

小班第一讲：微积分与矢量分析

李 阳

中国科学技术大学近代物理系



力学A · 2026年秋

§1 微分的运动学起源

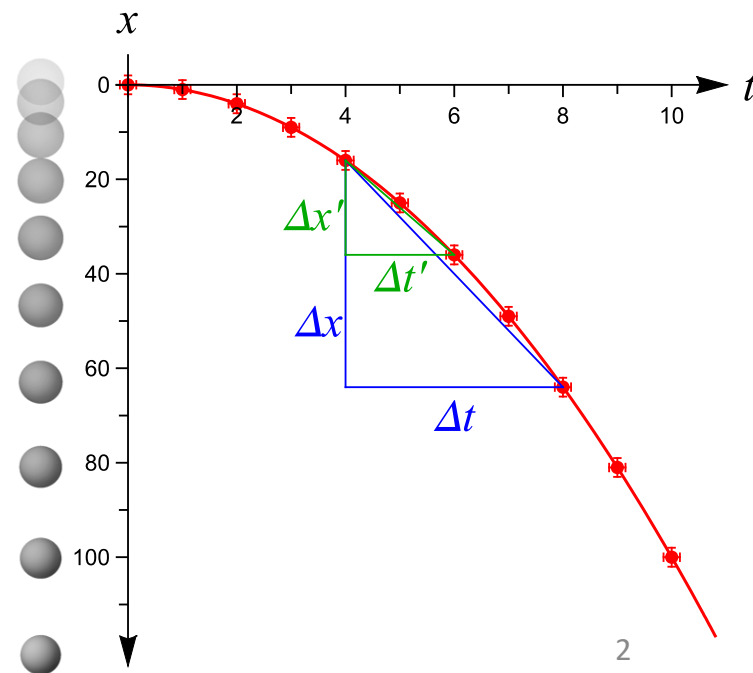
平均速度:

$$\bar{v}_{i \rightarrow i+1} = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} \rightarrow \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

瞬时速度: 极限

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

【例子】考虑自由落体运动 $x(t) = gt^2$, 求平均速度与瞬时速度



- 莱布尼茨 (Gottfried W. Leibniz) 把通过取极限求瞬时速度的一般方法叫做微分 (differentiation), 并把上面的表达式记做微商 (infinitesimal quotient) 的形式,

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt}$$

微分的值叫做导数 (derivative)

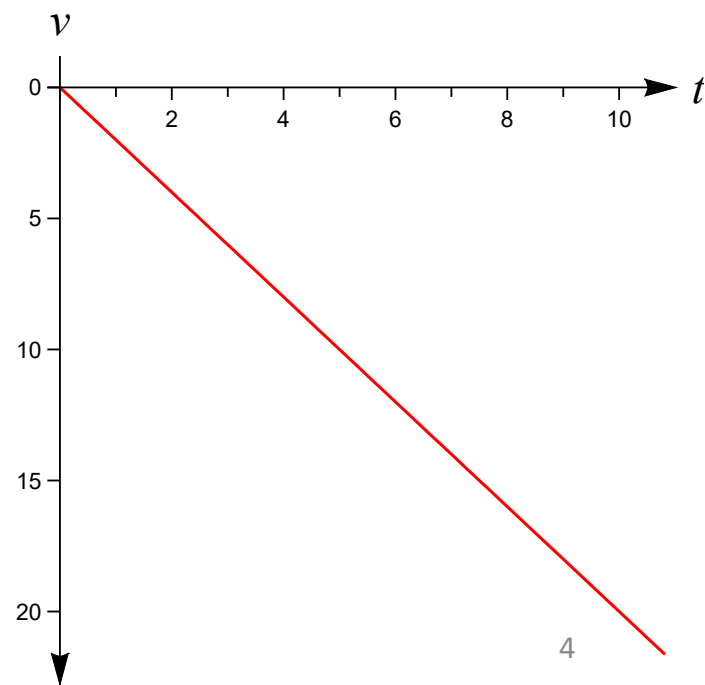
- 牛顿(Issac Newton)则把导数叫做流数 (fluxion), 记做, $v = \dot{x}(t)$ 。因此他的求导数的方法叫做流数法 (Method of Fluxions)。此外还有拉格朗日记法 $x'(t)$ 、欧拉记法 $D_x(t)$ 等

a. 高阶导数

瞬时速度仍然是时间的函数，因此可以对它进一步求导数，得到的量叫做加速度

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

当然还可以定义更高阶的微分，比如加速度的时间导数叫做加加速度（jerk）。这些高阶时间导数主要在工程实践和应用科学中有用。在经典力学中，由于牛顿第二定律，我们只需要研究到加速度。



§2 微分的数学定义

- **函数极限** (limit): 如果当自变量 x 无限趋于某一个值 x_0 时, 函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一个数值 a , 则称 a 为函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 并记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

- 数学家的定义: $\epsilon - \delta$ 语言
- 在经典物理中, 一般会假定实际物理过程的极限总是存在的, 因此不需要严格地去用 $\epsilon - \delta$ 语言来定义以及检验极限

「一尺之捶, 日取其半, 万世不竭」《庄子·天下》
「非半弗斫则不动, 说在端」《墨子·经下》

- 导数(derivative):

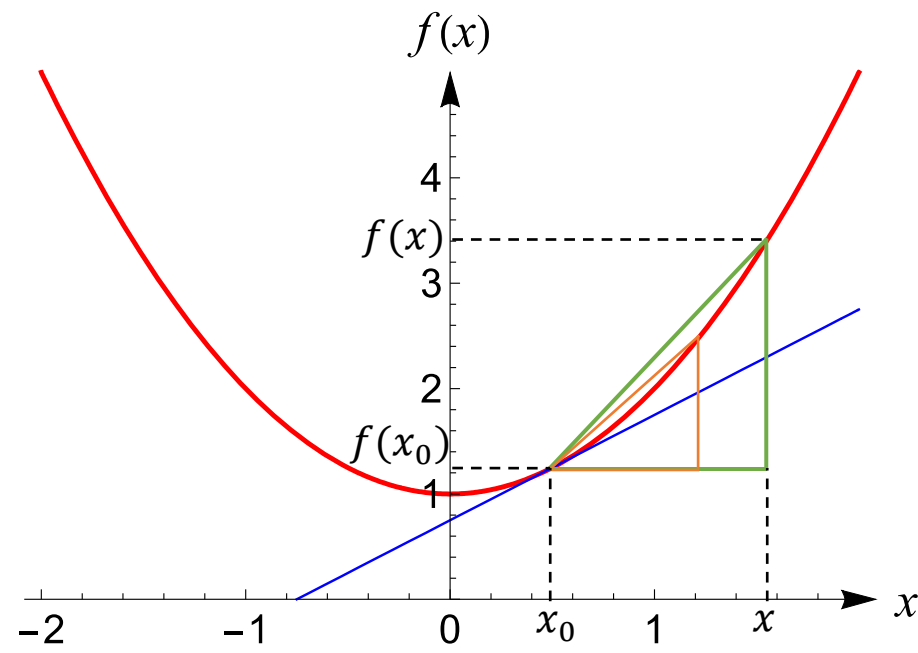
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \equiv \left. \frac{df}{dx} \right|_{x \rightarrow x_0}$$

