

# 第九章：狭义相对论

李 阳

中国科学技术大学近代物理系



力学A · 2025年秋

# §1. 历史背景

- 牛顿力学的巨大成功（本课程1-9章以及99%的物理学…）

- 牛顿力学的哲学挑战

- 马赫原理：远处的大质量分布，影响局域的物理定律
- 牛顿力学允许超距作用：例如，万有引力
- 牛顿认为存在绝对时空：
  - 伽利略相对性原理：绝对惯性参考系不具有可测量效应 —— 不需要绝对惯性系
  - 惯性系与非惯性系的物理规律不同：水桶实验



- 电磁学规律在伽利略变换下**不是**不变的

- 法拉第定律和高斯定律是伽利略不变的
- 库伦定律和安培定律**不是**伽利略不变的

- 例如:  $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}$

- 与强形式的伽利略相对性原理相违背

- 弱形式伽利略相对性原理: 力学定律在惯性参考系中保持相同的形式
- 强形式伽利略相对性原理: 所有物理定律在惯性参考系中保持相同的形式

- 电磁学规律在伽利略变换下不是不变的: 解决方案

- 电动力学即麦克斯韦方程(1871)有错误 —— 正确的电动力学理论应该满足伽利略不变性
- 强形式的伽利略相对性原理不正确 —— 电磁学规律定义在一个特殊参考系(介质), 类似于声波和水波 —— 以太
- 强形式的伽利略相对性原理正确, 但伽利略变换不(完全)正确

- 电磁学规律在伽利略变换下不是不变的： 解决方案
  - 电动力学即麦克斯韦方程(1871)有错误 —— 正确的电动力学理论应该满足伽利略不变性
  - 强形式的伽利略相对性原理不正确 —— 电磁学规律定义在一个特殊参考系(介质), 类似于声波和水波 —— 以太
  - 强形式的伽利略相对性原理正确, 但伽利略变换不(完全)正确
- 1900年以前, 绝大多数物理学家笃信第二种解决方案
  - 实际上, 当时绝大多数人只关心应用, 不关心这些形而上的哲学讨论
  - 牛顿力学和电动力学的巨大成功第一、三种可能性几乎不被考虑
  - 需要测量地球相对于以太的速度来确定地球上的电磁学规律



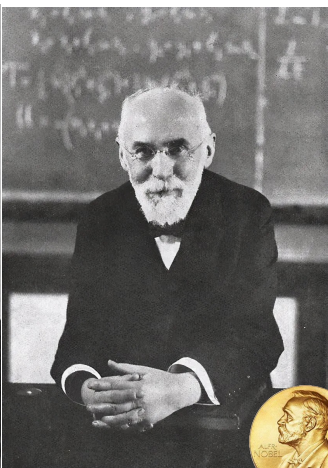
- 电磁学规律在伽利略变换下不是不变的： 解决方案
  - 电动力学即麦克斯韦方程(1871)有错误 —— 正确的电动力学理论应该满足伽利略不变性
  - 强形式的伽利略相对性原理不正确 —— 电磁学规律定义在一个特殊参考系(介质), 类似于声波和水波 —— 以太
  - 强形式的伽利略相对性原理正确, 但伽利略变换不(完全)正确



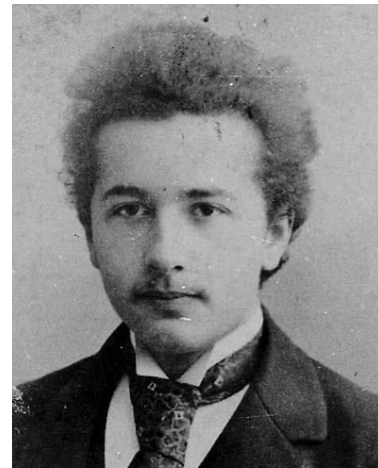
菲涅尔  
(1852)



斯托克斯  
(1850)



洛伦兹  
(1895年)



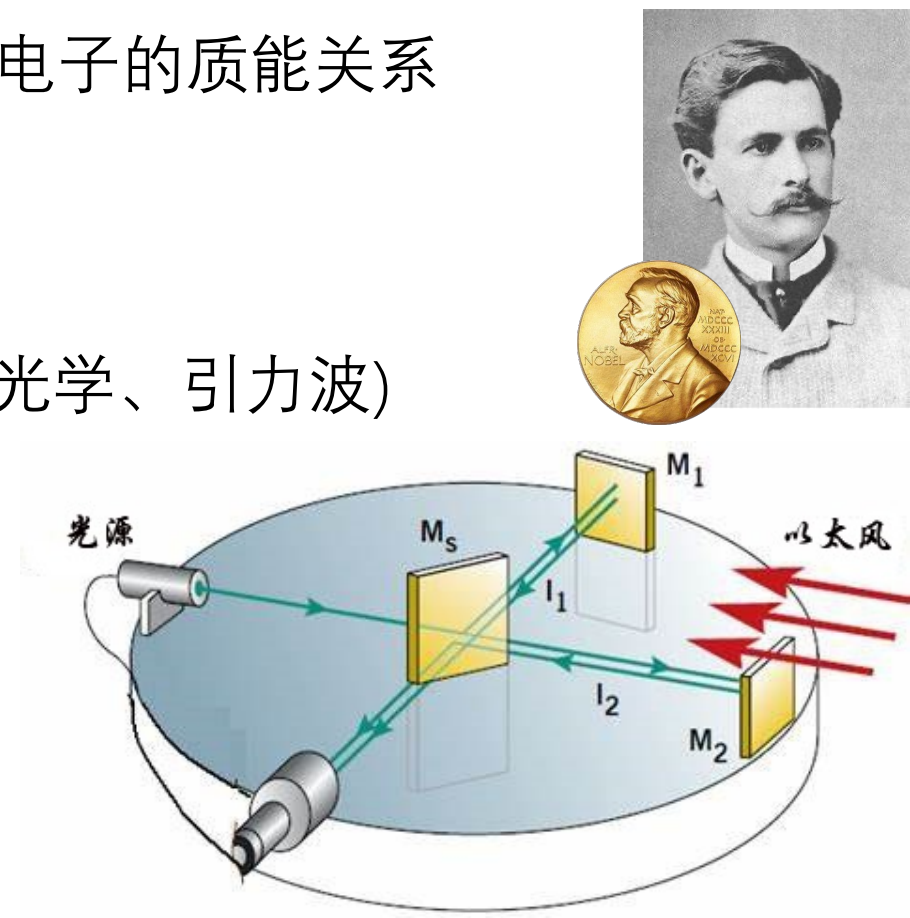
爱因斯坦 (1905年)

- 实验测量:

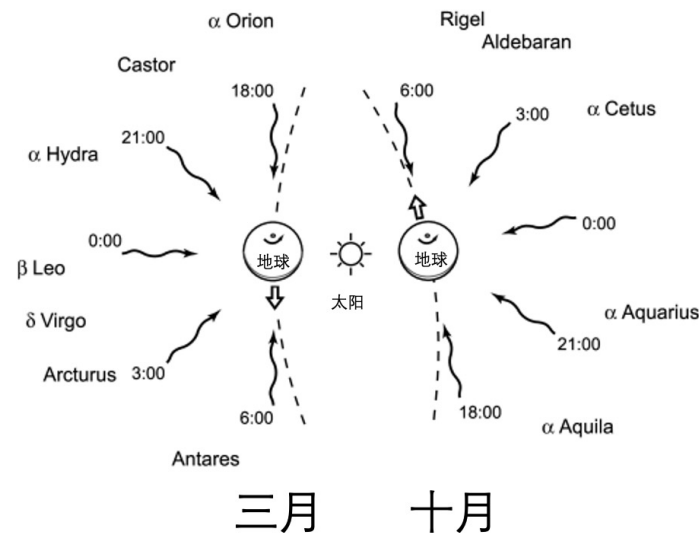
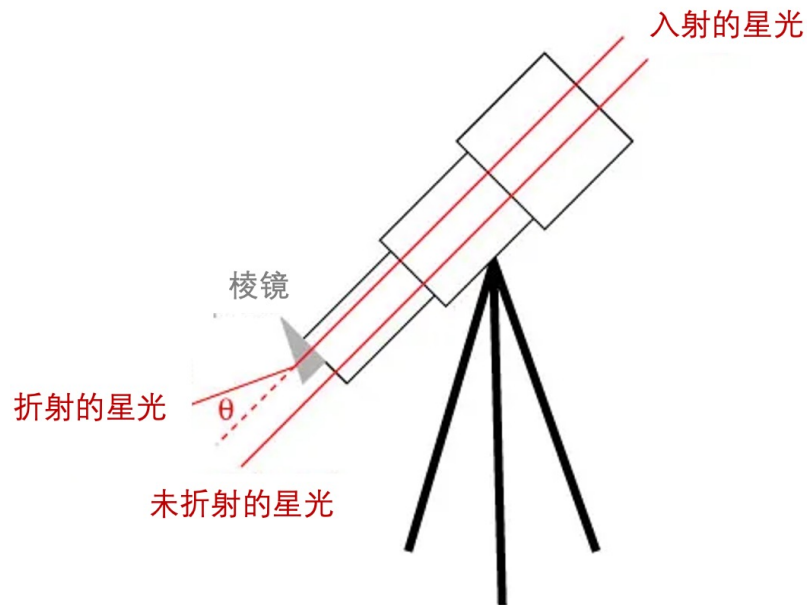
- 阿拉果实验(1810年): 利用光行差测量光在介质中的速度的改变
- 菲索实验(1851年): 测量光在高速运动介质中的速度
- 迈克尔逊-莫雷实验(1887年): 测量地球相对于以太的速度
- 汤姆逊(1897)、卡弗曼(1901)等测量高速运动的电子的质能关系

- 迈克尔逊-莫雷实验:

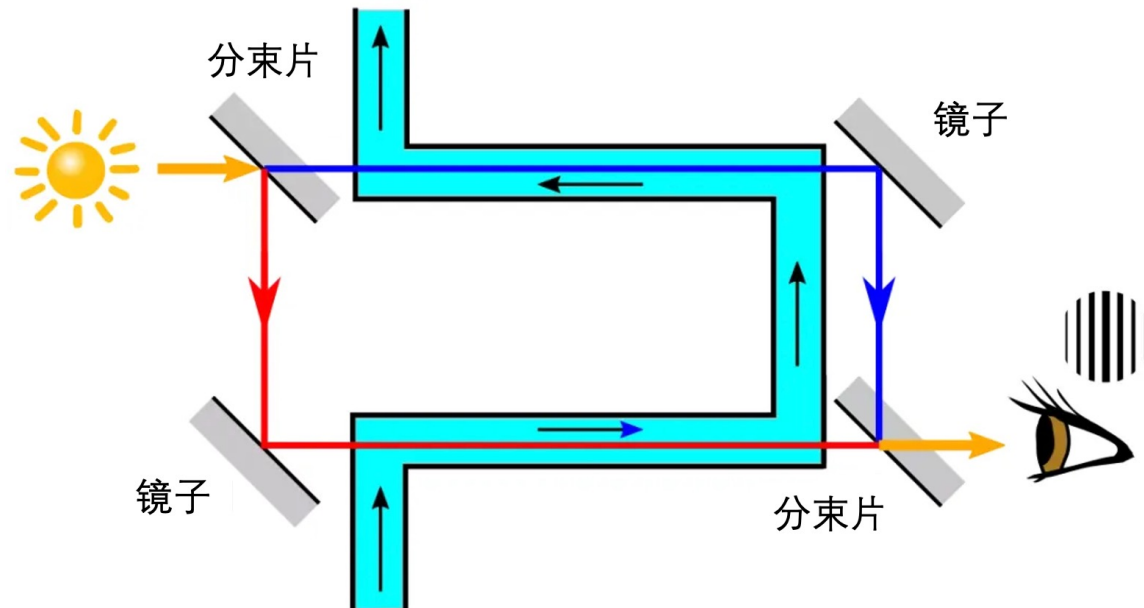
- 测量光速在垂直于平行于以太风方向的差别
- 迈克尔逊干涉仪: 现代高精度实验的基础(量子光学、引力波)
- 迈克尔逊获得了1907年的诺贝尔物理学奖
- 实验结果: 光速不变!



- 阿拉果实验(1810年)：利用光行差测量光在介质中的速度的改变
  - 阿拉果考虑在望远镜中加入一块玻璃棱镜
  - 不同方向的星光进入棱镜时，光的速度为以太的速度与棱镜相对于以太速度的叠加，棱镜中光速的改变会体现在折射角的改变上
- 实验结果：未观察到任何方向上光速的不同
  - 解释：以太被移动的介质所部分拖拽，速度为： $v_{drag} = (1 - n^{-2})V$

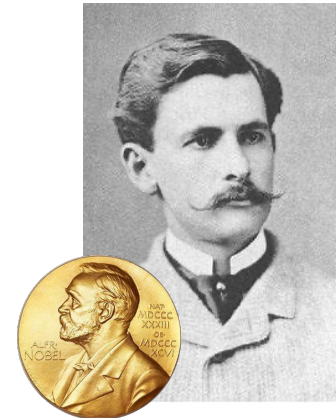
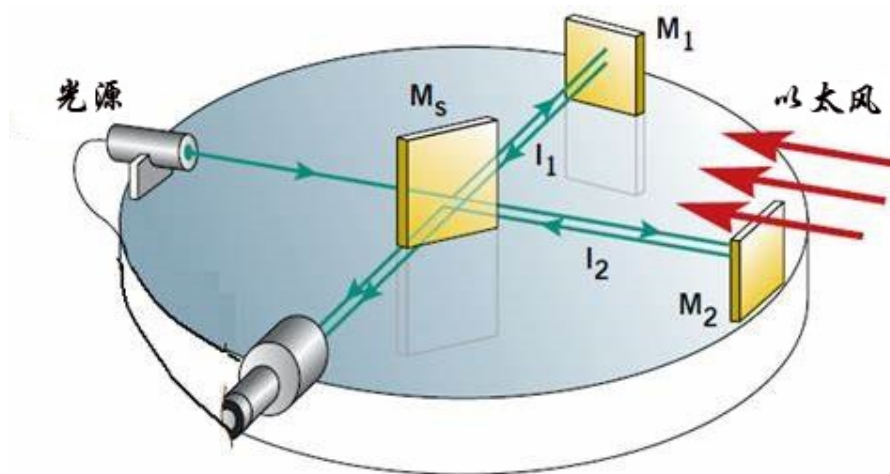


- 菲索实验(1851年): 测量光在高速运动介质中的速度
  - 根据菲涅尔的以太曳引理论, 以太会被高速运动的介质所拖拽
  - 在干涉光路中引入相反方向运动的介质, 会引起光程差, 产生干涉
  - 干涉条纹的移动与以太拖拽速度有关
- 实验结果: 与菲涅尔的以太曳引理论的预言一致





- 迈克尔逊-莫雷实验(1887年): 测量地球相对于以太的速度
  - 迈克尔逊-莫雷大大提高了菲索干涉仪的精度, 并确认了菲索的结果
  - 测量了光速在垂直于平行于以太风方向的差别
- 实验结果: 光速不变!
  - 迈克尔逊干涉仪: 现代高精度实验的基础 (量子光学、引力波), 迈克尔逊因改进干涉仪获得了1907年的诺贝尔物理学奖



# LIGO——一台巨型干涉仪

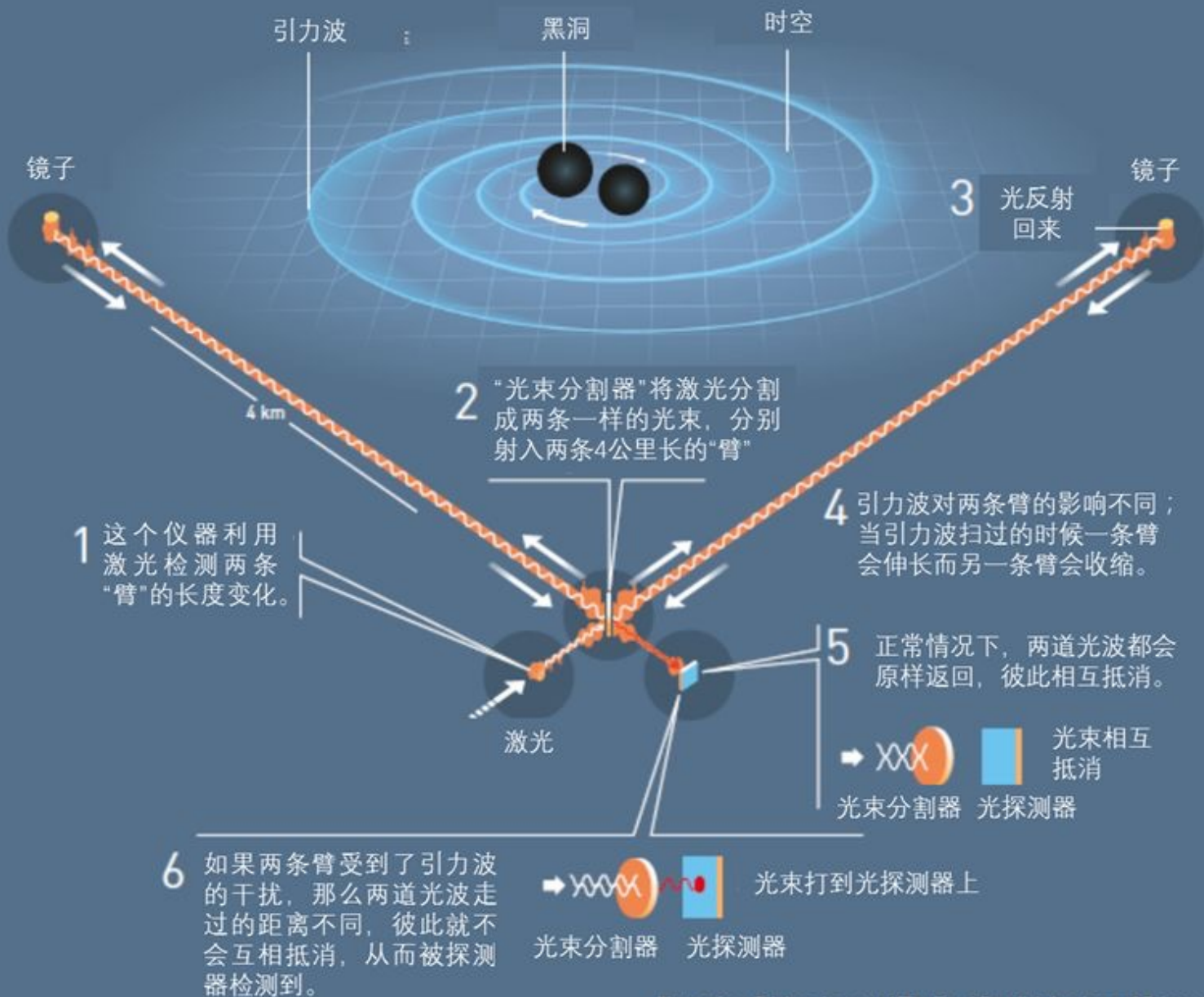
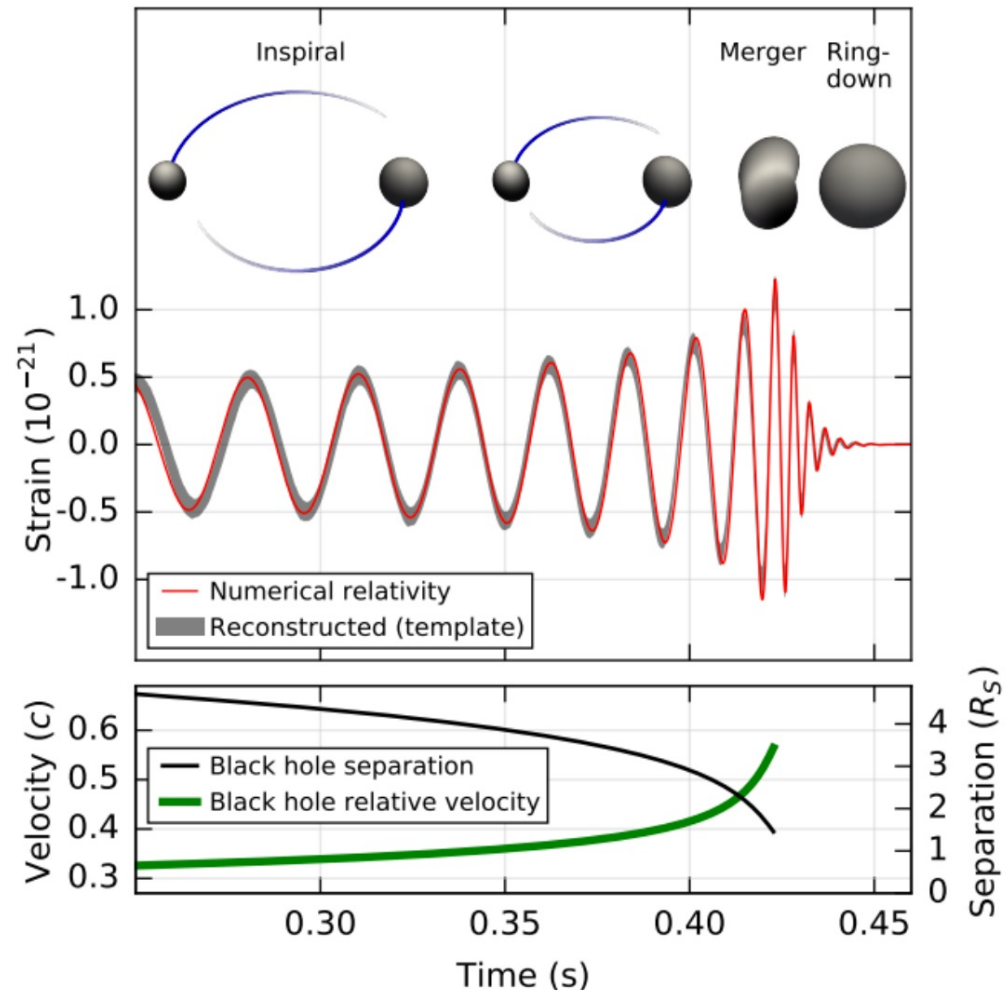


