

第五章：刚体力学

李 阳

中国科学技术大学近代物理系



力学A · 2025年秋

§1. 刚体运动

- 一般多质点体系的运动是比较复杂的，即包含质点系的质心运动，又包含质点之间的相对运动
- 在很多实践应用中，质点系的相对运动相对而言非常微小可以忽略不计。在这种情况下，刚体作为一个描述不发生形变的质点系的理想模型非常有用
- 刚体(rigid body): 是指各个组分质点之间的相对位置在运动过程中不发生变化的体系
- 自然界不存在绝对的刚体，这一概念是一种牛顿力学体系下的理想化。只要物体形变可以忽略，就可以将物体抽象为刚体

- 刚体的例子：
 - 桌子、椅子
 - 人、动物
 - 飞机、汽车
- 不是刚体的例子
 - 水、空气
 - 发生形变时的弹簧、海绵

- 刚体上任意两点满足,

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{const.}$$

对于上式平方并求导, 可以得到,

$$\vec{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij} = 0$$

其中 $\vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j$, $\vec{v}_{ij} \equiv \vec{v}_i - \vec{v}_j$, 即质点之间的相对速度与其相对坐标矢量垂直

- 描述刚体运动需要多少独立的坐标?

$$3N ? \rightarrow 3?$$

a. 刚体的自由度(degrees of freedom)

自由度：描述一个体系运动所需要的独立坐标的个数。

- 自由质点运动：需要三个坐标(x, y, z)，因此自由度为3
- 自由质点在平面上运动：需要两个坐标 (x, y) ， 因此自由度为2
- N个自由质点的运动：需要3N个坐标(x₁, y₁, z₁), (x₂, y₂, z₂), ..., (x_N, y_N, z_N)， 因此自由度为3N

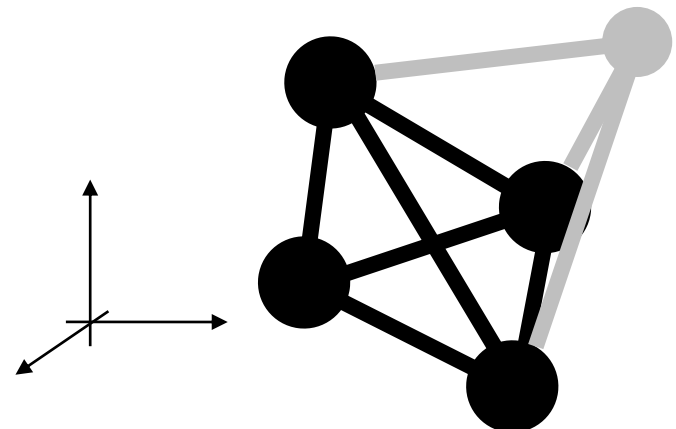
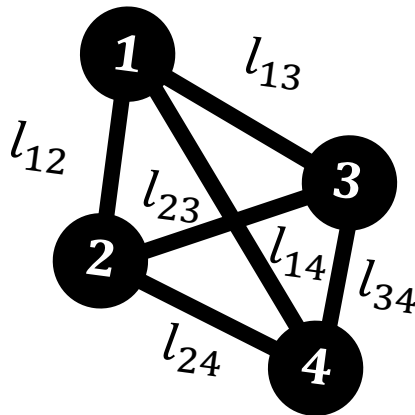
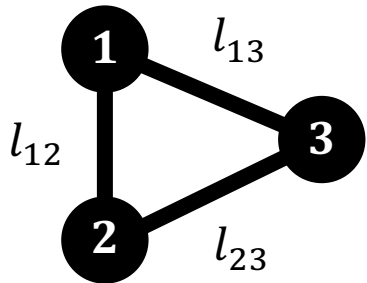
当带约束时，自由度的数目为 $3N - N_c$ ，其中 N_c 为独立约束的数目

- 刚性杆相连的两个质点的运动: 1 个约束条件,

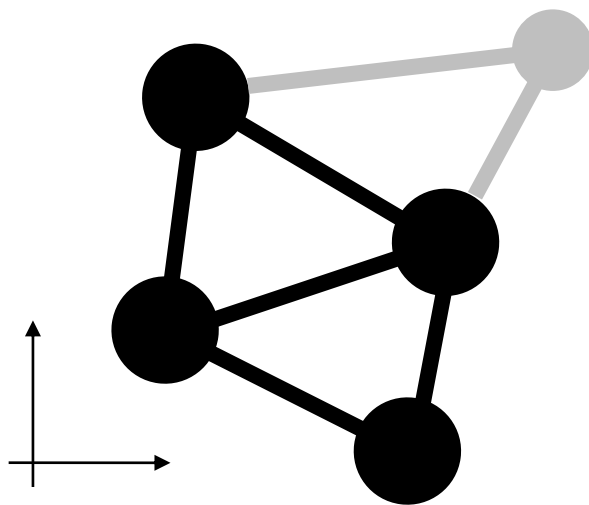
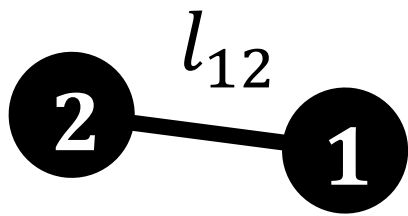
$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = l_{12}$$

因此自由度的数目为 $6-1=5$

- 刚性杆两两相连的 3 个质点的运动: 3 个约束条件 $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = l_{12}$, $|\vec{r}_2 - \vec{r}_3| = l_{23}$, $|\vec{r}_1 - \vec{r}_3| = l_{13}$, 自由度的数目为 $3 \times 3 - 3 = 6$
- 刚性杆两两相连的 4 个质点的运动: 6 个约束条件 $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = l_{ij}$, 自由度的数目为 $3 \times 4 - 6 = 6$
- 刚性杆两两相连的 5 个质点的运动: $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2!} = 10$ 个约束条件 $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = l_{ij}$, 但其中只 9 个独立的约束。自由度的数目为 $3 \times 5 - 9 = 6$
- 对于两两之间刚性相连的质点体系, 若质点的个数 $N \geq 3$, 每增加一个质点, 增加 3 个自由度, 但是同时增加 3 个独立的约束条件。因此, 自由度不变, 仍然为 6



- 刚性杆两两相连的2个平面质点的运动: 1个约束条件 $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = l_{12}$, 自由度的数目为 $2 \times 2 - 1 = 3$
- 对于两两之间刚性相连的平面质点体系, 若质点的个数 $N \geq 2$, 每增加一个质点, 增加2个自由度, 但是同时增加2个独立的约束条件。因此, 自由度不变, 仍然为3

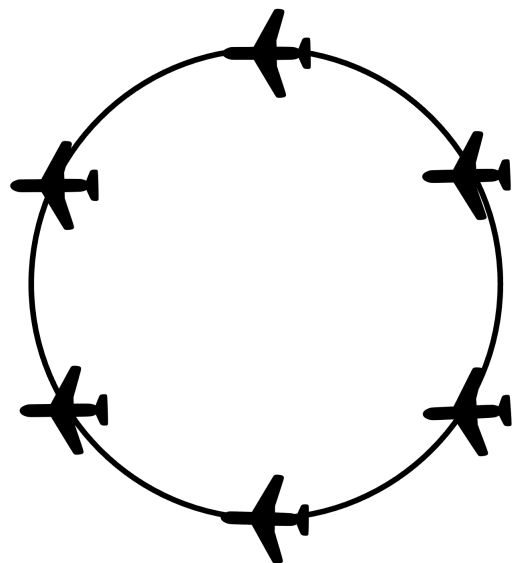


b. 刚体的基本运动

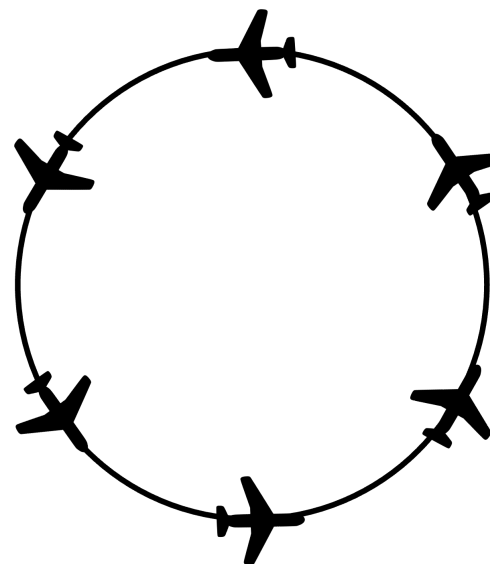
- 刚体自由度为6，平面刚体自由度为3。该如何选择描述刚体的6个坐标呢？
- 其中3个坐标描述刚体的平动，另外3个坐标描述刚体的转动
- 对于平面刚体来说，2个坐标描述描述刚体的平面平动，另外一个坐标描述刚体的转动
- 刚体的基本运动：
 - 平动 —— 自由度为3
 - 定轴转动 —— 自由度为1
 - 平面平行运动 —— 自由度为3
 - 定点转动 —— 自由度为3

刚体平动(translatory motion): 刚体做平动时, 所有质点速度相同

- 刚体平动自由度为3: (x, y, z)
- 注意, 刚体做平动时, 不一定在做直线运动
- 当刚体平动时的运动为圆周运动时, 需要注意区分刚体平动与转动



平动: 圆周运动



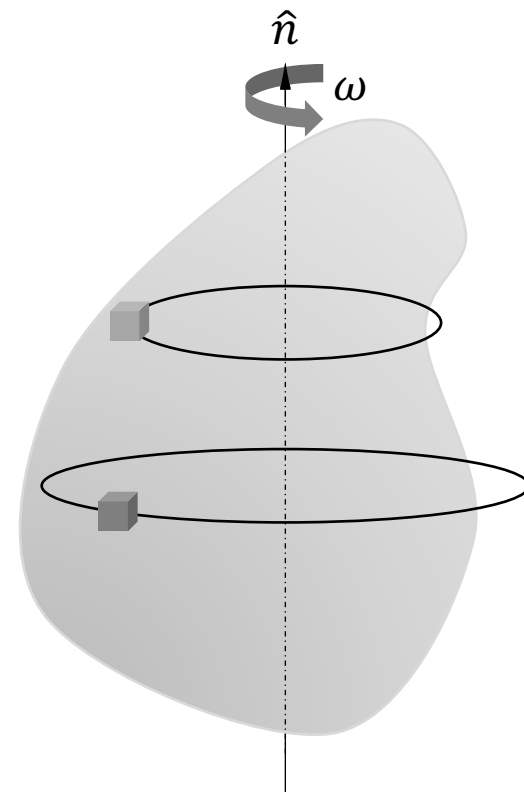
平动+转动

刚体定轴转动(Fixed-axis rotation): 刚体做定轴转动时, 刚体中各个质点都在垂直于转轴的平面内做圆周运动

- 自由度为1: θ
- 轮子: 人类历史上最伟大的发明之一
 - 二里头遗址 (3700年前)、美洲

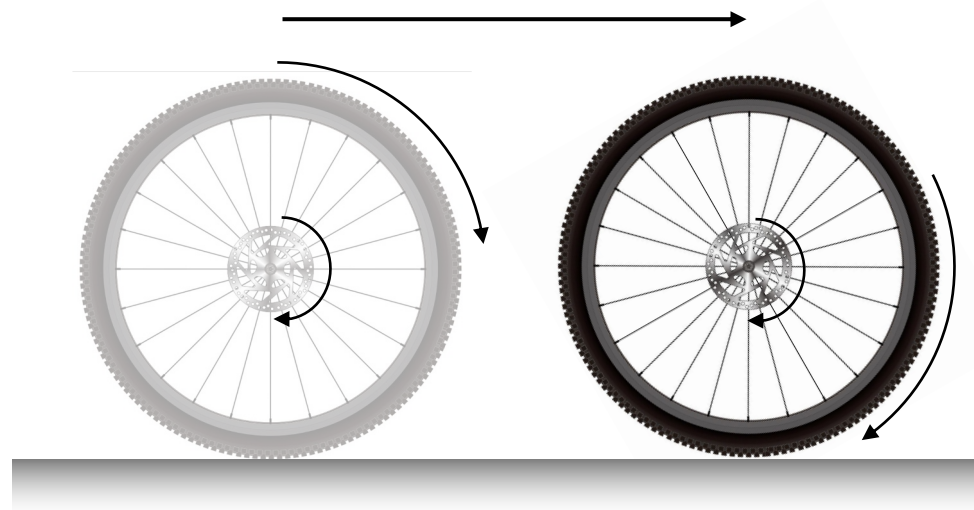
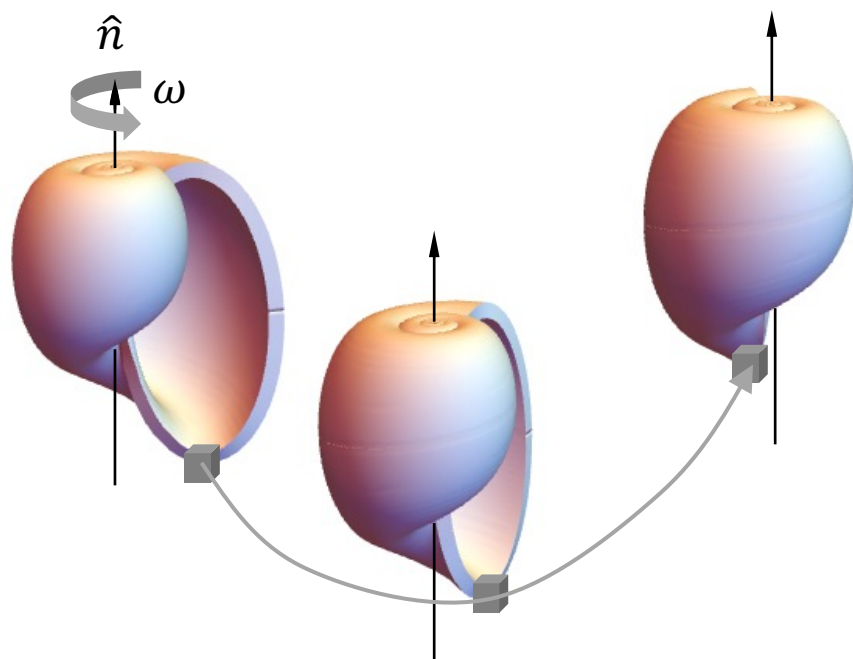


斯洛文尼亚的卢布尔雅那沼泽轮
是目前发现的世界最早的轮子,
距今已经有5000多年的历史



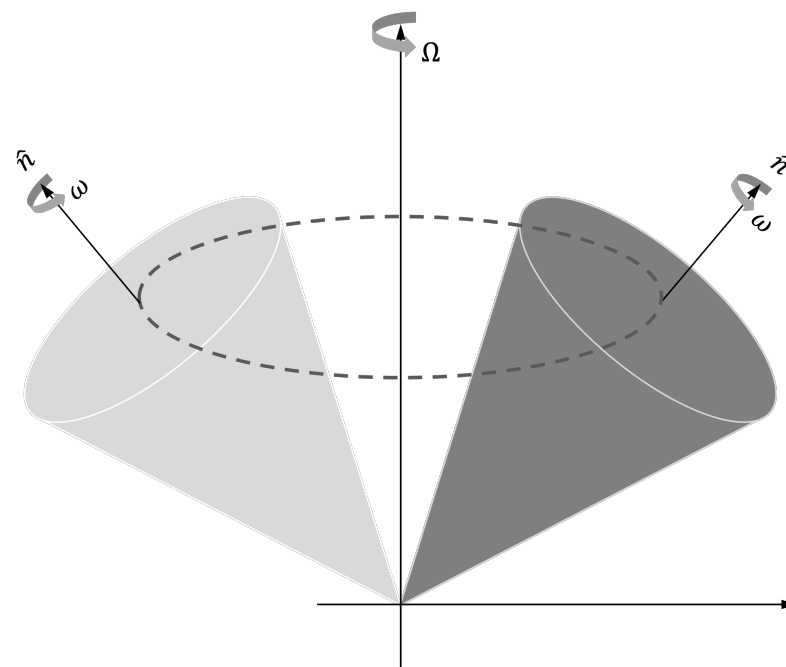
刚体平面平行运动 (planar motion): 刚体做平面平行运动时, 刚体中各个质点都在垂直于转轴的平面内做圆周运动, 而该转轴可以在空间移动, 但方向保持不变

- 自由度为3: 平面内的平动——2个自由度, 转动——1个自由度
- 可以视为定轴转动与平面平动的叠加



刚体定点转动 (body-fixed point rotation): 刚体在做定点转动时, 始终绕着某一个固定点转动。这个固定点可以在刚体上, 也可以在刚体的延拓部分。转轴方向可以改变。

- 自由度为3: 转动——1个自由度, 转轴的方向 ——2个自由度



c. 刚体的一般运动

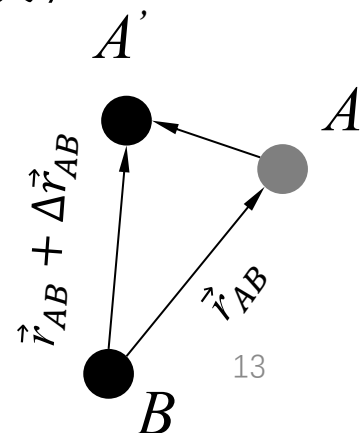
- 刚体的一般运动可以分解为平动与转动的叠加。具体而言，对于刚体上的任意一个质点A，其速度

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

其中，B是刚体上任意一点， $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$ 为A、B的相对位矢， $\vec{\omega}$ 为角速度

- 如何理解？在刚体中，任意两个质点之间的距离是固定的。因此，在运动中，相对位矢 $\vec{r}_{AB}$ 仅改变方向不改变大小即可以写成，

$$\vec{v}_{AB} = \frac{d}{dt} \vec{r}_{AB} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$



另外，从质点运动学的角度出发也可以得到这个结果：

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r} = \dot{r} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

• 其中球坐标单位基矢量：

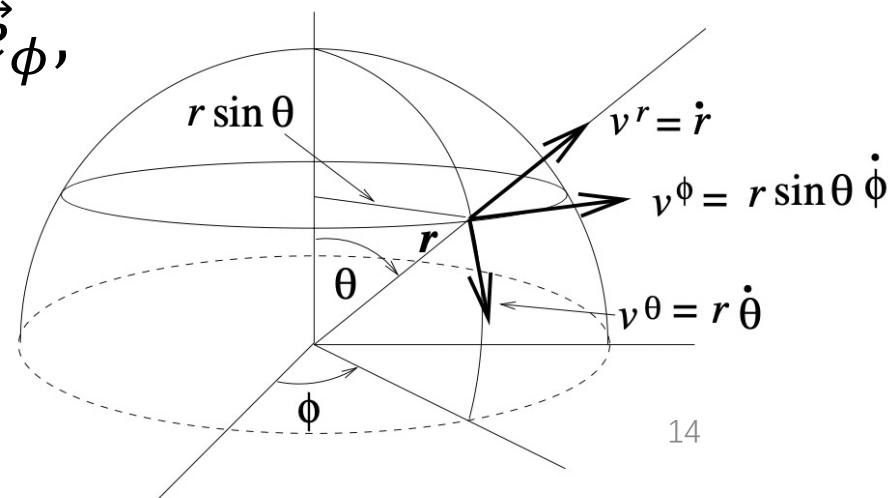
$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi \equiv \vec{\omega} \times \vec{e}_r,$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\phi \equiv \vec{\omega} \times \vec{e}_\theta,$$

$$\frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_r - \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\theta \equiv \vec{\omega} \times \vec{e}_\phi,$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_r - \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\theta + \dot{\theta} \vec{e}_\phi$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$$



- 以B为坐标原点考察刚体上质点A相对于B的运动
- 考虑到 $\dot{r}_{AB} = 0$,

$$\vec{v}_{AB} = \frac{d}{dt} \vec{r}_{AB} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

这里, $\vec{\omega} = \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_r - \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\theta + \dot{\theta} \vec{e}_\phi$ 为瞬时角速度矢量。

角速度 $\vec{\omega}$ 是否与质点的选择有关？

- 在一般质点运动中，我们看到 $\vec{\omega}$ 依赖于A、B之间的相对坐标
- 在刚体中，质点之间运动满足约束关系， $\vec{r}_{AB} \cdot \vec{v}_{AB} = 0$
- 我们首先假定 $\vec{\omega}$ 依赖于A、B两点，即 $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{AB}$,

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{AB}$$

再考虑任意的第三个点C，其速度

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{CB} \times \vec{r}_{CB}, \quad \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{CA} \times \vec{r}_{CA}$$

比较这三个式子可以得到，

$$\vec{v}_{AB} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{AB} = \vec{\omega}_{CB} \times \vec{r}_{CB} - \vec{\omega}_{CA} \times \vec{r}_{CA}$$

考虑刚体约束关系, $\vec{r}_{AB} \cdot \vec{v}_{AB} = 0$

$$\vec{r}_{AB} \cdot (\vec{\omega}_{CB} \times \vec{r}_{CB} - \vec{\omega}_{CA} \times \vec{r}_{CA}) = 0$$

考虑到几何关系,

$$\vec{r}_{CA} + \vec{r}_{AB} = \vec{r}_{CB}$$

表达式可以化简为,

$$\vec{r}_{AB} \cdot (\vec{\omega}_{CB} \times \vec{r}_{CA}) + \vec{r}_{AB} \cdot (\vec{\omega}_{CB} \times \vec{r}_{AB}) - \vec{r}_{AB} \cdot (\vec{\omega}_{CA} \times \vec{r}_{CA}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{AB} \cdot [(\vec{\omega}_{CB} - \vec{\omega}_{CA}) \times \vec{r}_{CA}] = 0$$

