} 均为相对于地面参考系的速度。



- 米舍尔斯基方程(Meshchersky equation)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} + \frac{dm}{dt} \vec{v}_r$$

$\frac{dm}{dt}$ 为质量的改变, 约定 $\frac{dm}{dt} > 0$ 为质量增加, $\frac{dm}{dt} < 0$ 为质量减少。 $\vec{v}_r = \vec{u} - \vec{v}$ 为质量增加或减少部分相对于主体系统的速度。

- 变质量体系的主体部分的加速度, 除了牛顿第二定律外力部分以外, 还有另外一项 $\frac{dm}{dt} \vec{v}_r$, 来自于质量流带来的冲击力 (回忆冲量定理)。如果质量流与主体部分相对速度为0, 则冲击力为0。
- 有时候米舍尔斯基方程也可以利用链式法则写成等效的形式,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} + \frac{dm}{dt} \vec{u}$$

此时, $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$ 。

- 不过注意，不论哪种形式的米舍尔斯基方程都不是牛顿第二定律（或者质心定理）的推广。原因在于米舍尔斯基方程只能应用于忽略内部运动的多质点体系。对于一般多质点体系，应该用多质点体系的牛顿第二定律。
- 对于质量变换且有内部运动的多质点体系，应该应用连续介质力学（弹性力学、流体力学）

【例子】火箭燃料燃烧后以 v_r 的速度相对于火箭排出。已知火箭初始质量为 m_0 ，速度为0，忽略所有外力，求火箭质量为 m 时的速度。

解：根据变质量体系的米舍尔斯基方程，

$$\begin{aligned}m \frac{dv}{dt} &= - \frac{dm}{dt} v_r \\ \Rightarrow \frac{dm}{m} &= - \frac{dv}{v_r} \\ \Rightarrow \int \frac{dm}{m} &= - \int \frac{dv}{v_r} \\ v &= v_r \ln \frac{m_0}{m}\end{aligned}$$

这个结果就做齐奥尔科夫斯基火箭方程(Tsiolkovsky rocket equation)。

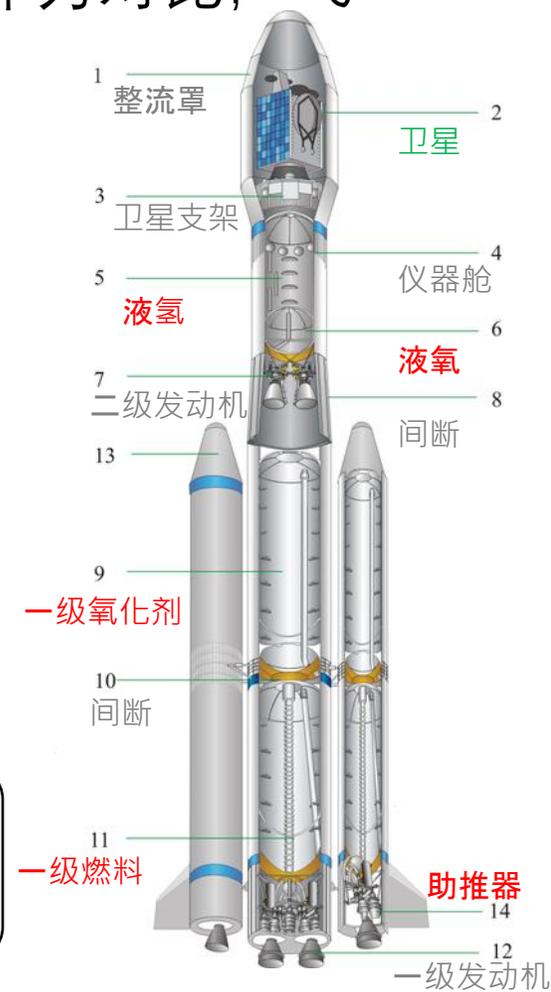
$$v = v_r \ln \frac{m_0}{m}$$

- 火箭不需要外部牵引力就可以加速
- 火箭需要携带大量的燃料，典型火箭燃料占总重的80%~90%，作为对比，飞机的典型燃料占比为30%~50%
- 为了提高燃料占比，现代运载火箭通常采用多级设计
- 喷出质量为 Δm 的燃料，获得的速度增加为，