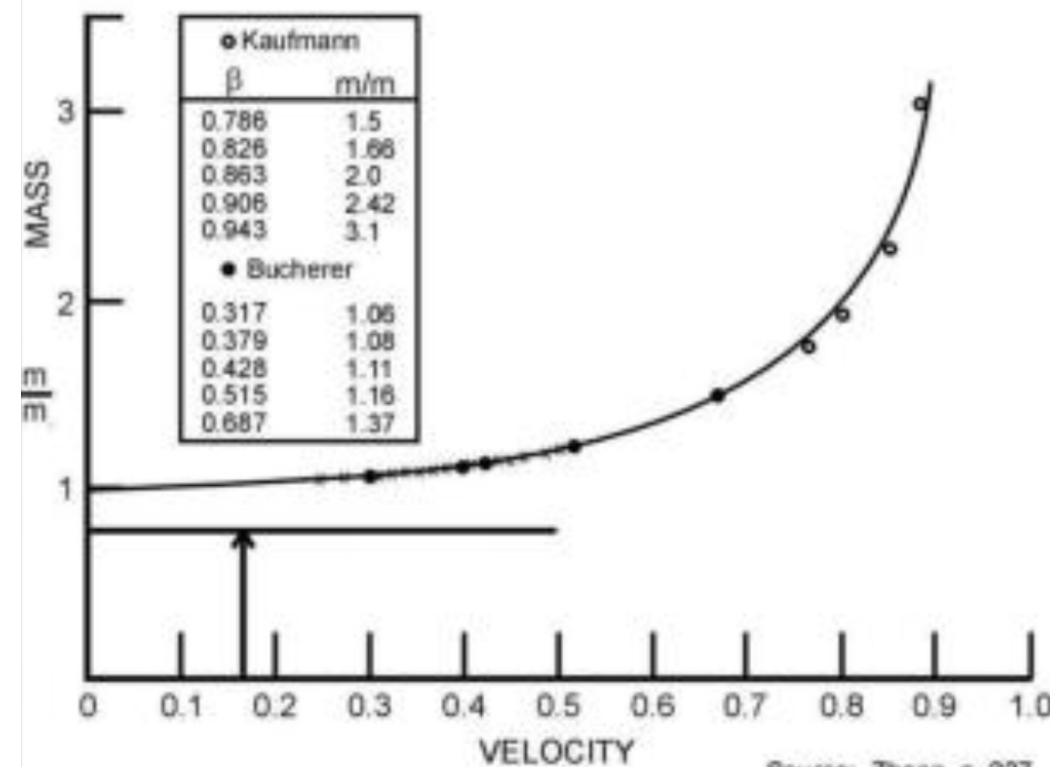
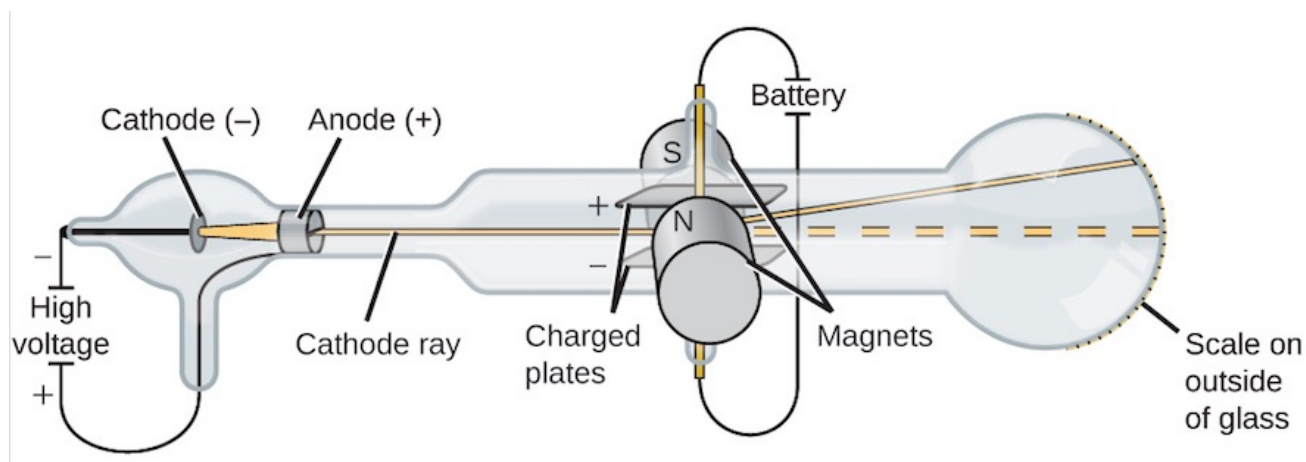
Illustration: ©Johan Jarnestad/The Royal Swedish Academy of Sciences



## 2017 NOBEL PRIZE IN PHYSICS



- 汤姆逊(1897)、卡弗曼(1901)等测量高速运动的电子质量随着速度改变而改变

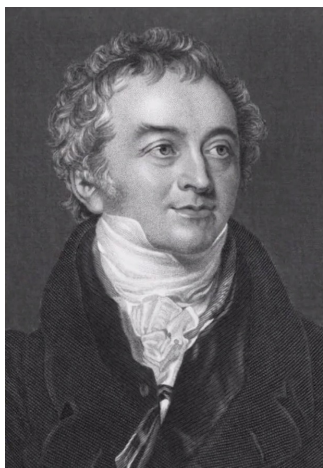


Source: Zhang, p. 227



- 电磁学规律在伽利略变换下不是不变的：解决方案
  - 电动力学即麦克斯韦方程(1871)有错误 —— 正确的电动力学理论应该满足伽利略不变性
  - 强形式的伽利略相对性原理不正确 —— 电磁学规律定义在一个特殊参考系(介质)，类似于声波和水波 —— 以太
  - 强形式的伽利略相对性原理正确，但伽利略变换不(完全)正确

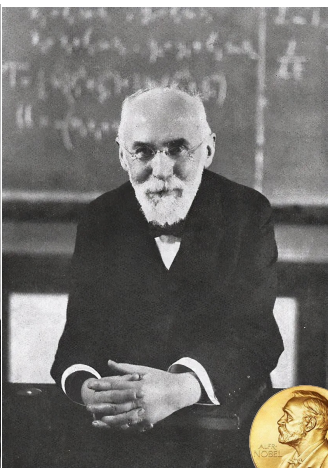
洛伦兹变换



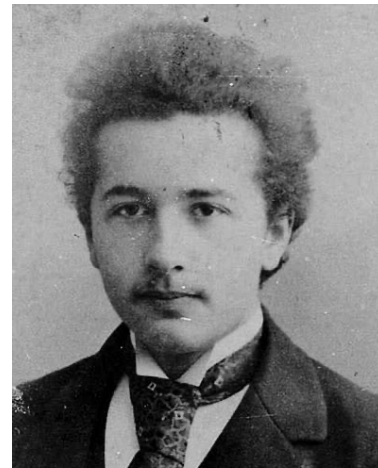
菲涅尔  
(1852)



斯托克斯  
(1850)



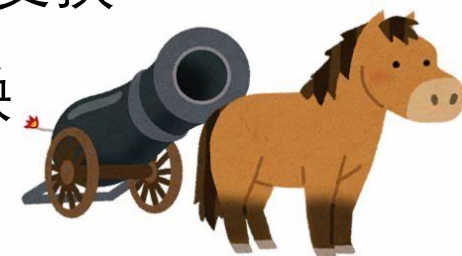
洛伦兹  
(1895年)



爱因斯坦 (1905年)

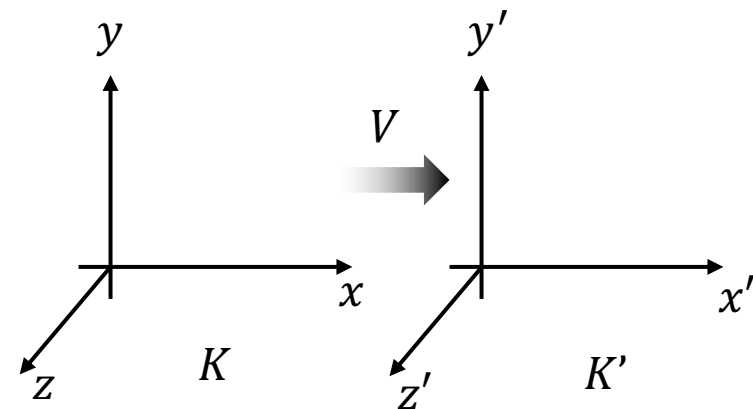
注记：

- 从数学的角度看，满足时空平移不变、以及参考系变换不变的时空对称性并非伽利略变换一种 —— 一共有11种，包括伽利略变换以及洛伦兹变换
- 如果进一步要求变换是线性的，则一共有两种，分别是伽利略变换和洛伦兹变换
- 爱因斯坦最初的想法是解决牛顿力学的哲学困难，狭义相对论只是其中的第一步
- 继1905年提出狭义相对论以后，爱因斯坦继续寻找相对论性的引力理论，以消除所有参考系——包括惯性系——的特殊性。最终在1915年得到了广义相对论
- 本章主要讨论狭义相对论，即要求所有物理定律在惯性参考系中保持相同的形式(强形式的伽利略相对性原理)，时空对称变换为洛伦兹变换





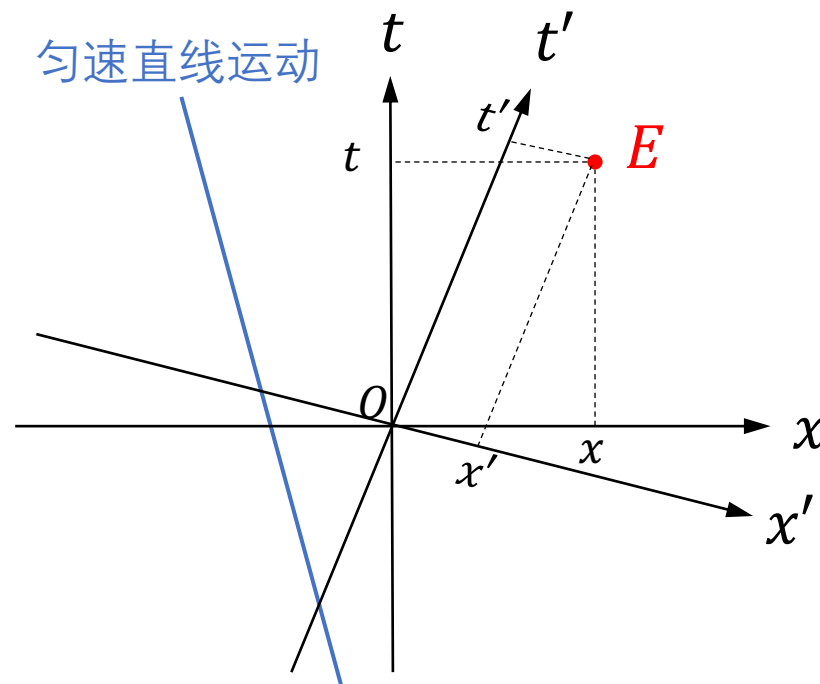
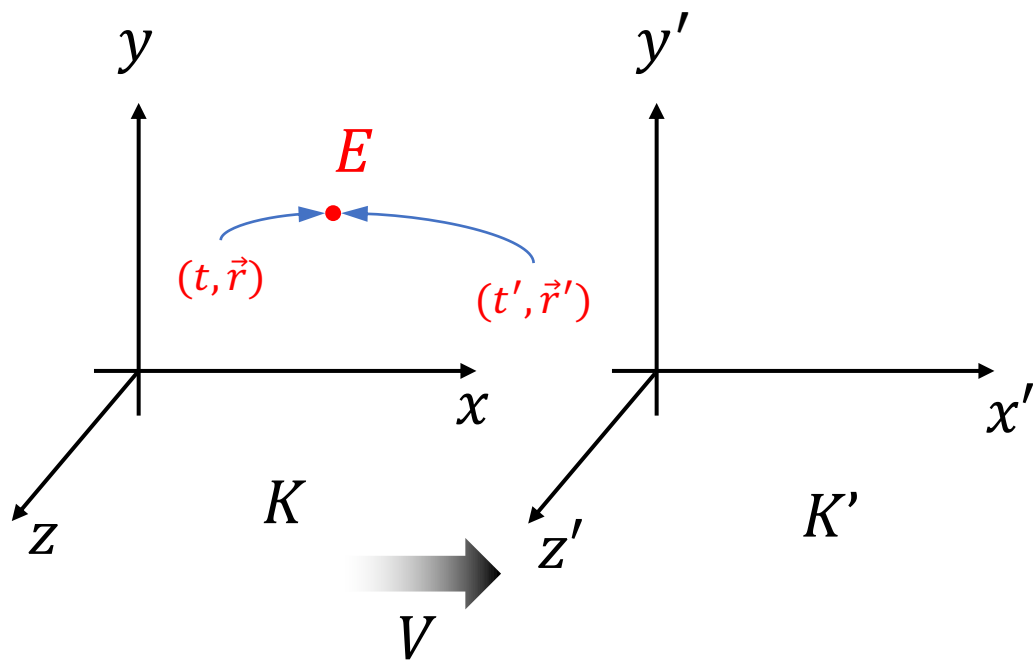
## §2. 洛伦兹变换



- 爱因斯坦狭义相对论的基本假设
  - 相对性原理：物理定律在惯性参考系中保持相同的形式
  - 光速不变：光在任何惯性参考系的速度都是相同的
- 伽利略相对性原理采取了加强的形式，即所有物理定律，包括力学和电磁学在惯性参考系中保持相同的形式
- 光速不变与伽利略变换相矛盾，因此惯性系之间的时空变换需要新的形式
- 这一新的变换叫做洛伦兹变换，所有物理学规律需要在洛伦兹变换下保持相同的形式

## 洛伦兹变换的推导：

- 洛伦兹变换仍需要保持**惯性定律**成立，即在洛伦兹变换下，做匀速直线运动的质点仍然做匀速直线运动；即洛伦兹变换将时空图中的直线变换为直线
- 根据几何学的知识，这样的变换必然是线性的

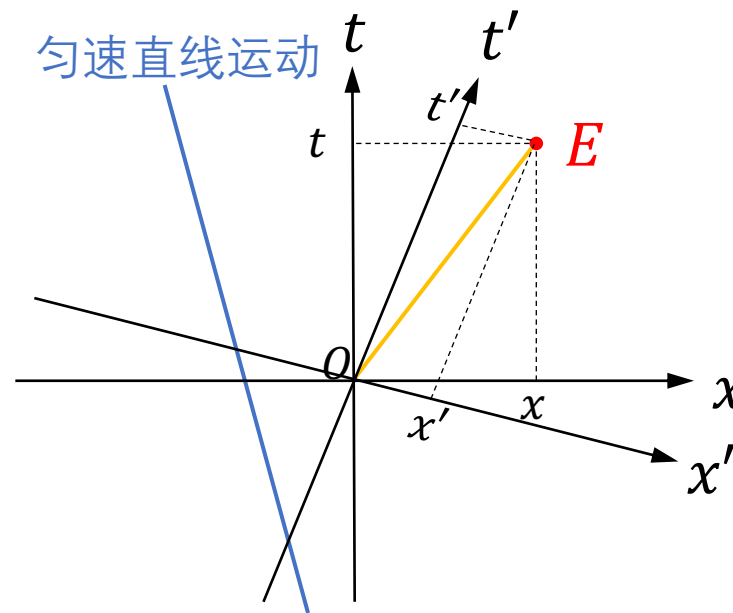
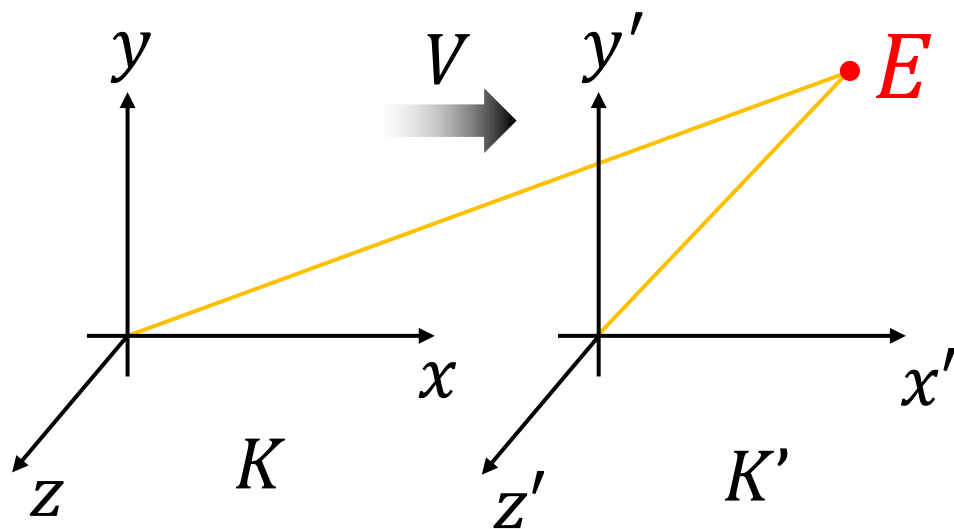


- 下面考虑光速不变的约束：设有两个惯性坐标系 $K$ 、 $K'$ ，在 $t = t' = 0$ 时刻，两个坐标系原点重合，这一点可以通过时间、空间的平移做到。 $K'$ 相对于 $K$ 以 $V$ 的速度沿运动。设在 $t = t' = 0$ 时刻从坐标原点发出一束光信号。由于光速不变，在两个参考系中，光都是以原点为球心的球面，因此，

$$r - ct = r' - ct' = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$$

其中， $c$ 是个常数，为真空中的光速。

- 因此，为了保持光速不变，洛伦兹变换需要保持 $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ 不变



- 设 $K'$ 相对于 $K$ 沿 $x$ 方向匀速运动，速度为 $V$ ，根据运动独立性， $y$ 、 $z$ 方向的坐标不受影响，因此 $y = y', z = z'$

- 由于洛伦兹变换的线性性，可以设坐标变换为，

$$t' = At + Bx, \quad x' = Ct + Dx$$

根据 $x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2$ ,

$$\Rightarrow t^2(-A^2c^2 + c^2 + C^2) + 2tx(CD - ABc^2) + x^2(-B^2c^2 + D^2 - 1) = 0$$

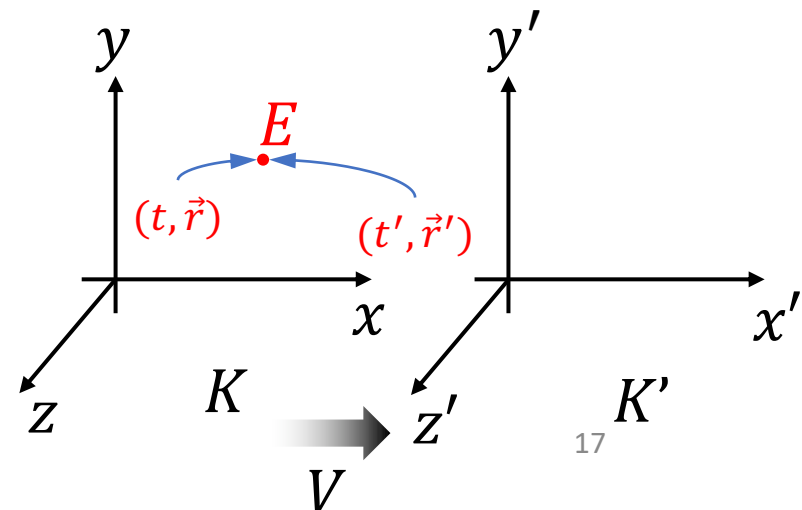
- 变换对于任意坐标都成立，因此，

$$C^2 = c^2(A^2 - 1), \quad ABc^2 - CD = 0, \quad D^2 = 1 + c^2B^2$$

$$\Rightarrow C = \pm c\sqrt{A^2 - 1}, B = \pm \frac{1}{c}\sqrt{A^2 - 1}, D = \pm A$$