一般来说, 莱布尼茨记号会更常用一些

- 导数的几何含义: 切线斜率(tangent)

【例子】 三角函数(trigonometric function)的导数

【例子】 指数函数(exponential function)的导数



a. 导数的基本性质

- 函数之和的导数

$$\frac{d}{dt}(f + g) = \frac{d}{dt}f + \frac{d}{dt}g$$

- 函数之积的导数 (莱布尼茨法则, Leibniz's rule/product rule)

$$\frac{d}{dt}(fg) = \left(\frac{d}{dt}f\right)g + f\frac{d}{dt}g$$

- 复合函数的导数 (链式法则, chain rule)

$$\frac{d}{dx}f(u(x)) = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}, \quad f'_x(u(x)) = f'_u(u) \Big|_{u=u(x)} u'_x$$

【例子】 幂函数的导数 $(x^a)'$

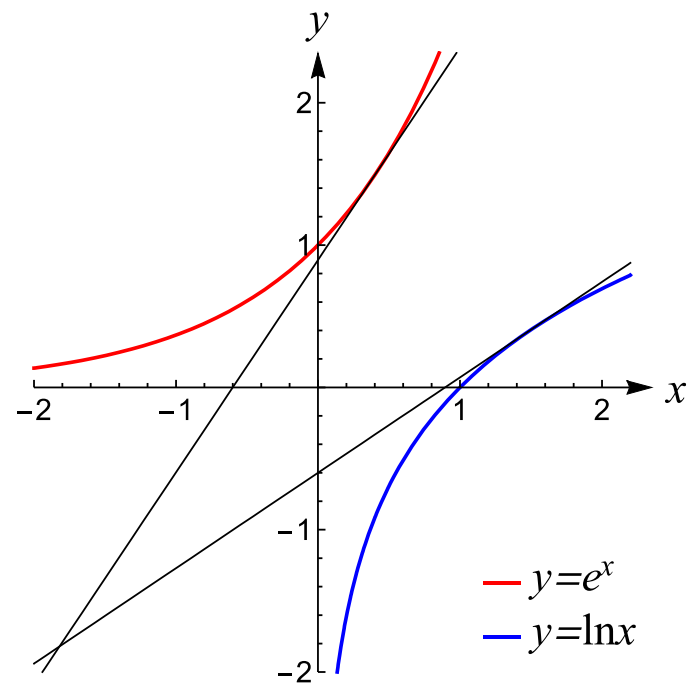
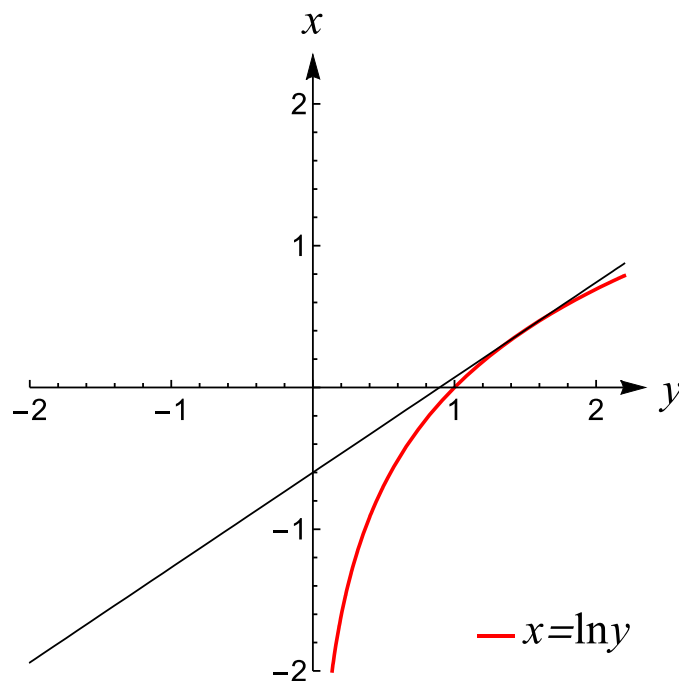
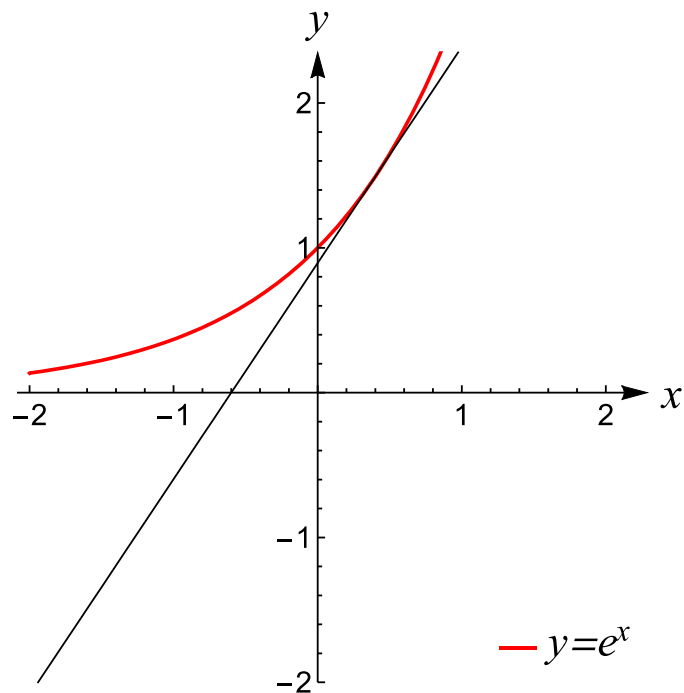
【例子】 $(\ln[x + \sqrt{x^2 + 1}])'$