$$\Delta v = v_r \ln \frac{m}{m - \Delta m}$$

当 $\Delta m \ll m$ 时， $\Delta v = v_r \Delta m / m$

- 中国航天事业的光辉成绩
- 航天工业



- 有效载荷
- 燃料
- 结构质量

【例子】雨滴开始自由下落时质量为 m_0 ，下落过程中单位时间内凝聚的水蒸气质量为 λ 。试求雨滴下落速度作为时间的函数。

【例子】雨滴开始自由下落时质量为 m_0 ，下落过程中单位时间内凝聚的水蒸气质量为 λ 。试求雨滴下落速度作为时间的函数。

解：考虑水蒸气是静止的，用米舍尔斯基方程，

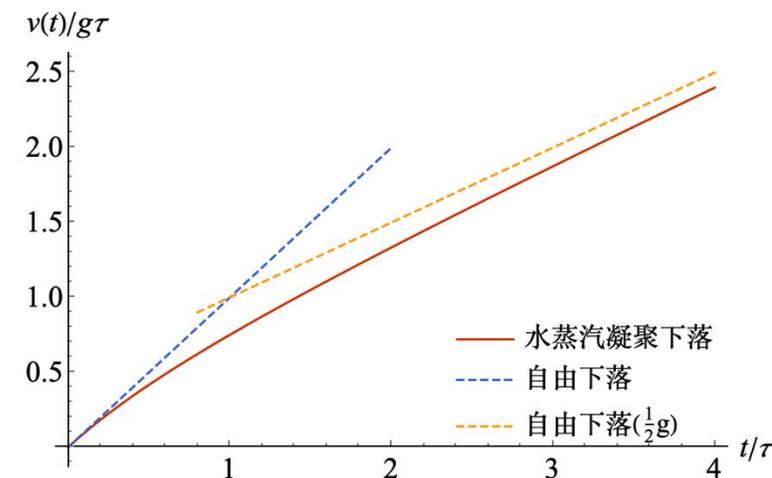
$$\frac{d(mv)}{dt} = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt} = mg,$$

而 $\frac{dm}{dt} = \lambda$ 为常数，因此 $m = m_0 + \lambda t$

$$\frac{d}{dt}((m_0 + \lambda t)v) = (m_0 + \lambda t)g,$$

积分：

$$v(t) = \frac{\left(m_0 t + \frac{1}{2}\lambda t^2\right)g}{m_0 + \lambda t}$$



【例子】 一个球形尘埃，在密度均匀的水蒸汽云雾中形成液滴，下降时液滴上的沉积率正比于单位时间内液滴扫过的体积。若液滴在云雾中从静止开始下落，求液滴的加速度。

【例子】一个球形尘埃，在密度均匀的水蒸汽云雾中形成液滴，下降时液滴上的沉积率正比于单位时间内液滴扫过的体积。若液滴在云雾中从静止开始下落，求液滴的加速度。

解：考虑水蒸气是静止的，用米舍尔斯基方程，

$$\frac{dp}{dt} = mg,$$

液滴上的沉积率正比于单位时间内液滴扫过的体积，

$$\frac{dm}{dt} = \alpha\pi r^2 v$$

其中 α 是个常数。对于球形液滴来说， $m = \frac{4\pi}{3}\rho r^3$ ，因此 $r = \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}}$ ，

$$\frac{dm}{dt} = \alpha\pi \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{\frac{2}{3}} v$$

【例子】一个球形尘埃，在密度均匀的水蒸汽云雾中形成液滴，下降时液滴上的沉积率正比于单位时间内液滴扫过的体积。若液滴在云雾中从静止开始下落，求液滴的加速度。

采用 p 做变量， $v = p/m$,

$$\alpha\pi\left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{p}{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dp}\frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dp}mg$$

$$\Rightarrow \alpha\pi\left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{p}{m} = \frac{dm}{dp}mg \Rightarrow \frac{\alpha\pi}{g}\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{\frac{2}{3}}pdp = m^{\frac{4}{3}}dm$$

这个方程只剩下 m, p ，因此可以积分求解（待定常数为0）：

$$m = \alpha' p^{\frac{6}{7}}, \quad \alpha' = \left[\frac{7}{6} \frac{\alpha\pi}{g} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{7}}$$

【例子】一个球形尘埃，在密度均匀的水蒸汽云雾中形成液滴，下降时液滴上的沉积率正比于单位时间内液滴扫过的体积。若液滴在云雾中从静止开始下落，求液滴的加速度。

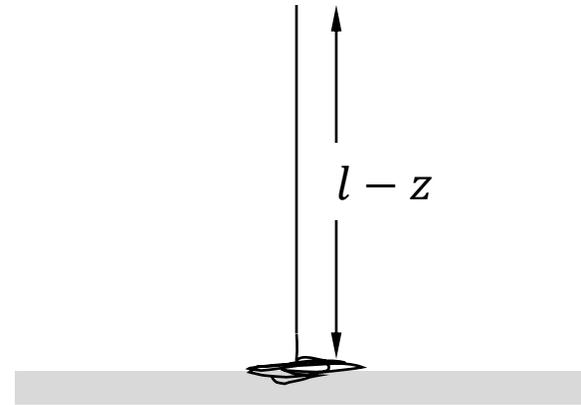
现在求 $\frac{dv}{dt}$ 。首先 $v = \frac{p}{m} = \frac{1}{\alpha'} p^{\frac{1}{7}}$ ，因此