- 正负号来自于速度的方向，为了确定起见，我们取

$$D = +A, C = -c\sqrt{A^2 - 1}, B = \frac{1}{c^2}C = -\frac{1}{c}\sqrt{A^2 - 1},$$



$$t' = At - \frac{1}{c}\sqrt{A^2 - 1}x, \quad x' = -c\sqrt{A^2 - 1}t + Ax$$

- 如果引入  $A = \cosh \theta$ , 上述变换还可以写成更加简单的形式,

$$t' = \cosh \theta t - \frac{1}{c}\sinh \theta x, \quad x' = -c \sinh \theta t + \cosh \theta x$$

- 下一步, 我们需要将  $A$  或  $\theta$  与参考系相对速度联系起来。  $K'$  的原点在  $K$  系的速度为  $V$ , 因此

$$\begin{aligned} -c\sqrt{A^2 - 1}t + Ax = 0 &\Rightarrow V = \frac{x}{t} = \frac{c\sqrt{A^2 - 1}}{A} = V \\ &\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

这样以来, 完整的洛伦兹变换可以写成,



洛伦兹变换,

$$\begin{cases} t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

洛伦兹变换的逆变换 ( $V \rightarrow -V$ ),

$$\begin{cases} t = \frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

- 为了方便, 常常引入几个量  $\beta = \frac{V}{c}, \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$
- 快度 (rapidity):  $\phi = \operatorname{arctanh} \beta = \ln \frac{c+v}{c-v} \Rightarrow \cosh \phi = \gamma, \sinh \phi = \gamma\beta$

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} ct' = \cosh \phi \, ct - \sinh \phi \, x \\ x' = \cosh \phi \, x - \sinh \phi \, ct \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

若参考系 $K'$ 相对于 $K$ 以任意的速度 $\vec{v}$ 匀速运动，则相对应的洛伦兹变换沿平行和垂直方向分别为，

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \vec{\beta} \cdot \vec{x}) \\ \vec{x}'_{\parallel} = \gamma(\vec{x}_{\parallel} - \vec{\beta}t) \\ \vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp} \end{cases}$$

考虑 $\vec{x}_{\parallel} = (\vec{\beta} \cdot \vec{x})\vec{\beta}/\beta^2$ ,  $\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel}$ ，上述变换可以写成矢量形式

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \vec{\beta} \cdot \vec{x}) \\ \vec{x}' = \vec{x} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\beta} \cdot \vec{x})\vec{\beta} - \gamma\vec{\beta}t \end{cases} \xrightarrow{V \ll c} \begin{cases} t' = t \\ \vec{x}' = \vec{x} - \vec{V}t \end{cases}$$

## 洛伦兹变换的性质:

- 在参考系之间的相对速度远小于光速的时候  $V \ll c$ , 洛伦兹变换退化到伽利略变换
- 在实际测量中, 时间间隔、空间间隔才具有意义。在伽利略变换下, 时间间隔和空间间隔不变。在洛伦兹变换下两者都改变:

$$\begin{cases} \Delta t' = \frac{\Delta t - (V/c^2)\Delta x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ \Delta x' = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ \Delta y' = \Delta y, \Delta z' = \Delta z \end{cases}$$

不变的是时空间隔:  $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta \vec{r}^2 = \Delta s'^2$

- 参考系之间相对速度远小于光速时，时间的变换保留到一阶 $O\left(\frac{V}{c}\right)$ 为 $\Delta t' \approx \Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x = \Delta t \left(1 - \frac{V \Delta x}{c^2 \Delta t}\right)$ 。第二项在时间间隔不是特别短或者距离间隔不是特别远 $\frac{\Delta x}{\Delta t} \ll c$ 时，可以忽略

$$\begin{cases} t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \xrightarrow{v \ll c} \begin{cases} t' = t - \left(\frac{V}{c^2}\right)x \approx t \\ x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

- 矢量形式：

## §3. 相对论时空观

物理定律

对称性

时空几何

例子:

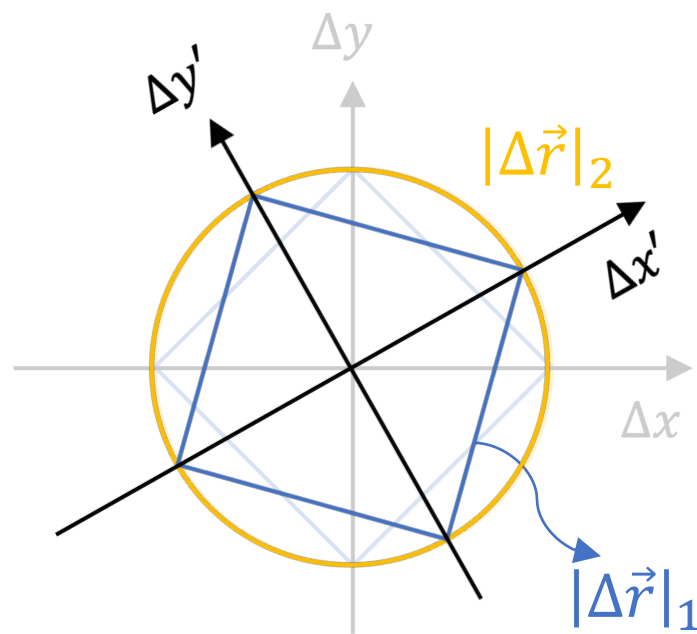
牛顿第二定律在空间转动变换下不变, 要求空间距离定义为

$$|\Delta \vec{r}|_2 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

其他距离的定义, 如

$$|\Delta \vec{r}|_1 = |\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|$$

则无法保持物理定律的空间转动不变性。



$$\begin{cases} x' = \cos \theta x + \sin \theta y \\ y' = -\sin \theta x + \cos \theta y \end{cases}$$





- 物理定律: 牛顿第二定律、电动力学(麦克斯韦方程组)
- 对称性: 保持物理学规律不变的时空变换 —— ~~伽利略变换~~ 庞加莱变换
  - 庞加莱变换=洛伦兹变换+时间平移+空间平移+空间旋转
- 时空几何: 时空坐标( $x, y, z, t$ )以及时空间隔的度量

$$d(\Delta\vec{r}, \Delta t) = \begin{cases} \Delta t, & \text{如果 } \Delta t \neq 0 \\ |\Delta\vec{r}|, & \text{如果 } \Delta t = 0 \end{cases}$$
$$d(\Delta t, \Delta\vec{r}) = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta\vec{r}^2}$$

- (伽利略)相对性原理: 所有物理定律在惯性参考系中保持相同的形式





- 物理定律: 牛顿第二定律、电动力学(麦克斯韦方程组)
- 对称性: 保持物理学规律不变的时空变换 —— 庞加莱变换
  - 庞加莱变换=洛伦兹变换+时间平移+空间平移+空间旋转
- 时空几何: 时空坐标 $(x, y, z, t)$ 以及时空间隔的度量

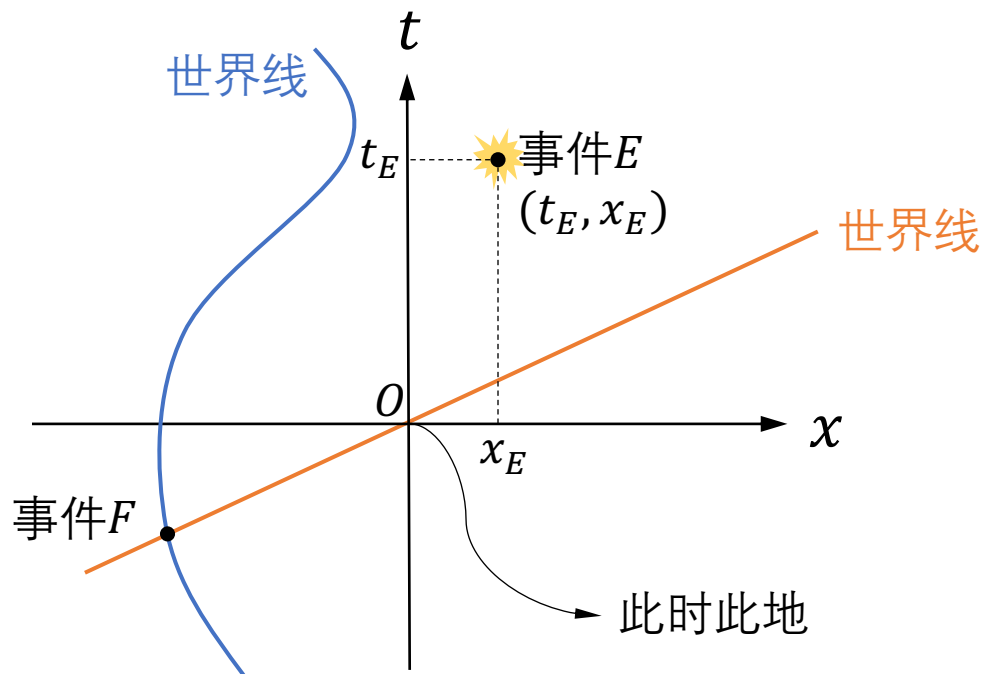
$$d(\Delta t, \Delta \vec{r}) = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta \vec{r}^2}$$

- (伽利略)相对性原理: 所有物理定律在惯性参考系中保持相同的形式



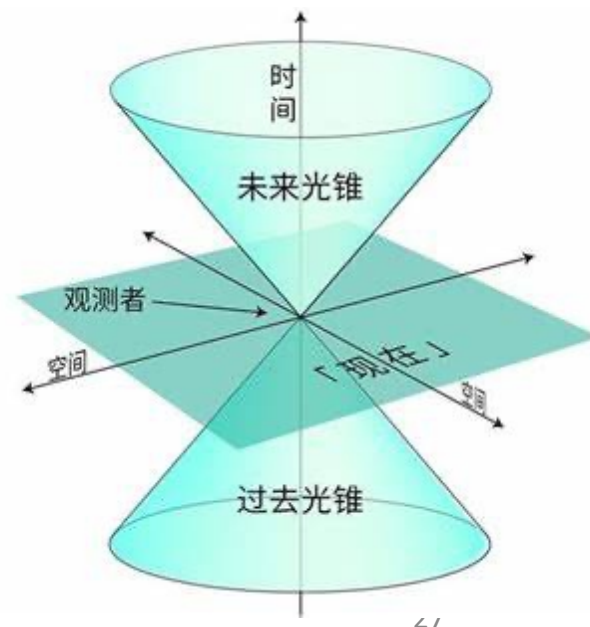
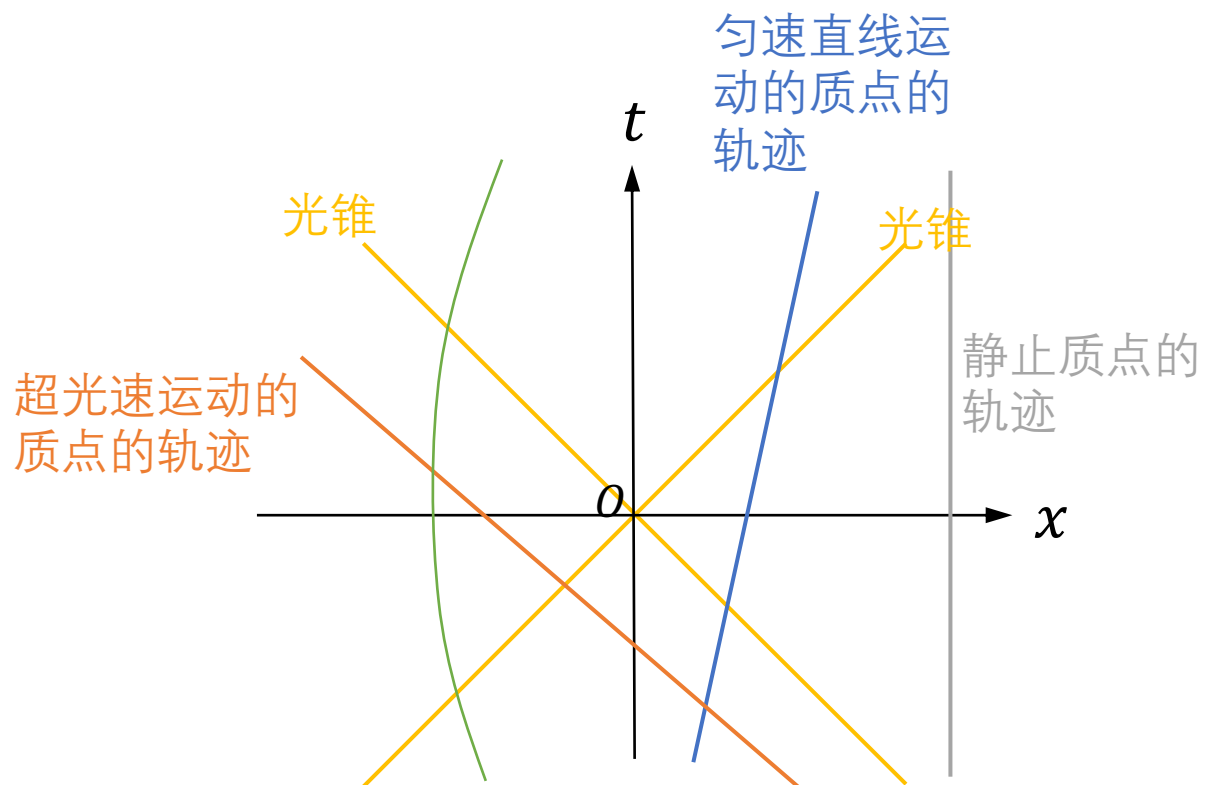
## 时空图：

- 事件 (event): 时空图中的点叫做事件，事件可由时空坐标 $(t, \vec{r})$ 所标记
- 时空间隔 (spacetime interval):  $d_{EF} = \sqrt{c^2(t_E - t_F)^2 - (\vec{r}_E - \vec{r}_F)^2}$ ，时空间隔在洛伦兹变换下是不变的
- 世界线 (worldline): 一系列事件的集合构成一条世界线。典型的世界线：一个质点的时空轨迹，完全描述了质点的运动



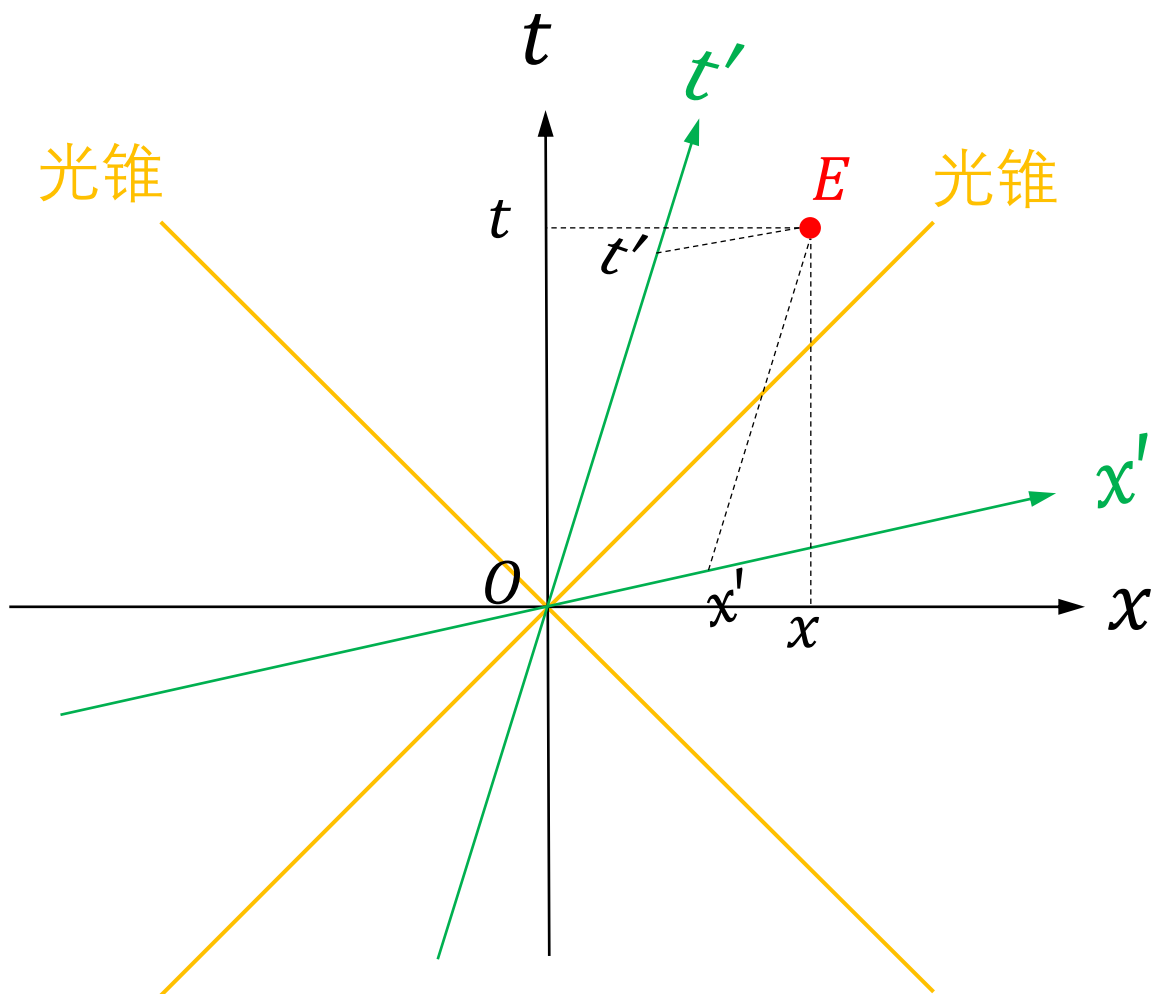
## 世界线：

- 匀速直线运动的质点的世界线是直线
- 世界线的斜率：速度的倒数
- 光锥：光的轨迹 —— 斜率永远为 $1/c$ 的直线



洛伦兹变换：

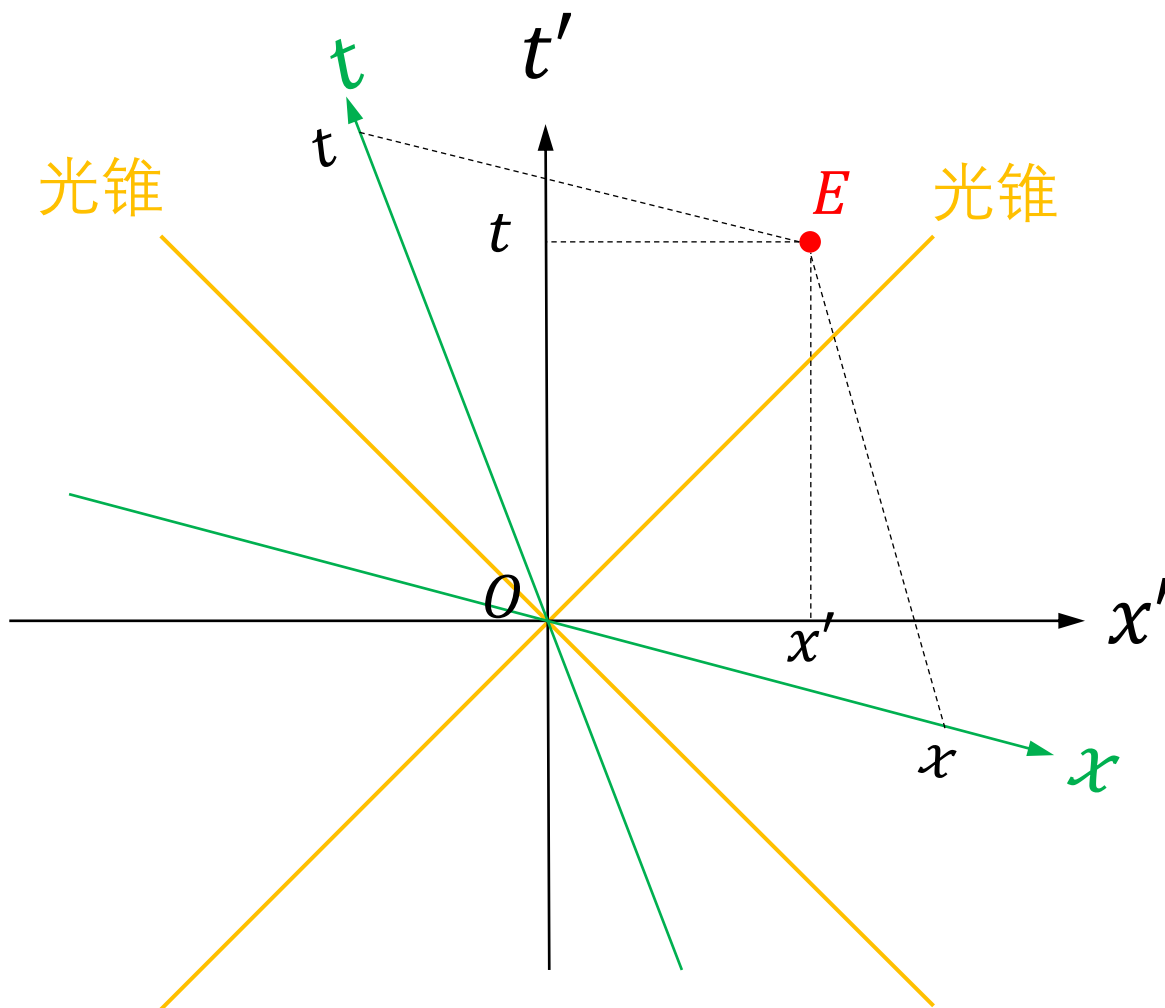
$$\begin{cases} t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