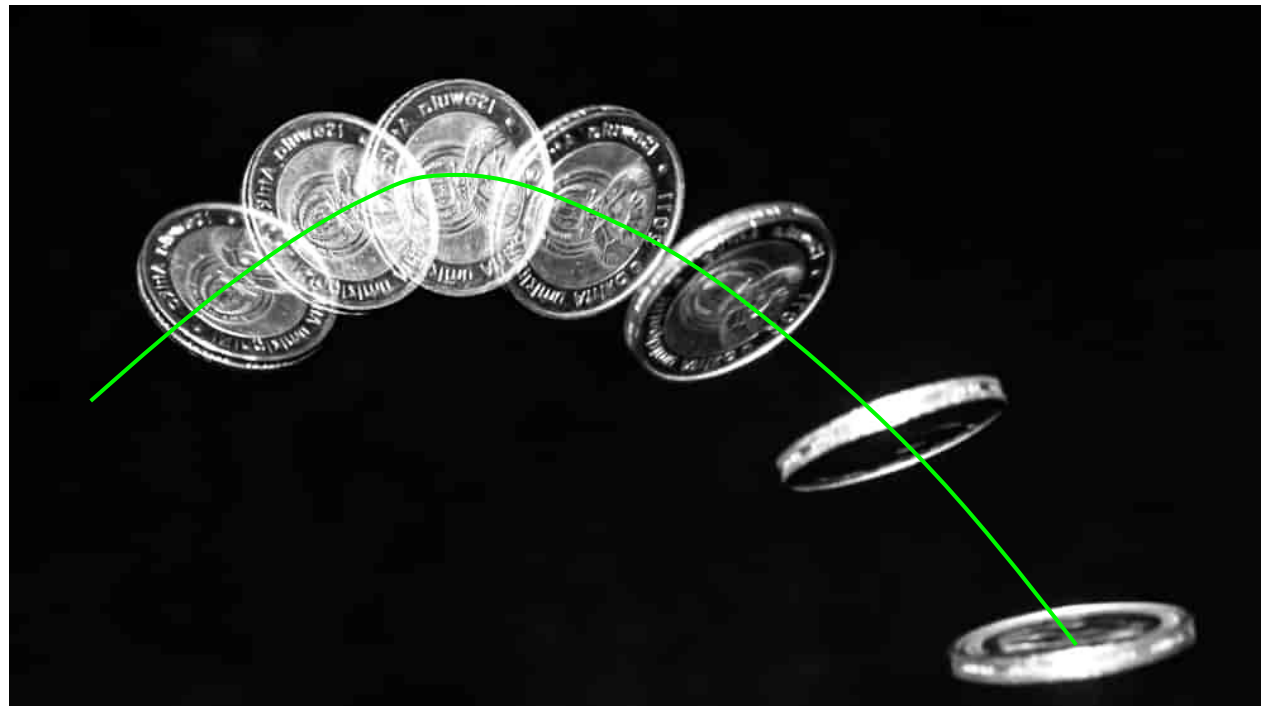
$$\Rightarrow (\vec{\omega}_{CB} - \vec{\omega}_{CA}) \cdot (\vec{r}_{CA} \times \vec{r}_{AB}) = 0$$

考虑到A、B、C是任取的, 必然有 $\vec{\omega}_{CB} = \vec{\omega}_{CA} = \vec{\omega}$, 即刚体角速度与质点位置无关。这一性质叫做刚体角速度的绝对性

- 至此，我们证明了刚体上任意一点的速度可以视为刚体上参考点C的平动速度与转动速度的叠加，

$$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_C)$$

- 注意，参考点C的选择是任意的，既可以是刚体上的一点也可以是随刚体一起运动的刚体延拓线上的一点

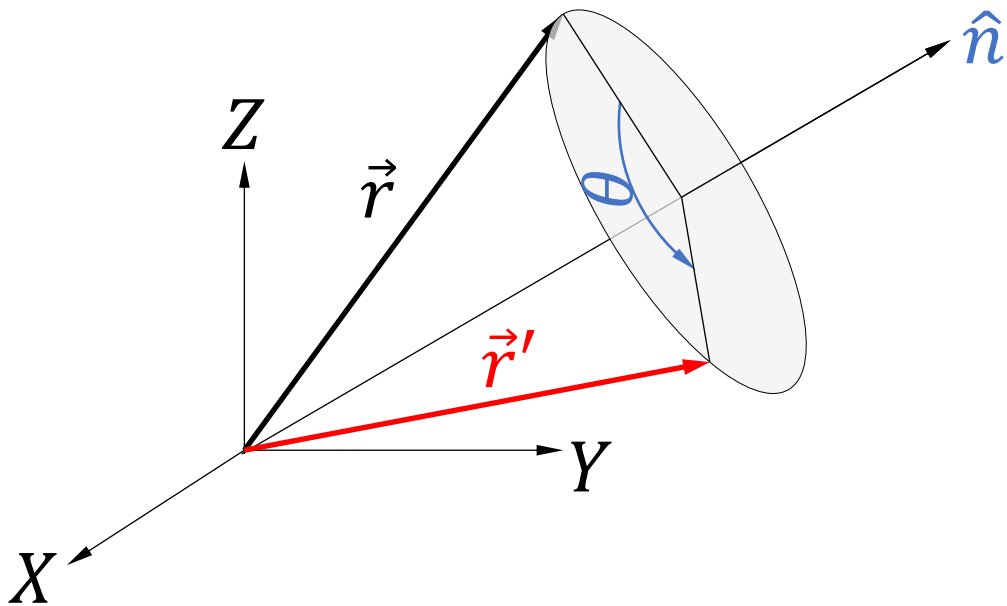


- 这一结论对应的是无穷小位移，实际上欧拉旋转定理(Euler's rotation theorem, 1775)告诉我们，刚体上任何一点的位移，都可以视为平动与转动的叠加，

$$\vec{r} = \vec{r}_C + R(\vec{r} - \vec{r}_C)$$

这里， $R(\vec{r})$ 表示对与矢量 $\vec{r}$ 做旋转，其中一种表示方式是，

$$R(\vec{r}) = \vec{r} \cos \theta + (\hat{n} \times \vec{r}) \sin \theta + \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r})(1 - \cos \theta)$$

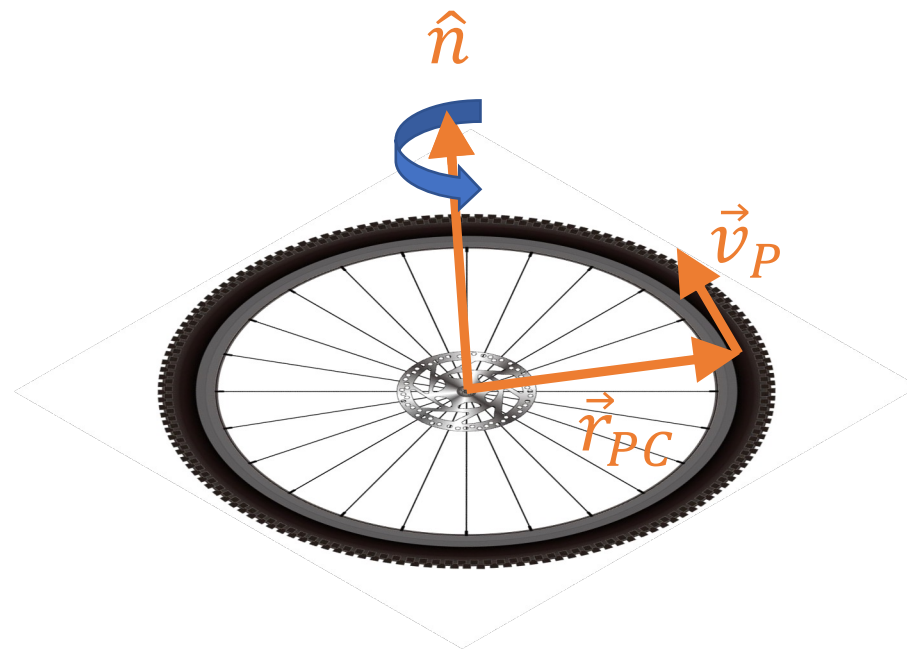


【例子】刚体做平动时，所有质点速度相同，因此 $\vec{v} = \vec{v}_C$ ，角速度为0

【例子】平面刚体的定轴转动：考虑一个车轮绕轴心转动，车轴方向为 $\hat{n}$ ，转动速度为 $\dot{\theta}$ 。则以车轴为参考点，车轮上某一点P的速度，

$$\vec{v}_P = \dot{\theta} \hat{n} \times \vec{r}_{PC}$$

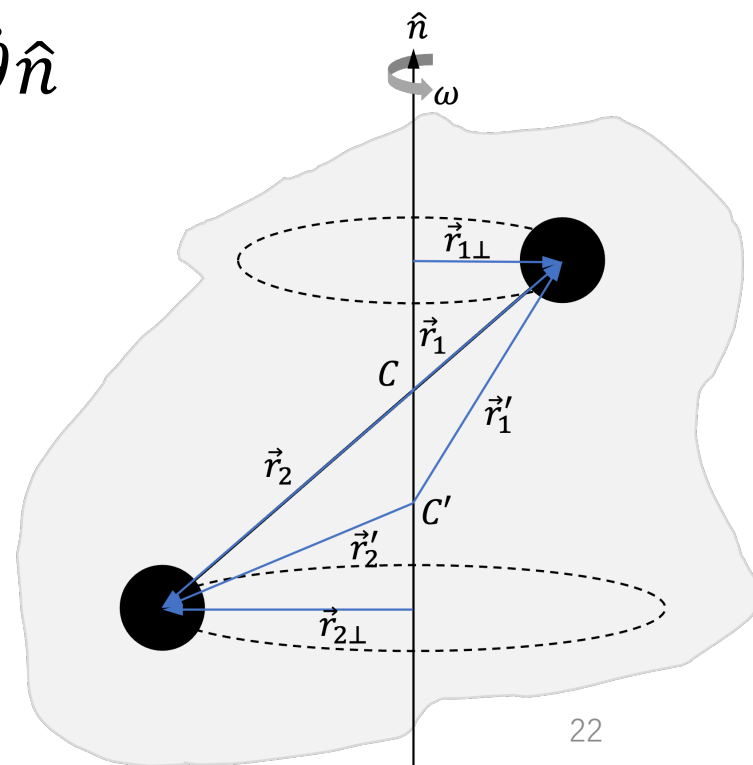
车轴的平动速度为0，车轮的角速度为 $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{n}$



【例子】三维刚体的定轴转动：考虑如图三维刚体做定轴转动，其上质点1、2的连线与其速度方向不在一个平面内。每个质点在各自己的平面内均绕转轴做圆周运动。选转动轴上任意一点作为参考点，第*i*个质点的速度

$$\vec{v}_i = \dot{\theta} \hat{n} \times \vec{r}_{i\perp} = \dot{\theta} \hat{n} \times \vec{r}_i$$

刚体参考点的平动速度为0，刚体角速度为 $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{n}$



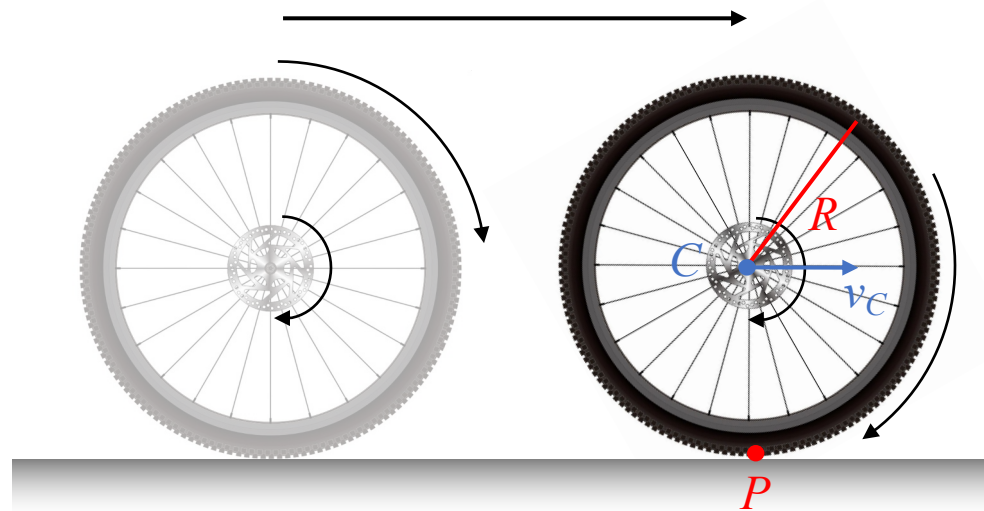
【例子】车轮滚动：车轴的速度为 $\vec{v}_C$ ，绕车轴转动的角速度为 ω ，取车轴方向为 $\hat{n}$ ，则车轮上任意一点的速度：

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \omega \hat{n} \times \vec{r}_{i\perp} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

其中， $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$ 为角速度矢量。车轮与地面接触点P的速度：

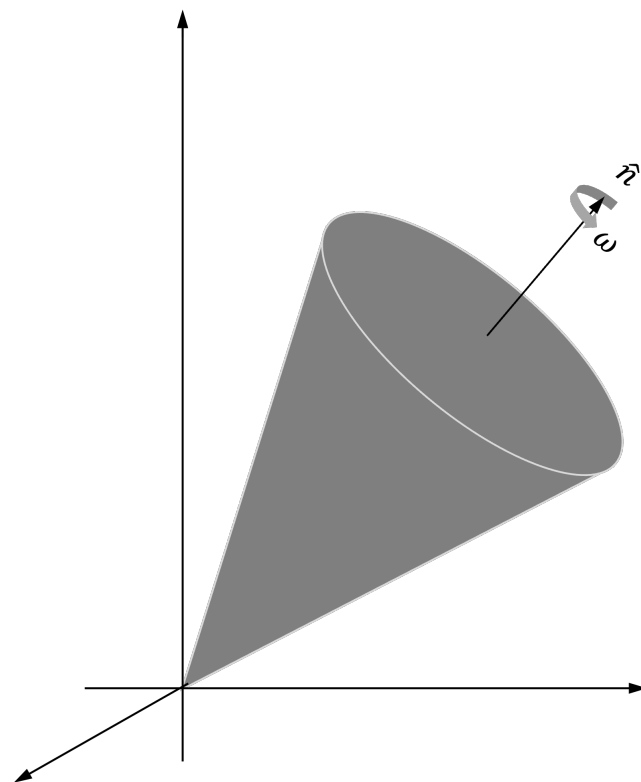
$$v_P = v_C - \omega R$$

- 纯滚动：车轮与地面接触点相对于地面静止，即 $v_C = \omega R$



【例子】陀螺的转动：设陀螺的瞬时转动轴的方向指向 $\hat{n}$ ，其瞬时角速度为 ω ，则任意一点 i 的速度为，

$$\vec{v}_i = \omega \hat{n} \times \vec{r}_{i\perp} = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$



§2. 刚体动力学

- 刚体的动力学原则上可以直接从牛顿第二定律出发，但这个比较复杂
- 刚体质点之间的力——内力——比较复杂
- 刚体只有6个自由度，根据上一节结论，任意质点的运动可以分解为平动与转动的叠加，因此我们只需要研究刚体平动和转动所遵循的动力学规律即可
- 刚体运动的分解与参考点的选择有关，
 - 当刚体运动中存在一个体固定点时（定点旋转的转轴、定点旋转的定点）一个方便的参考点是该固定点
 - 当刚体运动中不存在一个体固定点时，选择质心参考系比较方便

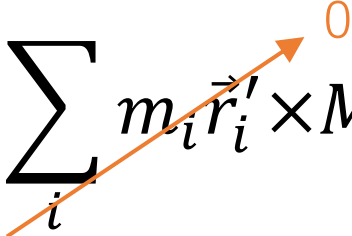
a. 刚体的动力学方程

$$M \frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{ext}}$$

- 刚体一共有6个自由度 —— 这两组方程足够确定刚体的动力学
- 质心的加速度仅依赖于合外力 $\vec{F}^{\text{ext}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}}$
- 体系相对于坐标原点的角动量的改变仅依赖于合外力矩 $\vec{M}^{\text{ext}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}}$
- 如果选择质心作为角动量参考点，对应的角动量为内禀角动量（自旋角动量）

$$\begin{aligned}\vec{L} &= M\vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{v}_{\text{cm}} + \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i \\ &= \vec{L}_{\text{cm}} + \vec{L}_{\text{int}} \quad \xrightarrow{\text{质心参考系}} \vec{L}_{\text{int}}\end{aligned}$$

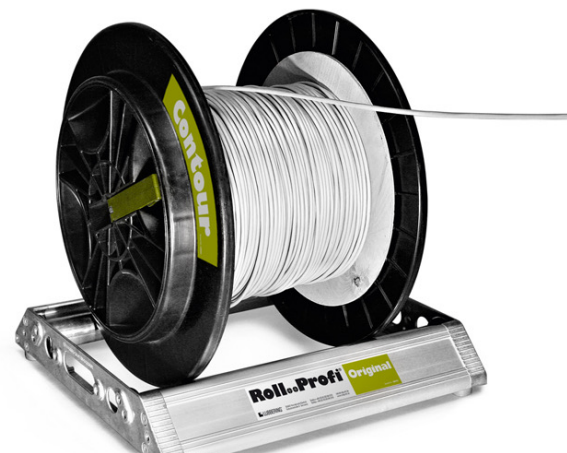
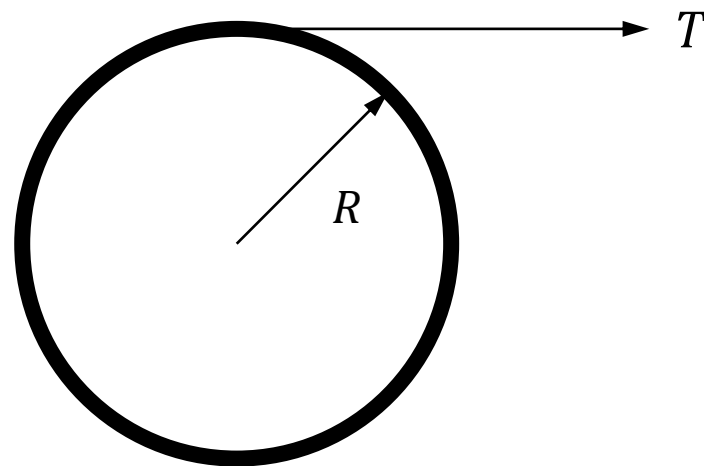
- 质心参考系可能为非惯性参考系，角动量的变化满足方程，

$$\frac{d\vec{L}_{\text{int}}}{dt} = \vec{M}^{\text{ext}} - \sum_i m_i \vec{r}'_i \times M \vec{a}_{\text{cm}}$$


可见，在质心参考系，惯性力不贡献力矩：

$$\frac{d\vec{L}_{\text{int}}}{dt} = \vec{M}^{\text{ext}}$$

【例子】 从一个质量为 M 、半径为 R 的线轴上抽线。已知抽线时的张力为 T ，线轴的轴心固定，忽略线的质量与轴心的摩擦力。已知线轴可以看出一个环形柱体且初始时刻线轴静止。求 t 时刻线轴的角速度。

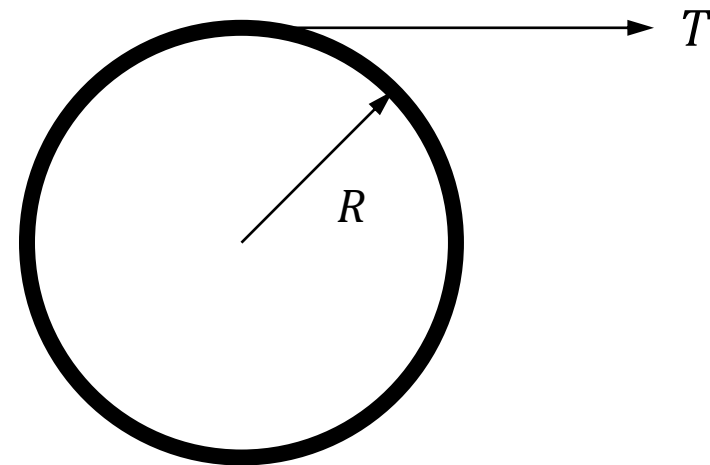


【例子】 从一个质量为 M 、半径为 R 的线轴上抽线。已知抽线时的张力为 T ，线轴的轴心固定，忽略线的质量与轴心的摩擦力。已知线轴可以看出一个环形柱体且初始时刻线轴静止。求 t 时刻线轴的角速度。

考虑相对于轴心的角动量，

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = -MR^2 \omega \hat{z}$$

$$MR^2 \dot{\omega} = TR \Rightarrow \omega(t) = \frac{T}{MR} t$$



b. 刚体的角动量

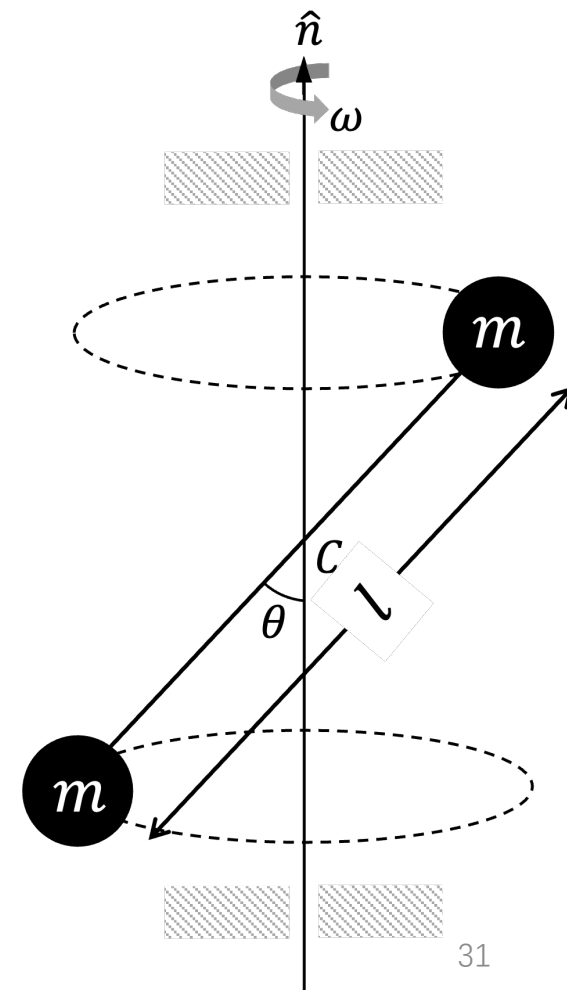
描述刚体运动时，我们用到了角速度 $\vec{\omega}$ 。而另一方面描述刚体动力学时，我们需要刚体的角动量。两者之间该如何相联系呢？