- 反函数的导数

- 函数 $y = f(x)$, 反函数: $x = f^{-1}(y) \Rightarrow$ 调整变量 $f^{-1}(x)$

- 导数 (注意变量的调整)

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$



【例子】 对数函数的导数 $(\ln x)'$

【例子】 三角函数反函数的导数

双曲函数 (hyperbolic functions)

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

$$\operatorname{arcsinh} t = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$$

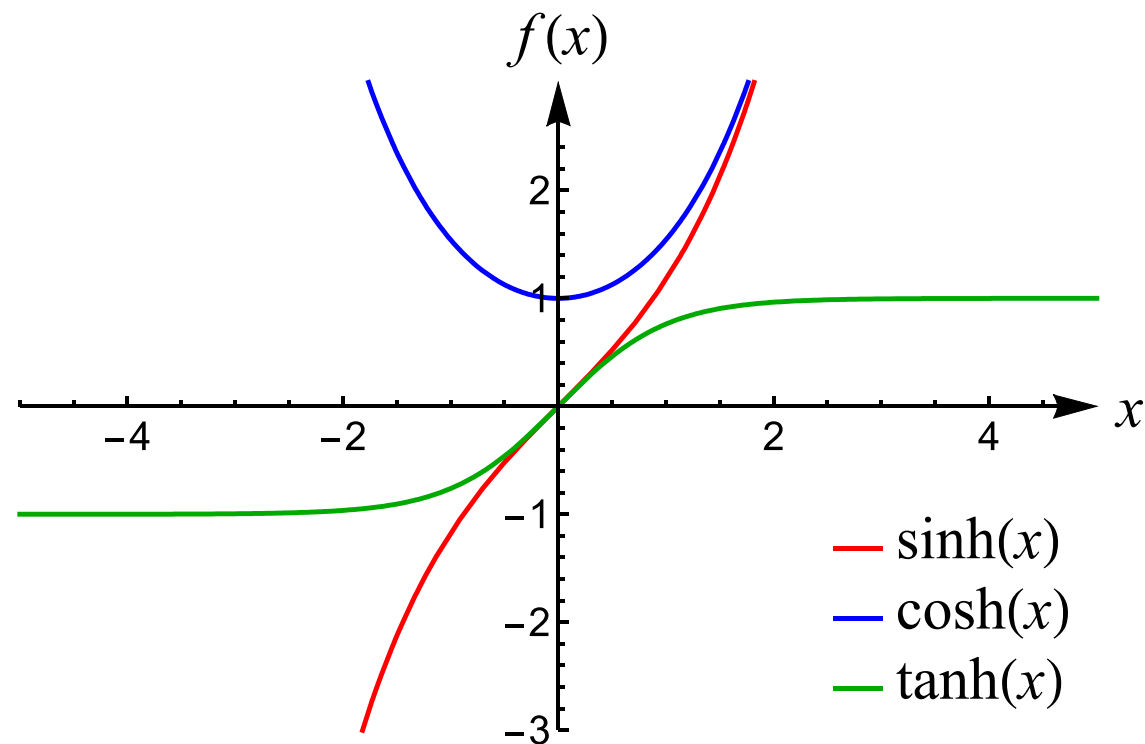
$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

$$\operatorname{arccosh} t = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}), \quad (|t| > 1)$$

$$\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}},$$

$$\operatorname{arctanh} t = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}, \quad (|t| < 1)$$

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$



常见初等函数的导数

$$\frac{d}{dt} \text{Const} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \sin t = \cos t$$

$$\frac{d}{dt} \arcsin t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{d}{dt} t^a = at^{a-1}$$

$$\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t$$

$$\frac{d}{dt} \arccos t = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{d}{dt} e^t = e^t$$

$$\frac{d}{dt} \tan t = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\frac{d}{dt} \arctan t = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\frac{d}{dt} \ln t = \frac{1}{t}$$

$$\frac{d}{dt} \sinh t = \cosh t$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arcsinh} t = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\frac{d}{dt} a^t = a^t \ln a$$

$$\frac{d}{dt} \cosh t = \sinh t$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arccosh} t = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}, (t > 1)$$

$$\frac{d}{dt} \log_a t = \frac{1}{t \ln a}$$

$$\frac{d}{dt} \tanh t = \frac{1}{\cosh^2 t}$$

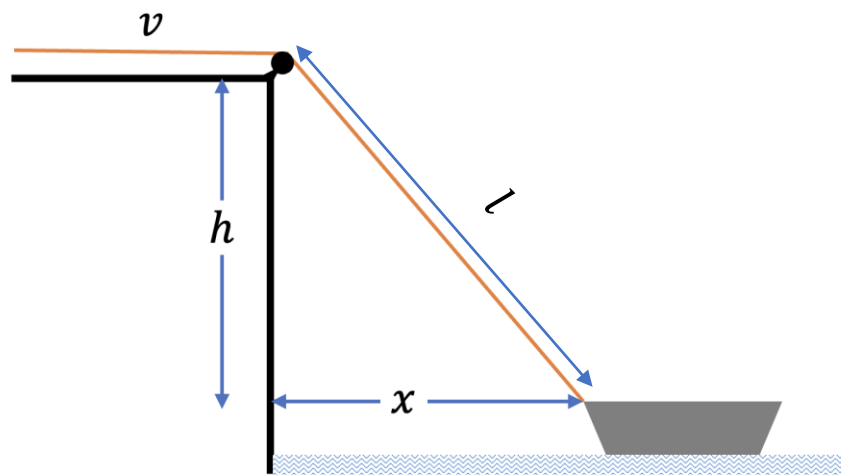
$$\frac{d}{dt} \operatorname{arctanh} t = \frac{1}{1-t^2}, (t < 1)$$

b. 微分 (differentials)

考虑函数 $y = f(x)$ ，当自变量 x 增加 Δx 时，函数的值 y 该如何改变？

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = ?$$

这里没有取极限或者假定 $\Delta x \ll 1$



【例子】已知绳子的速度为 v ，求船的速度 u 。

- $u = \frac{dx}{dt}$ ，不知道 $x(t)$ ，只知道 $v = \frac{dl}{dt}$ ，因此希望知道当绳子缩短 Δl 时，船运动的距离 Δx 是多少。根据勾股定理 $x = x(l) = \sqrt{h^2 + l^2}$