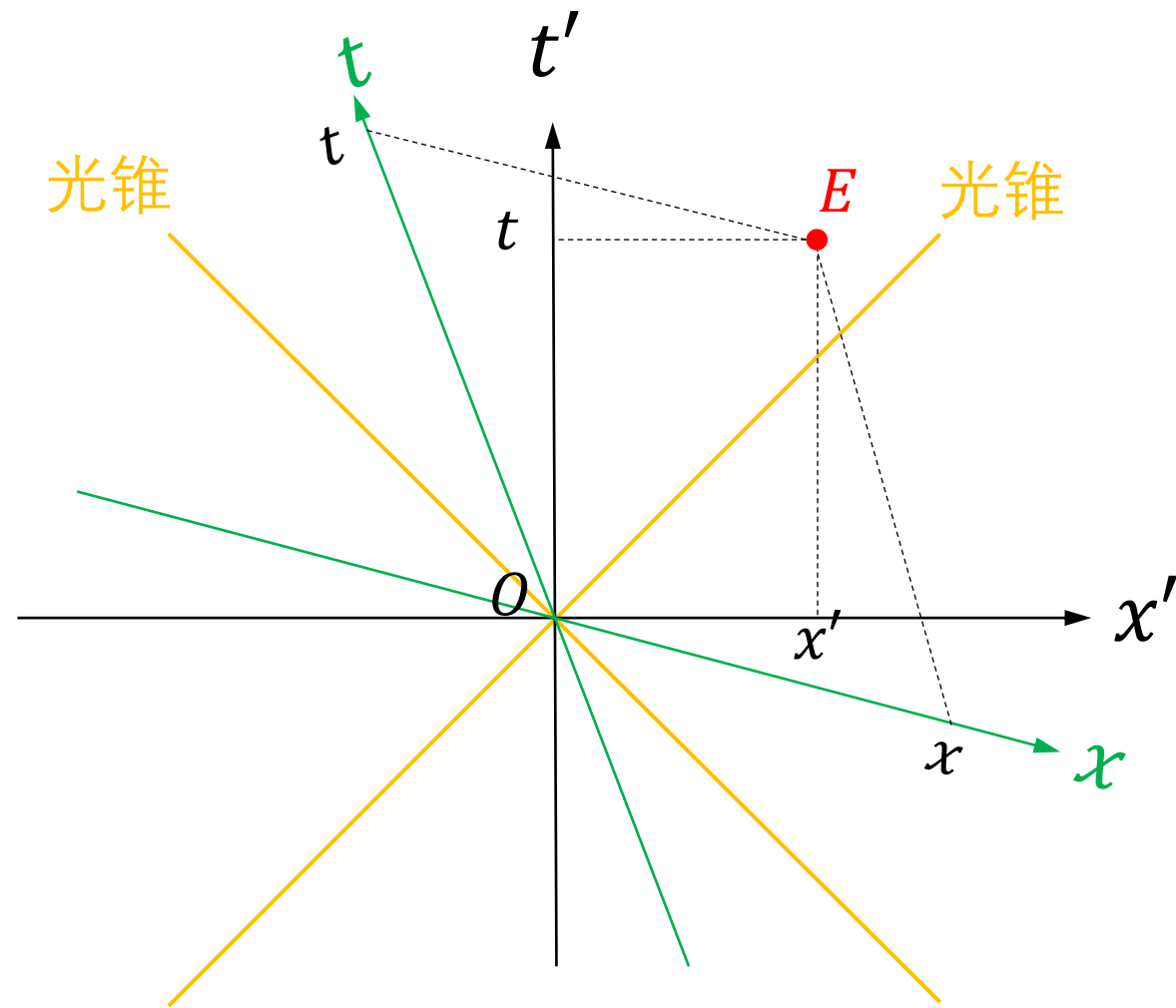
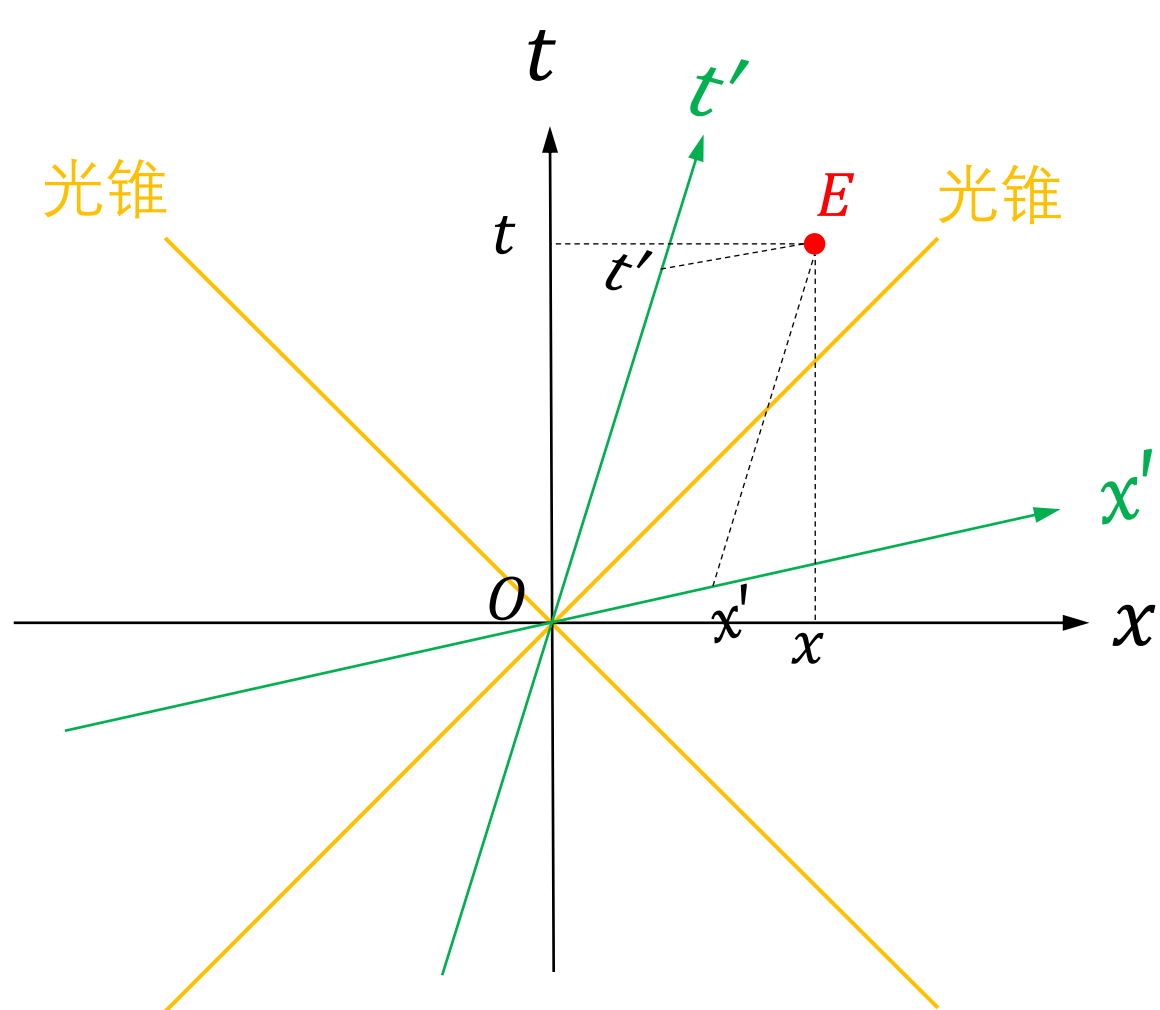




洛伦兹逆变换：

$$\begin{cases} t = \frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$



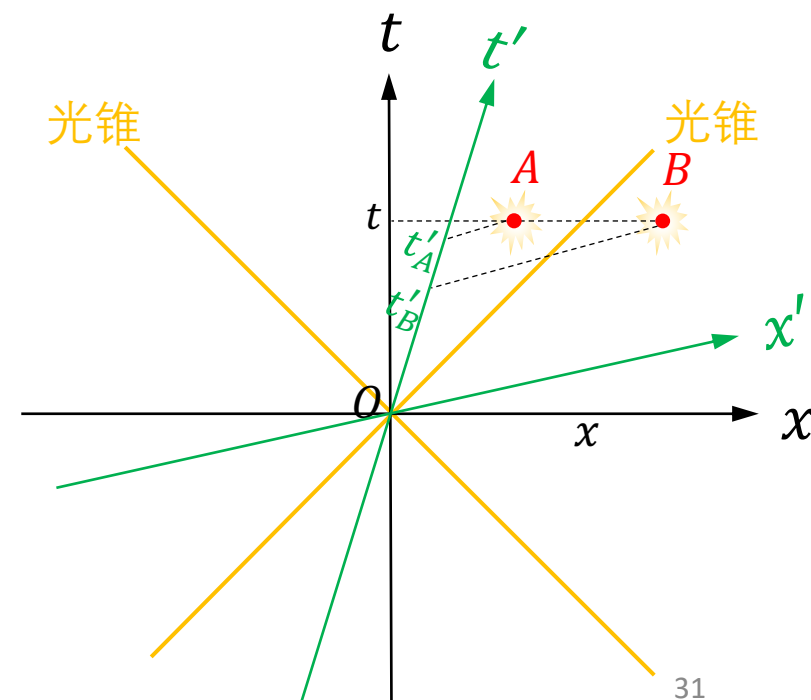


## a.同时(simultaneity)的相对性

考虑参考系 $K$ 中发生在同一时间、不同地点的两个事件 $A$ 、 $B$ ，设其空间间隔为 $\Delta x$ 。设参考系 $K'$ 相对于 $K$ 以 $V$ 的速度匀速运动。在参考系 $K'$ 中，两个事件发生的时间间隔为，

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \frac{t_B - \frac{V}{c^2} x_B}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t_A - \frac{V}{c^2} x_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{-\frac{V}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

换句话说，在一个参考系同时发生的两个事件，在另一个参考系未必是同时发生的！



【例子】爱因斯坦的火车。一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以 $0.6c$ 匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。火车车尾刚进入站台时车尾发出一道闪光；车头刚出站台时也发出一道闪光。问在列车上的人与站台的人分别看来，这两道闪光是否同时发生？

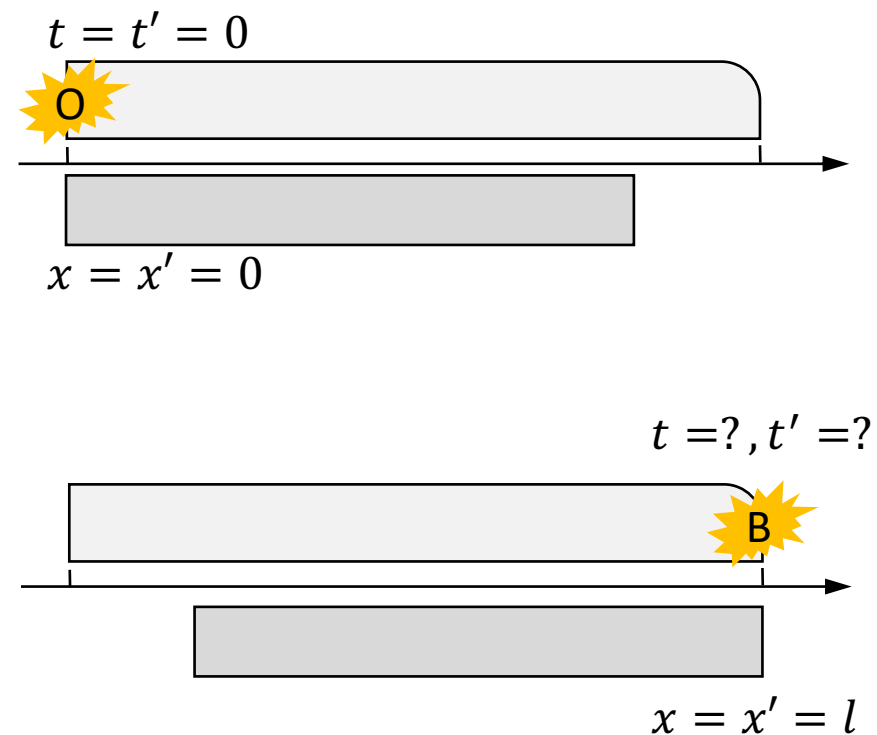


【例子】爱因斯坦的火车。一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以 $0.6c$ 匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。火车车尾刚进入站台时车尾发出一道闪光；车头刚出站台时也发出一道闪光。问在列车上的人与站台的人分别看来，这两道闪光是否同时发生？

解：以车尾为原点、车尾闪光为0时刻，建立相对于列车静止的坐标系 $T$ 。并设相对站台静止的参考系 $S$ 的时空坐标的原点与 $T$ 重合， $S$ 相对于 $T$ 以 $V = -0.6c$ 的速度匀速运动。

这样以来，车尾闪光事件 $O$ 发生在坐标原点。这个问题的难点在于车头闪光事件 $B$ ，我们只知道发生在两个参考系的 $x_B = x'_B = x = 100\text{m}$ 处，不知道时间。

考虑 $t = 0$ 时刻，车头也发出一道闪光。在 $T$ 系，这个



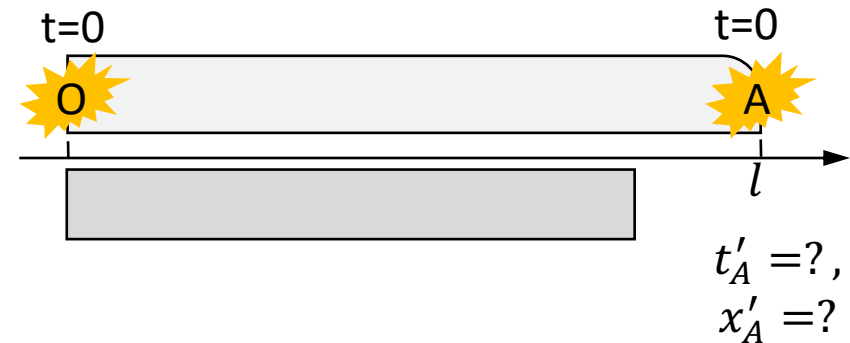
【例子】爱因斯坦的火车。一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以 $0.6c$ 匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。火车车尾刚进入站台时车尾发出一道闪光；车头刚出站台时也发出一道闪光。问在列车上的人与站台的人分别看来，这两道闪光是否同时发生？

事件发生的时空坐标为 $(0, l)$ ，在 $S$ 系，这一事件的坐标 $(t'_A, x'_A)$ 根据洛伦兹变换为，

$$t'_A = \gamma \left( 0 + \frac{\beta l}{c} \right) = \frac{\gamma \beta l}{c}, x'_A = \gamma(l + 0) = \gamma l$$

现在再考虑车头闪光事件 $B$ 。根据刚才的计算，事件 $A$ 发生时，在参考系 $S$ 中，车头的坐标是 $\gamma l > l$ ，因此事件 $B$ 必定发生在这之前：

$$t'_B = t'_A - \frac{(\gamma - 1)l}{V} = \frac{(\gamma - 1)l}{\gamma V} > 0, x'_B = l$$

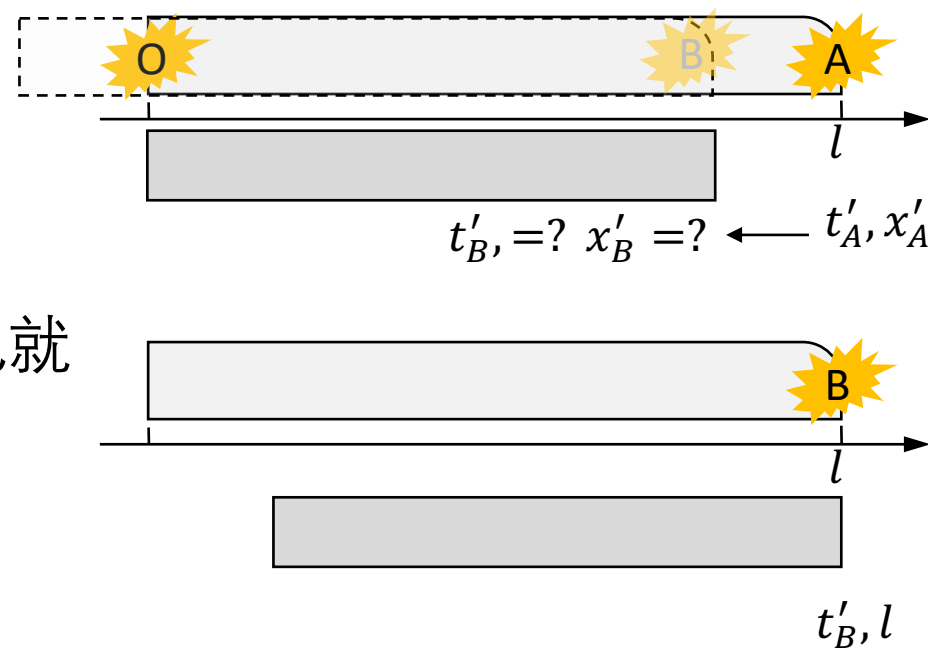


【例子】爱因斯坦的火车。一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以 $0.6c$ 匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。火车车尾刚进入站台时车尾发出一道闪光；车头刚出站台时也发出一道闪光。问在列车上的人与站台的人分别看来，这两道闪光是否同时发生？

根据洛伦兹变换，这一事件在 $T$ 参考系坐标为，

$$t_B = \gamma \left( t'_B - \frac{\beta x'_B}{c} \right) = \frac{l(1 - \gamma)}{\gamma \beta c} < 0$$

同时作为验证可以得到 $x_B = \gamma(x'_B - \beta ct'_B) = l$ ，也就是说， $B$ 事件在 $T$ 中的坐标确实是车头。





【例子】爱因斯坦的火车。一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以 $0.6c$ 匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。火车车尾刚进入站台时车尾发出一道闪光；车头刚出站台时也发出一道闪光。问在列车上的人与站台的人分别看来，这两道闪光是否同时发生？

总结一下：

- 列车参考系 $T$ ：

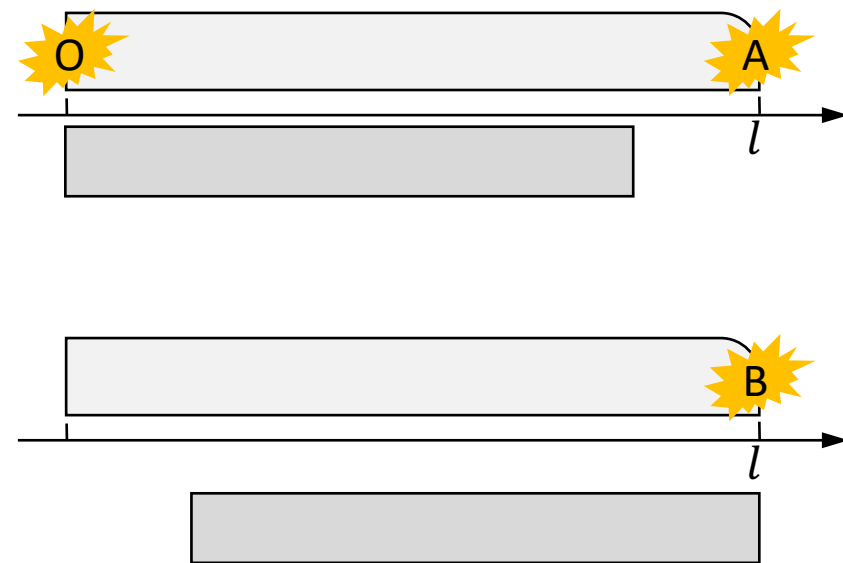
- 车尾闪光发生在 $t_O = 0$ 时刻，

- 车头闪光发生在 $t_B = \frac{l(1-\gamma)}{\gamma V} = -0.2l/V$ 时刻；

- 站台参考系 $S$ ：

- 车尾闪光发生在 $t'_O = 0$ 时刻，

- 车头闪光发生在 $t'_B = \frac{l(\gamma-1)}{\gamma V} = +0.2l/V$ 时刻；



【例子】爱因斯坦的火车。一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以 $0.6c$ 匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。火车车尾刚进入站台时车尾发出一道闪光；车头刚出站台时也发出一道闪光。问在列车上的人与站台的人分别看来，这两道闪光是否同时发生？