考虑刚体的角动量，

$$\begin{aligned}\vec{L}_C &= \sum_i m_i \vec{r}_{iC} \times \vec{v}_{iC} = \sum_i m_i \vec{r}_{iC} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{iC}) \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_{iC}^2 \vec{\omega} - \sum_i m_i \vec{r}_{iC} (\vec{r}_{iC} \cdot \vec{\omega})\end{aligned}$$

可见，一般而言，刚体的角动量与角速度呈线性关系，但是角动量与角速度的方向不一定相同

【例子】考虑下图做定轴转动的刚体由两个质量为 m 的球组成，球由长度为 l 的刚性轻杆相连。刚体绕过轻杆中心 C 的轴转动角速度为 ω 。转轴与轻杆之间的夹角为 θ ，求刚体以 C 为参考点的角动量。



【例子】考虑下图做定轴转动的刚体由两个质量为 m 的球组成，球由长度为 l 的刚性轻杆相连。刚体绕过轻杆中心 C 的轴转动角速度为 ω 。转轴与轻杆之间的夹角为 θ ，求刚体以 C 为参考点的角动量。

解：总角动量，

$$\vec{L} = m\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m\vec{r}_2 \times \vec{v}_2 = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$$

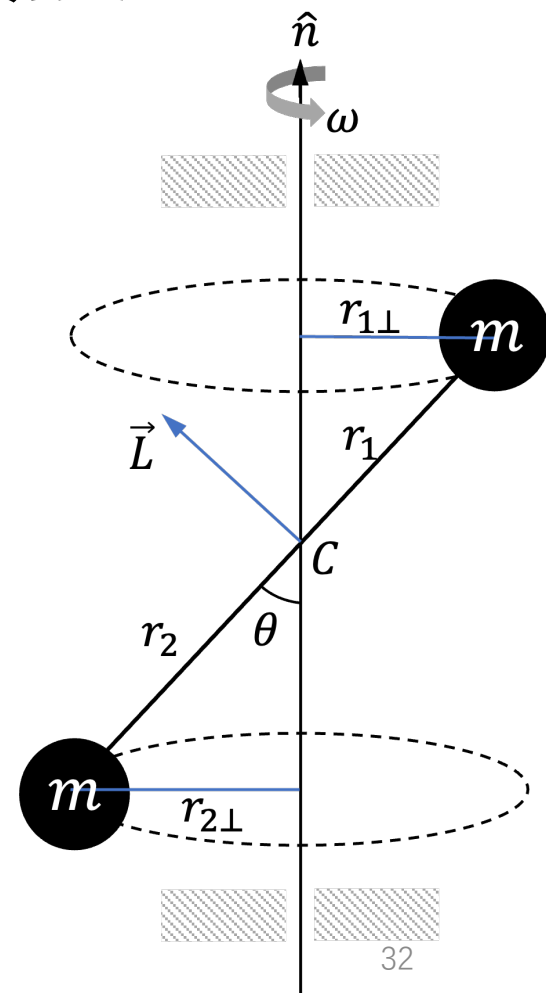
其中球的速度， $\vec{v}_i = \omega \hat{n} \times \vec{r}_{i\perp} = \omega \hat{n} \times \vec{r}_i$ 。

$$\vec{l}_i = m\vec{r}_i \times \vec{v}_i = m\vec{r}_i \times (\omega \hat{n} \times \vec{r}_i) = m\omega [\hat{n} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \hat{n})]$$

$$= \frac{1}{4} m\omega l^2 (\hat{n} \sin^2 \theta - \vec{e}_\perp \cos \theta \sin \theta)$$

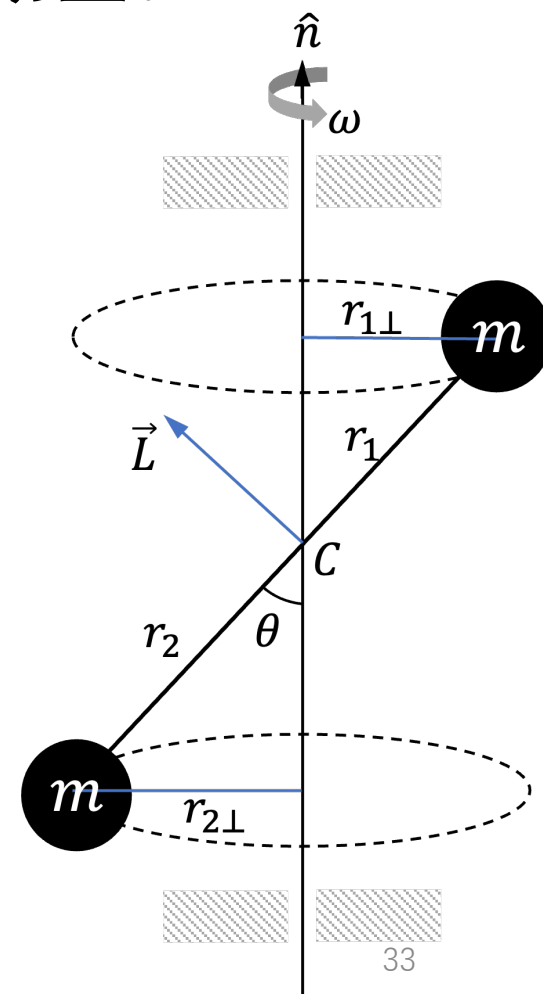
$$\Rightarrow \vec{L} = \frac{1}{2} m\omega l^2 (\hat{n} \sin^2 \theta - \vec{e}_\perp \cos \theta \sin \theta)$$

大小： $L = \frac{1}{2} m\omega l^2 \sin \theta$ ，方向与轻杆垂直。



【例子】考虑下图做定轴转动的刚体由两个质量为 m 的球组成，球由长度为 l 的刚性轻杆相连。刚体绕过轻杆中心 C 的轴转动角速度为 ω 。转轴与轻杆之间的夹角为 θ ，求刚体以 C 为参考点的角动量。

可见角动量的方向一直在发生改变，力矩是由哪里提供的？



【例子】考虑下图做定轴转动的刚体由两个质量为 m 的球组成，球由长度为 l 的刚性轻杆相连。刚体绕过轻杆中心 C 的轴转动角速度为 ω 。转轴与轻杆之间的夹角为 θ ，求刚体以 C 为参考点的角动量。

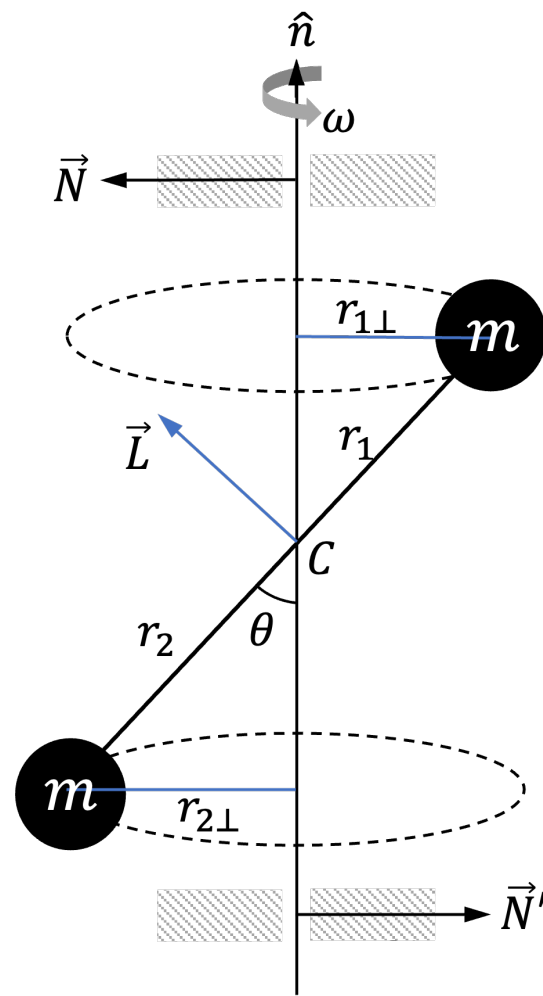
可见角动量的方向一直在发生改变，力矩是由哪里提供的？

答案是转轴。

定轴转动的刚体在高速旋转时，如果角动量方向与角速度方向不一致，将会给转轴施加非常大的力，从而有可能对转轴或者支撑点造成破坏。

【例子】：洗衣机甩干时自动配平

【例子】：高速离心机的配平



【例子】考虑下图做定轴转动的刚体由两个质量为 m 的球组成，球由长度为 l 的刚性轻杆相连。刚体绕过轻杆中心 C 的轴转动角速度为 ω 。转轴与轻杆之间的夹角为 θ ，求刚体以 C 为参考点的角动量。

离心机里面要离心的东西没有平衡放有什么后果？有体验过的吗？



白毛小狼狗
理科农民工

+ 关注

3 人赞同了该回答

硕士的时候安全教育有说过。离心机内胆飞出来打碎了一面墙又打碎了墙对面无辜男生的头.....

发布于 2015-10-22 10:57

▲ 赞同 3



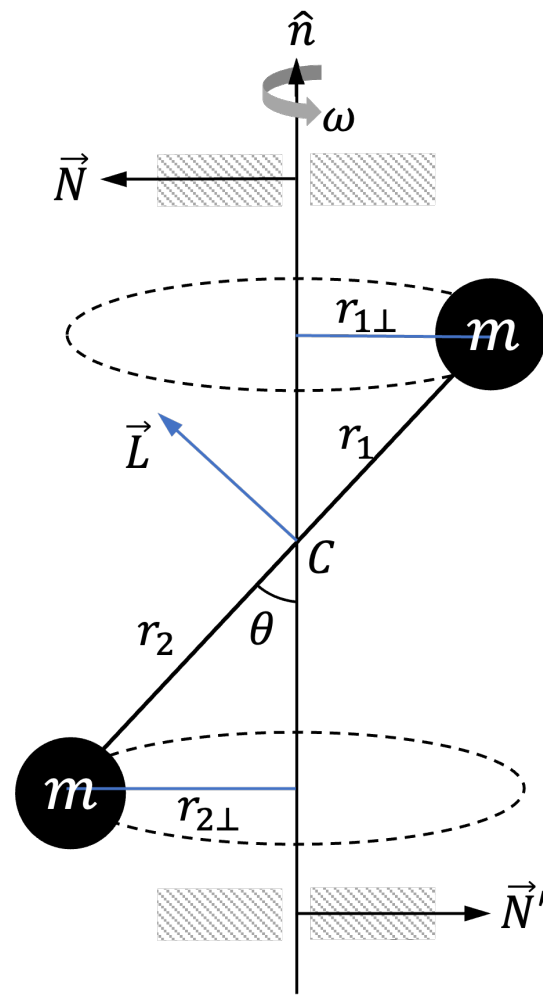
● 5 条评论

🚩 分享

★ 收藏

♥ 喜欢

...



$$\vec{L}_C = \sum_i m_i \vec{r}_{iC}^2 \vec{\omega} - \sum_i m_i \vec{r}_{iC} (\vec{r}_{iC} \cdot \vec{\omega})$$

如下几种情况下，刚体的角动量与刚体的角速度方向相同：

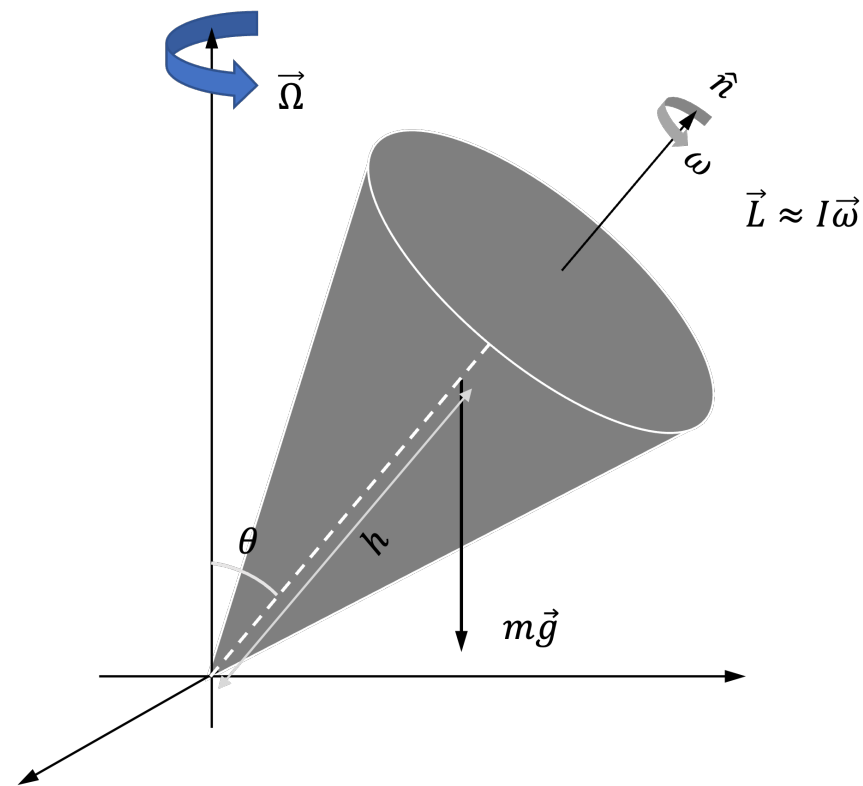
- 平面刚体且转轴与刚体平面垂直时。取转轴与刚体的交点为原点， $\vec{r}_i \cdot \vec{\omega} = 0$
- 刚体存在一个转动对称轴，且绕着对称轴转动。取对称轴上任一点作为原点，则垂直方向分量为0，

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_{iC}^2 \vec{\omega} - \sum_i m_i (\vec{r}_{iC} \cdot \vec{\omega})^2 \hat{\omega} = \sum_i m_i \vec{r}_{i\perp}^2 \vec{\omega} \equiv I \vec{\omega}$$

转动惯量

- 刚体存在3个正交的轴，叫做主轴。当刚体沿着主轴转动时，角动量方向与角速度方向相同

【例子】考虑一个高速旋转的陀螺角速度为 $\omega \gg 1$ ，陀螺的角动量 $\vec{L} = I\vec{\omega}$ 。已知陀螺质心的高度为 h ，陀螺质量为 m 。当陀螺略微偏离垂直位置时，分析陀螺的运动。



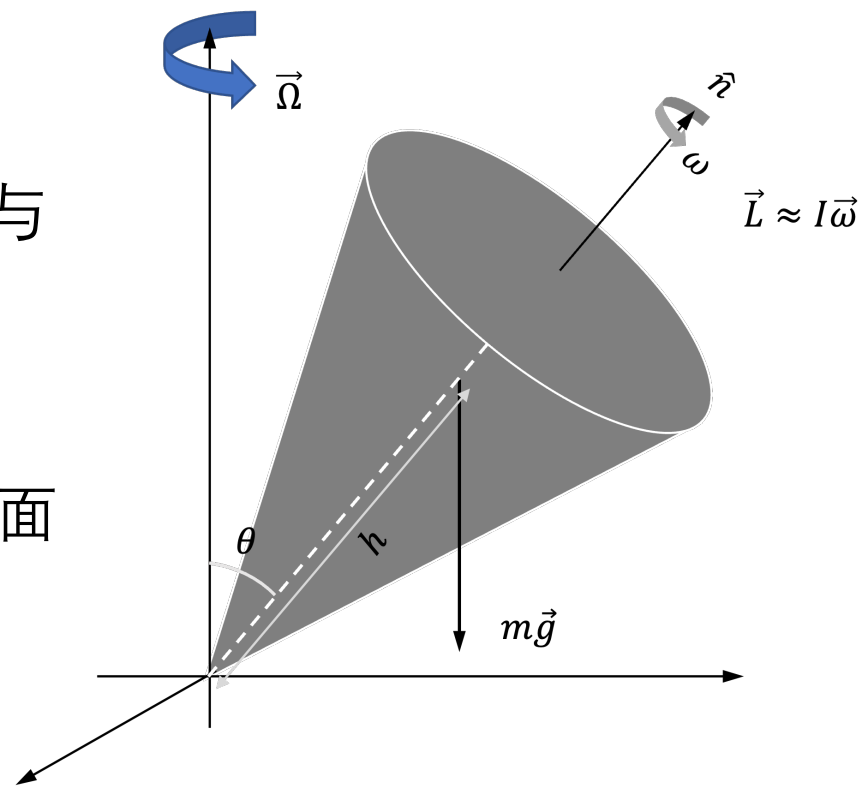
【例子】考虑一个高速旋转的陀螺角速度为 $\omega \gg 1$ ，陀螺的角动量 $\vec{L} = I\vec{\omega}$ 。已知陀螺质心的高度为 h ，陀螺质量为 m 。当陀螺略微偏离垂直位置时，分析陀螺的运动。

解：设陀螺偏离垂直位置的角度为 θ 。

陀螺所有的外力均在垂直方向，地面所提供的支持力与重力平衡。

以陀螺与地面的接触点为原点，重力的力矩为， $\vec{M} = \vec{h} \times m\vec{g}$ ，其中大小为 $M = mgh \sin \theta$ ，方向为垂直于纸面向里，根据角动量-力矩定理：

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



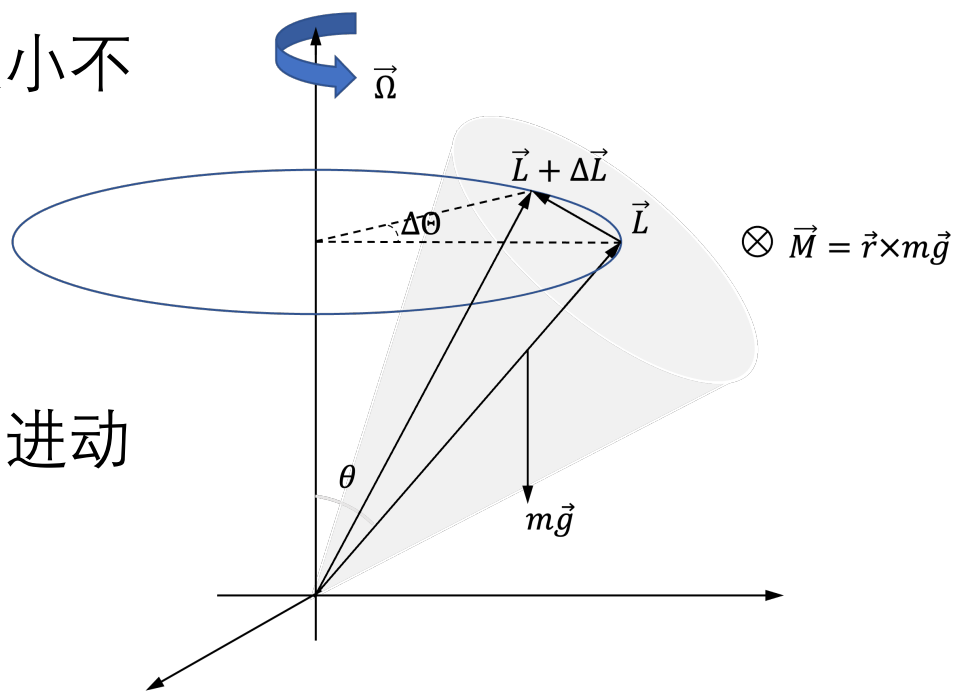
【例子】考虑一个高速旋转的陀螺角速度为 $\omega \gg 1$ ，陀螺的角动量 $\vec{L} = I\vec{\omega}$ 。已知陀螺质心的高度为 h ，陀螺质量为 m 。当陀螺略微偏离垂直位置时，分析陀螺的运动。