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dp} \frac{dp}{dt} = \frac{dv}{dp} mg = \frac{1}{7} \frac{1}{\alpha'} p^{-\frac{6}{7}} \alpha' p^{\frac{6}{7}} g = \frac{1}{7} g$$

【例子】 喷气式战斗机进气量（单位时间内吸入空气的体积）为 $Q = \frac{dV}{dt}$ ，经过发动机燃烧加速后，以 u 的速度相对于战斗机向后喷出尾气，尾气出气量为 γQ ，已知战斗机速度为 v ，求发动机提供的推力。



【例子】一个长度为 l ，质量为 m 的均匀软绳自由下垂，下端恰好与桌面相接触，使其静止下落。求下落过程中桌面对绳子的反作用力。



【例子】一个长度为 l ，质量为 m 的均匀软绳自由下垂，下端恰好与桌面相接触，使其静止下落。求下落过程中桌面对绳子的反作用力。

求解：

将地面部分视为变质量体系：

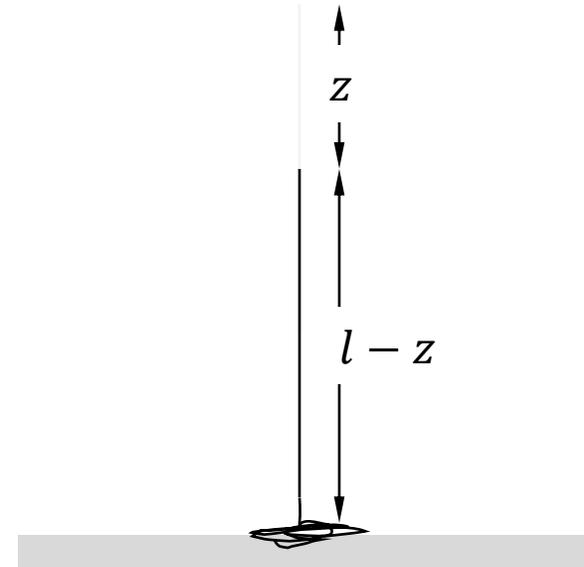
$$0 = m(z)a = N - m(z)g - \frac{dm}{dt}v$$

其中，单位时间内的质量增加为 $\Delta m = \lambda v \Delta t$ ， $\lambda = m/l$ 为软绳的线密度。下落部分的运动为自由下落，因此， $v^2 = 2gz$

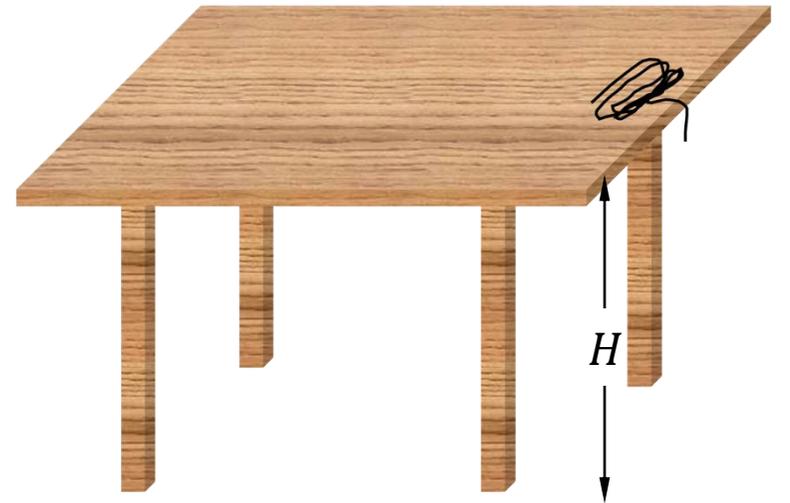
这样的话，

$$N = \lambda z g + \lambda v^2 = 3mg \frac{z}{l}$$

注意，在下落过程中，绳索的能量不断在损失。主要是因为绳索与桌面的非弹性碰撞



【例子】一个很长的均匀链子杂乱地放在桌子边上，有一端稍微垂到桌边以下，并自由释放。已知桌子高度 $H = 1\text{m}$ ，并且可以忽略桌子与链子之间的摩擦。求链子一端接触地面的时间。