从时空图上来看这个问题：

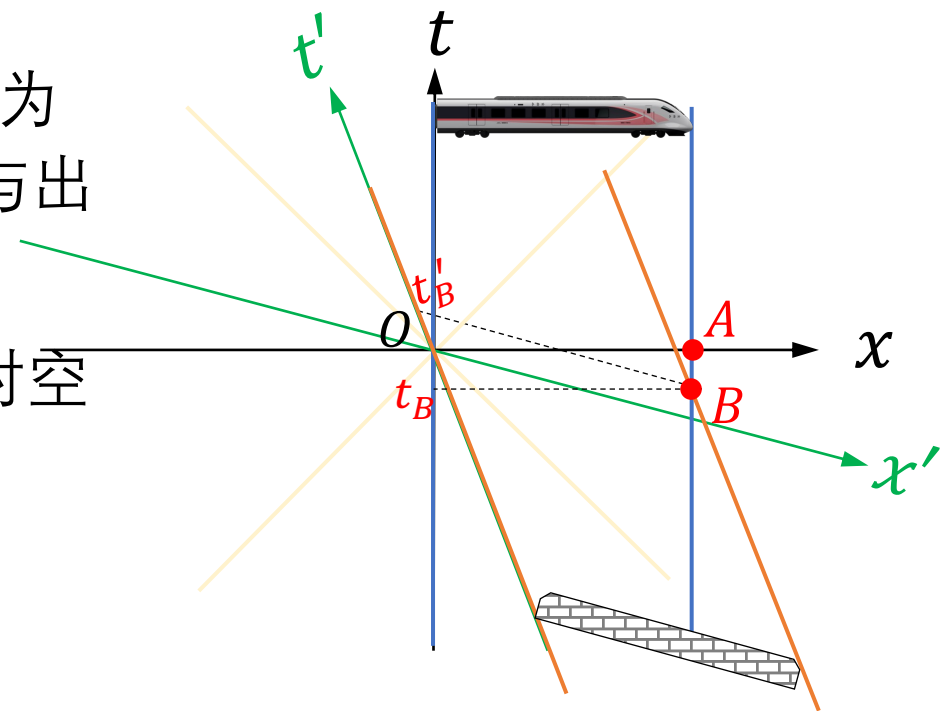
- 仍以火车为参考系，取车尾与入站相遇的事件为时空坐标原点。车头闪光事件为B，这是车头与出站相遇。

- 火车车头的时空轨迹为： $x_T(t_T) = l$ ；出站的时空轨迹为： $x'_S(t'_S) = l$ ；进行洛伦兹变换，

$$x_S = \gamma(x'_S - \beta ct'_S) = \gamma(l - \beta ct'_S),$$

$$t_S = \gamma(t'_S - \beta x'_S/c) = \gamma(t'_S - \beta l/c)$$

- 车头与站台相遇的条件是： $t_T = t_S, x_S = x_T$



【例子】爱因斯坦的火车。一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以 $0.6c$ 匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。火车车尾刚进入站台时车尾发出一道闪光；车头刚出站台时也发出一道闪光。问在列车上的人与站台的人分别看来，这两道闪光是否同时发生？

即，

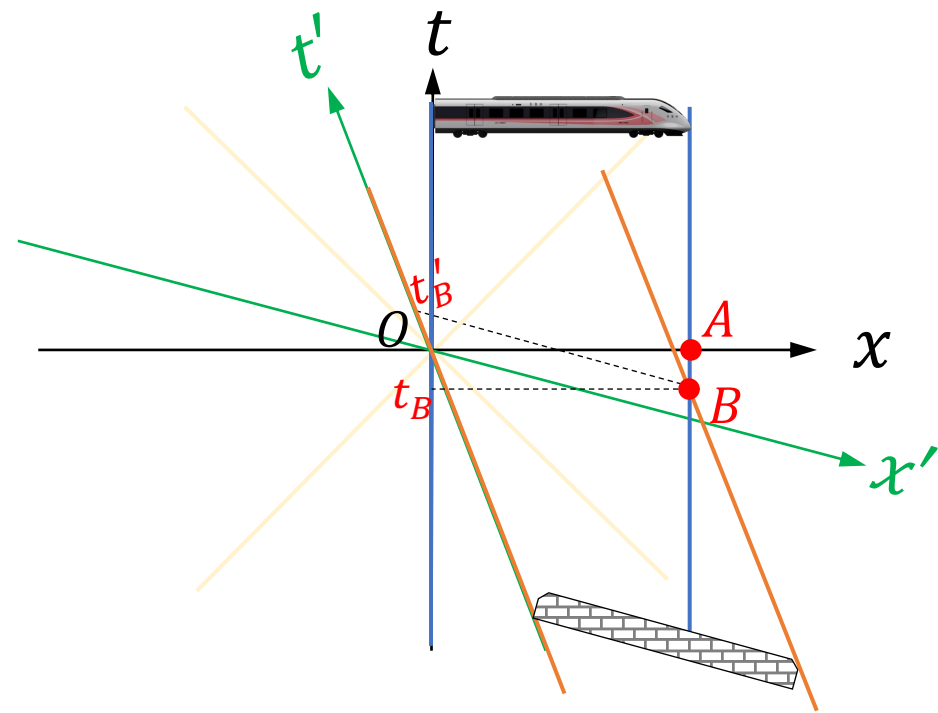
$$\begin{aligned}\gamma(l - \beta ct'_S) &= l, \\ \gamma(t'_S - \beta lc) &= t_S\end{aligned}$$

从第一个方程可以得到，

$$t'_S = \frac{(\gamma - 1)l}{\gamma\beta c} \equiv t'_B$$

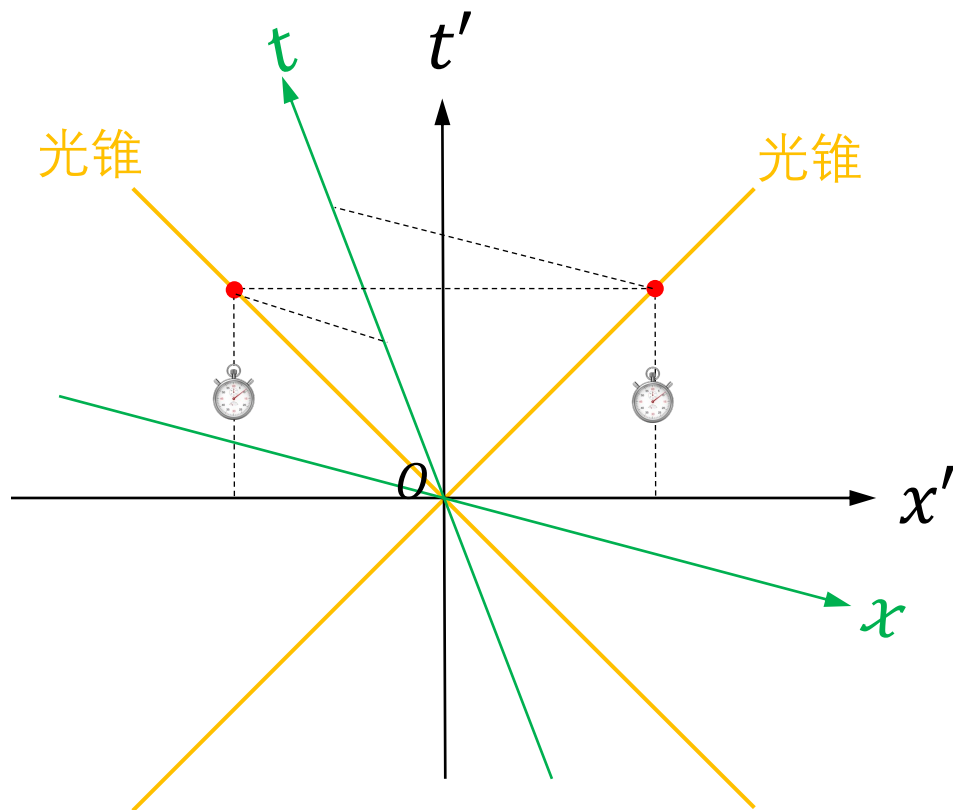
从第二个方程可以得到，

$$t_S = -\frac{(\gamma - 1)l}{\gamma\beta c} \equiv t_B$$



- 同时的相对性与我们自身的直觉非常悖逆，原因在于我们所熟悉的牛顿力学具有时间绝对性。这一点会带来一系列问题，需要我们去重新考虑
- 第一个问题是如何校准两个时钟？处在同一位置的两个时钟，不管双方是否具有相对运动，都可以通过对读数的方式校准，此后的演化由洛伦兹变换决定。对于处于不同位置的两个时钟，该如何校准？
- 一种办法是我们将时钟送到同一个位置校准之后再拿回去，为了避免洛伦兹变换带来的影响，我们取、还表的速度必须非常慢
- 另一种办法是借助光。在两个时钟的中心位置发射一个光信号，每个时钟收到光信号的时刻定为零时刻(或某个约定值)即可

- 当然，这样的两个时钟在其他参考系看来由于同时的相对性，实际上并没有对准
- 因此对钟只能针对于同一个惯性参考系而言
- 我们以后假定同一个惯性参考系的钟都是对准的



- 另外一个问题是因果性(causality)
  - 例如，运动员投篮入篮，从时序上讲一定是抛球在先，入篮在后
- 事件的因果性是非常基本的一条自然哲学规律；因果性的丧失对于社会的基本秩序乃至人的理性具有毁灭性的打击
  - 例如，我们的生活建立在一些基本因果逻辑之上：学习好→好成绩；挨打→疼痛；如果因果性彻底丧失，任何手段的测试都会失去意义、任何基本生存本能也会失去意义
- 根据苏格兰哲学家休谟，因果相关的事件必然特定时序，即因发生的时间在先，果发生的时间在后
- 在相对论中，由于同时的绝对性的丧失，导致事件的时序不再确定。根据洛伦兹变换，事件的时间间隔满足变换，

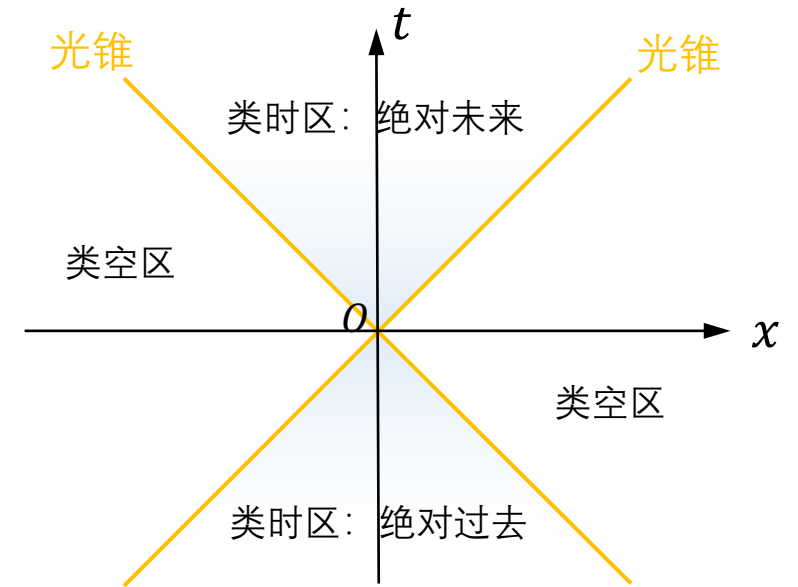
$$\Delta t' = \gamma \left( \Delta t - \frac{\beta}{c} \Delta x \right) = \gamma \Delta t \left( 1 - \frac{\beta \Delta x}{c \Delta t} \right)$$

其中，若K参考系中的事件具有时序 $\Delta t > 0$ ，则 $\Delta t' > 0$ 不一定仍然成立；但是假如 $\left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| \leq c$ ，括号里的部分恒为正， $\Delta t' > 0$ 即时序不变

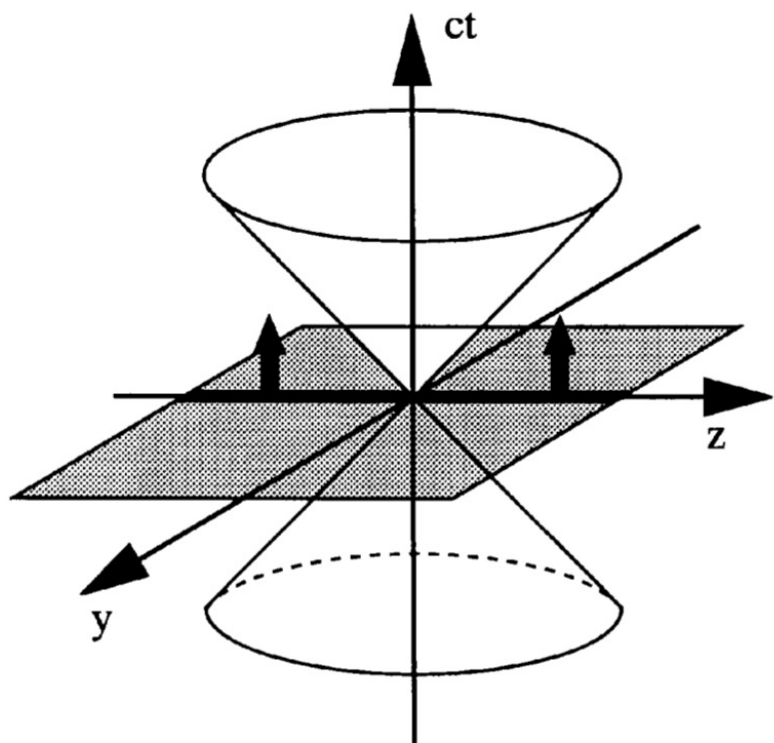
- 换句话说，因果相关的事件之间的时空间隔须满足 $\left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| \leq c$ 否则因果律有被违背之虞；这样的事件叫做类时分离的
- 两个事件之间的相互作用需要通过信息或能量传递。因此类时分离的要求，相当于是要求信息和能量传播的速度不能大于光速
- 从相对论动力学将会看道，我们永远无法将有限质量的物体加速到超过光速，因此相对论物理仍然保持了事件的因果性



- 所有与原点 $O$ 的时空间隔 $c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{r}^2 > 0$ 的事件构成的区域叫做类时区(time-like region)
  - 类时区的点与原点具有确定的时序，两者可以建立因果关系
  - 其中 $t > 0$ 的事件组成的区域叫做绝对未来； $t < 0$ 的事件组成的区域叫做绝对过去
- 所有与原点 $O$ 的时空间隔 $c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{r}^2 < 0$ 的事件构成的区域叫做类空区(space-like region)
- 所有与原点 $O$ 的时空间隔 $c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{r}^2 = 0$ 的事件构成的区域叫做光锥(light cone)

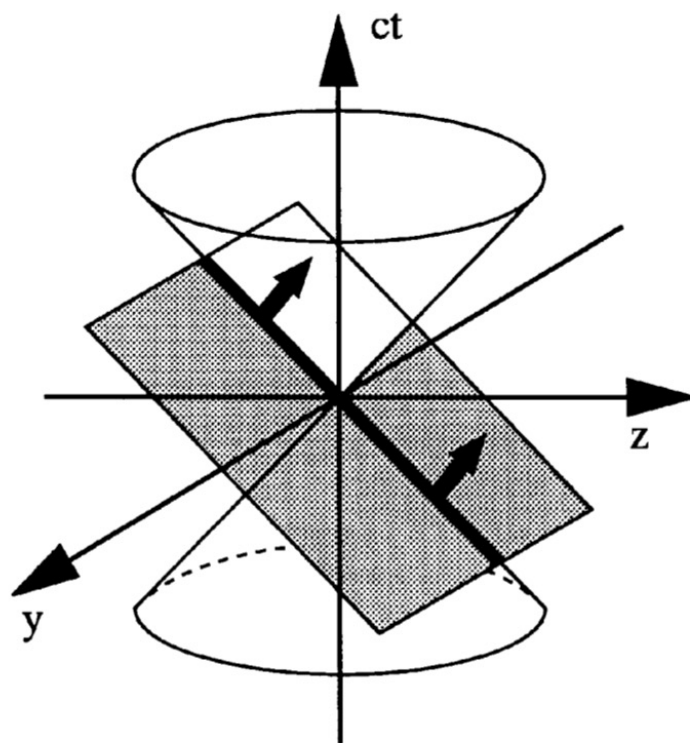


# • 相对论时间的定义



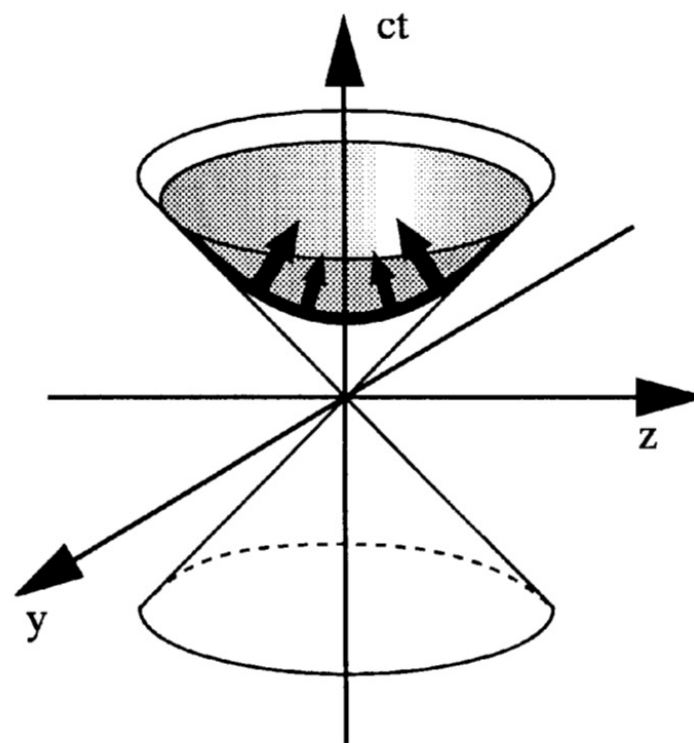
The instant form

$$\begin{aligned}\tilde{x}^0 &= ct \\ \tilde{x}^1 &= x \\ \tilde{x}^2 &= y \\ \tilde{x}^3 &= z\end{aligned}$$



The front form

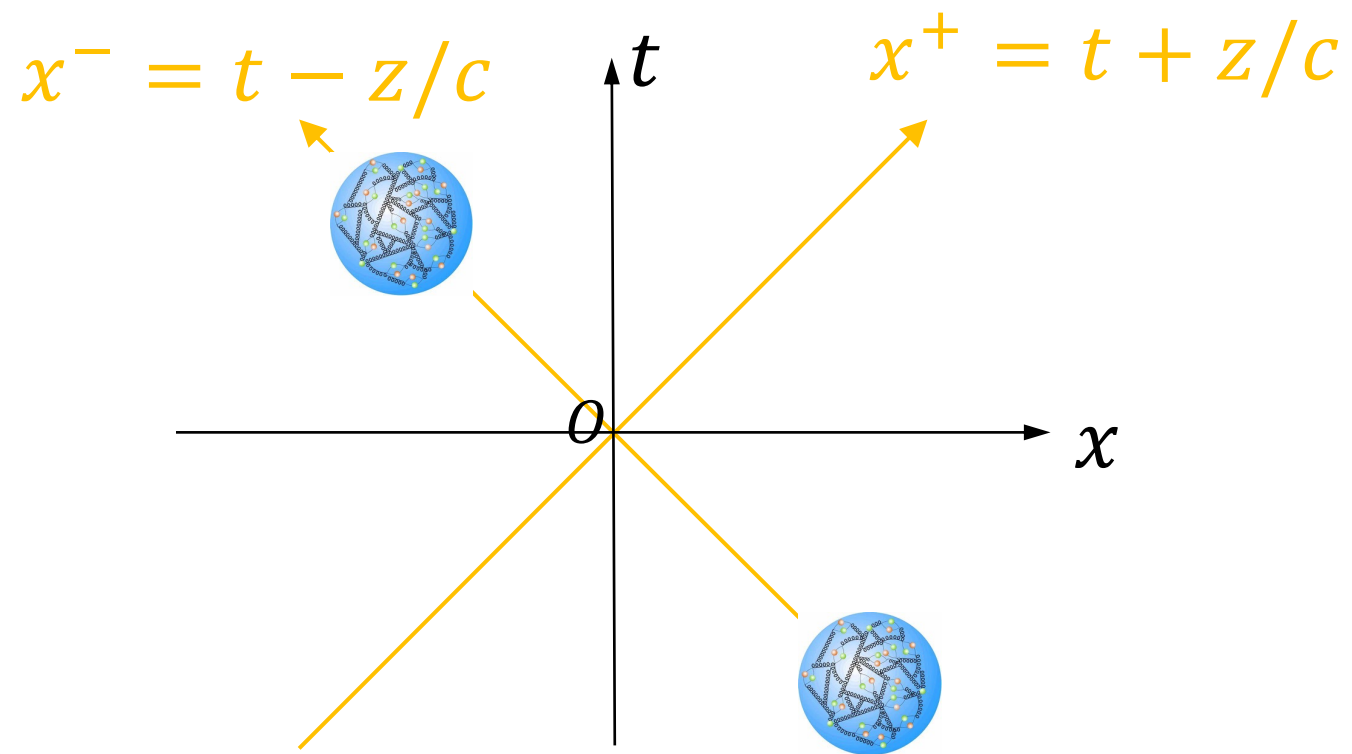
$$\begin{aligned}\tilde{x}^0 &= ct + z \\ \tilde{x}^1 &= x \\ \tilde{x}^2 &= y \\ \tilde{x}^3 &= ct - z\end{aligned}$$



The point form

$$\begin{aligned}\tilde{x}^0 &= \tau, & ct &= \tau \cosh \omega \\ \tilde{x}^1 &= \omega, & x &= \tau \sinh \omega \sin \theta \cos \phi \\ \tilde{x}^2 &= \theta, & y &= \tau \sinh \omega \sin \theta \sin \phi \\ \tilde{x}^3 &= \phi, & z &= \tau \sinh \omega \cos \theta\end{aligned}$$