由于力矩方向一直垂直于角动量，因此角动量的大小不变，仅改变方向，即发生进动：

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

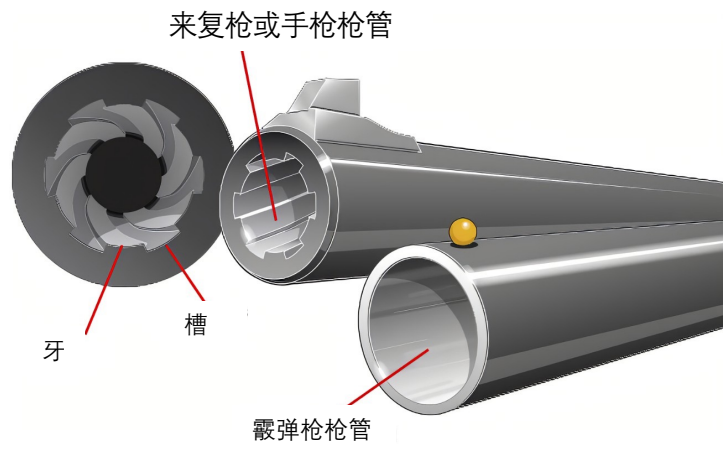
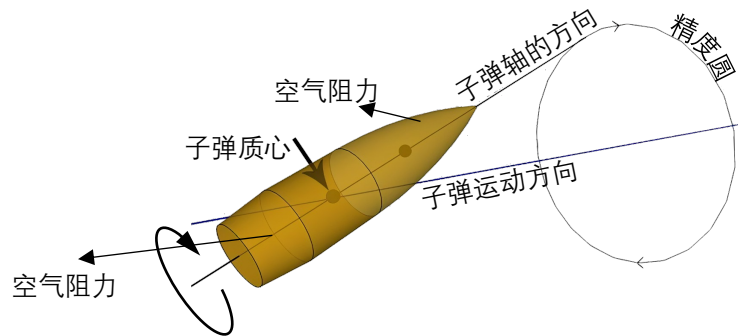
换句话说，陀螺不会倒下，而是会绕垂直轴进动，进动角速度为， $mgh \sin \theta = \Omega I \omega \sin \theta$

$$\Rightarrow \Omega = mgh/I\omega$$

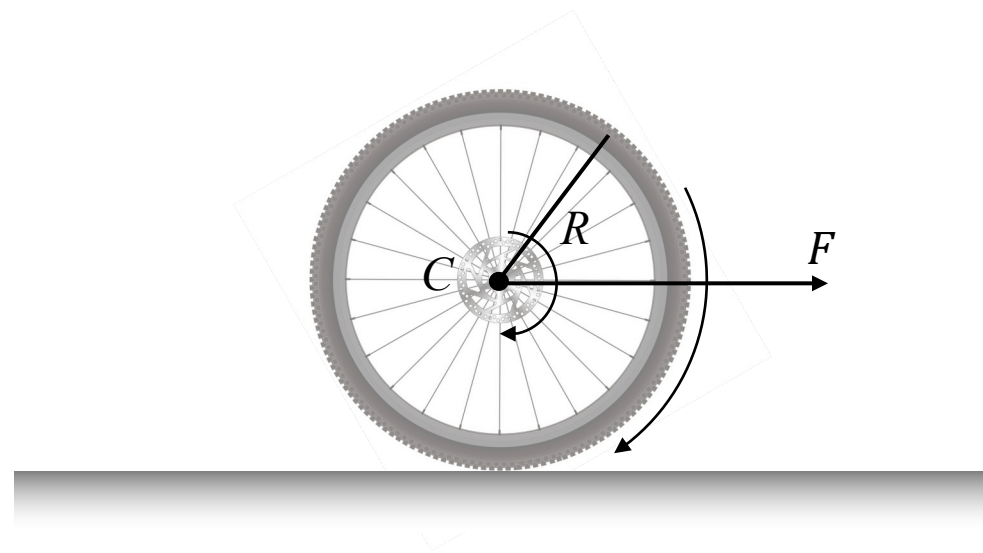


【例子】考虑一个高速旋转的陀螺角速度为 $\omega \gg 1$ ，陀螺的角动量 $\vec{L} = I\vec{\omega}$ 。已知陀螺质心的高度为 h ，陀螺质量为 m 。当陀螺略微偏离垂直位置时，分析陀螺的运动。

这个例子有非常重要的应用。例如来复枪(rifle)发明以前，广泛使用的是滑膛枪(musket)。相比于滑膛枪来说，来复枪在枪管中增加了螺旋形的膛线，使得子弹出射以后处在高速旋转状态。这样以来当子弹受到空气阻力影响时不会翻滚从而影响射击精度。



【例子】一个车轮质量为 m ，半径为 R 。恒定的驱动力 F 作用在车轴上。已知车轮在水平面上从静止开始做纯滚动。求车轴的速度 $v(t)$ 及车轮的角速度 $\omega(t)$ 。



【例子】一个车轮质量为 m ，半径为 R 。恒定的驱动力 F 作用在车轴上。已知车轮在水平面上从静止开始做纯滚动。求车轴的速度 $v(t)$ 及车轮的角速度 $\omega(t)$ 。

解：设车轮受到的地面的摩擦力为 f 。根据刚体的动力学方程，

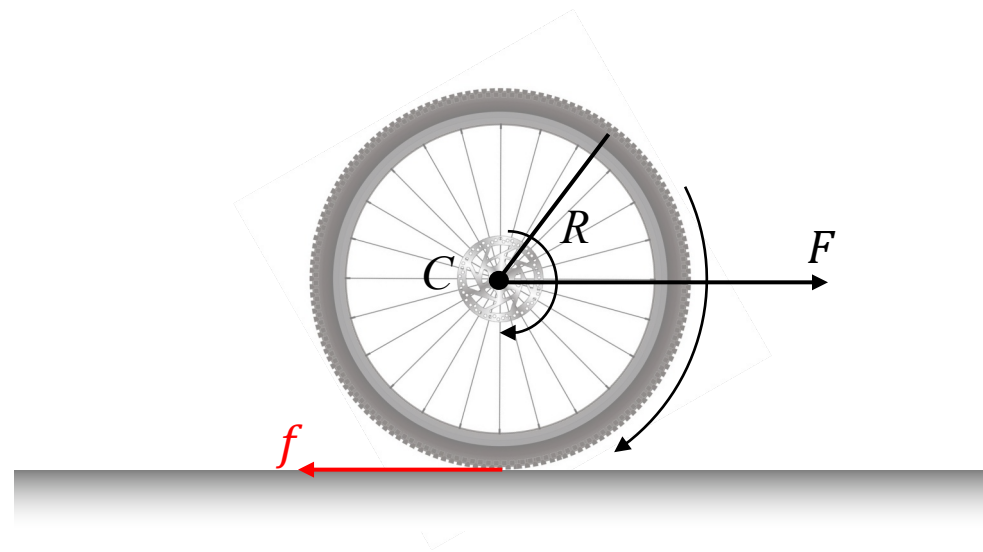
$$F - f = m \frac{dv}{dt}, \quad Rf = mR^2 \frac{d\omega}{dt}$$

车轮做纯滚动的条件是，

$$v = \omega R$$

因此， $F = f + ma = 2ma$

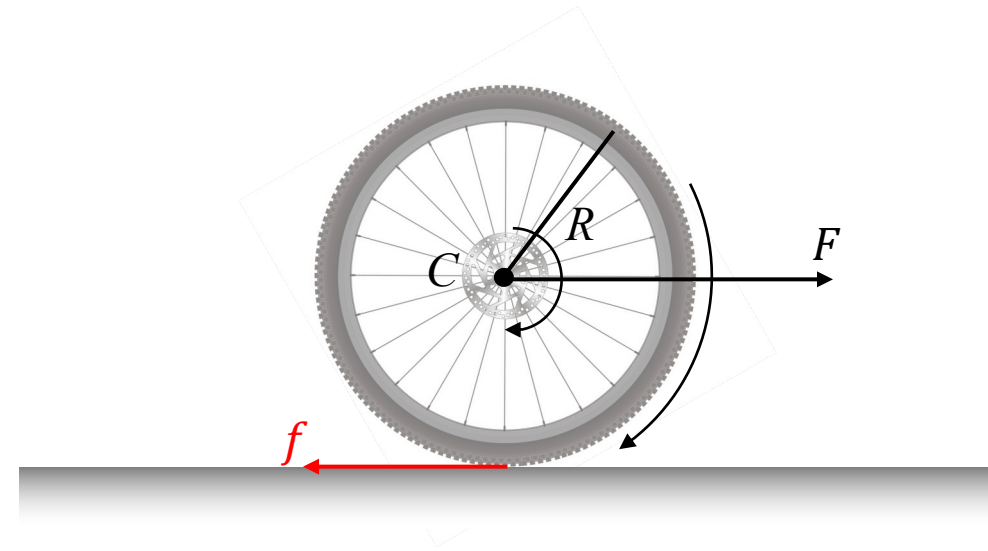
$$\Rightarrow v(t) = \frac{F}{2m} t$$



【例子】一个车轮质量为 m ，半径为 R 。恒定的驱动力 F 作用在车轴上。已知车轮在水平面上从静止开始做纯滚动。求车轴的速度 $v(t)$ 及车轮的角速度 $\omega(t)$ 。

求车轮与水平面之间的最小静摩擦系数

$$f = \frac{F}{2}$$
$$\Rightarrow \mu \geq \frac{f}{mg} = \frac{F}{2mg}$$



c. 刚体的能量

考虑刚体的动能, $T = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{\text{cm}})^2$

$$\begin{aligned} \text{第二项} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i [(\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) \times \vec{\omega}] \cdot \vec{r}'_i \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i [r_i'^2 \omega^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_i)^2] = \frac{1}{2} \vec{L}_{\text{int}} \cdot \vec{\omega} \end{aligned}$$

因此,

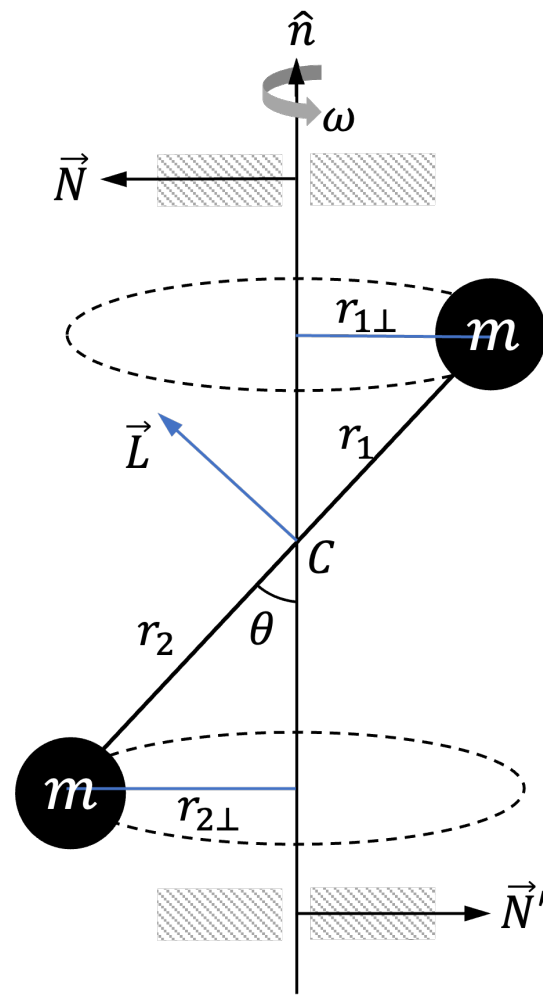
$$T = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \vec{L}_{\text{int}} \cdot \vec{\omega}$$

外力所做的功的功率：

$$\begin{aligned} P &= \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} \cdot (\vec{v}_{\text{cm}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i') \\ &= \vec{F}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\text{cm}} + \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i') = \vec{F}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{\omega} \cdot \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{\text{ext}} \\ &= \vec{F}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{M}_{\text{int}}^{\text{ext}} \cdot \vec{\omega} \\ &= \vec{F}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{M}^{\text{ext}} \cdot \vec{\omega} - (\vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{F}^{\text{ext}}) \cdot \vec{\omega} \\ &= \vec{F}^{\text{ext}} \cdot (\vec{v}_{\text{cm}} - \vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{cm}}) + \vec{M}^{\text{ext}} \cdot \vec{\omega} \end{aligned}$$

$$P = \vec{F}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{M}_{\text{int}}^{\text{ext}} \cdot \vec{\omega}$$

【例子】考虑下图做定轴转动的刚体由两个质量为 m 的球组成，球由长度为 l 的刚性轻杆相连。刚体绕过轻杆中心 C 的轴转动角速度为 ω 。转轴与轻杆之间的夹角为 θ ，分析该刚体运动过程中外力所做的功。



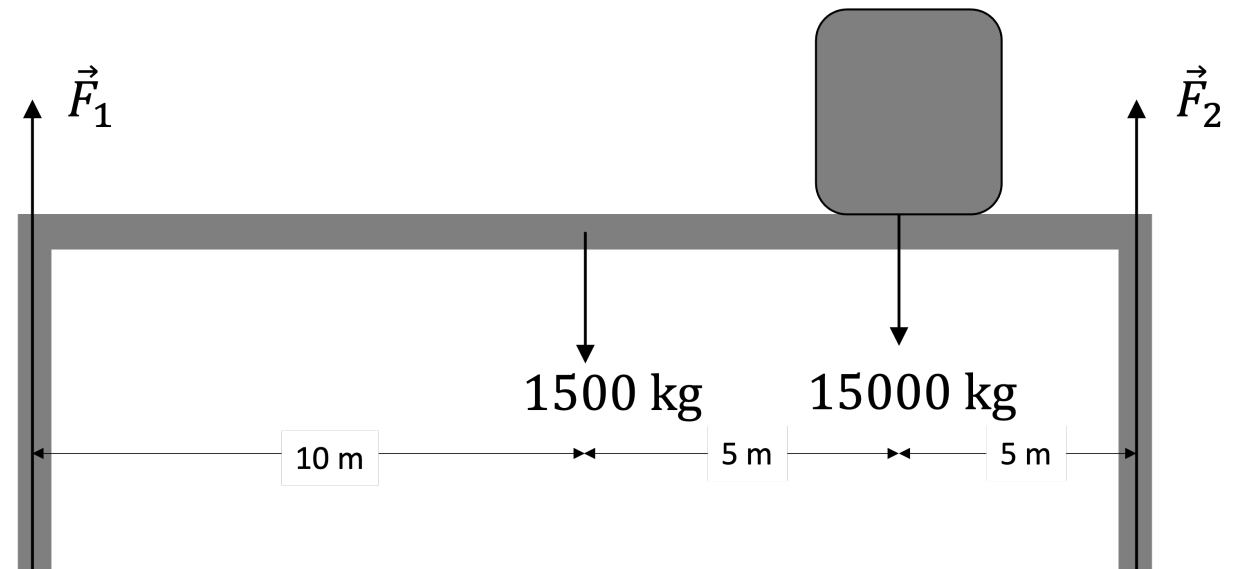
d. 刚体的静力学平衡

刚体静力学平衡是刚体动力学的特殊情况。从动力学出发，刚体静力学平衡的条件是，

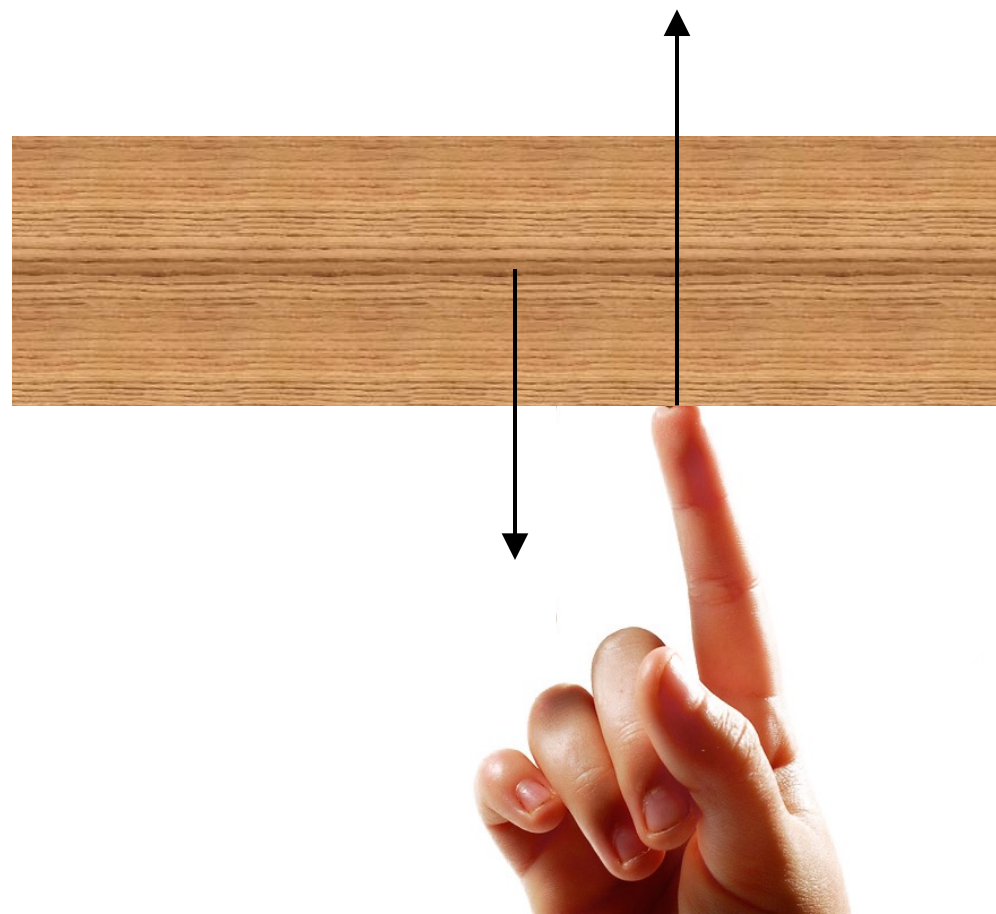
$$\vec{F}^{\text{ext}} = 0, \quad \vec{M}^{\text{ext}} = 0$$

即，刚体的合外力为零，同时相对于任意一个静止参考点的力矩为0。

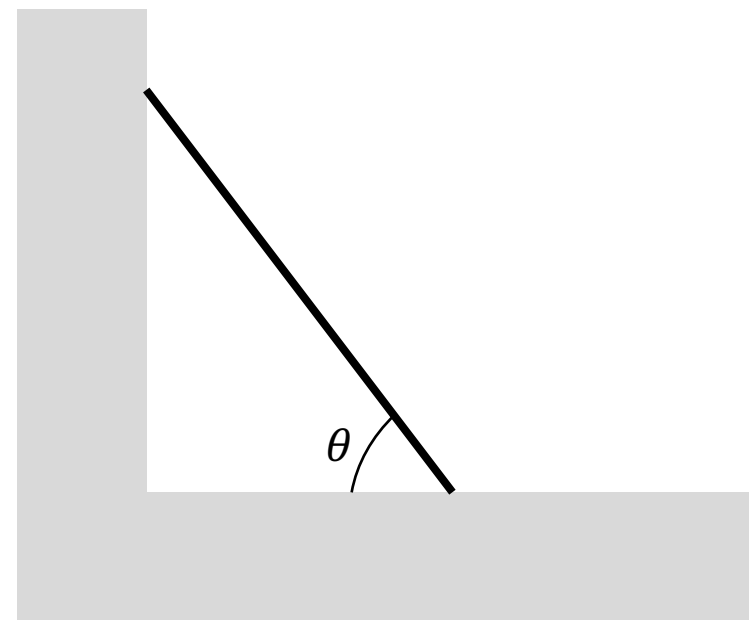
【例子】 求 F_1, F_2



【例子】平衡鸟的物理原理



【例子】一架均匀的梯子斜靠在一面墙上。已知地面与梯子的静摩擦系数为 μ ，墙与梯子的摩擦力可以忽略。求梯子与水平面的最小的可能的夹角。



【例子】一架均匀的梯子斜靠在一面墙上。已知地面与梯子的静摩擦系数为 μ ，墙与梯子的摩擦力可以忽略。求梯子与水平面的最小的可能的夹角。

求解：首先进行受力分析。梯子可能受到的力包括，重力 mg ，地面的支持力 N_1 和摩擦力 f_1 ，墙面的支持力 N_2 和摩擦力 f_2 。根据刚体静力平衡原理，

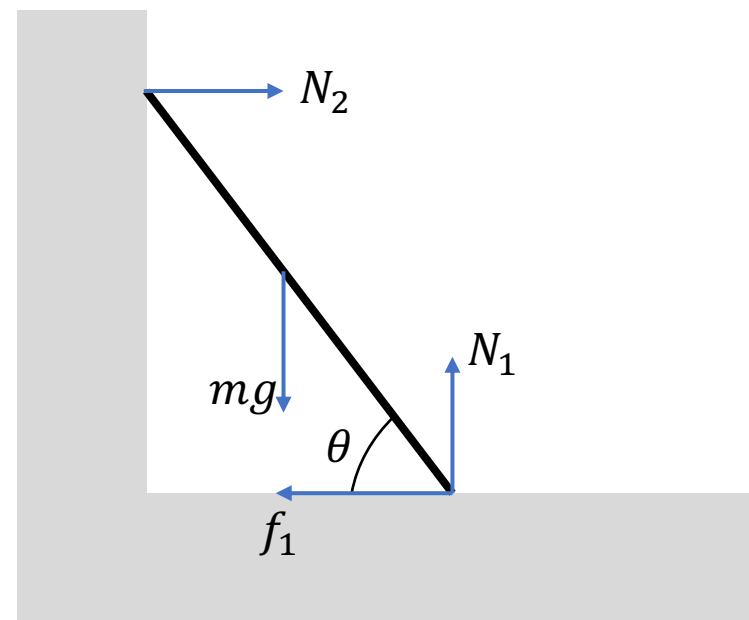
力平衡条件：

$$mg = N_1, \quad N_2 = f_1$$

以梯子与墙的接触点为参考点，力矩平衡条件：

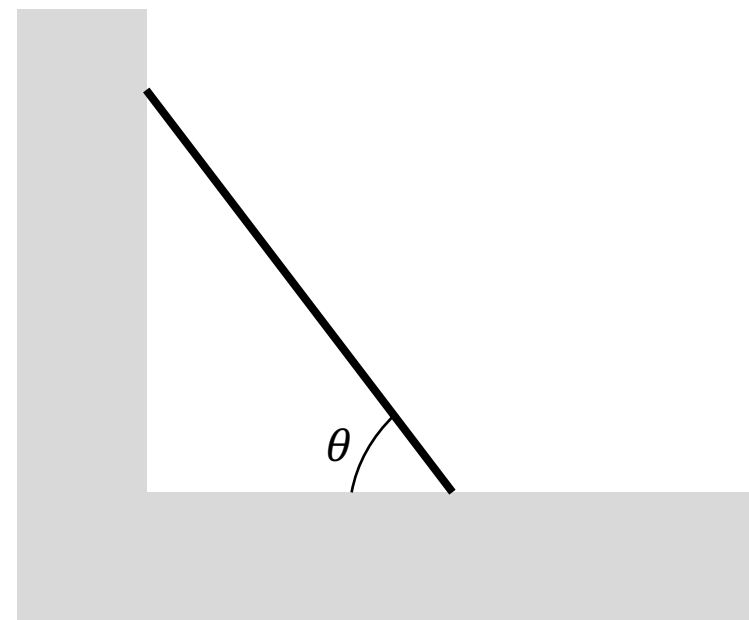
$$mg \frac{l}{2} \cos \theta + f_1 l \sin \theta = N_1 l \cos \theta, \quad \frac{f_1}{N_1} \leq \mu$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cot \theta \leq \mu \Rightarrow \theta \geq \arctan(2\mu)^{-1}$$