- $\Delta x = \sqrt{h^2 - l^2} - \sqrt{h^2 + (l - \Delta l)^2}$

$$u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2 - l^2} - \sqrt{h^2 + (l - \Delta l)^2}}{\Delta t} = \frac{l}{x} v$$

考虑函数 $y = f(x)$ ，当自变量 x 增加 Δx 时，考虑函数的值 y 的改变：

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

- 前面用割线的斜率来近似导数（切线的斜率），这里反过来：

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x = f'(x) \Delta x + r(x, \Delta x)$$

- $r(x, \Delta x)$ 的性质：

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(x, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) = 0$$

- 虽然我们不知道 $r(x, \Delta x)$ 的具体形式 —— 也不需要知道，我们得到：

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(x, \Delta x)}{\Delta x} = 0$$

我们把这样的量叫做无穷小量(infinitesimal)，并记作 $o(\Delta x)$

- 考虑函数 $y = f(x)$ ，当自变量 x 增加 Δx 时，考虑函数的值 y 的改变：

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

- 对比导数的莱布尼茨记号，

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

在取极限 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，我们将有限差分 Δ 替换成微分号 d

- 因此可以采取类似的记号，把上式记为，

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) - f(x) &= f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \\ \Leftrightarrow df(x) &\equiv f(x + dx) - f(x) = f'(x)dx \end{aligned}$$

- 导数可以视作微商

$$df(x) = f'(x)dx \Leftrightarrow \frac{df}{dx} = f'(x)$$

一阶微分不变性：

- 考虑复合函数 $f(u(x))$ ，根据定义一方面， $d_x f = f'_x(u(x))dx$ 。即，当 x 作为自变量发生改变时， f 相应的变化为

$$\Delta_x f \equiv f(u(x + \Delta x)) - f(u(x)) = f'_x(u(x))\Delta x + o(\Delta x)$$

另一方面， $d_u f = f'_u(u)du$ 。即，当 u 作为自变量发生改变时， f 相应的变化为

$$\Delta_u f \equiv f(u + \Delta u) - f(u(x)) = f'_u(u)\Delta u + o(\Delta u)$$

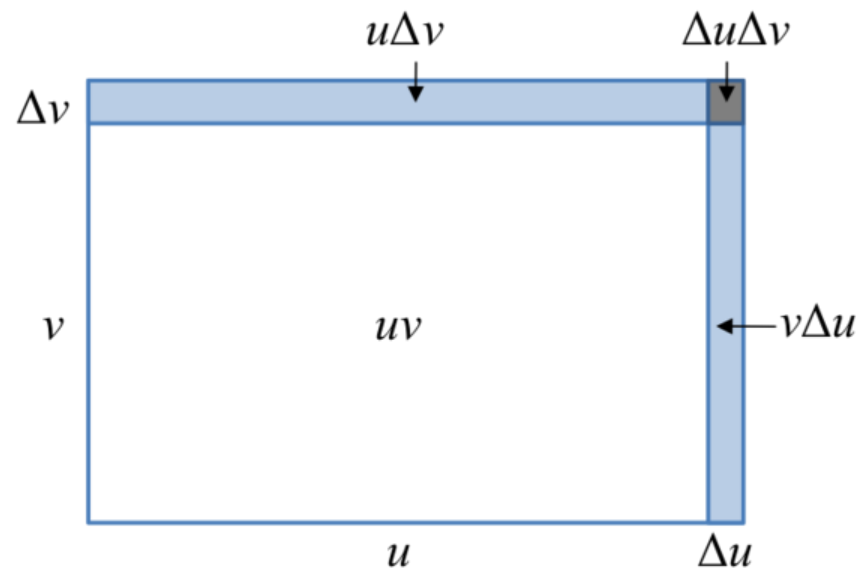
- 问题：**如果 u 的变化是由 x 改变引起的，那么两种方法计算得到的 f 的改变是否相同？即 $d_u f \stackrel{?}{=} d_x f$
- 根据复合函数的链式法则可以证明，两者的确相等，因此我们可以去掉下标，将微分记作 df 而不需要指定是相对于哪个变量的微分

可见，求函数的微分比求函数本身一般来说是要简单的。这是因为，函数的微分本质上是一种局部线性化

【例子】莱布尼茨法则

【例子】隐函数的微分 $F(x, y(x)) = 0$ ，求 $y'(x)$

【例子】参数方程的微分：已知 $x = \sin t, y = \cos t$ 。求 $y'(x)$



c. 高阶导数 (high order derivatives)

对于函数的导数可以进一步求导，这样得到的导数叫做原来函数的高阶导数。

- 二阶导数记作：

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x) = \ddot{f}(x)$$

这里约定 $dx^2 \equiv (dx)^2$

- 类似地， n 阶导数记作，

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} \right) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

- 高阶微分：

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n$$

- 注意，高阶微分不具有不变性，例如：

$$d_x^2 f(u(x)) = f_x''(u(x)) d^2 x = (f_u' u_x')' dx^2 = f_u'' du^2 + f_u' d^2 u$$

$$d_u^2 f(u) = f_u'' du^2 \neq d_x^2 f(u(x))$$

因此，考虑高阶微分时需要指定自变量

d. 泰勒展开 (Taylor expansion)

微分运算本质上是在局部线性化函数。那么，该如何获得函数在局部的高阶（非线性）信息？

【泰勒定理】 设函数 $f(x)$ 在区间 I 有 $n + 1$ 阶导数， $x_0 \in I$ ，则对于任何 $x \in I$ ，

$$f(x) - T_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1)$$

其中泰勒多项式，

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

- 进一步地，对于光滑函数 $f(x)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \cdots$$

也可以写成，

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\Delta x^n + \cdots$$

【例子】

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots$$

e. 函数形状的刻画

- 定义域、周期性、奇偶性、不连续点、不可微点、奇点
- 单调区间、驻点、极值点
 - $f'(x)$
- 凹凸区间、拐点、鞍点
 - $f''(x)$
- 渐进线
- 其他特殊点，如零点