- 光锥时间

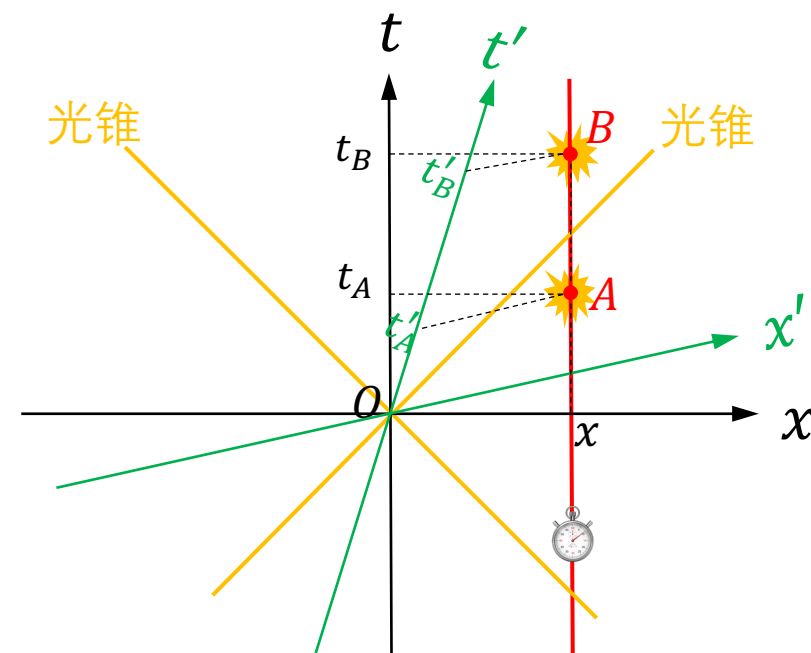


## b. 时间膨胀 (time dilation)

- 考虑参考系 $K$ 中发生在同一地点不同时间的两个事件（例如一个静止的时钟的两次读数），设其时间间隔为 $\Delta t$ 。设参考系 $K'$ 相对于 $K$ 以 $V$ 的速度匀速运动。在参考系 $K'$ 中，两个事件的时间间隔为，

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \frac{t_B - \left(\frac{V}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t_A - \left(\frac{V}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$
$$\Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

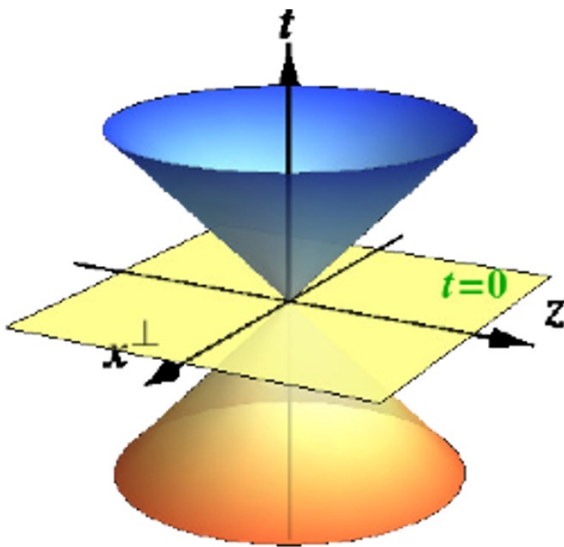
换句话说，运动的时钟走的慢一些（钟慢）



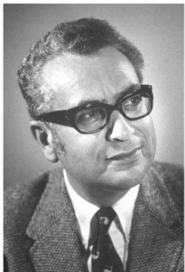
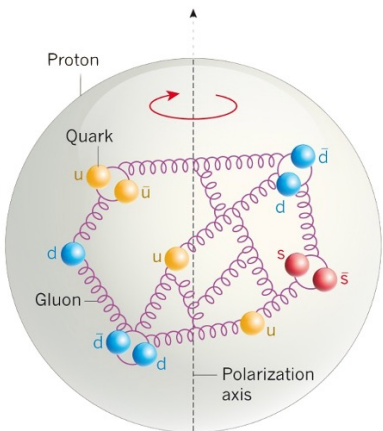
【例子】宇宙射线在大气层顶部( $\sim 10$  km)产生接近光速运动的缪子。已知静止的缪子的寿命为 $\tau = 2 \times 10^{-6} \text{ s}$ 。按照牛顿力学，缪子在大气中最多能飞行 $d = c\tau \sim 600$  m，无法穿过大气层到达地面。而实际中，我们在地面上能观测到缪子（这些缪子对于进化起到重要的作用）。原因在于相对论的时间膨胀效应，高速飞行的缪子的寿命远大于其静止时的寿命。

equal-time quantization

$$t = 0$$



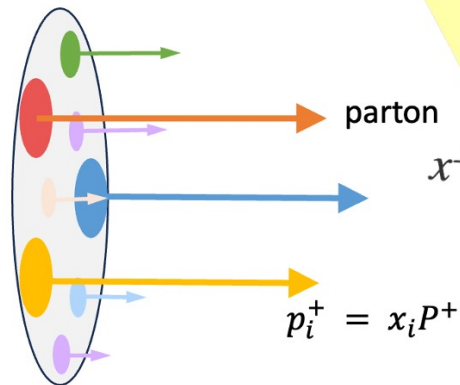
夸克模型



infinite momentum  
frame  $P_z \rightarrow \infty$

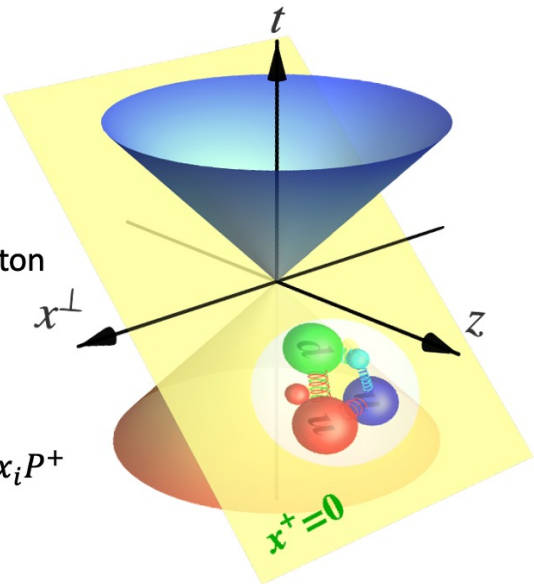


部分子模型



light-front quantization

$$x^+ = t + z/c = 0$$



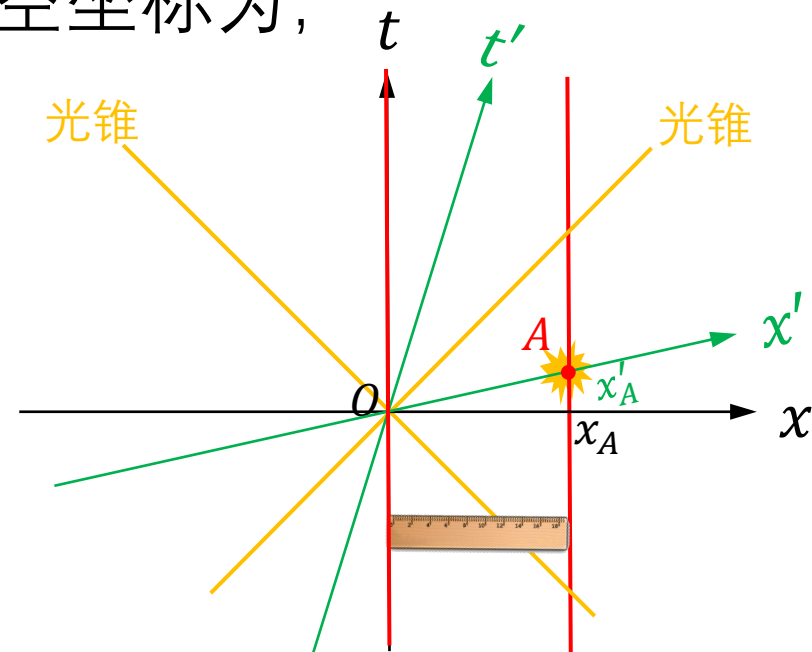
## c. 长度收缩 (length contraction)

- 考虑参考系 $K$ 中静止的两个质点（例如一把静止的直尺两端），设其空间间隔为 $\Delta l$ 。设参考系 $K'$ 相对于 $K$ 以 $V$ 的速度匀速运动。现在考虑参考系 $K'$ 中测量这两个质点之间的距离。考虑 $t' = 0$ 时刻，一个质点位于原点，另一个质点 $A$ 在 $K'$ 系的时空坐标为，

$$t'_A = \gamma \left( t_A - \frac{\beta}{c} x_A \right) = 0 \Rightarrow t_A = \frac{\beta \Delta l}{c}$$
$$\Delta l' = x'_A = \gamma (x_A - \beta c t_A) = \sqrt{1 - \beta^2} \Delta l$$

换句话说，运动的尺子会短一些（尺缩）。

- 注意距离的测量必须是同时的，也就是说，测量距离时，尺子两端需要定义在同一时刻





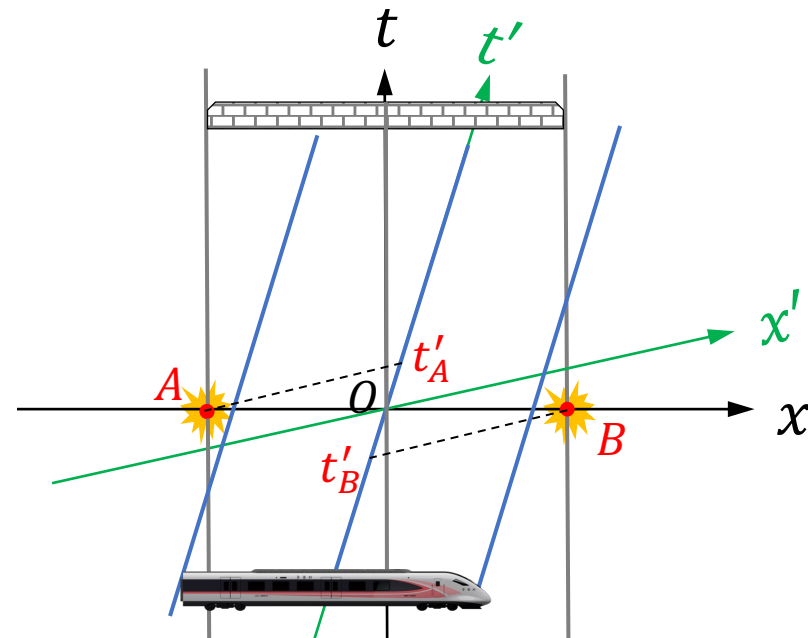
【例子】火车佯谬。一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以 $0.6c$ 匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。当火车中点与站台 midpoint 对齐的瞬间，站台进出站两端同时发出两道垂直于火车的闪电。

站台上的人认为，火车由于相对论尺缩效应变短为80米，因此闪电不会打在火车上。火车上的人认为，站台相对于火车运动，由于相对论效应发生尺缩，变短为80米，因此闪电会打在火车上。谁的分析是正确的？

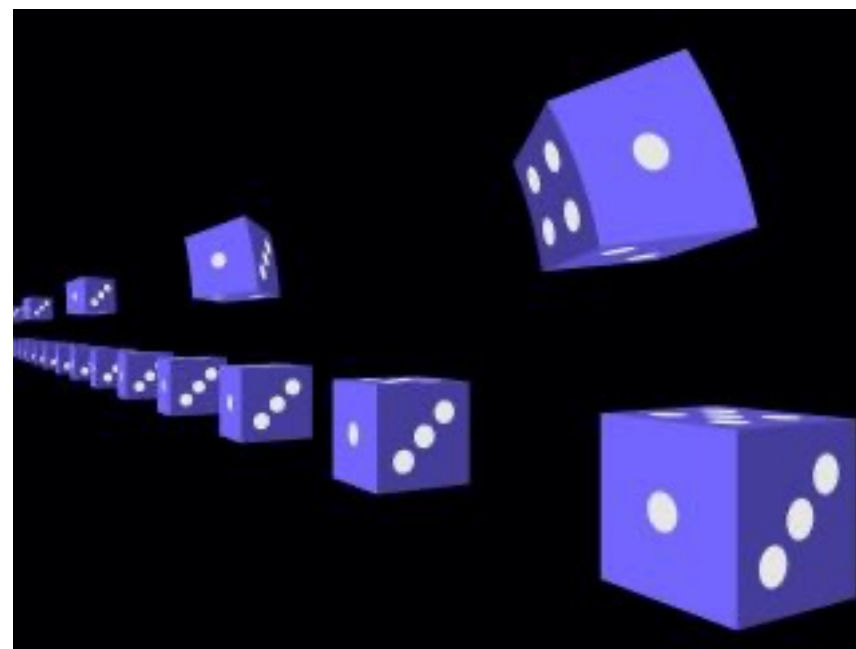
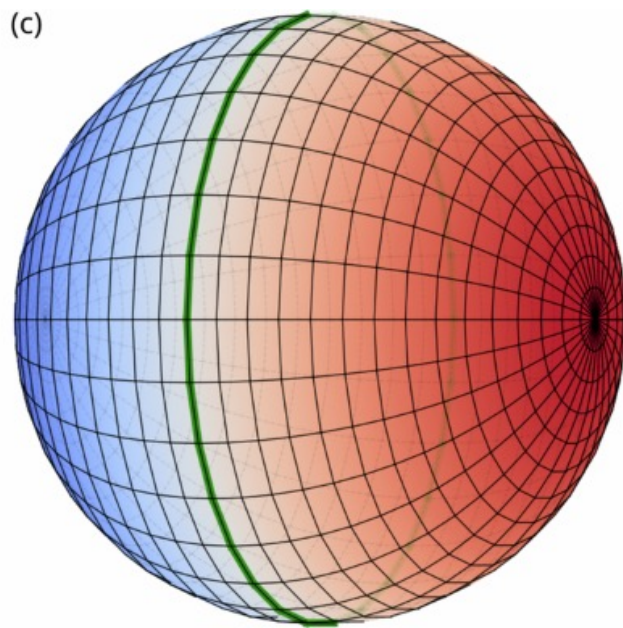
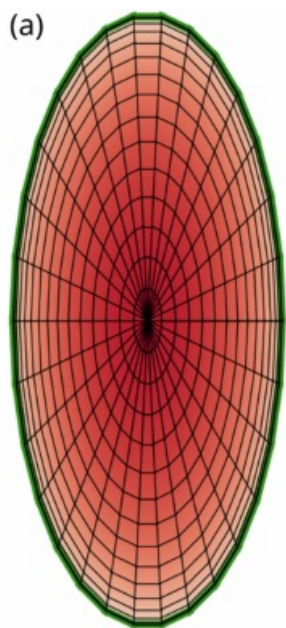


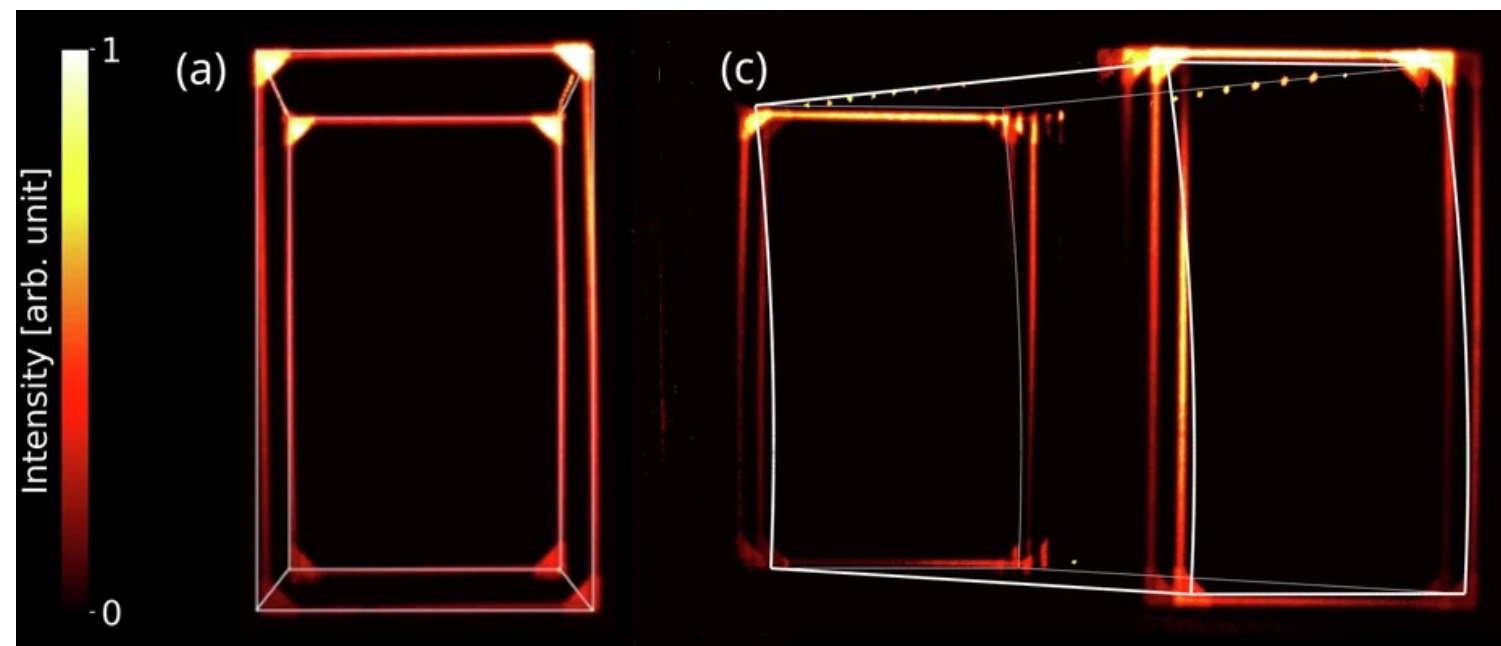
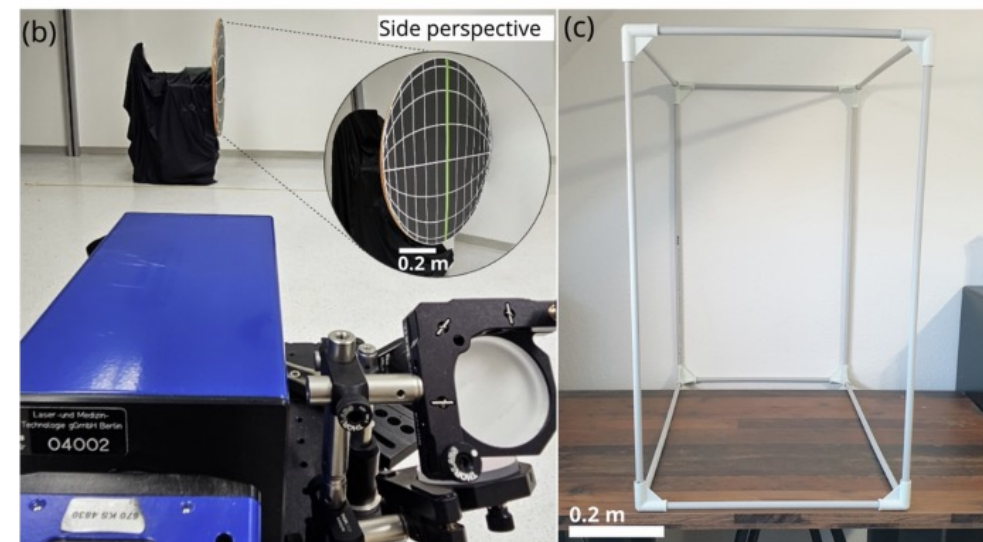
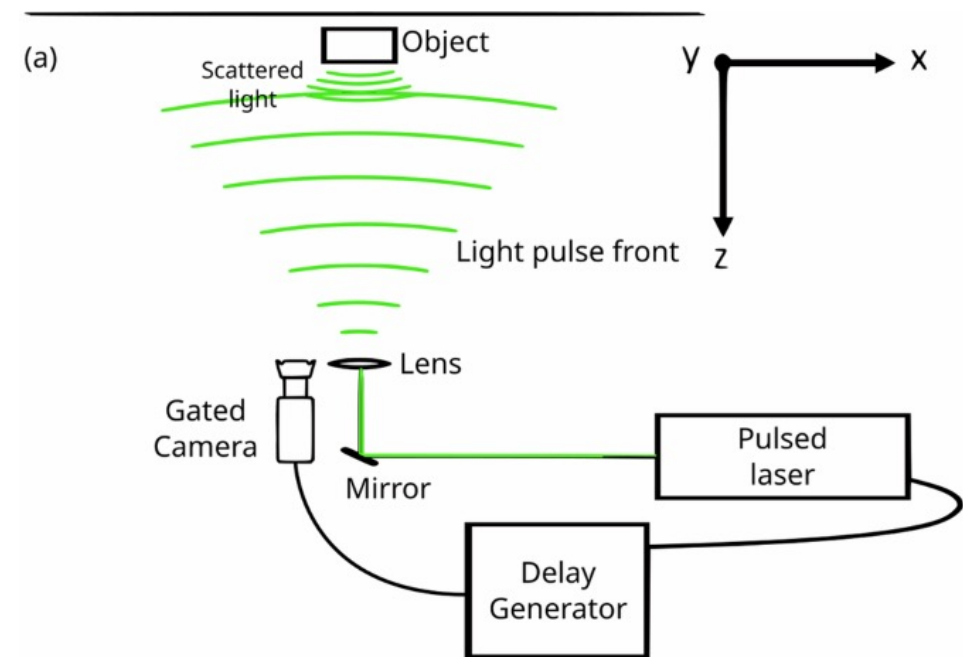
【例子】火车佯谬。一列静止长度为100米的火车在平直轨道上以 $0.6c$ 匀速行驶，穿过一个长度为100米的站台。当火车中点与站台 midpoint 对齐的瞬间，站台进出站两端同时发出两道垂直于火车的闪电。