例如： $\mu = 0.5, \Rightarrow \theta^* = 45^\circ$

【例子】一架均匀的梯子斜靠在一面墙上。已知地面与梯子的静摩擦系数为 $\mu = 0.5$ ，墙与梯子的摩擦力系数为 $\mu' = 0.5$ 。求梯子与水平平面的最小的可能的夹角。



【例子】一架均匀的梯子斜靠在一面墙上。已知地面与梯子的静摩擦系数为 $\mu = 0.5$ ，墙与梯子的摩擦力系数为 $\mu' = 0.5$ 。求梯子与水平平面的最小的可能的夹角。

求解：

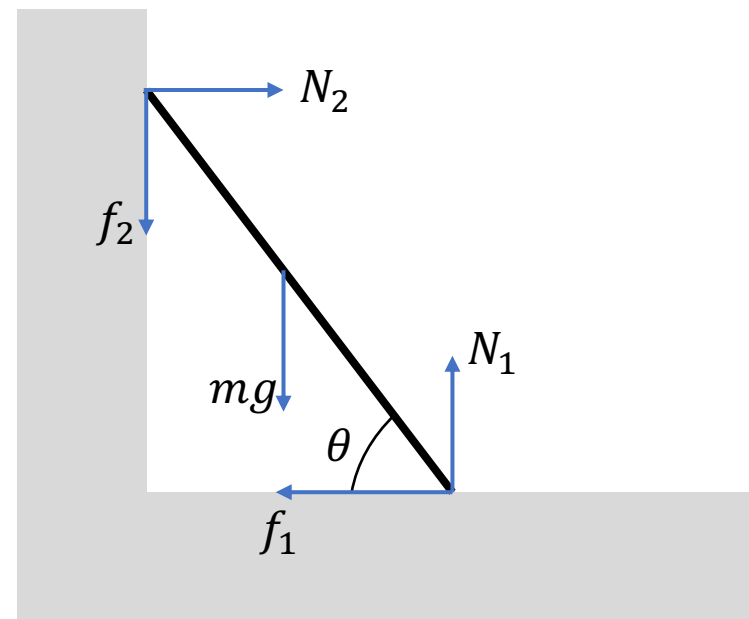
$$mg + f_2 = N_1, \quad N_2 = f_1$$

$$mg \frac{l}{2} \cos \theta + f_1 l \sin \theta = N_1 l \cos \theta$$

三个方程、四个未知数，欠定问题——静摩擦欠定问题。无法完全确定摩擦力，只能确定摩擦力之间的关系，

$$f_1 \tan \theta - f_2 = \frac{1}{2} mg$$

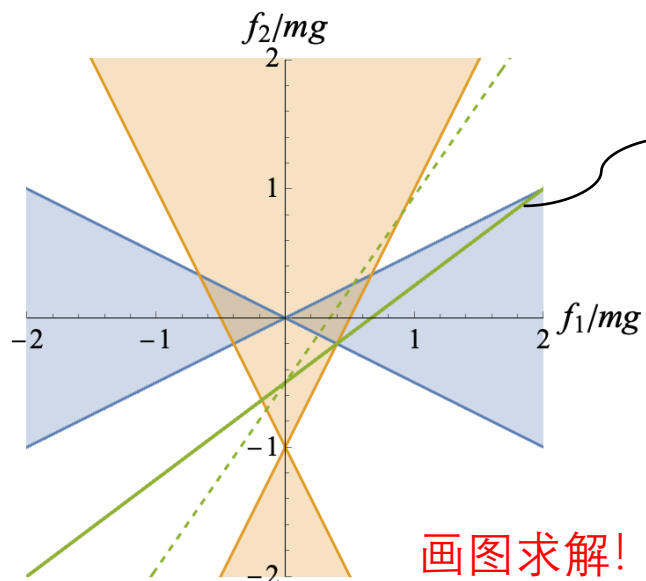
摩擦力实际的大小，与梯子的压缩/拉伸状态有关——刚体模型不再适用！



【例子】一架均匀的梯子斜靠在一面墙上。已知地面与梯子的静摩擦系数为 $\mu = 0.5$ ，墙与梯子的摩擦力系数为 $\mu' = 0.5$ 。求梯子与水平平面的最小的可能的夹角。

当然，最小可能的夹角还是可以求出来的。以两个摩擦力分布为横纵坐标，可以根据摩擦约束画出摩擦力可能的分布范围：

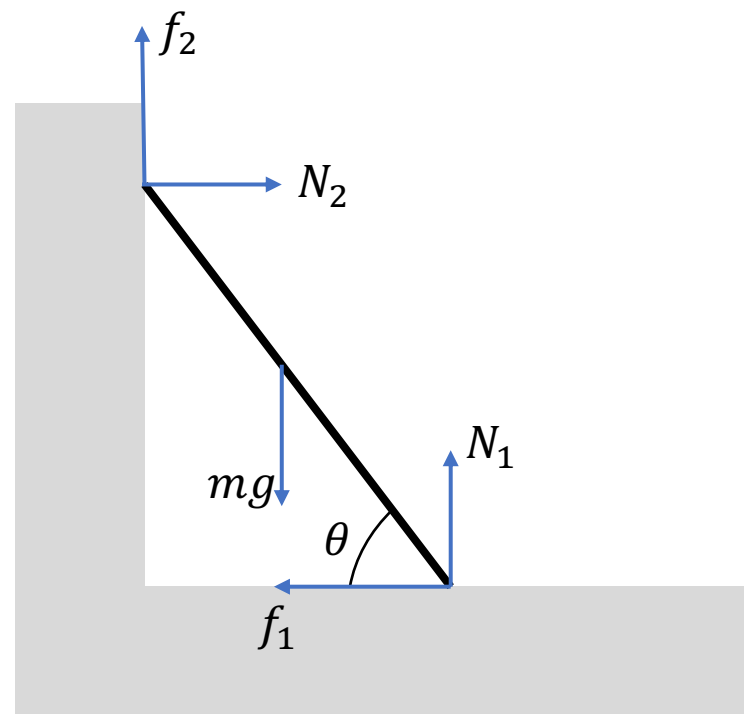
$$|f_1/N_1| \leq \mu, |f_2/N_2| \leq \mu' \Rightarrow \left| \frac{f_1}{mg + f_2} \right| \leq \mu, \left| \frac{f_2}{f_1} \right| \leq \mu'$$



$$f_1 \tan \theta - f_2 = \frac{1}{2} mg$$

$$\tan \theta^* = \frac{1 - \mu\mu'}{2\mu} \Rightarrow \theta^* \approx 36.9^\circ$$

画图求解!



§3. 定轴转动与平面平行运动

作为刚体运动的基本形式，首先考虑刚体做定轴转动时的动力学问题。此时，刚体的运动只有一个自由度。因此我们只需要考虑平行于转轴方向的角动量分量。不妨取转轴方向为 z 。角动量分量，

$$L_z = \sum_i m_i (r_i^2 - r_{iz}^2) \omega = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \omega \equiv I \omega$$

其中，

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

叫做刚体关于转轴的转动惯量。

动力学方程为,

$$\frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = M_z^{\text{ext}}$$

对于定轴转动来说, 这个方程相当于质点平动的牛顿第二定律。其中, I 起到质量的作用。

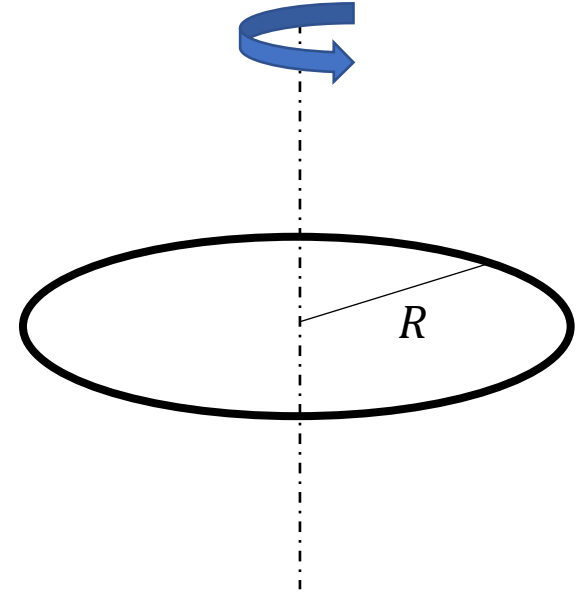
- 对于连续分布的刚体, 求和可以换成积分,

$$I = \int d^3V \rho (x^2 + y^2)$$

这里, ρ 是刚体的密度。

- 转动惯量与转轴的选择有关, 相同的刚体关于不同的转轴的转动惯量可能不相同

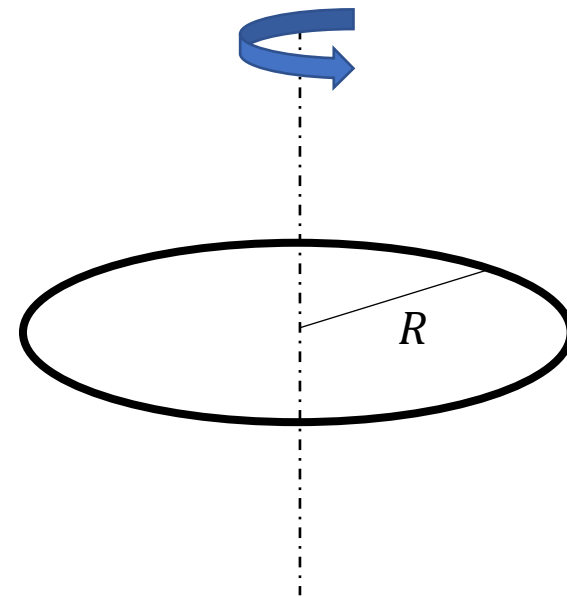
【例子】 计算圆环过圆心且垂直于环面的转动惯量。



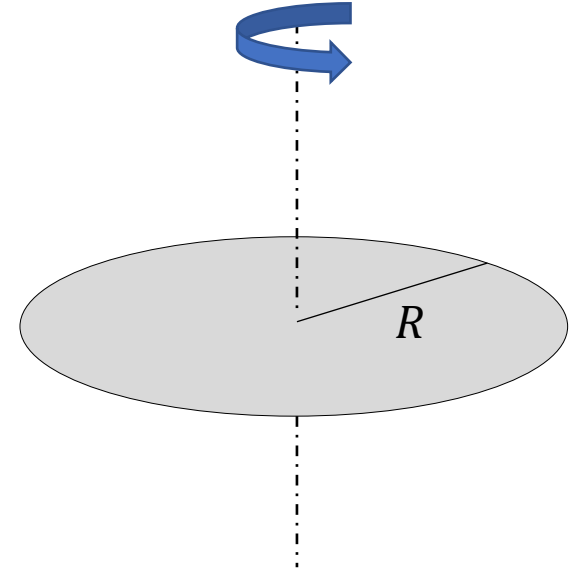
【例子】 计算圆环过圆心且垂直于环面的转动惯量。

解：

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = mR^2$$



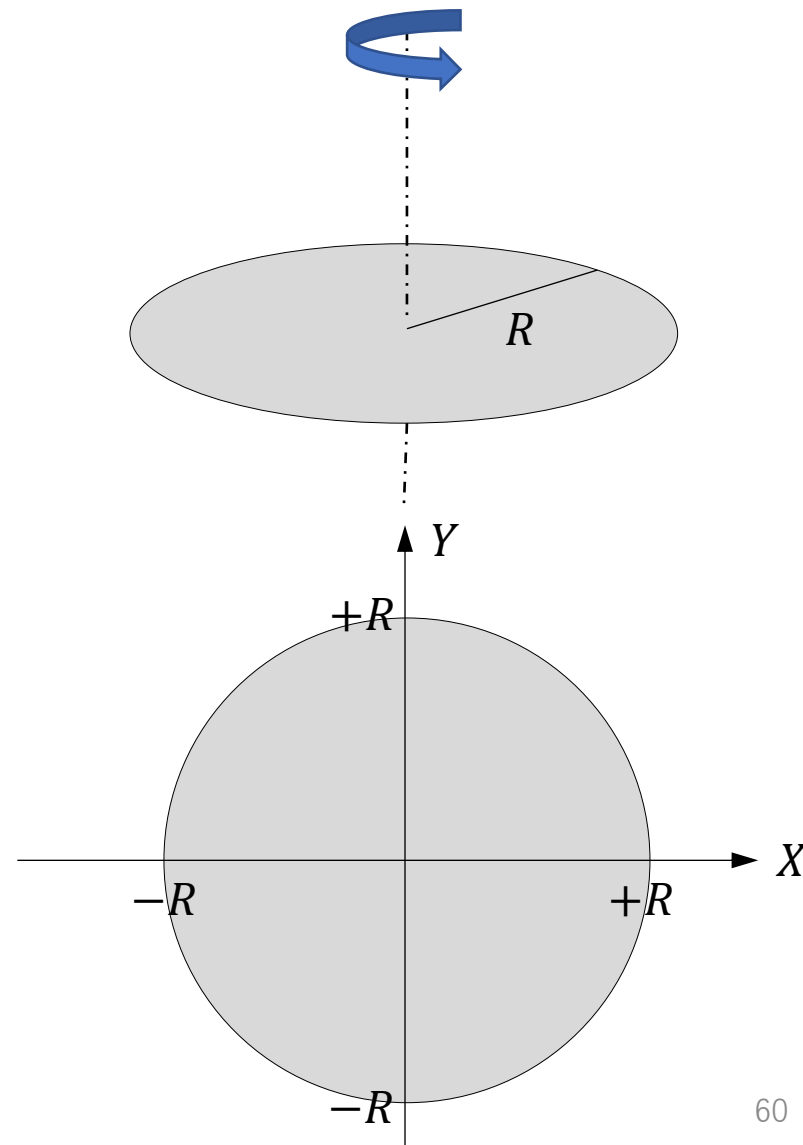
【例子】 计算均匀圆盘关于过圆心且垂直于圆盘的转动惯量。



【例子】 计算均匀圆盘关于过圆心且垂直于圆盘的转动惯量。

解：

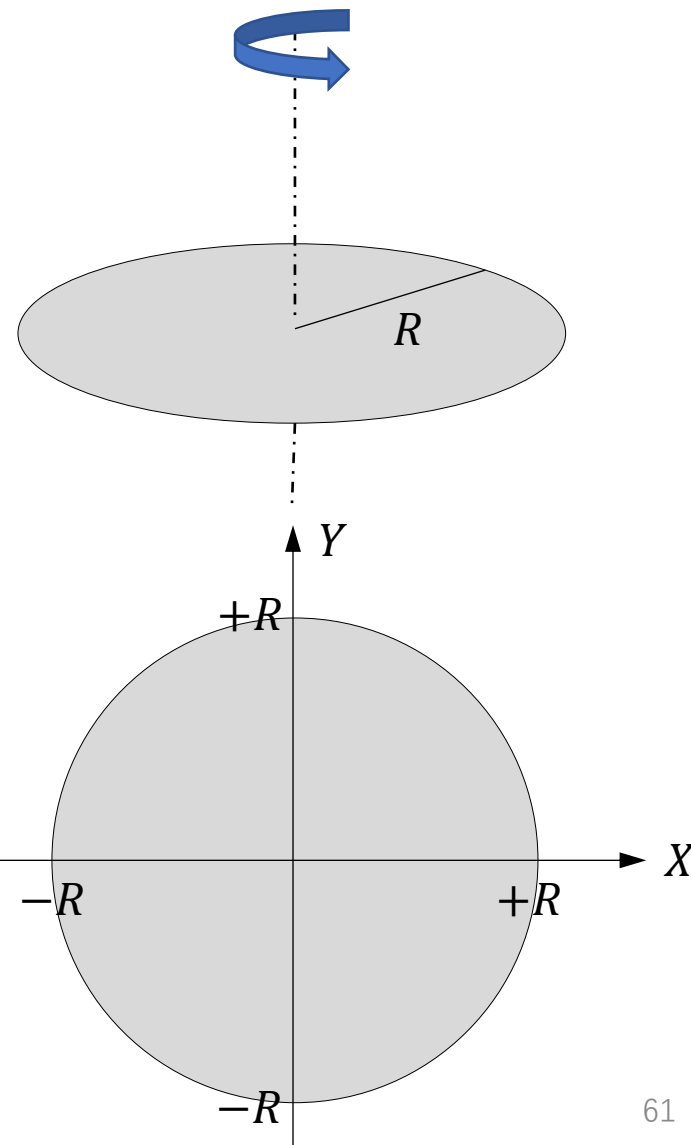
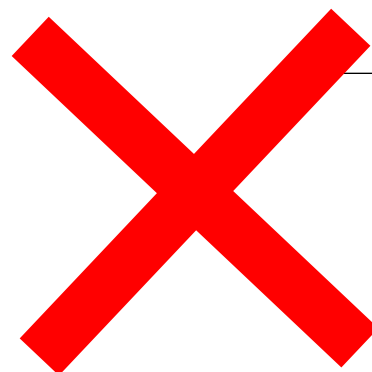
$$\begin{aligned} I &= \int \rho (x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \frac{m}{\pi R^2} \int (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \frac{m}{\pi R^2} \int_{-R}^{+R} \int_{-R}^{+R} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \frac{m}{\pi R^2} \int_{-R}^{+R} \left(\frac{2}{3} R^3 + 2Ry^2 \right) dy \\ &= \frac{8m}{3\pi} R^2 \end{aligned}$$



【例子】 计算均匀圆盘关于过圆心且垂直于圆盘的转动惯量。

解：

$$\begin{aligned} I &= \int \rho (x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \frac{m}{\pi R^2} \int (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \frac{m}{\pi R^2} \int_{-R}^{+R} \int_{-R}^{+R} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \frac{m}{\pi R^2} \int_{-R}^{+R} \left(\frac{2}{3} R^3 + 2Ry^2 \right) dy \\ &= \frac{8m}{3\pi} R^2 \end{aligned}$$

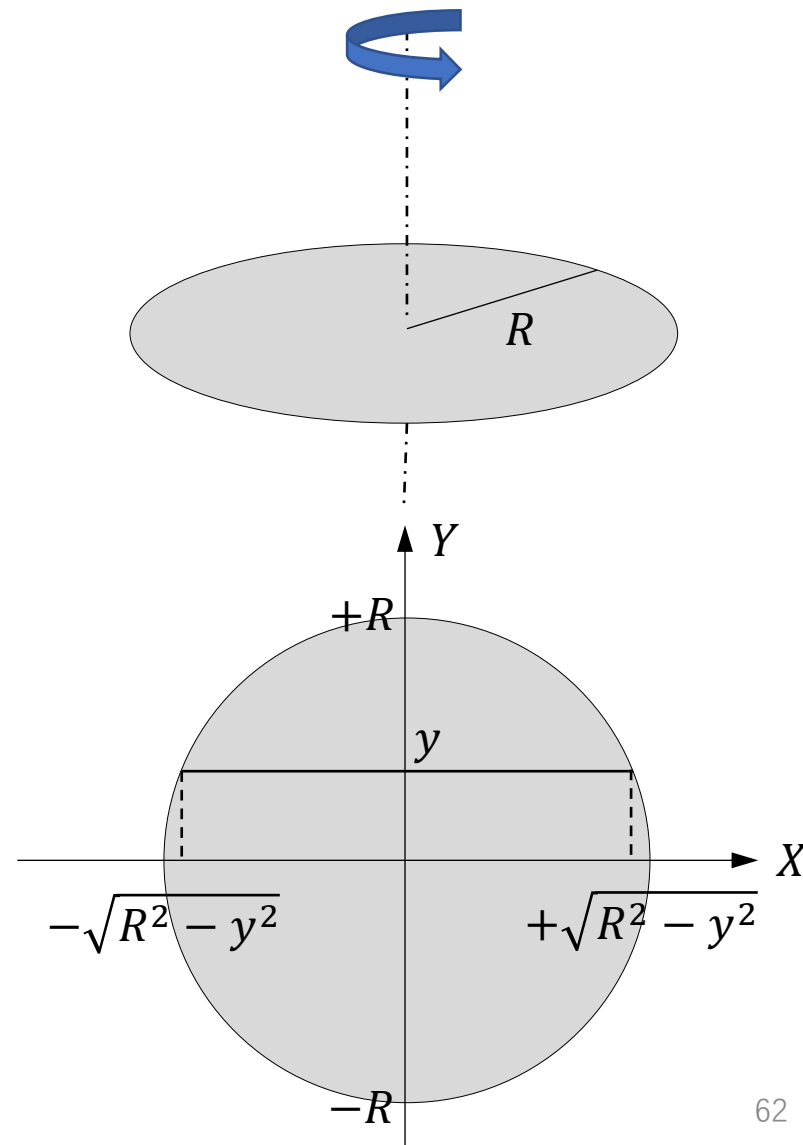


【例子】 计算均匀圆盘关于过圆心且垂直于圆盘的转动惯量。

解：

$$\begin{aligned} I &= \int \rho (x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \frac{m}{\pi R^2} \int (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \frac{m}{\pi R^2} \int_{-R}^{+R} \underbrace{\int_{-R}^{+R} (x^2 + y^2) dx}_{\text{积}x\text{的时候}y\text{固定, } x\text{的上下限不是}\pm R} dy \end{aligned}$$