【例子】 绘制 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的形状，并求函数最小值

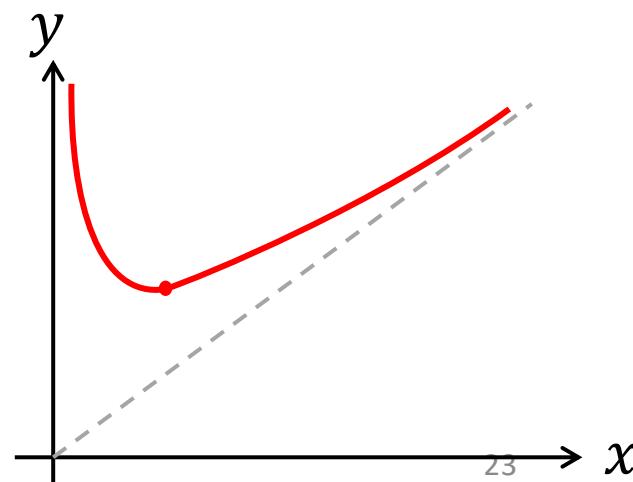
分析：

$f(x)$ 是奇函数，但我们只考虑正实轴 $(0, +\infty)$ 。其导数为，

$$f'(x) = 1 - 1/x^2$$

其中，函数的驻点即导数的零点为： $x = +1, -1$ (舍去)。导数在 $[+1, \infty]$ 区间非负，即为函数的单调增区间；导数在 $(0, +1)$ 区间负，即为函数的单调减区间。因此， $x = +1$ 为函数的极小值点， $f(+1) = 2$ 。

• 渐进线： $x = 0, y = x$



§3 质点运动学 II

假设我们知道了物体任意时刻的运动速度 $v(t)$ 和其初始位置 x_0 ，该如何求它任意时刻的位置 $x(t)$ 呢？换句话说，就是求一个函数 $x(t)$ 使得，

$$x'(t) = v(t), \quad x(0) = x_0$$

我们把这样一个问题叫做§1问题的反问题。

还是按照前面的办法，将运动按照时间划分成若干区间。加入我们知道了每一个区间的平均速度 $\bar{v}_{i \rightarrow i+1}$ ，就可以一步一步地从初始位置累加起来得到第 i 个区间的位置，

$$x_i = x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \bar{v}_{k \rightarrow k+1} \Delta t_{k \rightarrow k+1}$$

- 为了用瞬时速度代替平均速度，需要将区间划分的无限细，

$$x(t) = x_0 + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{i-1} \bar{v}_{k \rightarrow k+1} \Delta t_{k \rightarrow k+1} \equiv x_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau$$

我们把这个运算叫做积分

- 不难看出，微分与积分互为逆运算，即：

$$\int_a^b \dot{x}(t) dt = x(b) - x(a),$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^t v(\tau) d\tau = v(t)$$

§4 积分

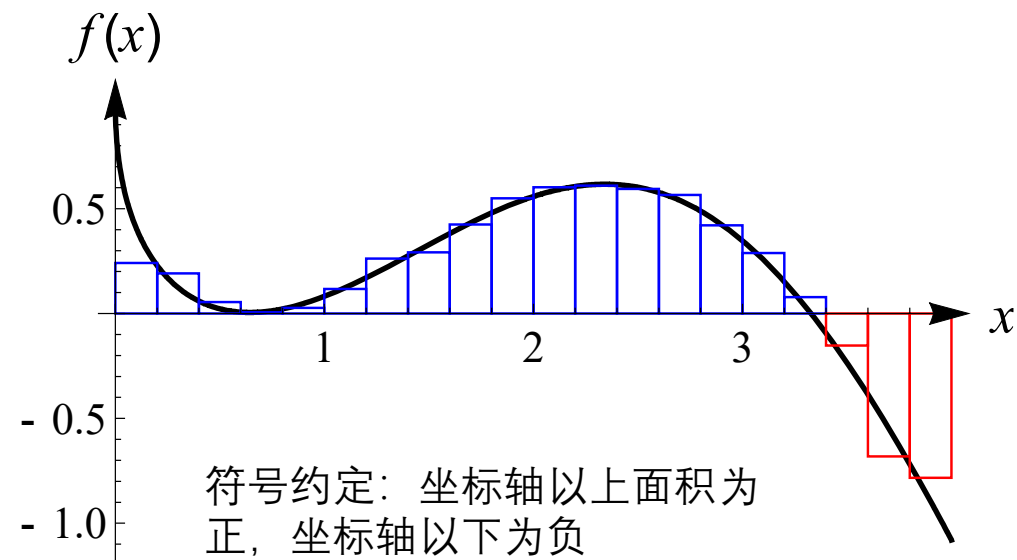
§3 对与积分的定义可以推广到任意连续函数

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (x_{i-1} < \xi_i < x_i)$$

- 从图形上看，函数的积分等于曲线与坐标轴围成的面积
- 微积分基本定理（牛顿-莱布尼茨定理）

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a),$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$



- 不定积分：对于不同的积分下限，

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

我们可以得到不同的函数 $F_a(x)$ ，它们的导数都是函数 $f(x)$ 。我们把 $F_a(x)$ 叫做 $f(x)$ 的原函数，把从 $f(x)$ 求任意一个原函数 $F(x)$ 的运算叫做不定积分，表示为，

$$F(x) = \int f(x) dx$$

- 可见，不定积分定义到一个任意常数

积分的性质

- 函数和的积分：

$$\int (f + g) dt = \int f dt + \int g dt$$

- 分部积分：

$$\int f g' dt = f g - \int f' g dt$$

- 变量代换：

$$\int f(u) du = \int f(u(t)) u'(t) dt$$

常见函数的积分

$$\int 0 dx = \text{Const}$$

$$\int \cos x = \sin x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1}, (a \neq -1)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsinh} x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosh} x, (|x| > 1)$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x$$

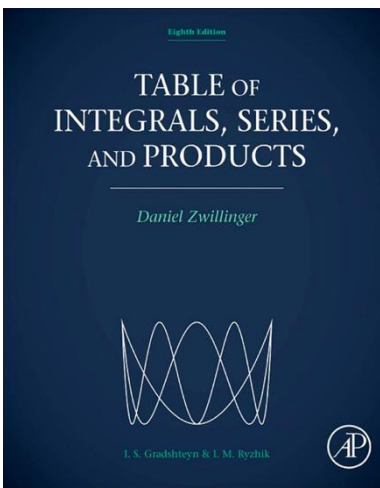
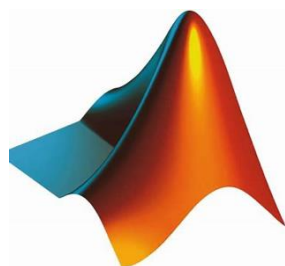
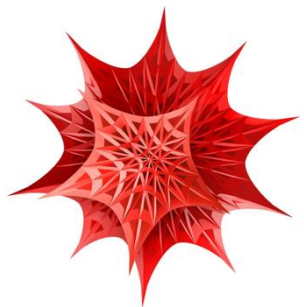
$$\int \cosh x dx = \sinh x$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctanh} x, (|x| < 1)$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x$$