分析：首先两种说法中尺缩效应的分析都是对的。但是闪电是站台发出的，因此站台参考系才可以定义闪电的同时性。换句话说，火车看到的闪电并不是同时发生的。因此站台的分析是正确的。



- 值得注意的是，长度收缩效应是测量效应，不代表我们看到的高速运动的物体的影像也是收缩的。
- 原因在于，我们看到的物体的影像来自于同时到达眼睛的光线，即光前。
- 计算发现，高速运动的物体影像会发生转动(Terrell-Penrose转动)和畸变





$$v = 0$$

$$v = 0.8c$$

## §4. 相对论动力学

- 经典力学的动力学定律为牛顿三大定律
- 相对论与牛顿第一定律(惯性定律)相容
- 牛顿第二定律将物体运动状态的改变归因为外力，即给出了外力与加速度之间的关系；但是这个关系在相对论中需要重新考虑，原因在于：
  - 在牛顿力学中，加速度具有绝对性，即根据伽利略变换，不同惯性参考系中的加速度是相同的；而相对论将伽利略变换替换成了洛伦兹变换
- 这一节我们首先推导相对论速度和加速度变换公式，并在此基础上重新考虑牛顿第二定律在相对论中的推广

## a. 相对论速度变换

- 设 $K$ 和 $K'$ 为两个惯性参考系，其中 $K'$ 相对于 $K$ 以 $V$ 的速度沿 $x$ 方向运动。若质点在 $K$ 中的坐标为 $(t, \vec{r})$ ，跟据速度的定义 $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ；类似地质点在 $K'$ 中的速度为 $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$ ，其中 $(t', \vec{r}')$ 为其在 $K'$ 中的坐标
- 质点在 $K'$ 中的坐标可由洛伦兹变换得到：

$$\begin{cases} t' = \gamma \left( t - \frac{\beta}{c} x \right) \\ x' = \gamma (x - \beta c t) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt' = \gamma \left( dt - \frac{\beta}{c} dx \right) \\ dx' = \gamma (dx - \beta c dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases}$$

根据定义可以得到速度变换公式以及逆变换公式：

$$\begin{cases} v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2} \\ v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - Vv_x/c^2} \\ v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - Vv_x/c^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = \frac{v'_x + V}{1 + Vv'_x/c^2} \\ v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + Vv'_x/c^2} \\ v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + Vv'_x/c^2} \end{cases}$$



- 光速不变：若  $v_x = c$ , 则  $v'_x = c$ ; 类似地, 若  $v_y = c, v_x = 0$ , 则

$$v'_y = c\sqrt{1 - V^2/c^2}, v'_x = V \Rightarrow v' = c$$

- 光速为速度合成的上限：若  $V < c, v'_x < c$ , 则

$$\left(1 - \frac{v'_x}{c}\right)\left(1 - \frac{V}{c}\right) > 0 \Rightarrow v_x = \frac{v'_x + V}{1 + Vv'_x/c^2} < c$$

- 矢量形式：

$$\vec{v}' = \frac{\vec{v} + (\gamma - 1)(\hat{\beta} \cdot \vec{v})\hat{\beta} - \gamma\vec{\beta}}{\gamma\left(1 - \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{v}}{c}\right)}$$

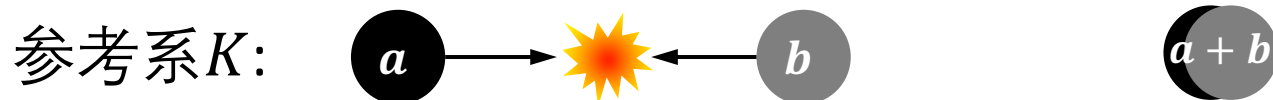
- 加速度变换:

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{\vec{a} + (\gamma - 1)(\hat{\beta} \cdot \vec{a})\hat{\beta} + \gamma(\vec{\beta} \cdot \vec{a})\vec{v}'/c}{\gamma^2 \left(1 - \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{v}}{c}\right)^2}$$

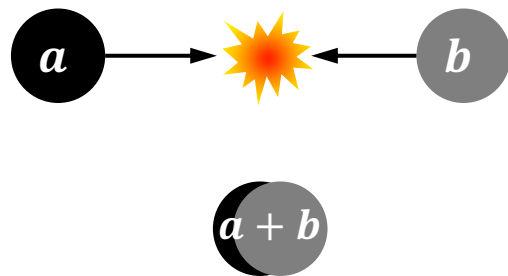
可见，加速度不再不变。相对应的，牛顿第二定律在洛伦兹变换下不再不变

## b. 相对论动量

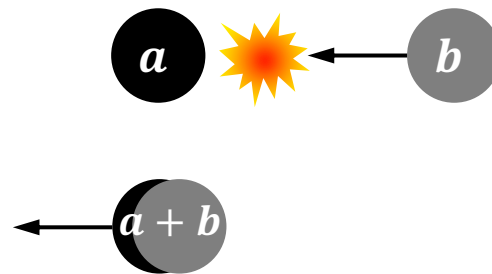
- 能量与动量与时空平移对称性有关，因此是比动力学定律更基本的量
- 在相对论中，时空平移对称性仍然存在，因此能量与动量仍然是守恒的
- 首先检查动量守恒与相对论速度变换是否相容
- 考虑两个粒子对心碰撞的情况。设在参考系 $K$ ，两个质量为 $m$ 的全同粒子 $a$ 、 $b$ 以大小相等方向、相反的速度 $v$ 进行对撞；总动量为0。对撞后两个粒子黏在一起，在参考系 $K$ 保持静止



参考系 $K$ :

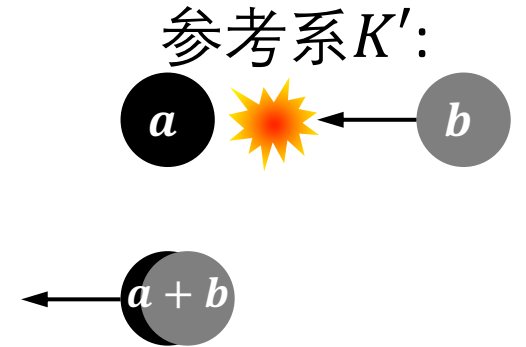


参考系 $K'$ :



- 假设 $K'$ 以 $v$ 的速度相对于 $K$ 运动，现在在 $K'$ 中考察整个过程
- 粒子 $a$ 在 $K'$ 中静止；粒子 $b$ 的速度为，

$$v'_b = -\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$



- 对撞过后，两个粒子黏在一起。根据总动量守恒，可以得到黏在一起的 $ab$ 粒子的速度，

$$mv'_b = -\frac{2mv}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = 2mv'_{ab}$$

$$\Rightarrow v'_{ab} = -\frac{v}{1 + v^2/c^2}$$

- 另一方面,  $v'_{ab}$  也可以通过速度变换得到, 考虑到  $v_{ab} = 0$ ; 可以得到,

$$v'_{ab} = -v$$

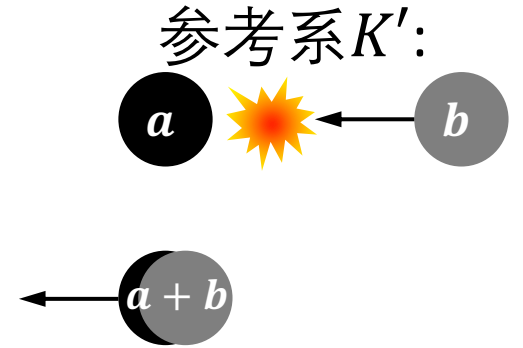
- 这个结果与用动量守恒求的结果矛盾! 这说明, 速度变换与动量守恒是不相容的。
- 为此我们需要修改动量的定义。类似地, 可以利用弹性散射得到动能也需要修改。
- 假定动量与速度满足关系,

$$\vec{p} = M(v)\vec{v}$$

其中,  $M(v)$  是速度的光滑函数。重新考察上面的过程。在  $K'$  中根据动量守恒,

- 粒子 $a$ 在 $K'$ 中静止；粒子 $b$ 的速度为，

$$v'_b = -\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$



- 对撞过后，两个粒子黏在一起。根据总动量守恒，可以得到黏在一起的 $a + b$ 粒子的速度，

$$M(v'_b)v'_b = M_{ab}(v'_{ab})v'_{ab}$$

这里 $v'_{ab} = -v$ 可以根据速度变换求得。

- 需要注意的一点是 $a + b$ 粒子的质量 $M_{ab}$ 。在牛顿力学里质量是守恒的，因此 $M_{ab} = 2m$ 。在这里如果我们也假设动质量守恒，则有 $M_{ab} = M(v'_b) + M(0)$ ，

这样以来可以得到,

$$M\left(\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}\right)\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}} = \left(M\left(\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}\right) + M(0)\right)v$$
$$\Rightarrow M\left(\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}\right) = M(0)\frac{1+v^2/c^2}{1-v^2/c^2}$$

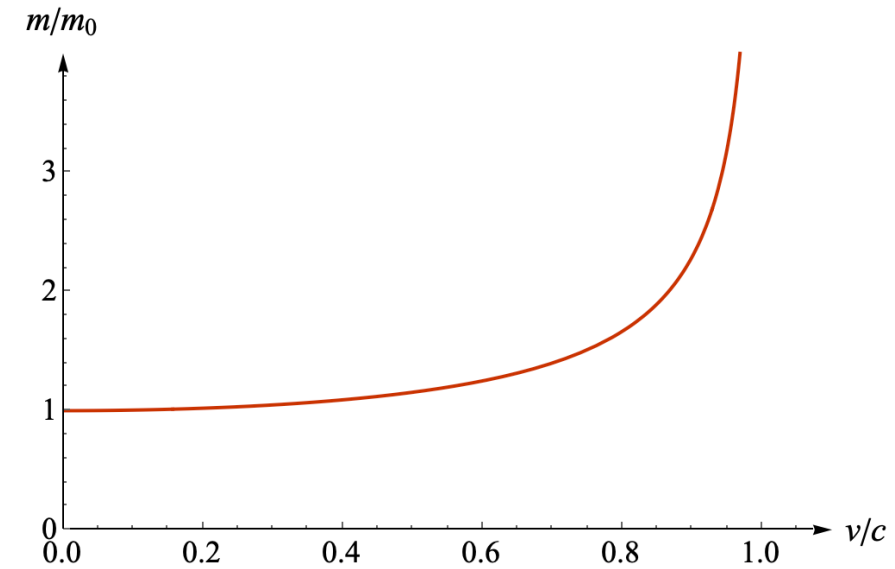
做变量代换可以得到:

$$M(v) = \frac{M(0)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$



- $M_0 \equiv M(0)$ 叫做粒子的静止质量(rest mass)
- 动质量

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



随着粒子速度增加而增大。当粒子速度接近光速时，动质量趋近于无穷大。

- 相对论动量：

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- 动质量的洛伦兹变换,

$$m(v') = m(v)\gamma_V \left( 1 - \vec{\beta}_V \cdot \frac{\vec{v}}{c} \right)$$

此处,  $\beta_V = \frac{V}{c}$ ,  $\gamma_V = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_V^2}}$ ,  $V$  为惯性参考系之间的速度, 要与粒子

速度区分

- 相对论动量的洛伦兹变换

$$\vec{p}' = \vec{p} + (\gamma_V - 1)(\hat{\beta} \cdot \vec{p})\hat{\beta} - \gamma_V \vec{\beta} \gamma m_0$$

动量的变换与坐标变换很类似

## c. 相对论动力学与相对论动能

- 牛顿第一定律(惯性定律)在相对论中仍然成立
- 牛顿第二定律将运动状态的改变定义为力；具体而言，牛顿将运动状态定义为动量。上一节，我们重新定义了相对论动量，使得动量守恒仍然成立。有了动量的合理的定义，现在考虑牛顿第二定律，仍然将动量的改变定义为力，

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

这样以来，牛顿第二定律与动量守恒仍然是相容的

- 牛顿第三定律：本质上是动量守恒，在相对论中仍然成立

- 注意，在相对论中，信息和能量传播的速度是有限的，因此这对于相对论力的形式提出了限制。在相对论力学中更常用的形式是势能的概念，并且势能的来源是场，而不是直接来自粒子（当然，场是由粒子产生的）
- 例子：电磁力(洛伦兹力)

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

取决于电磁场 $\vec{E}, \vec{B}$ ，而电磁场由电荷与电流产生(麦克斯韦方程组)

- 例子：万有引力是超距作用，与相对论天然违背

- 冲量定理：在相对论中仍然成立
- 动能定理：与机械能守恒有关。能量守恒来自于时间平移对称性，因此在相对论中仍然成立。但由于我们修改了牛顿第二定律，必然需要修改动能的定义。考虑一个质点在力的作用下从静止加速到速度 $v$ ,

$$W = \Delta T = T - T_0$$

其中，外力做功为 $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ，下面利用牛顿第二定律计算相对论动能，

$$\Delta T = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \cdot \vec{v} dt$$

$$\int g df = gf - \int f dg$$

- 下一步利用分部积分,

$$\begin{aligned}\Delta T &= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \int \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot d\vec{v} = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{2} \int \frac{m_0 dv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{c^2}{2} \int \frac{m_0 d\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2\end{aligned}$$

- 初始时刻动能为0，因此这里得到的表达式是速度为 $v$ 的质点的相对论动能：

$$T = m(v)c^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 = (\gamma - 1)m_0c^2$$

- 在质点速度比较低时，做泰勒展开可以得到牛顿力学的动能，

$$T \approx \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + \dots$$

- 还可以定义静止能量 $E_0 = m_0c^2$ 以及总能量 $E = E_0 + T = m(v)c^2$ ，从这个角度讲，动质量守恒本质上是总能量守恒，即在相对论中，静止质量不守恒，总能量守恒

- 质能关系：

$$E = m(v)c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma m_0 c^2$$

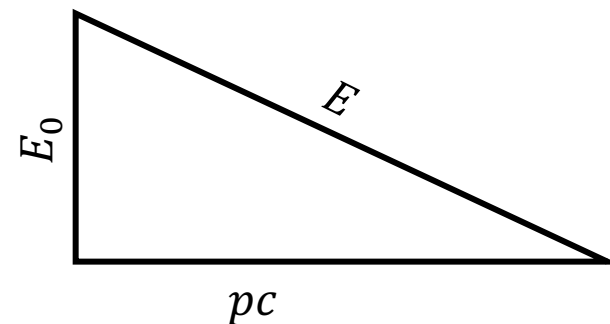
- 动量：

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma m_0 \vec{v}$$

- 容易验证，能量与动量之间满足，

$$E^2 = m_0^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{m_0^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$$



质能三角形



- 当一个粒子的静止能量远小于其动能时( $E \gg m_0 c^2$ ), 其能量近似正比于其动量:  $E \approx pc$ 。这样的粒子叫做极端相对论性粒子
- 在现代大型粒子加速器上, 电子、质子可以被加速到非常高的能量, 这些粒子都是极端相对论性的
- 此外, 如果一个粒子的静止质量严格为零, 则其是极端相对论性的。这样的粒子在非相对论力学中是无法出现的, 否则任何相互作用都会导致其加速度无穷大, 而且, 这样的粒子在非相对论力学中的动量、动能皆为零。相对论允许这样的粒子存在, 其具有有限的能量 $E$ 和动量 $p$ 且满足 $E = pc$ , 但其速度恒为光速。构成光的微观粒子——光子就是这样的粒子。

- 角动量：相对论角动量可以直接从牛顿力学推广，

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

角动量定理：

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

- 质点系动量：

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$$

但是质心定理不再成立。

考虑质心坐标  $\vec{r}_{\text{cm}}$  :

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i \gamma_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i \gamma_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i \gamma_i m_i \vec{r}_i, \quad \left( M = \sum_i \gamma_i m_i \right)$$

不难验证,

$$M \frac{d\vec{r}_{\text{cm}}}{dt} \neq \vec{P}, \quad \frac{dM\vec{r}_{\text{cm}}}{dt} \neq \vec{P}$$

其中为总质量。

- 虽然无法定义质心参考系, 但仍然可以定义动量中心(center of momentum)参考系, 在这一参考系总动量 $\vec{P}$ 为零。

- 质点系动能：

$$T = \sum_i (\gamma_i - 1) m_i c^2$$

但是柯尼希定理不再成立，即系统动能无法分解为质心动能与相对动能相加

## d. 相对论碰撞

- 动量守恒

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_f \vec{p}'_f$$

- 能量守恒：相对论性能量包含了所有形式的内部能量

$$\sum_i E_i = \sum_f E'_f$$

- 质能关系：

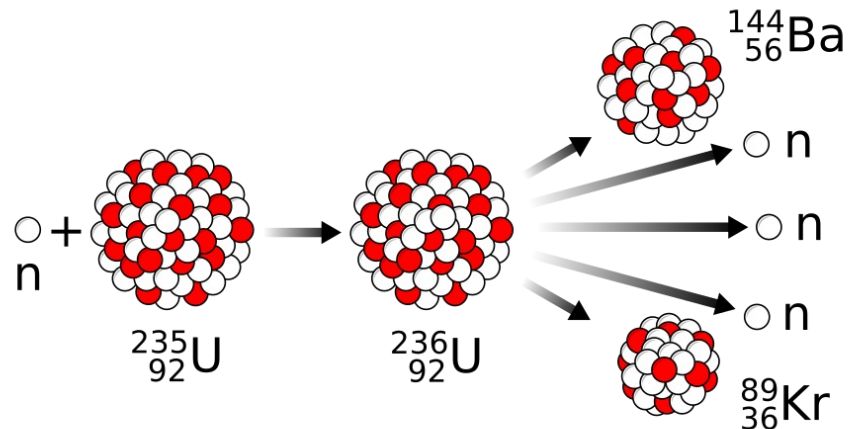
$$E_i = \sqrt{m_i^2 c^4 + \vec{p}_i^2 c^2}$$

- Q值：反应前后粒子的静止能量差，又叫做质量亏损：

$$Q = \sum_i m_i^2 c^2 - \sum_f m_f^2 c^2$$

- $Q \geq 0$ : 放热反应;  $Q < 0$ : 吸热反应

【例子】粒子衰变，在粒子静止参考系初始动能为0，因此只有  $Q \geq 0$  的衰变反应才能发生。铀-235在中子诱导下发生裂变反应会产生约千分之一的质量亏损。这些能量转化为巨大的产物动能，比例比化学能大了6个数量级！





- 反应阈值：
  - 粒子碰撞生成新的粒子时，一部分能量需要用来转化为产物的静止能量，另外一部分能量用来维持动量守恒，因此需要初始粒子有一定的动能才能发生。
  - 在阈值处，产物粒子速度相等，即在动量中心参考系中产物粒子处于相对静止的状态
  - 考虑如下反应：

$$A_1 + A_2 \rightarrow \sum_i A'_i$$

能量守恒：

$$E_1 + E_2 = \sum_i E'_i \xrightarrow{\text{阈值}} \gamma \sum_i m_i c^2 \equiv \gamma M_f c^2$$



- 动量守恒:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \sum_i \vec{p}'_i \xrightarrow{\text{阈值}} \gamma \sum_i m_i \vec{v} = \gamma M_f \vec{v}$$

可以得到:

$$\vec{v} = \frac{\vec{P}}{E} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{E_1 + E_2}$$

- 固定靶实验利用束流轰击静止的靶粒子,  $\vec{p}_1 \neq 0$ ,  $\vec{p}_2 = 0$ 。以上方程化简为,

$$\begin{aligned} E_1^* + m_2 c^2 &= \gamma M_f c^2 \\ \vec{p}_1^* &= \gamma M_f \vec{v} \end{aligned}$$

利用  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow (\gamma\beta)^2 + 1 = \gamma^2$

$$p_1^{*2}c^2 + M_f^2c^4 = (E_1^* + m_2c^2)^2$$

化简得到：

$$E_1^{*2} - m_1^2c^4 + M_f^2c^4 = E_1^{*2} + m_2^2c^4 + 2E_1^*m_2c^2$$

进一步化简：

$$E_{FT} \equiv E_1^* = \frac{(\sum_i m_i)^2 c^4 - m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4}{2m_2 c^2}$$