积 x 的时候 y 固定,
 x 的上下限不是 $\pm R$



【例子】 计算均匀圆盘关于过圆心且垂直于圆盘的转动惯量。

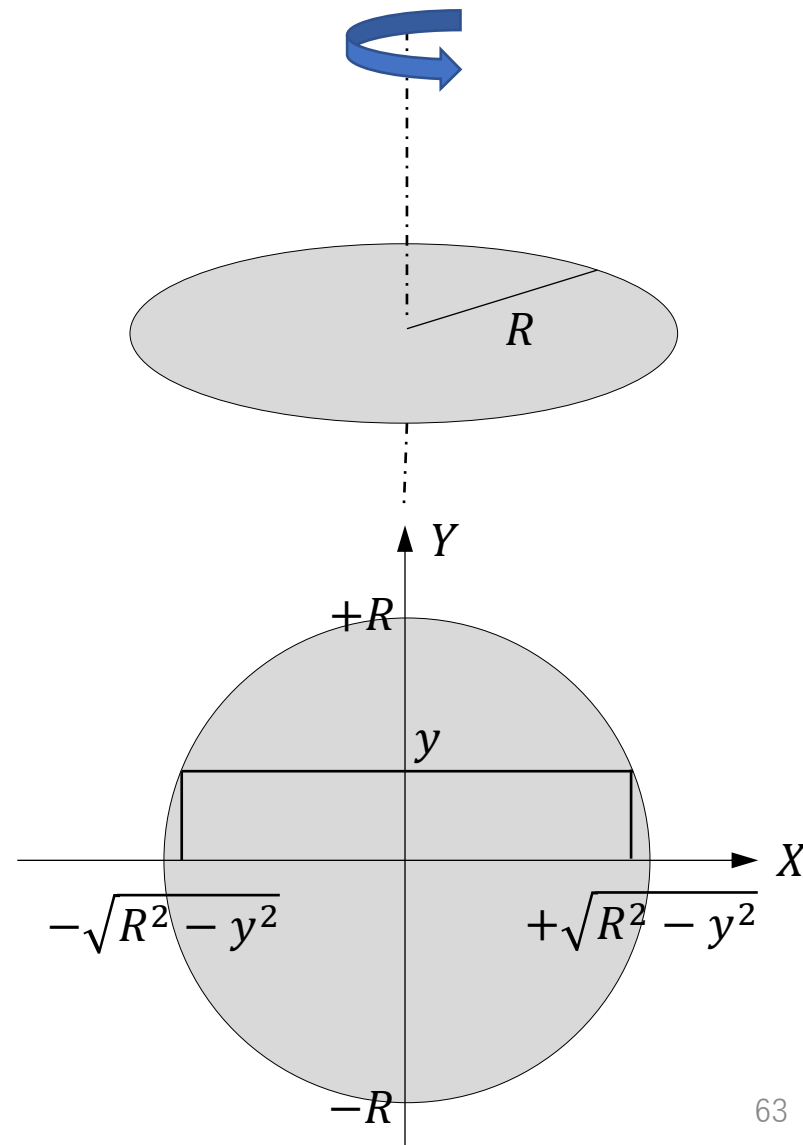
解：

$$I = \int \rho (x^2 + y^2) dx dy dz$$

$$= \frac{m}{\pi R^2} \int (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= \frac{m}{\pi R^2} \int_{-R}^{+R} \int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{+\sqrt{R^2 - y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= \frac{m}{\pi R^2} \int_{-R}^{+R} \left(\frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} + 2y^2 (R^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \right) dy$$



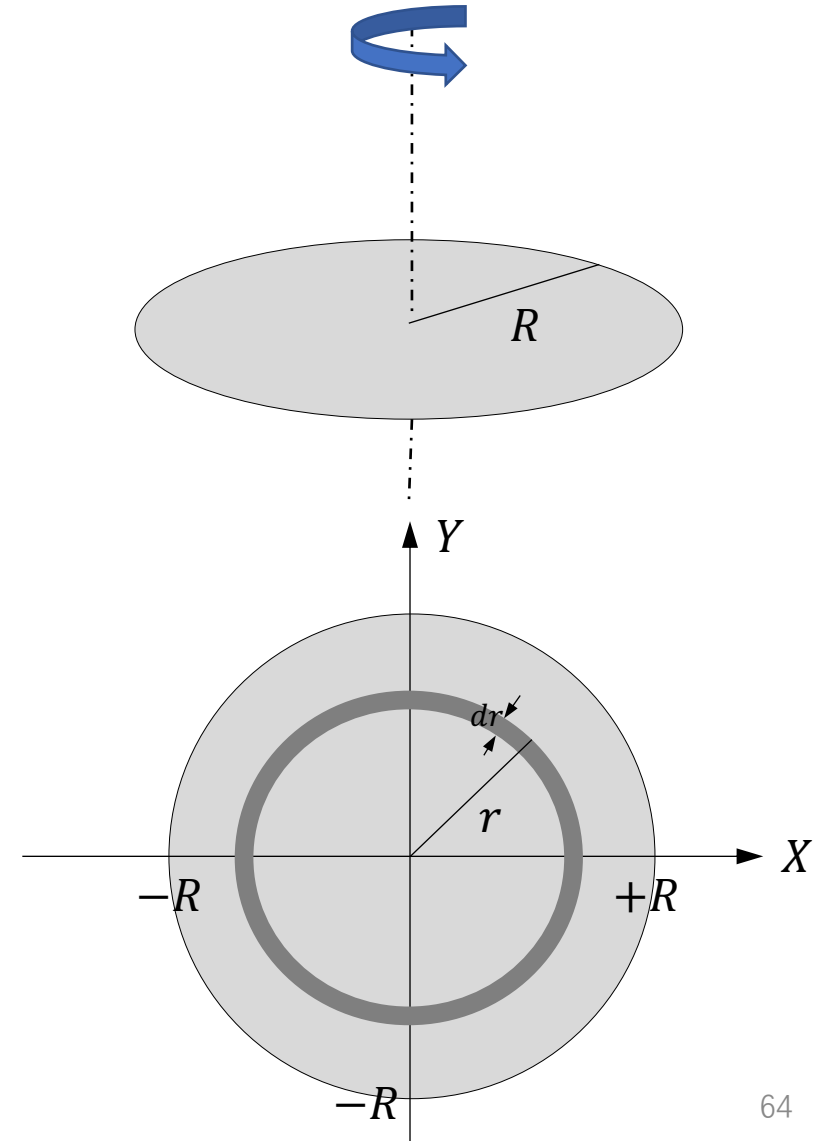
【例子】 计算均匀圆盘关于过圆心且垂直于圆盘的转动惯量。

解： 可以将圆盘视为由一系列环组成，

$$I = \int \Delta m r^2$$

其中， $\Delta m = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r \Delta r$,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r r^2 dr = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{2m}{R^2} \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} m R^2 \end{aligned}$$



【例子】 计算均匀实心球关于过球心的轴的转动惯量。

解： 可以将球视为由一系列圆盘组成，

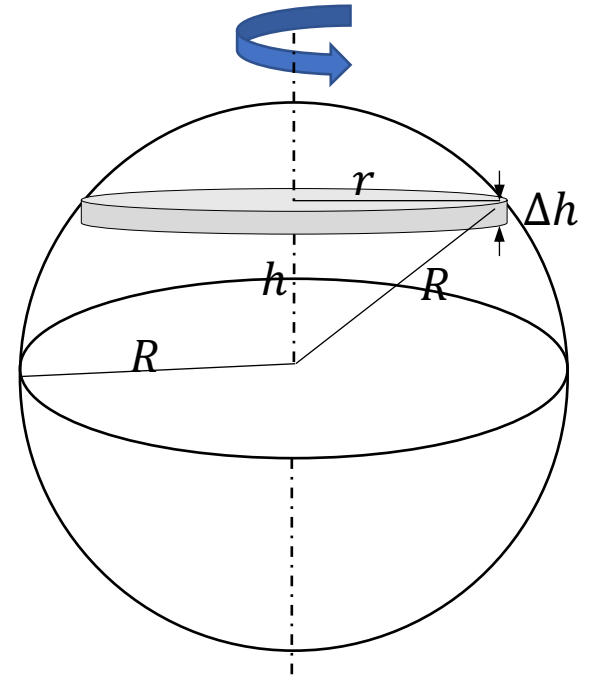
$$I = \int \frac{1}{2} \Delta m r^2$$

其中， $\Delta m = \rho \pi r^2 \Delta h$ ， 密度 $\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ ， 根据勾股定理

$$R^2 - h^2 = r^2,$$

$$I = \int_{-R}^R \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - h^2)^2 dh = \frac{m}{2 \times \frac{4}{3} \pi R^3} \int_{-R}^R (R^2 - h^2)^2 dh$$

$$= \frac{m}{2 \times \frac{4}{3} \pi R^3} \frac{16}{15} R^5 = \frac{2}{5} m R^2$$

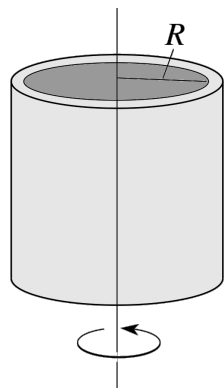


常见形状刚体的转动惯量

圈或者
柱形壳

$$I = MR^2$$

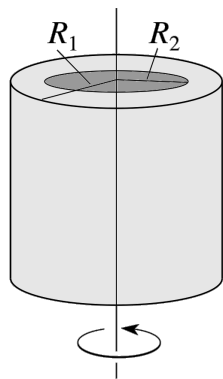
(a)



中空圆柱

$$I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$$

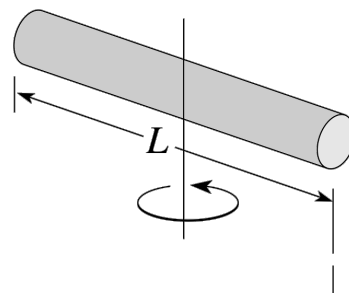
(b)



细长的棒

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

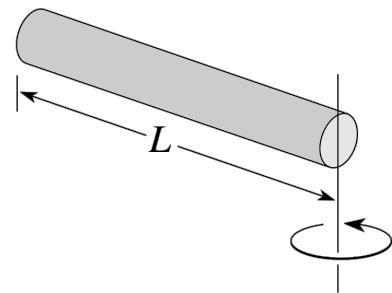
(e)



细长的棒

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

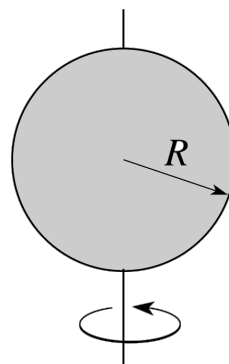
(f)



实心球

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

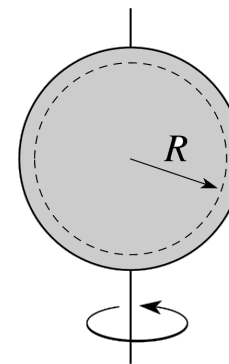
(g)



球壳

$$I = \frac{2}{3} MR^2$$

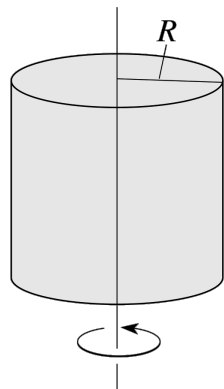
(h)



圆盘、圆柱

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

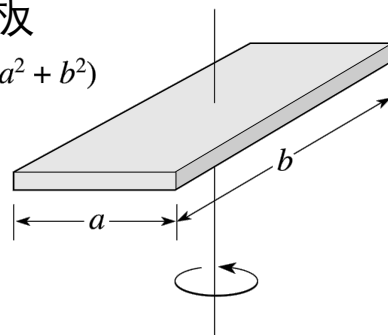
(c)



矩形薄板

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$

(d)



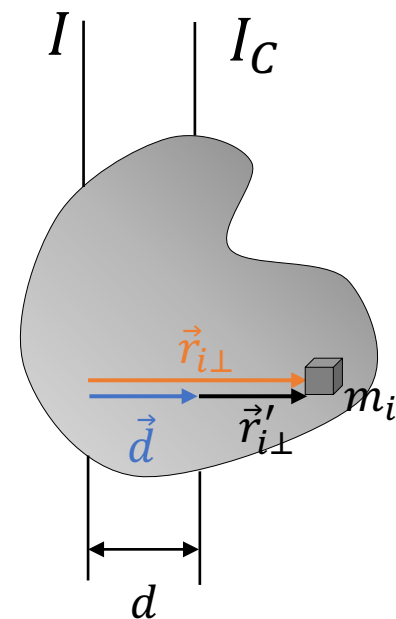
a. 平行轴定理

绕某个轴的转动惯量等于绕平行于该轴且过质心的转轴的转动惯量 I_C 加上 Md^2 ，其中 M 为刚体质量， d 为两轴之间的距离，即

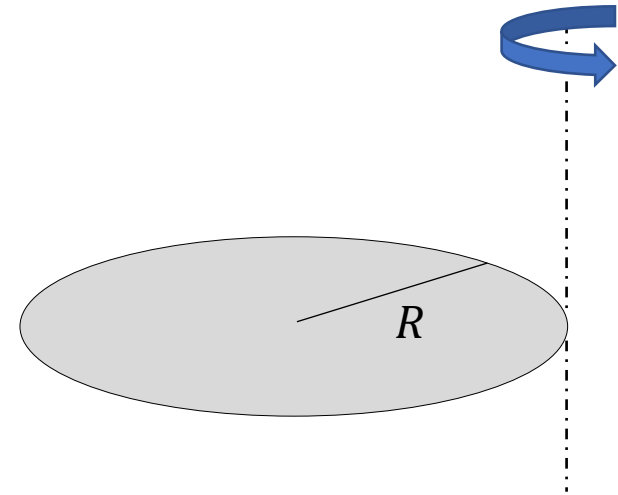
$$I = I_C + Md^2$$

证明：

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = \sum_i m_i (\vec{r}'_{i\perp} + \vec{d})^2 \\ &= \sum_i m_i r_{i\perp}'^2 + \sum_i m_i d^2 + \sum_i m_i 2\vec{r}'_{i\perp} \cdot \vec{d} \\ &= I_C + Md^2 \end{aligned}$$



【例子】 计算均匀圆盘关于过盘边缘一点且垂直于圆盘的转动惯量。



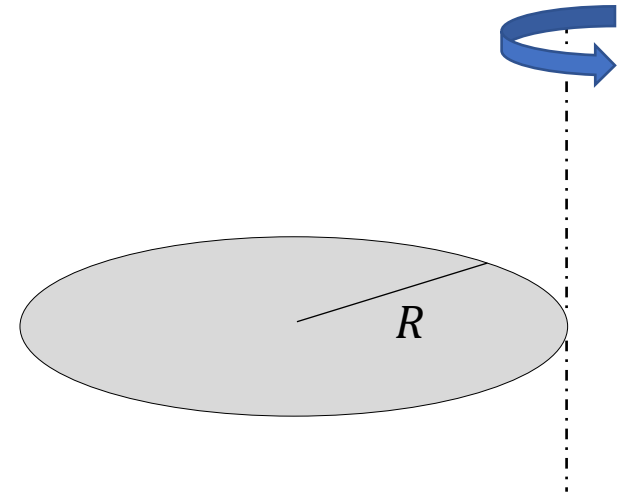
【例子】 计算均匀圆盘关于过盘边缘一点且垂直于圆盘的转动惯量。

解：圆盘关于圆心的转动惯量为，

$$I_C = \frac{1}{2}MR^2$$

利用平行轴定理，

$$I = I_C + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$



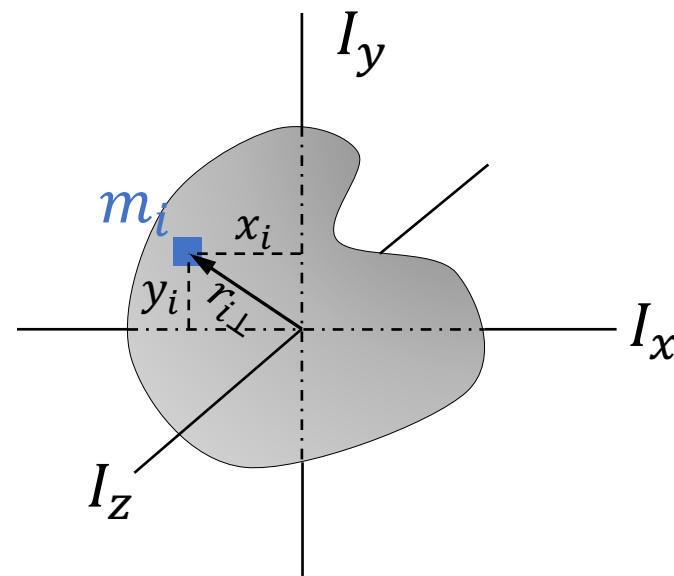
b. 垂直轴定理

对于平面刚体，令 x, y, z 为三个正交的轴，且 z 垂直于平面， x, y 在平面以内。则绕三个轴的转动惯量满足，

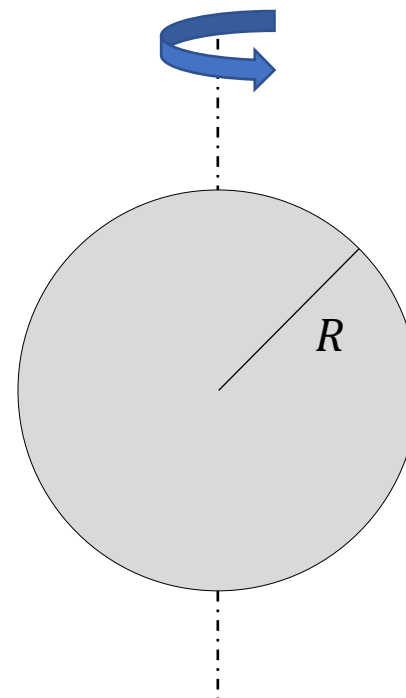
$$I_z = I_x + I_y$$

证明：

$$\begin{aligned} I_z &= \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \\ &= \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = I_y + I_x \end{aligned}$$



【例子】 计算均匀圆盘关于过盘边缘一点且平行于圆盘的转动惯量。



【例子】 计算均匀圆盘关于过盘边缘一点且平行于圆盘的转动惯量。

解：

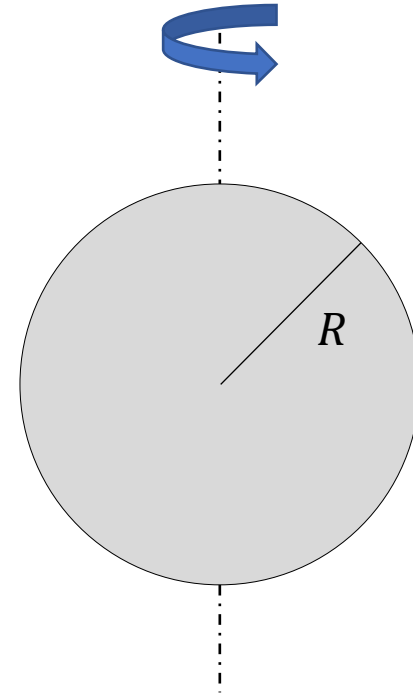
利用垂直轴定理，

$$I_z = I_x + I_y$$

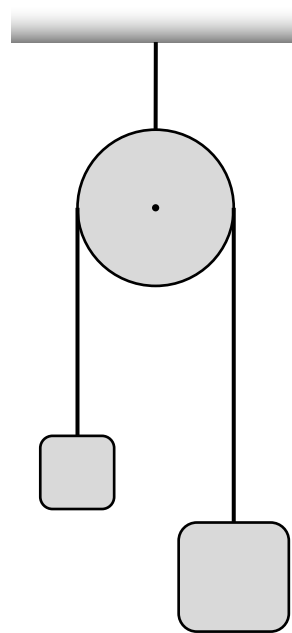
其中， $I_z = \frac{1}{2}MR^2$ ， 由于对称性， $I_x = I_y$

因此，

$$I_x = I_y = \frac{1}{2}I_z = \frac{1}{4}MR^2$$



【例子】 质量为 m_1 、 m_2 的木块如图吊在阿德伍德机两端，滑轮的质量为 m ，可以视为一个半径为 r 的圆盘。已知可以忽略绳的质量且滑轮与绳之间的摩擦力足够大，忽略其他摩擦。求木块的加速度。



【例子】质量为 m_1 、 m_2 的木块如图吊在阿德伍德机两端，滑轮的质量为 m ，可以视为一个半径为 r 的圆盘。已知可以忽略绳的质量且滑轮与绳之间的摩擦力足够大，忽略其他摩擦。求木块的加速度。

求解：首先做受力分析，如图所示。木块在重力与张力的作用下做匀加速运动，滑轮在张力力矩的作用下做定轴转动，转动惯量为 $I = \frac{1}{2}mr^2$ ，建立动力学方程，