计算积分的工具

- 数学软件 Mathematica, matlab, maple
- 科学计算库: SciPy, NumPy
- 积分表: Table of Integrals, Series, and Products, 2014年第八版
- NIST数学手册: <https://dlmf.nist.gov/>
- Abramowitz and Stegun 数学手册 (A&S):
<https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/>

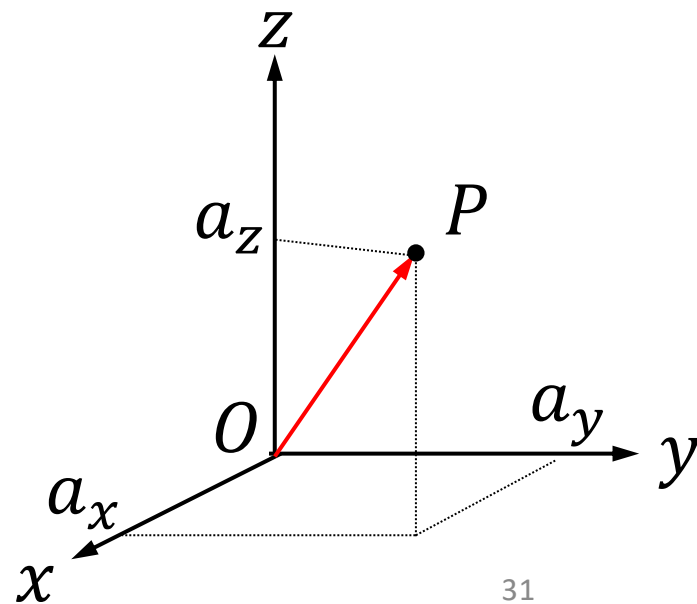


§5 矢量代数

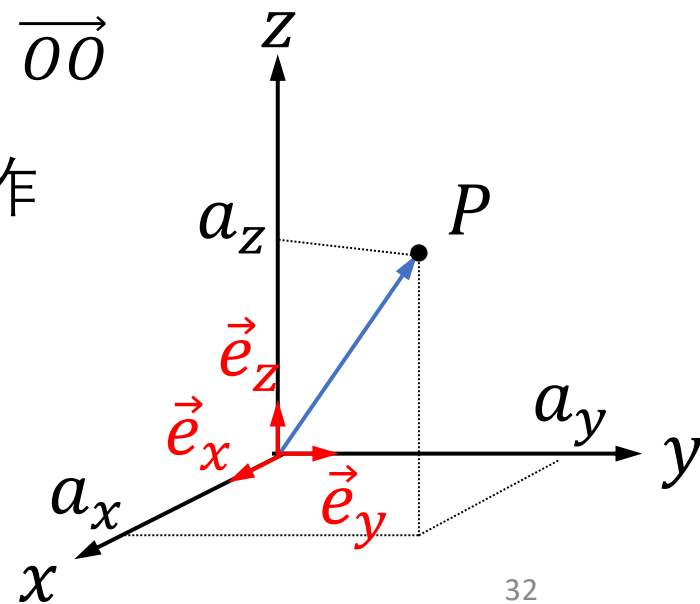
现实世界的运动既有距离又有方向。为了描述这些运动，我们需要引入一个新的数学对象——矢量又叫做向量。矢量简而言之是既有大小又有方向的量。数学物理上，将矢量记作： $\vec{a}$ 、 $\mathbf{a}$ 、 (a_x, a_y, a_z)



一个重要的例子是三维空间的点 P 相对于原点 O 的位置 $\overrightarrow{OP}$



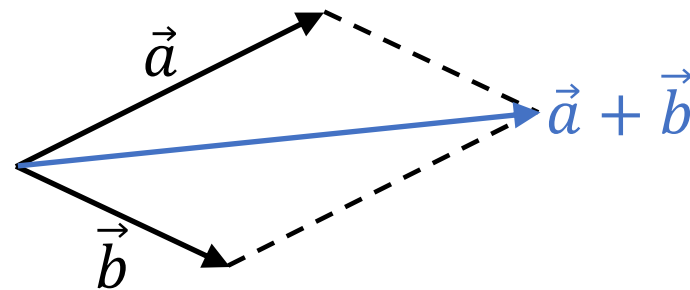
- 方向矢量: $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{a}$, 很显然, $|\hat{a}| = 1$
- 矢量相等: 大小相当、方向相同 (起始点不需要相同)
- 矢量平行: 方向相同 (包含方向相反) 的矢量互相平行
- 大小相同、方向相反的一对矢量互为负矢量。矢量 $\vec{a}$ 的负矢量记作 $-\vec{a}$
- 零矢量长度为零, 没有方向, 记作 $\vec{0}$ 或者0。例子, 原点: $\overrightarrow{OO}$
- 基矢量: x, y, z 三个方向的方向矢量叫做基矢量, 分别记作 $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, 也记作 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$
- 分量表示: $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = \sum_i a_i \vec{e}_i$



a. 矢量代数

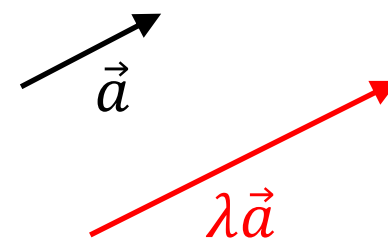
- **矢量加法：** 两个矢量相加得到一个矢量，满足平行四边形法则

- 交换律： $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- 结合律： $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- 矢量减法： $\vec{a} - \vec{b} \equiv \vec{a} + (-\vec{b})$