- 对撞实验利用束流对撞使得初始总动量为零： $\vec{P} = 0$ 。则，需要的阈值能量为，

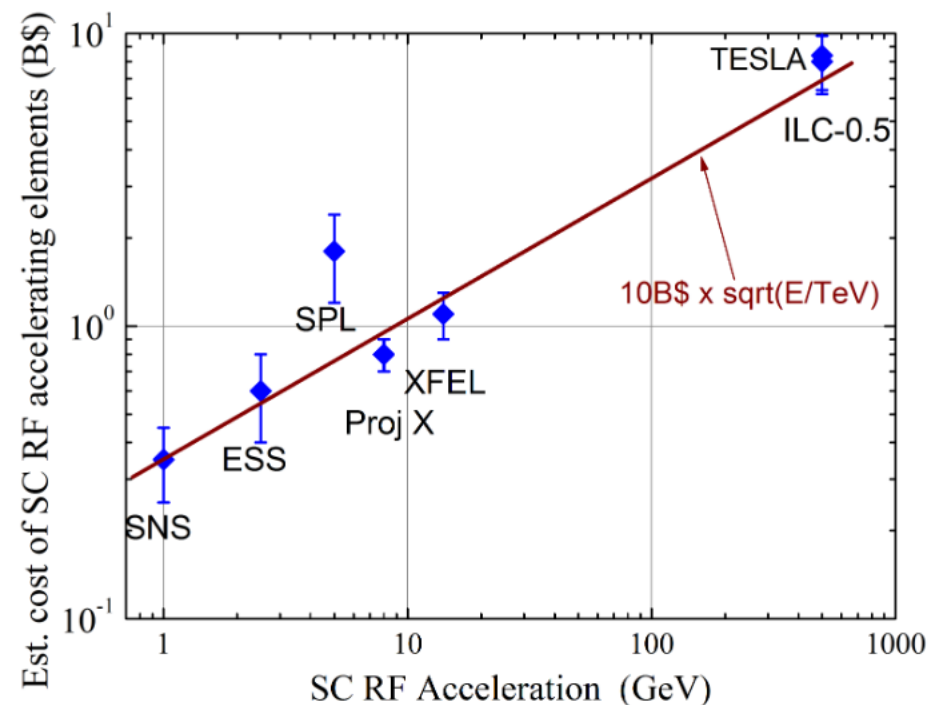
$$E_{Col} \equiv E^* = E_1 + E_2 = \sum_i m_i c^2$$

- 若产生的末态粒子质量较大:  $M_f \gg M_i = m_1 + m_2$ , 两种模式需要的阈值能量之比为:

$$\frac{E_{FT}}{E_{Col}} = \frac{\sum_i m_i}{2m_2} \gg 1$$

【例子】LHC通过对撞质子-质子(1 GeV)产生希格斯粒子(120 GeV), 需要的能量阈值为 120 GeV, 而类似的质子打质子固定靶实验则需要7000 GeV, 即7 TeV。

类似地, CEPC对撞正负电子(0.5 MeV)产生希格斯粒子(120 GeV), 需要的能量阈值为 120 GeV, 而类似的电子打正电子固定靶实验则需要 $10^7$ GeV, 即10 PeV, 造价约为1万亿美元 (24年我国GDP为18万亿美元)。



- 粒子衰变是粒子碰撞的一种特殊情况：

$$A \rightarrow \sum_i A'_i$$

根据能量动量守恒：

$$Mc^2 = \sum_i E'_i$$

$$0 = \sum_i \vec{p}'_i$$

由于  $E'_i \geq m'_i c^2$ ，要使衰变发生，粒子质量需要满足：

$$M \geq \sum_i m'_i$$

对于两体衰变，即末态有两个粒子的情形，动量守恒要求两个产物的动量大小相等、方向相反：

$$\vec{p}'_1 = -\vec{p}'_2 \Rightarrow p'_1 = p'_2 \equiv p'$$

• 再代入能量守恒：

$$\begin{aligned} Mc^2 &= \sqrt{p'^2 c^2 + m_1^2 c^4} + \sqrt{p'^2 c^2 + m_2^2 c^4} \\ &= E_1 + \sqrt{E_1^2 + (m_2^2 - m_1^2) c^4} \end{aligned}$$

可以求出：

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} c^2, \quad E_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M} c^2$$

可见，两体衰变的末态产物动能是确定的。

【例子】大统一理论预言质子可能会衰变为一个正电子和一个 $\pi$ 介子。产生的 $\pi$ 介子会很快衰变为两个光子。求静止的质子进行上述反应产生的光子的最大可能的能量。已知， $m_p=938 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_e=0.5 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_\pi=135 \text{ MeV}/c^2$ .

解答：两个反应的Q值都比产物静止质量要远大，因此需要考虑相对论效应。  
对于反应：

$$p \rightarrow e^+ + \pi$$

根据能量、动量守恒：

$$m_p c^2 = \sqrt{m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2} + \sqrt{m_\pi^2 c^4 + p_\pi^2 c^2},$$
$$\vec{p}_e + \vec{p}_\pi = 0 \Rightarrow p_e = p_\pi$$

带入能量守恒，消去 $p_e$ ，整理可以得到，

$$p_\pi = \frac{\sqrt{(m_p^2 + m_\pi^2 - m_e^2)^2 - 4m_p^2 m_\pi^2}}{2m_p} c, \quad E_\pi = \frac{m_p^2 + m_\pi^2 - m_e^2}{2m_p} c^2 = 479 \text{ MeV}$$

【例子】大统一理论预言质子可能会衰变为一个正电子和一个 $\pi$ 介子。产生的 $\pi$ 介子会很快衰变为两个光子。求静止的质子进行上述反应产生的光子的最大可能的能量。已知， $m_p=938 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_e=0.5 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_\pi=135 \text{ MeV}/c^2$ .

对于反应：

$$\pi \rightarrow \gamma + \gamma$$

根据能量、动量守恒：

$$E_\pi = k_1 c + k_2 c,$$
$$\vec{p}_\pi = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \Rightarrow \vec{k}_2 = \vec{p}_\pi - \vec{k}_1$$

对于第二个式子平方，代入第一个式子消去 $k_2$ ，可以得到：

$$\frac{E_\pi}{c} = k_1 + \sqrt{p_\pi^2 + k_1^2 - 2p_\pi k_1 \cos \theta}$$

其中， $\theta$  是光子1和 $\pi$ 介子之间的夹角。先要需要求 $E_1=ck_1$ 的最大值，整理得到：

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{(E_\pi^2 - p_\pi^2 c^2)}{E_\pi - p_\pi c \cos \theta} = \frac{1}{2} \frac{m_\pi^2 c^4}{E_\pi - p_\pi c \cos \theta}$$

【例子】大统一理论预言质子可能会衰变为一个正电子和一个 $\pi$ 介子。产生的 $\pi$ 介子会很快衰变为两个光子。求静止的质子进行上述反应产生的光子的最大可能的能量。已知， $m_p=938 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_e=0.5 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_\pi=135 \text{ MeV}/c^2$ .

其中， $\theta = 0$ 时，取到最大值，为：

$$E_{1max} = \frac{1}{2} \frac{m_\pi^2 c^4}{E_\pi - p_\pi c \cos \theta} = \frac{1}{2} \frac{m_\pi^2 c^4}{E_\pi - p_\pi c} = 496.3 \text{ MeV}$$

第二部分也可以采用质心参考系来计算：

在 $\pi$ 介子静止参考系，衰变为两个等能量的光子，其能量都为

$$E_{1,2}^c = \frac{1}{2} m_\pi c^2$$

变换到实验室参考系，最大光子能量为与 $\pi$ 介子运动方向相同的光子。只需要做洛伦兹变换即可。其中 $\gamma_\pi = \frac{E_\pi}{m_\pi c^2}$ ,  $\beta_\pi = \frac{p_\pi c}{E_\pi}$ 。不难得到相同的结果。

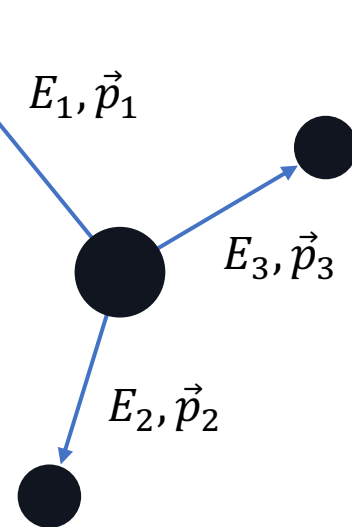


【例子】相对论三体衰变又叫做Dalitz衰变。考虑质量为 $M$ 的静止粒子，衰变为三个质量相等的粒子，每个粒子质量为 $m$ 。现考虑三个粒子为相对论性粒子，每个粒子的动能分别为 $T_1, T_2, T_3$ 。求 $T_1, T_2, T_3$ 可能的取值范围。

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0 \quad (1)$$

$$E_1 + E_2 + E_3 = Mc^2 \quad (2)$$

动能:  $T_i = E_i - mc^2$   
 $\Rightarrow \vec{p}_i^2 c^2 = T_i^2 + 2mc^2 T_i$



$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow \vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2 + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_2|\cos\theta_{12} = \vec{p}_3^2 \\ &\Rightarrow \frac{T_1^2}{c^2} + 2mT_1 + \frac{T_2^2}{c^2} + 2mT_2 + 2\sqrt{\left(\frac{T_1^2}{c^2} + 2mT_1\right)\left(\frac{T_2^2}{c^2} + 2mT_2\right)}\cos\theta_{12} \\ &= \frac{T_3^2}{c^2} + 2mT_3 \end{aligned}$$

$$(2) \Rightarrow T_1 + T_2 + T_3 = Mc^2 - 3mc^2 \equiv Q$$

动能分数  $x_i = \frac{T_i}{Q}$ ,  $\mu \equiv \frac{mc^2}{Q}$  非相对论性

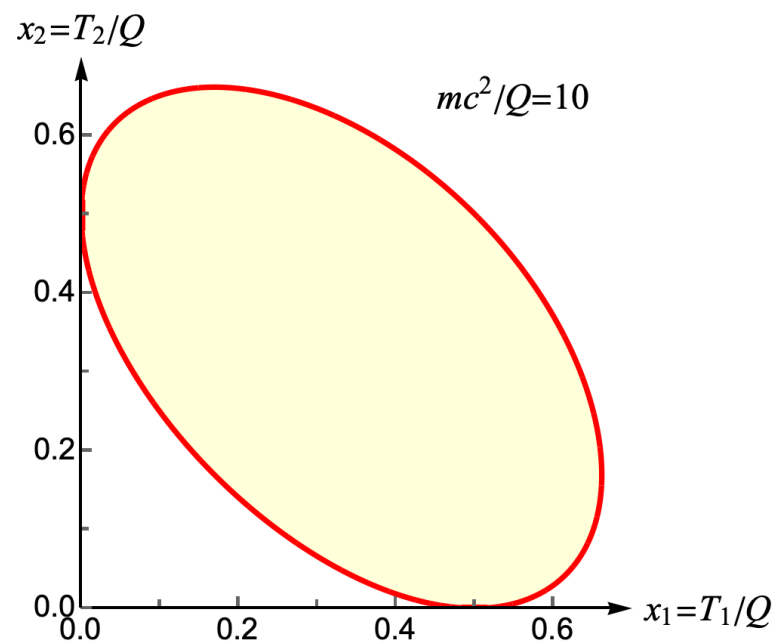
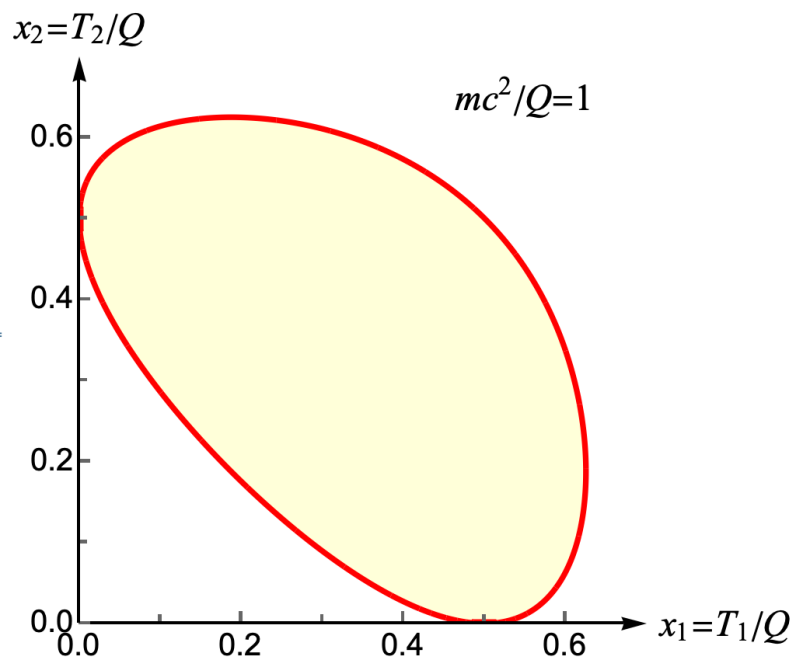
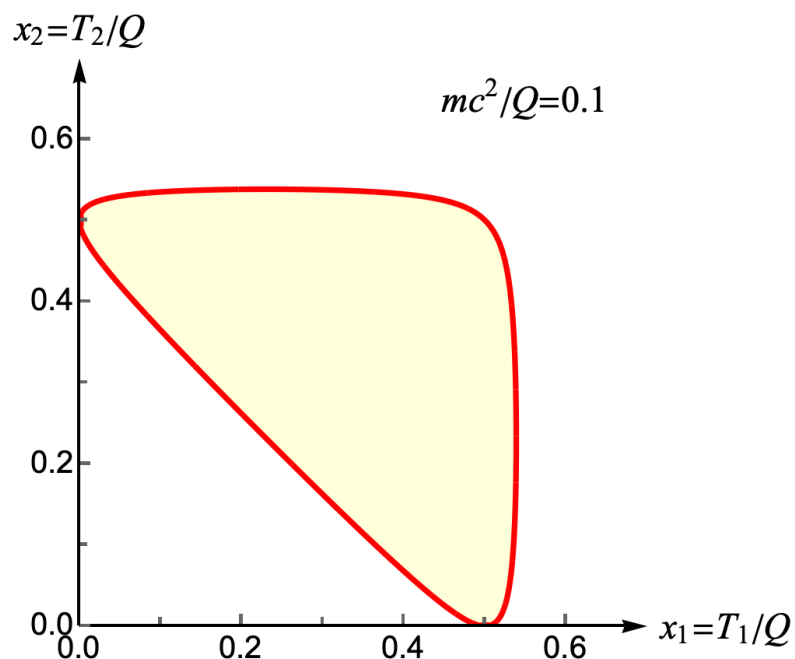
$$\left[ \frac{1}{2} + \mu - (x_1 + x_2)(2\mu + 1) + x_1 x_2 \right]^2 \leq x_1 x_2 (x_1 + 2\mu)(x_2 + 2\mu)$$

$$\left[\frac{1}{2} + \mu - (x_1 + x_2)(2\mu + 1) + x_1x_2\right]^2 \leq x_1x_2(x_1 + 2\mu)(x_2 + 2\mu)$$

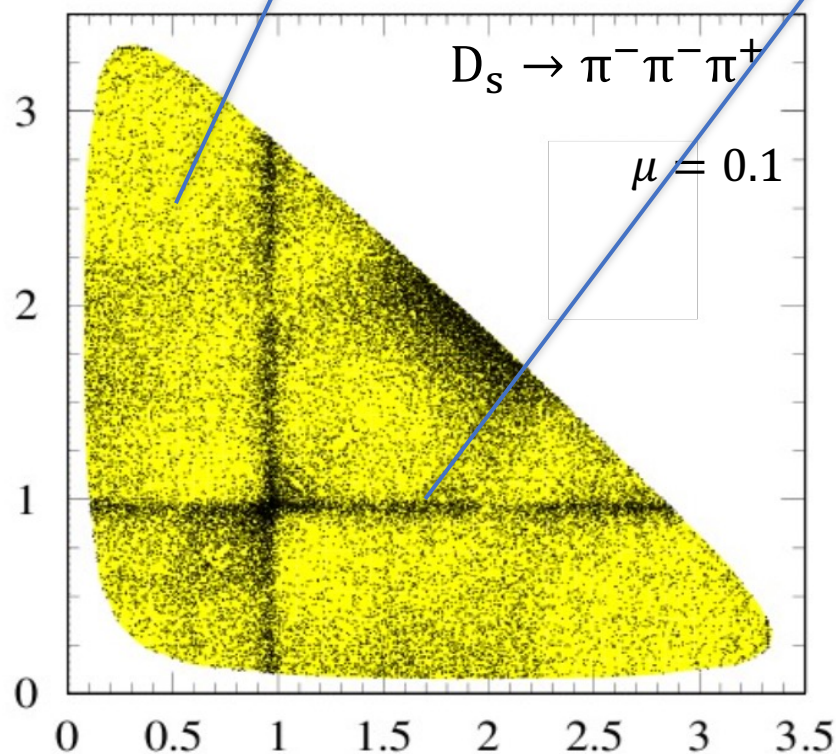
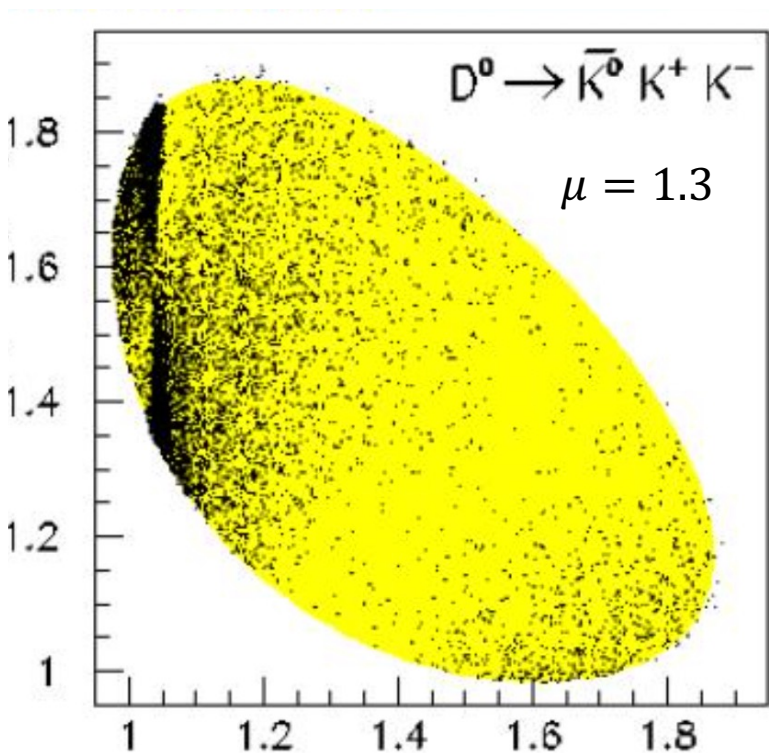
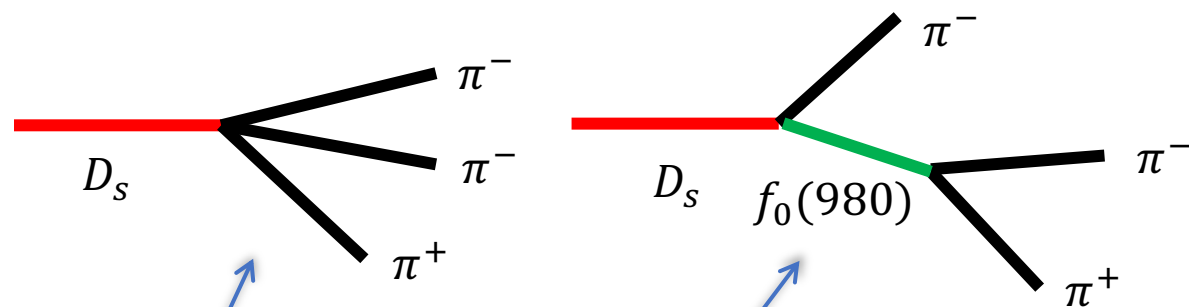
a. 非相对论极限:  $\mu \rightarrow \infty$ :  $\left(\frac{1}{2} - x_1 - x_2\right)^2 \leq x_1x_2$  (圆锥曲线)

b. 极端相对论极限:  $\mu \rightarrow 0$ :  $\left|\frac{1}{2} + x_1x_2 - x_1 - x_2\right| \leq x_1x_2$

$$x_i = \frac{T_i}{Q}, \mu = \frac{mc^2}{Q}$$



现代的达利兹图，横纵坐标采用的是  $m_{ab}^2 \equiv (p_a + p_b)^2$ ，其中  $p_a$  为4-动量 ( $a = 1, 2, 3$ )，为什么？证明在质心参考系，其与动能  $T_{1,2,3}$  的关系为线性的，即  $m_{12}^2 = (M - m)^2 - 2MT_3$



Richard Dalitz

## e. 时空与引力

- 广义不变性原理
  - 历史发展：马赫原理
  - 动力学方程在任何参考系形式不变  $\rightarrow$  局域惯性参考系（狭义相对论）  
 $\rightarrow$  牛顿定律
  - 数学工具的推广：（狭义相对论）四维矢量、（广义相对论）微分几何
$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \rightarrow f^\mu = \frac{D}{D\tau} p^\mu$$
- 引力与时空本身的几何性质
  - 等效原理：引力质量与惯性质量
  - 时空弯曲、爱因斯坦场方程

# 课程脉络