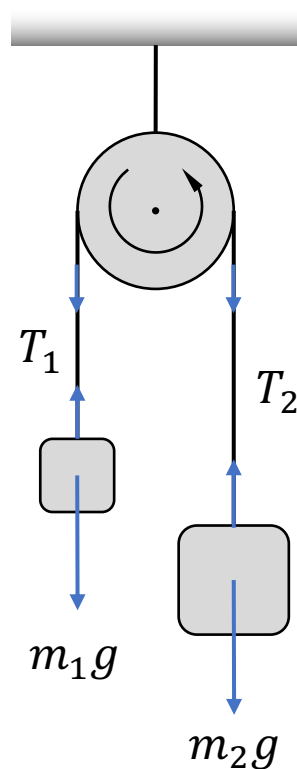
$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1,$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2,$$

$$T_1 r - T_2 r = I \alpha$$

由于绳不可伸长，木块之间的加速度满足约束关系： $a_1 + a_2 = 0$ ，绳在滑轮上不打滑，因此， $\alpha r = a_1$ 。可以解得：

$$a_1 = -a_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + (1/2)m} g$$



c. 转动动能

刚体的动能为,

$$T = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \vec{L}_{\text{int}} \cdot \vec{\omega}$$

其中, 内禀角动量 $\vec{L}_{\text{int}}$ 为,

$$\vec{L}_{\text{int}} = \sum_i m_i r_i'^2 \vec{\omega} - m_i \vec{r}_i' (\vec{r}_i' \cdot \vec{\omega})$$

其中第二项,

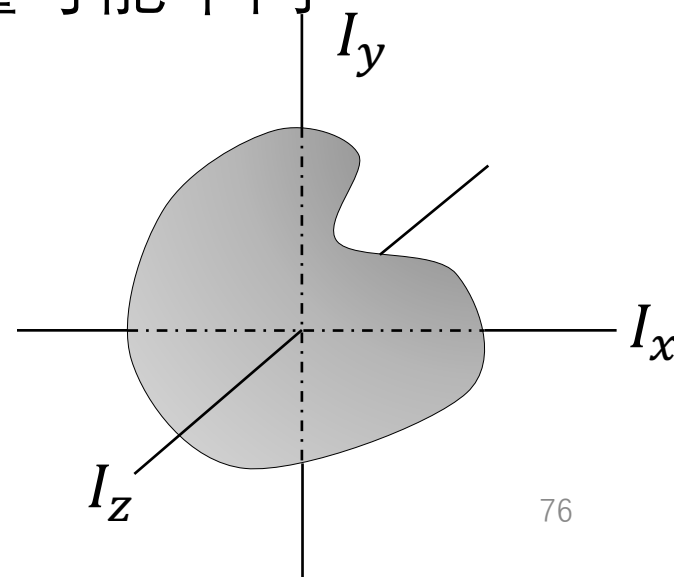
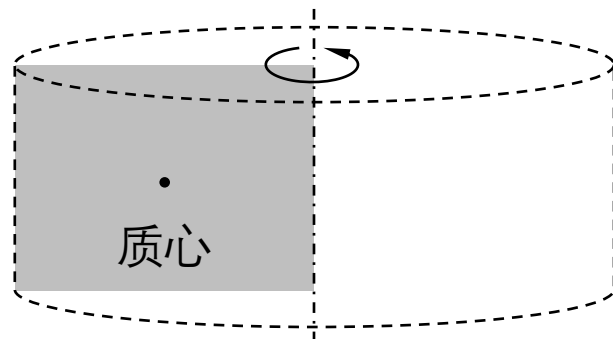
$$\frac{1}{2} \vec{L}_{\text{int}} \cdot \vec{\omega} = \sum_i \frac{1}{2} m_i [r_i'^2 \omega^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i')^2] = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_{i\perp}'^2 \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

其中 I_C 为刚体关于过质心的轴的转动惯量。因此刚体的动能为

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2}_{\text{平动动能}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_C \omega^2}_{\text{转动动能}}$$

第一项为质心运动(平动)的动能，第二项为刚体绕过质心的轴转动时的动能。注意，

- 当刚体沿不同方向的轴转动时，刚体的转动惯量可能不同
- 刚体做定轴转动时，质心的速度不一定为0

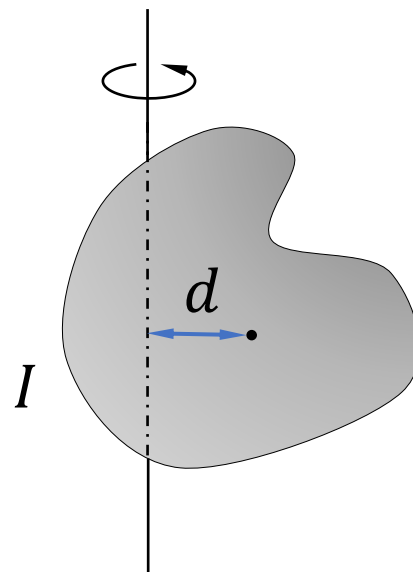


考虑定轴转动的情形。此时质心速度 $v_{\text{cm}} = \omega d$ ，其中 d 为质心距离转轴的距离。总动能，

$$T = \frac{1}{2} M d^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2$$

根据平行轴定理， $I = I_c + M d^2$ ， 因此刚体做定轴转动的总动能为，

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2$$



d. 平面平行运动

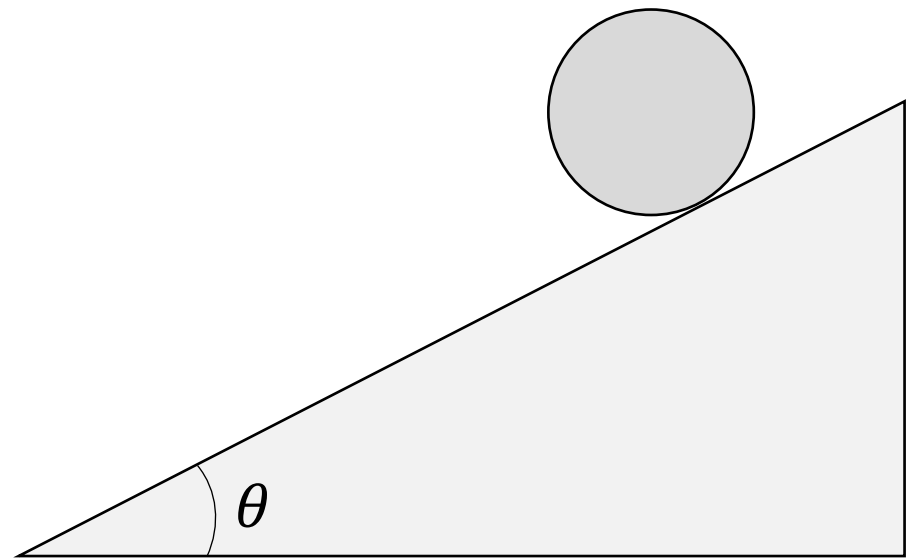
- 平面平行运动有3个自由度，其中两个可以来自刚体的质心运动
- 一个来自刚体绕质心为转轴的转动：在质心参考系，刚体以过质心的转轴做定轴转动

$$M \frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}, \quad I_C \frac{d\omega}{dt} = M_z^{\text{ext}}$$

其中 I_C 为刚体关于过质心的轴的转动惯量。注意，在质心参考系，惯性力对于力矩的贡献为0

- 平面平行运动的总动能， $T = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$

【例子】一个质量为 m ，半径为 R 的实心球从一个斜面上从静止开始运动。已知斜面的倾角为 θ ，球与斜面之间的摩擦系数为 μ 。求球的质心的加速度。



【例子】一个质量为 m ，半径为 R 的实心球从一个斜面上从静止开始运动。已知斜面的倾角为 θ ，球与斜面之间的摩擦系数为 μ 。求球的质心的加速度。

解：小球在斜面上运动时，即可能滚动，又可能滑动。发生滚动时，摩擦力 $f \leq \mu N$ ，发生滑动时，摩擦力 $f = \mu N$ ，因此需要分情况讨论。

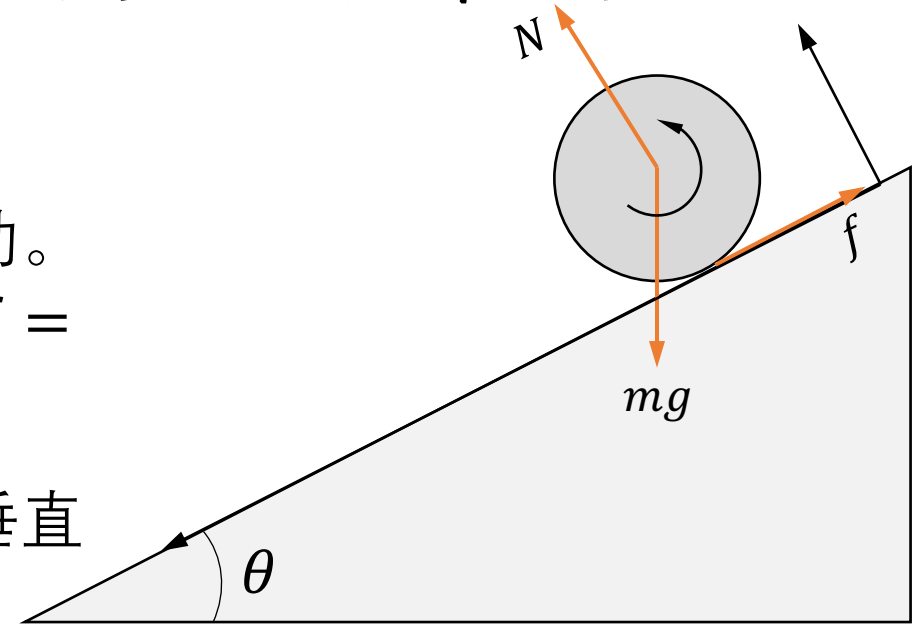
首先是受力分析如图所示。将力沿着平行于斜面和垂直于斜面两个方向分解。刚体动力学方程为，

$$mg \sin \theta - f = ma,$$

$$mg \cos \theta = N,$$

$$fR = I\alpha$$

这里 $I = \frac{2}{5}mR^2$ 为小球的转动惯量。



【例子】一个质量为 m ，半径为 R 的实心球从一个斜面上从静止开始运动。已知斜面的倾角为 θ ，球与斜面之间的摩擦系数为 μ 。求球的质心的加速度。

假如小球发生纯滚动约束条件为，
$$\alpha R = a$$

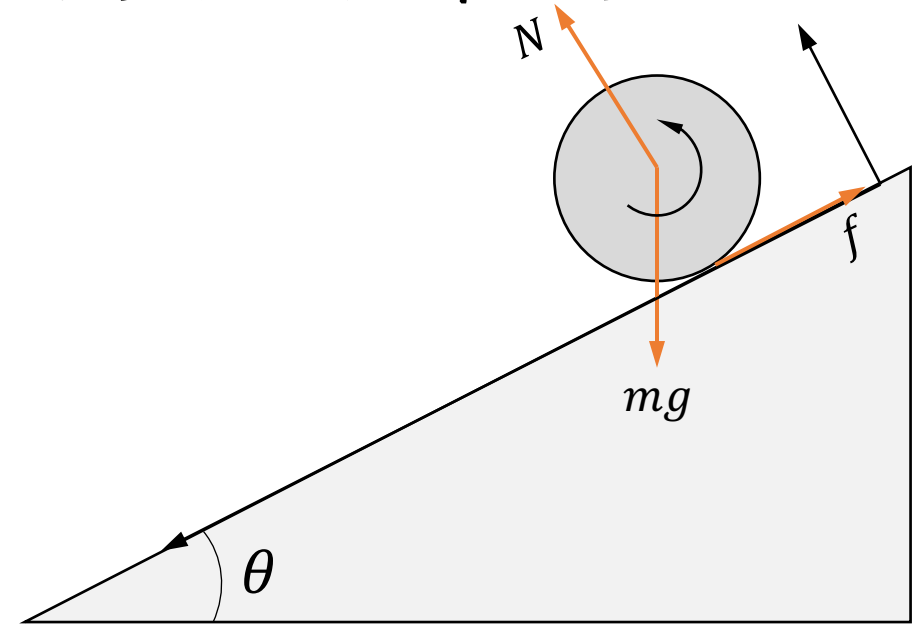
可以得到，

$$a = \frac{mg \sin \theta}{m + \frac{I}{R^2}} = \frac{5}{7} g \sin \theta ,$$

小球做纯滚动的条件是， $f \leq \mu N$ 。从加速度可以求得，

$$N = mg \cos \theta , \quad f = \frac{2}{7} mg \sin \theta$$

从而，纯滚动的条件是， $\mu \geq \frac{2}{7} \tan \theta$



【例子】一个质量为 m ，半径为 R 的实心球从一个斜面上从静止开始运动。已知斜面的倾角为 θ ，球与斜面之间的摩擦系数为 μ 。求球的质心的加速度。

假如如果 $\mu < \frac{2}{7} \tan \theta$ ，则小球在运动过程中即滚动也滑动。摩擦力为，

$$f = \mu N$$

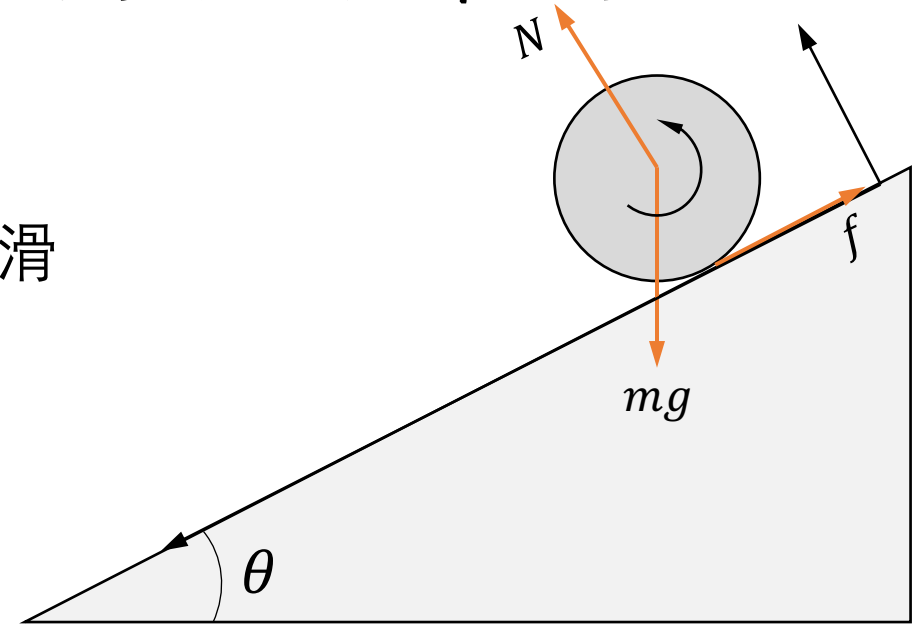
可以得到，

$$a = g(\sin \theta - \mu \cos \theta),$$

可以计算球与斜面接触点的加速度，

$$\alpha R = \frac{5}{2} \mu g \cos \theta$$

滑动滚动的条件是， $a > R\alpha \Rightarrow \mu < \frac{2}{7} \tan \theta$ 。



【例子】一个质量为 m ，半径为 R 的实心球从一个斜面上从静止开始运动。已知斜面的倾角为 θ ，球与斜面之间的摩擦系数为 μ ，初始小球在斜面上距离地面的高度为 h 处，求球到达地面时的质心速度。

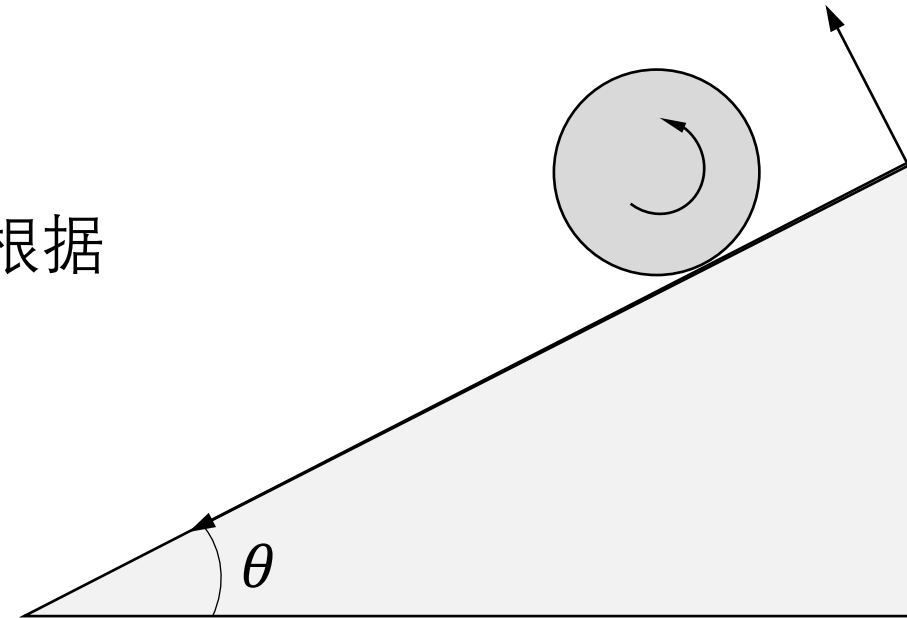
解：

1. 小球发生纯滚动时($\mu \geq \frac{2}{7} \tan \theta$)，摩擦力不做功，根据能量守恒，

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

纯滚动的条件， $v = \omega R$ ，

$$mgh = \frac{7}{10}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$



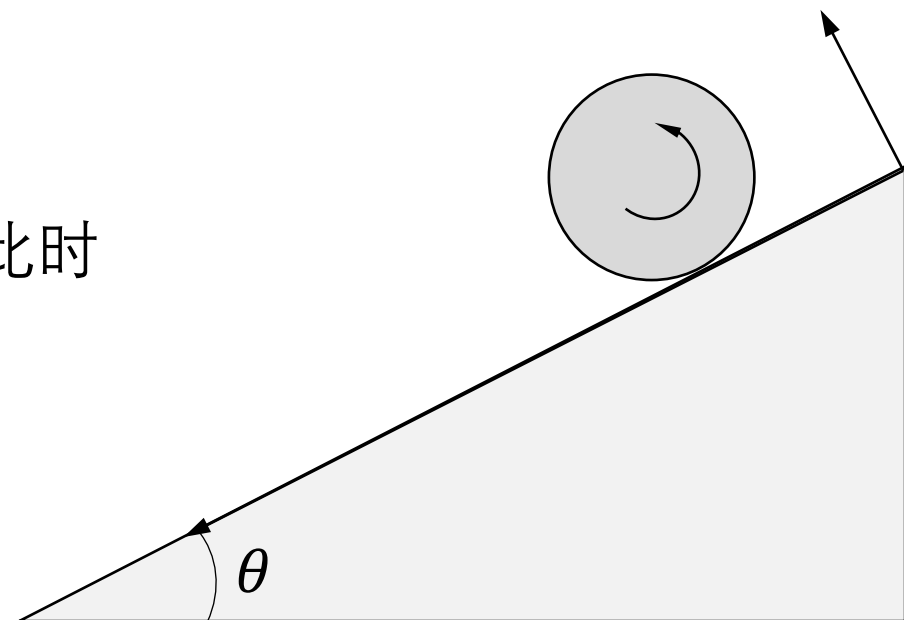
【例子】一个质量为 m ，半径为 R 的实心球从一个斜面上从静止开始运动。已知斜面的倾角为 θ ，球与斜面之间的摩擦系数为 μ ，初始小球在斜面上距离地面的高度为 h 处，求球到达地面时的质心速度。

解：

2. 小球发生滑动滚动时($\mu < \frac{2}{7} \tan \theta$)，摩擦力做功。此时直接计算比较方便。速度，

$$v^2 = \frac{2ah}{\sin \theta} \Rightarrow v = \sqrt{2gh(1 - \mu \cot \theta)}$$

临界情况： $\mu = \frac{2}{7} \tan \theta$ ， $v = \sqrt{2gh \left(1 - \frac{2}{7}\right)} = \sqrt{\frac{10}{7} gh}$ 与纯滚动的结果相同



【例子】一个质量为 m ，半径为 R 的实心球从一个斜面上从静止开始运动。已知斜面的倾角为 θ ，球与斜面之间的摩擦系数为 μ ，初始小球在斜面上距离地面的高度为 h 处，求球到达地面时的质心速度。

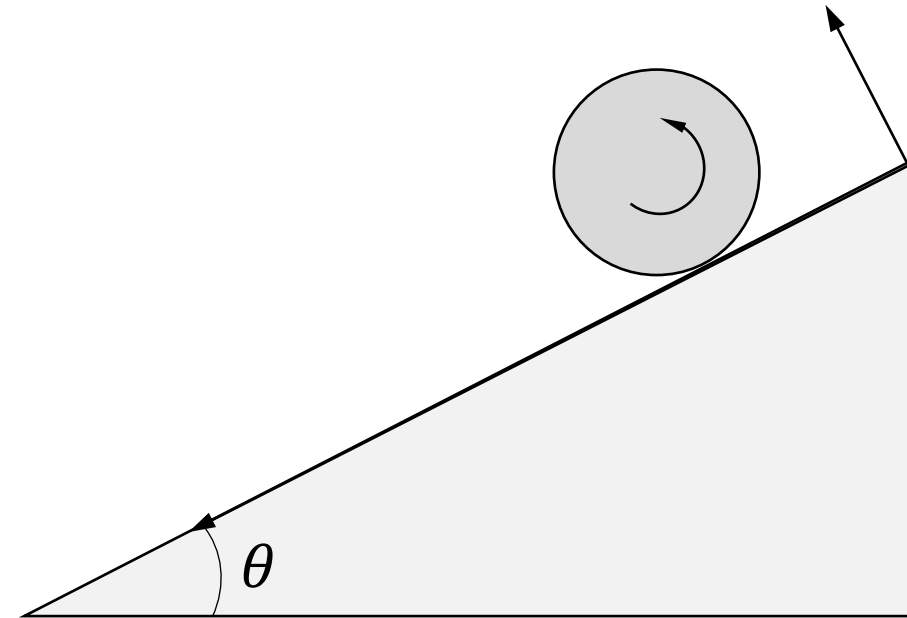
解：

摩擦力所做功：

$$\begin{aligned} W_f &= -\frac{\mu mg \cos \theta h}{\sin \theta} + \mu mg \cos \theta R\varphi \\ &= -\mu mgh \frac{1 - \frac{7}{2}\mu \cot \theta}{\tan \theta - \mu} \end{aligned}$$