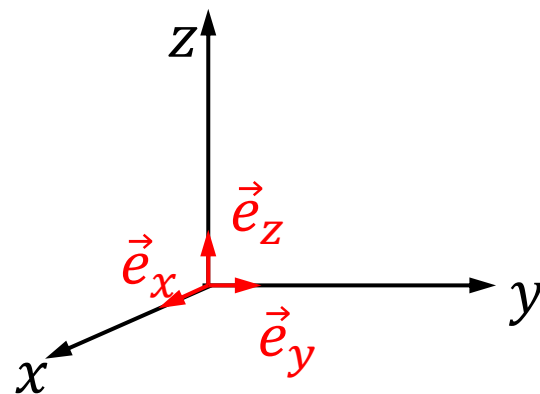
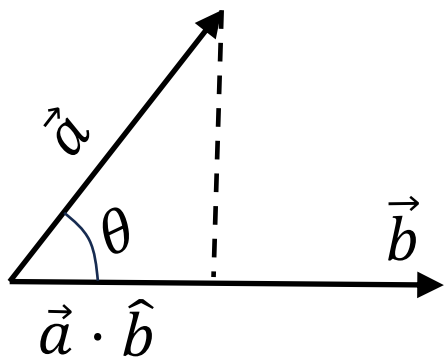
- **矢量数乘：** $\lambda\vec{a}$ 仍然是一个矢量，长度为原来矢量的 λ 倍，方向不变

- 结合律： $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
- 分配律： $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$



- **矢量点乘**（内积、点积）：矢量点乘的结果是一个数 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$ ，其中 θ 是两个矢量之间的夹角。点乘满足交换律和对加法的分配律以及对数乘的结合律
 - 模平方： $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \equiv \vec{a}^2$
 - 矢量垂直：如果两个矢量的内积为0，称这两个矢量垂直： $\vec{a} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
 - 基矢量的内积：基矢量长度为1，互相垂直， $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1, \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$ ，还可以记为

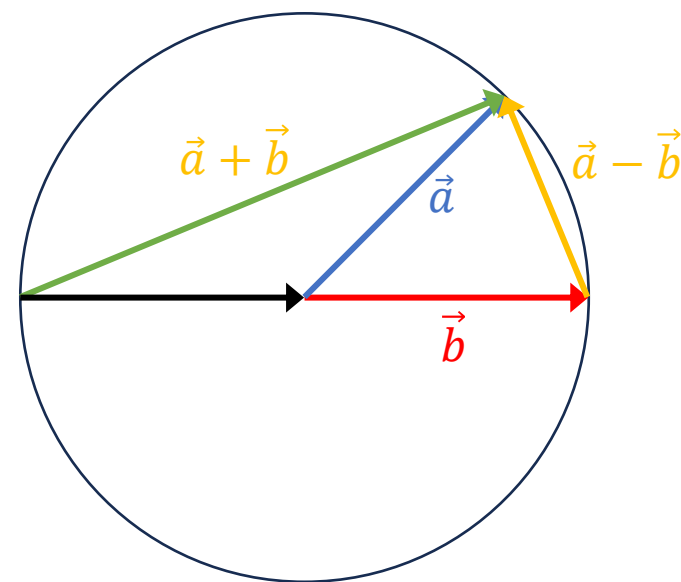
$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$



【例子】 柯西不等式：

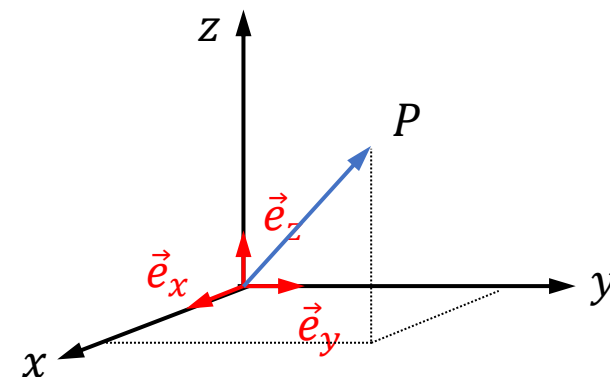
$$\vec{a}^2 \vec{b}^2 \geq (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

【例子】 泰勒斯定理： 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ， 证明 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 垂直。



• 分量表示:

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = \sum_i a_i \vec{e}_i$$



$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{e}_x, a_y = \vec{a} \cdot \vec{e}_y, a_z = \vec{a} \cdot \vec{e}_z \Rightarrow a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i$$

【例子】 已知两个矢量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的分量, 求其内积

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \cdot (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

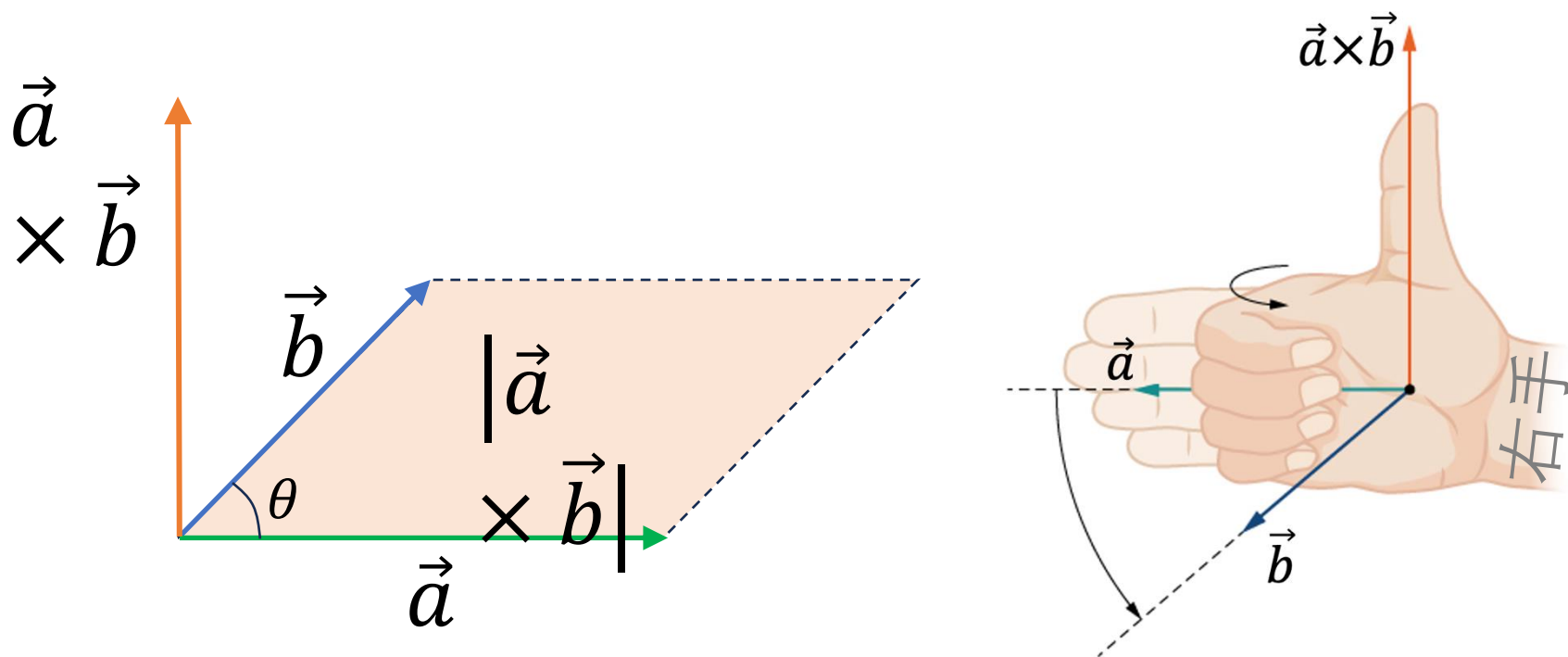
【例子】 已知两个矢量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的分量, 求矢量 $\vec{a}, \vec{b}$ 之间的夹角