【例子】一个很长的均匀链子杂乱地放在桌子边上，有一端稍微垂到桌边以下，并自由释放。已知桌子高度 $H = 1\text{m}$ ，并且可以忽略桌子与链子之间的摩擦。求链子一端接触地面的时间。

求解：

假设下落部分的高度为 z ，速度为 v 。将下落部分视为一个变质量体系。

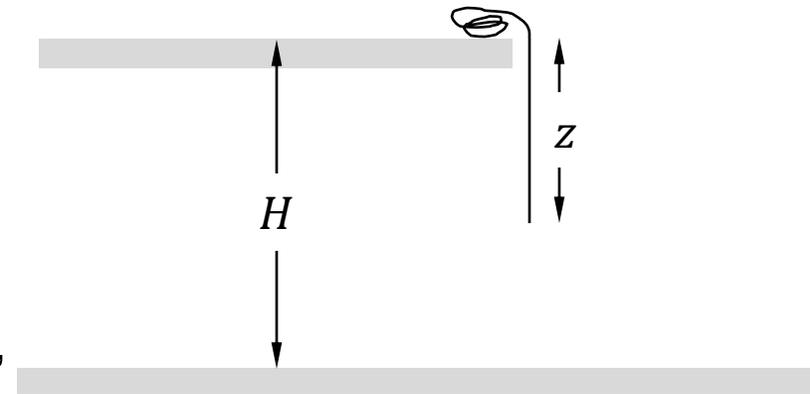
$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{dm}{dt} v$$

第二项来自将静止的链条加速到 v 所需要的冲量 $\Delta I = \Delta m v$ ，其中， $\Delta m = \lambda v \Delta t$ 为链条下落部分增加的部分的质量， λ 为链条的单位长度的质量，即线密度。

$$\lambda z a = \lambda z g - \lambda v^2 \Rightarrow a = g - v^2/z$$

下面求 v 。如果 a 是个常数，则从静止开始加速 z 的距离对应的速度为 $v^2 = 2az$ 。带入可以得到， $a = g - 2a \Rightarrow a = \frac{g}{3}$

$$\frac{1}{2} a t^2 = H \Rightarrow t = \sqrt{\frac{6H}{g}} = 0.78\text{s}$$



【例子】一个很长的均匀链子杂乱地放在桌子边上，有一端稍微垂到桌边以下，并自由释放。已知桌子高度 $H = 1\text{m}$ ，并且可以忽略桌子与链子之间的摩擦。求链子一端接触地面的时间。

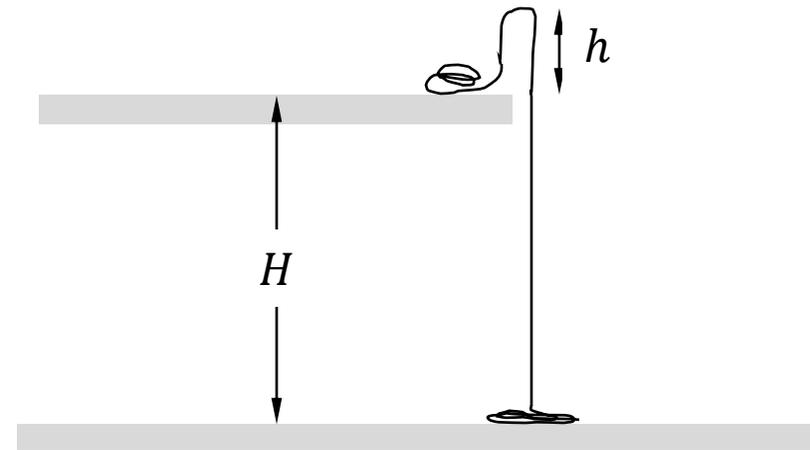
求解过程中，如果用能量守恒来求 v 的话，

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{mgz}{2} \Rightarrow v^2 = gz$$

所得到的加速度 $a = g - g = 0!$ 这样会得到矛盾的结果。

比较两种方法可以发现，链子在下落过程中，有 $1/3$ 的能量损失掉了，能量损失率为： $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_{\text{free}}^2 = \frac{1}{2}mgz - \frac{1}{3}mgz = \frac{1}{6}mgz$ 。损失的能量通过链子之间的碰撞耗散掉了。

实际上，链子的能量耗散由材料性质决定，可能比这里预测的要小！比如金属做的链子在碰撞过程中能量的耗散率可能远小于这里的预测值。这些累积的能量会转化为动能，将链子推高，形成一个链子喷泉。这个现象被发现过很多次，不过一直不为人知，直到2014年一位科普博主Steven Mould将其在网上发布



谢谢!