其中，

$$\frac{R\varphi}{h/\sin \theta} = \frac{R\alpha}{a} = \frac{5\mu \cos \theta}{2(\sin \theta - \mu \cos \theta)}$$



【例子】弹硬币游戏。一枚硬币质量为 M ，半径为 R 。垂直立在光滑水平面上。 $t = 0$ 时刻，用手指快速地弹硬币的边缘，弹的方向沿水平方向且垂直于硬币平面。已知弹射后硬币中心的水平速度为 v ，求硬币旋转的角速度 ω 。



【例子】弹硬币游戏。一枚硬币质量为 M ，半径为 R 。垂直立在光滑水平面上。 $t = 0$ 时刻，用手指快速地弹硬币的边缘，弹的方向沿水平方向且垂直于硬币平面。已知弹射后硬币中心的水平速度为 v ，求硬币旋转的角速度 ω 。

解：手指给硬币一个冲量 $\Delta I = F\Delta t$ ， F 为冲量所对应的平均力。以质心为参考系，相对于质心的内禀冲量矩为，

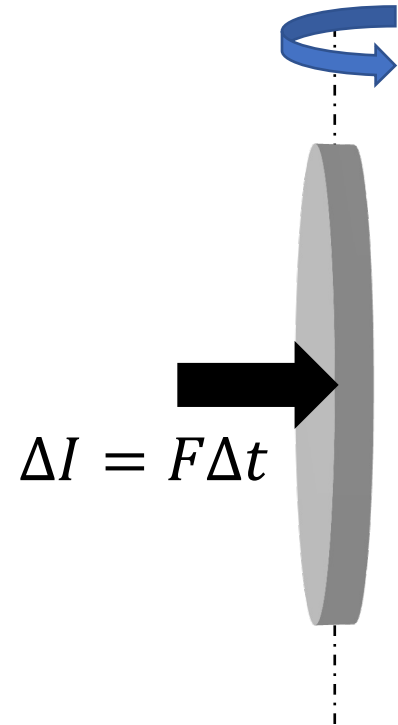
$$\Delta M^{\text{int}} = RF\Delta t = R\Delta I$$

应用质心的动量定理，

$$Mv = \Delta I$$

应用冲量矩-角动量定理，

$$\begin{aligned}\Delta IR &= I\omega = \frac{1}{4}MR^2\omega \\ \Rightarrow \omega &= 4v/R\end{aligned}$$

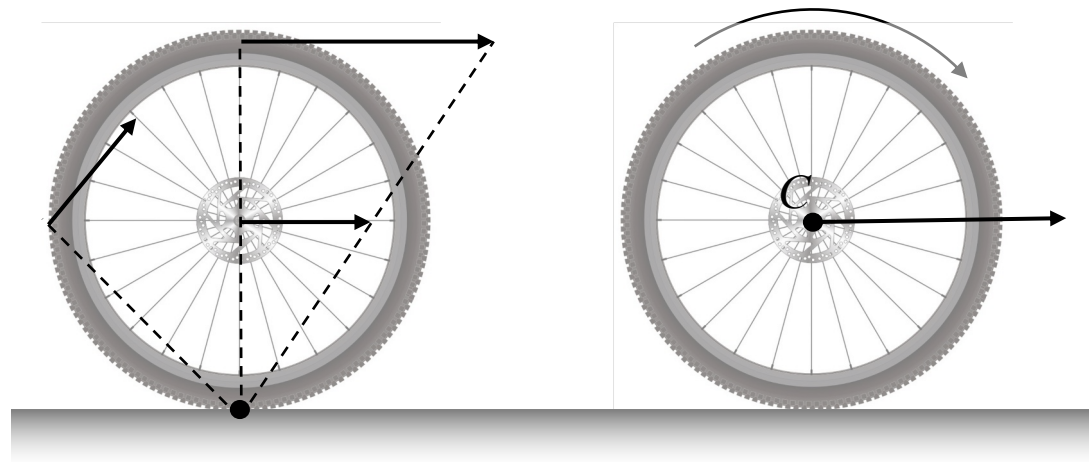


刚体做平面平行运动时，可以在刚体或其延伸上找到一个瞬时静止的轴，根据刚体运动的一般性质，刚体上任意一个质点的运动，

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_O) = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_O)$$

其中， O 为转轴上任意一点，其速度 $\vec{v}_O = 0$ 。因此整个刚体围绕这个瞬时静止的轴（叫做瞬时转动轴）转动。当然这个转动是瞬时的。

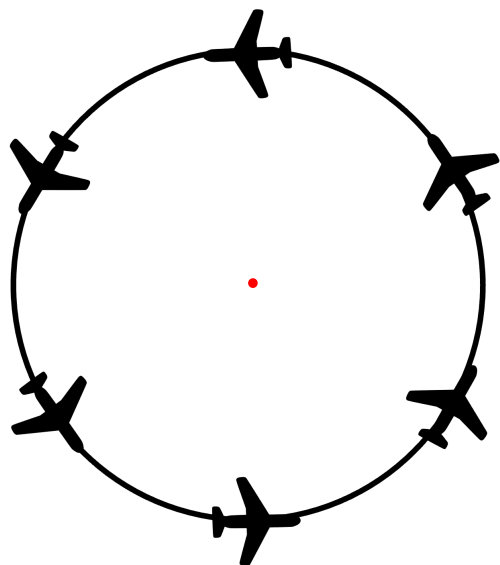
例如车轮在水平面上做纯滚动时，车轮与地面的接触点的瞬时速度为0，因此可以选为瞬时转动轴。



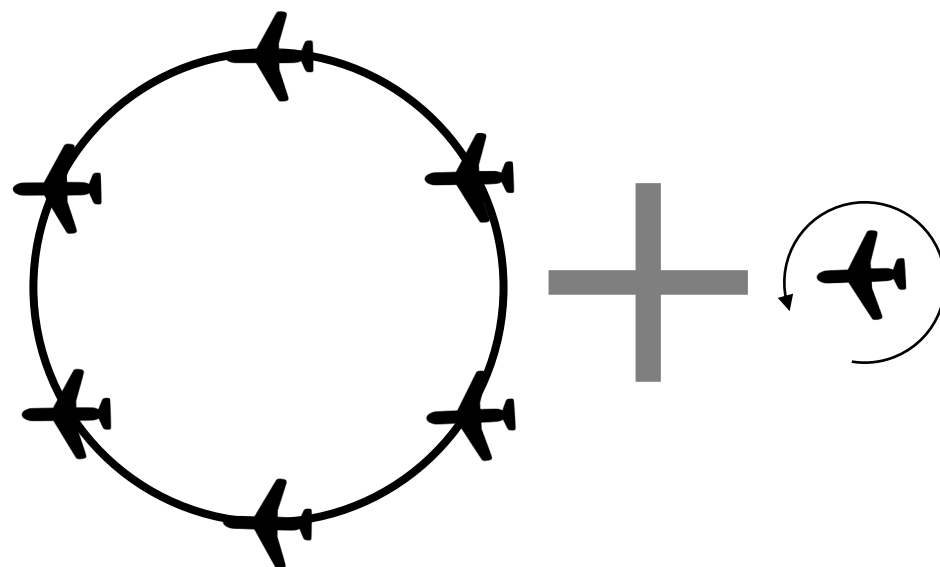
刚体的动能可以写成,

$$T = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

注意, 这个瞬时转动轴不一定在刚体上, 也可能在刚体的延伸上。
例如下面飞机的例子, 瞬时转动轴就在飞机之外。



绕瞬时轴做转动



质心平动+自旋

【例子】一个车轮质量为 m ，半径为 R 。恒定的驱动力 F 作用在车轴上。已知车轮在水平面上从静止开始做纯滚动。求车轴的速度 $v(t)$ 及车轮的角速度 $\omega(t)$ 。

解法一：设车轮受到的地面的摩擦力为 f 。根据刚体的动力学方程，

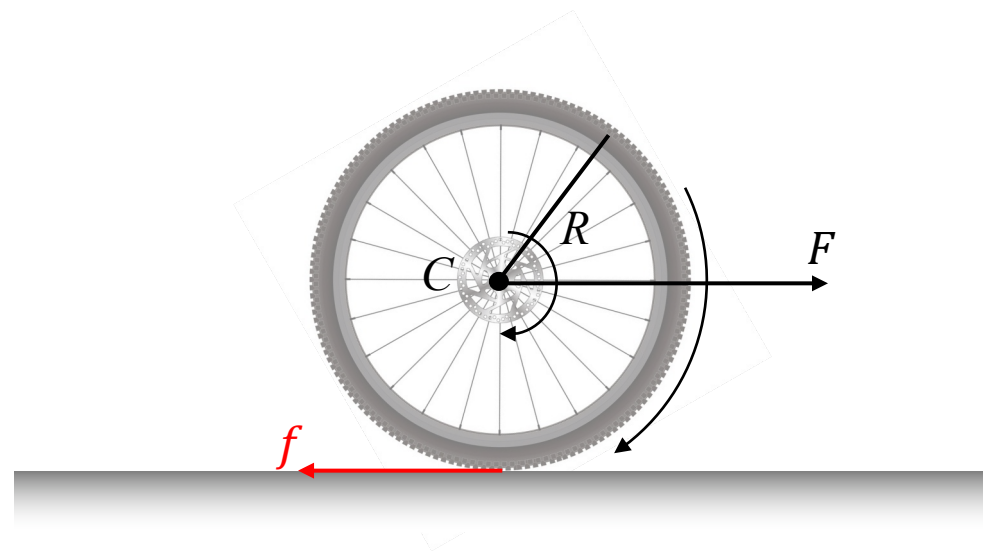
$$F - f = m \frac{dv}{dt}, \quad Rf = mR^2 \frac{d\omega}{dt}$$

车轮做纯滚动的条件是，

$$v = \omega R$$

因此， $F = f + ma = 2ma$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{F}{2m} t$$



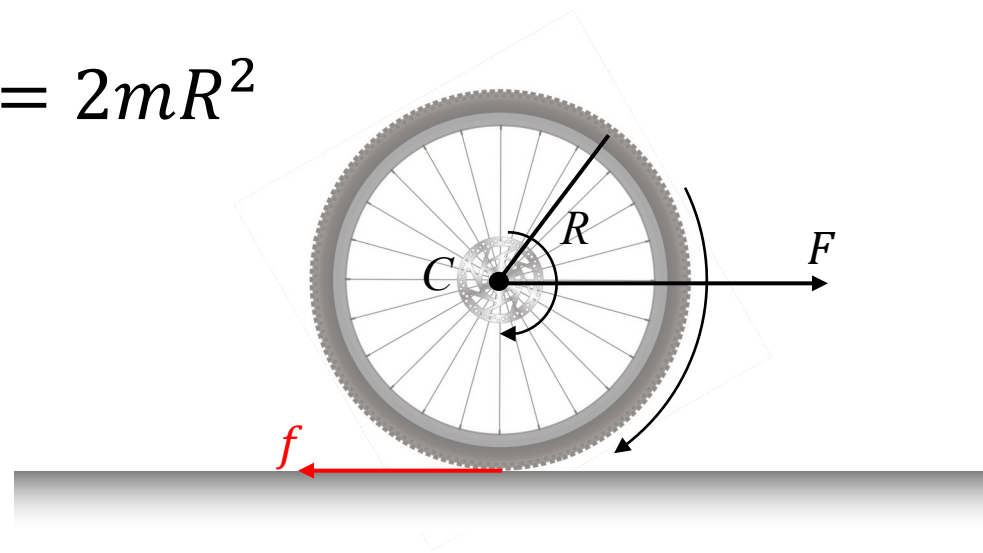
【例子】一个车轮质量为 m ，半径为 R 。恒定的驱动力 F 作用在车轴上。已知车轮在水平面上从静止开始做纯滚动。求车轴的速度 $v(t)$ 及车轮的角速度 $\omega(t)$ 。

解法二：以地面与车轮的接触点为参考点。选择地面参考系，根据刚体的动力学方程，

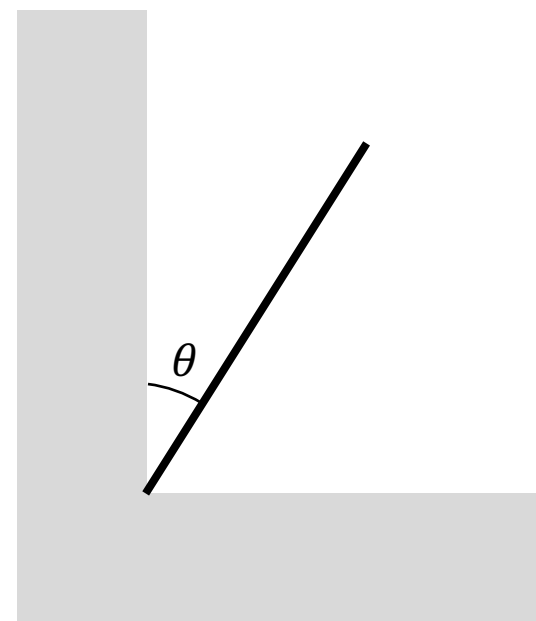
$$RF = I \frac{d\omega}{dt}$$

其中，根据平行轴定理， $I = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$

$$\Rightarrow \omega(t) = \frac{F}{2mR} t, \quad v(t) = \frac{F}{2m} t$$



【例子】一个镜框垂直靠墙放置。初始时刻受到微小扰动向下倾倒。若镜框与地面的摩擦系数充分大，分析镜框什么角度脱离墙角。

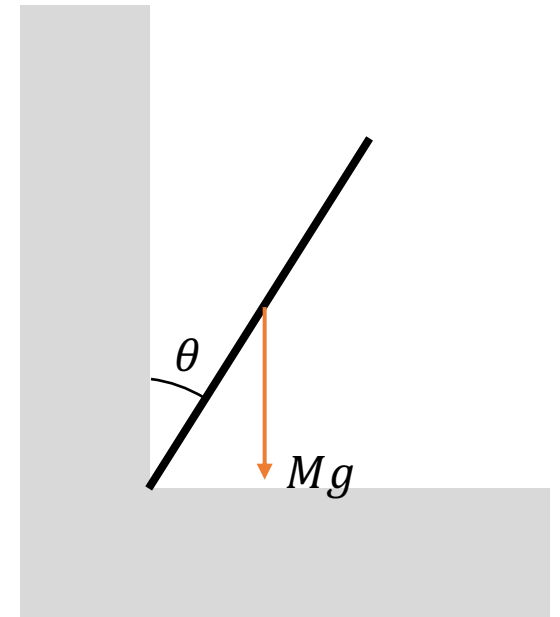


【例子】一个镜框垂直靠墙放置。初始时刻受到微小扰动向下倾倒。若镜框与地面的摩擦系数充分大，分析镜框什么角度脱离墙角。

解：镜框受到墙的支持力和地面的摩擦力。当摩擦力大于临界值时，镜框开始向右滑动脱离墙角。

第一个阶段，镜框底部静止，镜框做定轴转动。相对于转轴的转动惯量为 $I = \frac{1}{3}ML^2$ ，其中， M 、 L 分别为镜框的质量和镜框的高度。根据能量守恒，重力势能转化为定轴转动的动能，

$$Mg \frac{L}{2} (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} I \omega^2$$
$$\Rightarrow \omega = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L} (1 - \cos \theta)}$$



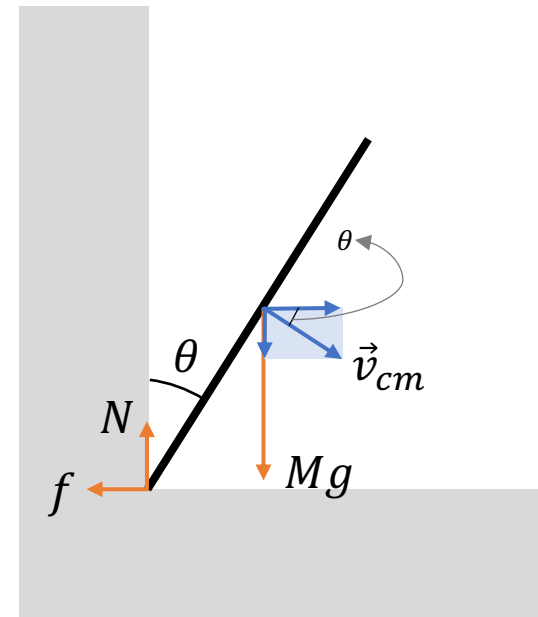
【例子】一个镜框垂直靠墙放置。初始时刻受到微小扰动向下倾倒。若镜框与地面的摩擦系数充分大，分析镜框什么角度脱离墙角。

其次，我们来求临界角度。此时，向左的摩擦力 $f = \mu N$ ， N 为地面对镜框的支持力， μ 为摩擦系数。可以采用任意一个涉及到摩擦力的动力学方程来求解摩擦力与支持力。这里采用质心的运动方程，

$$\begin{aligned} f &= -Ma_x, \\ Mg - N &= Ma_y \end{aligned}$$

其中质心的速度根据定轴转动，

$$\begin{aligned} v_{\text{cm}} &= \frac{L}{2} \omega = \frac{1}{2} \sqrt{3gL(1 - \cos \theta)} \\ \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_{\text{cm}} \cos \theta = (1/2) \sqrt{3gL(1 - \cos \theta)} \cos \theta \\ v_y = v_{\text{cm}} \sin \theta = (1/2) \sqrt{3gL(1 - \cos \theta)} \sin \theta \end{cases} \end{aligned}$$



【例子】一个镜框垂直靠墙放置。初始时刻受到微小扰动向下倾倒。若镜框与地面的摩擦系数充分大，分析镜框什么角度脱离墙角。

$$a_x = \dot{v}_x = (3g/4)(3 \cos \theta - 2) \sin \theta$$

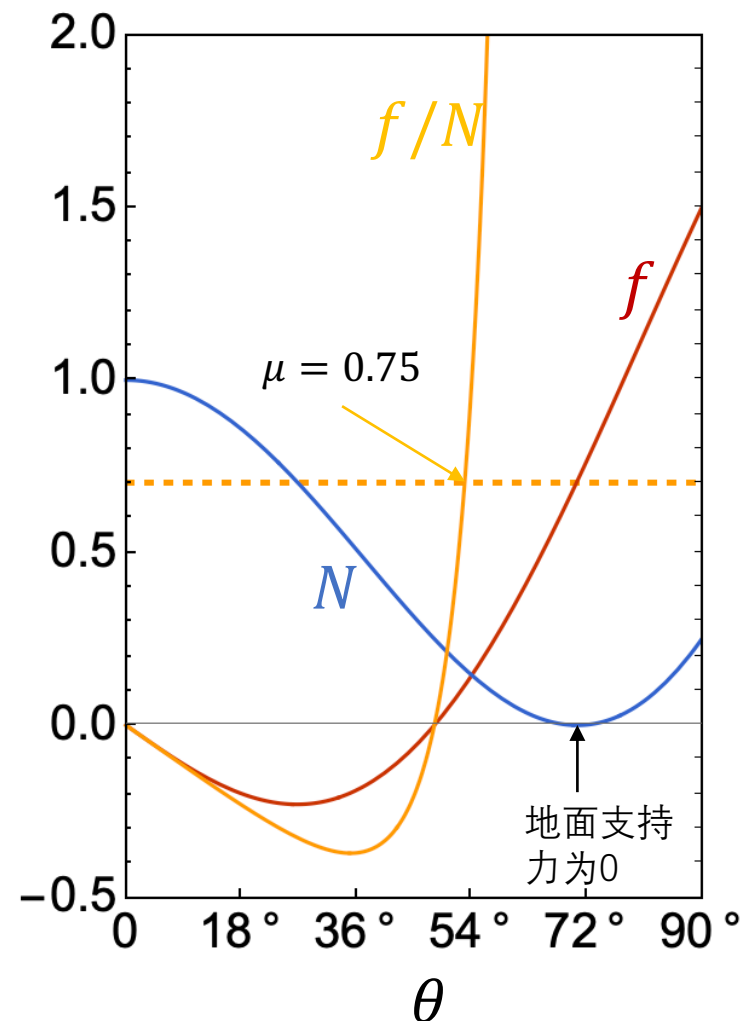
$$a_y = \dot{v}_y = (3g/4)(3 \cos \theta + 1)(1 - \cos \theta)$$

从而可以求出摩擦力与支持力，

$$f = \frac{3Mg}{4}(2 - 3 \cos \theta) \sin \theta,$$

$$N = Mg - \frac{3Mg}{4}(3 \cos \theta + 1)(1 - \cos \theta)$$

摩擦力、支持力与两者比值如图所示。对于每一个可能的摩擦系数，都可以求出相应的临界角度。当地面支持力 $N = 0$ 时，不论多大的摩擦系数均无法提供摩擦力，因此镜框将会在离心力的作用下向右滑动，脱离墙角，此时， $\theta^* = \arccos 1/3 \approx 70.5^\circ$



谢谢!