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow \theta = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \arccos \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}$$

- **矢量叉乘（外积）**：两个矢量叉乘得到一个新的矢量，

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

其大小 $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ （等于两个矢量构成的平行四边形的面积），方向垂直于矢量 $\vec{a}, \vec{b}$ 所在的平面，并按照右手定则来约定正负。也有些地方将叉乘记为 $\vec{a} \wedge \vec{b}$ 或者 $[\vec{a}, \vec{b}]$



- 叉乘的性质:

- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$, 反过来, 若 $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, 则 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 即 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$

- 矢量外积与矢量垂直: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$

- 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$

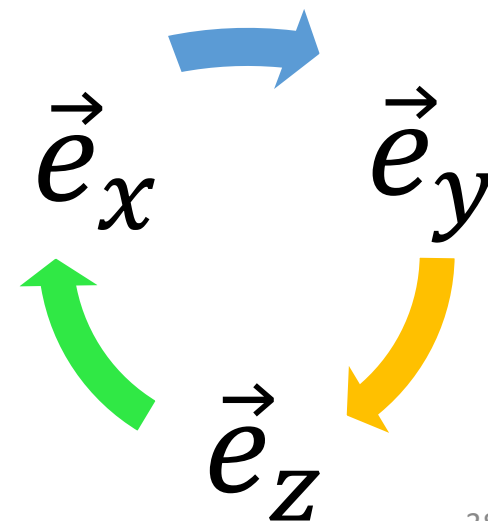
- 叉乘不满足交换律, 实际上, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

- 基矢量的叉乘:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$

注意上面的循环顺序, 如果逆着这个顺序, 例如

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$$



- 多重积与混合积:

- 三重积: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (BAC-CAB规则)

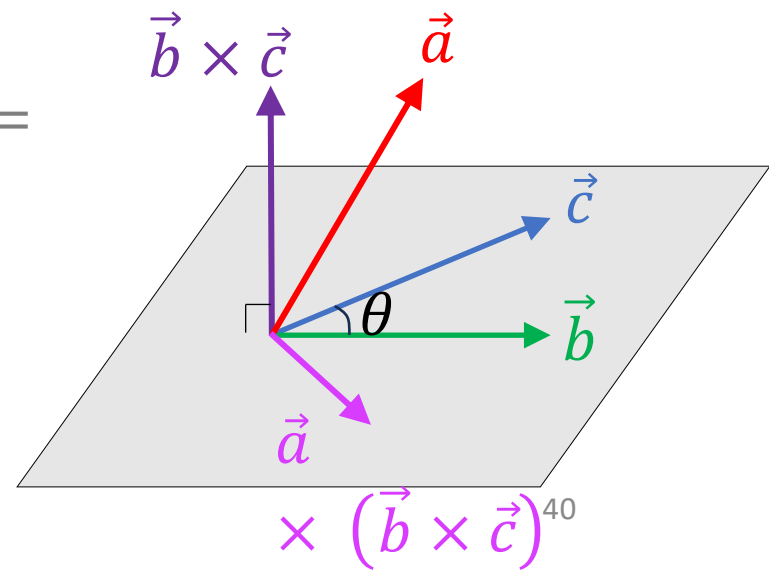
【证明】

方法一: 分量展开算 (练习)

方法二: 如图, 首先 $\vec{b} \times \vec{c}$ 垂直于 $\vec{b}, \vec{c}$ 所在的平面, 而 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ 又垂直于 $\vec{b} \times \vec{c}$, 因此 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ 一定位于 $\vec{b}, \vec{c}$ 所在的平面内, 即可以表示成 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \alpha \vec{b} + \beta \vec{c}$ 。

另一方面, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ 垂直于 $\vec{a}$ 。因此, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \lambda [\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})]$ 。

最后找一个特殊情况确定 λ : $\hat{i} \times (\hat{i} \times \hat{j}) = -\hat{j} \Rightarrow \lambda = 1$



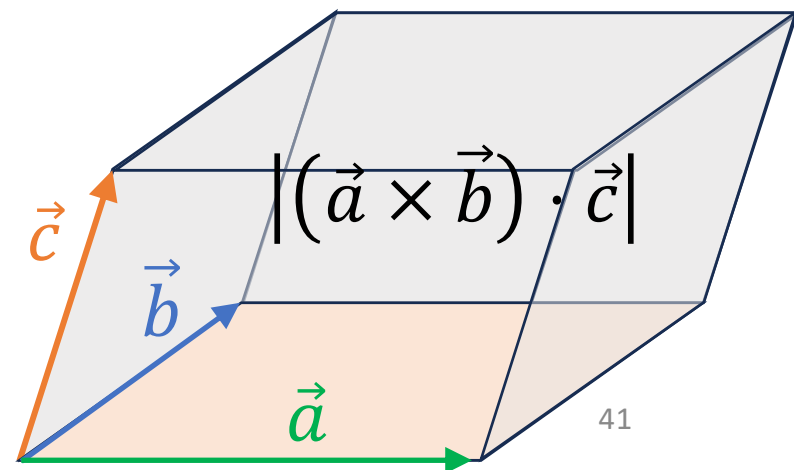
注意：

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ &\neq \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}(\vec{b} \cdot \vec{a}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \\ &\neq \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a})\end{aligned}$$

不过， $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ （雅可比关系）

- 混合积： $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$
 - 几何解释： $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 三个矢量构成的平行六面体的体积
 - 分量表示： $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

$$\begin{aligned}&= a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y \\ &\quad - a_z b_y c_x - a_x b_z c_y - a_y b_x c_z\end{aligned}$$

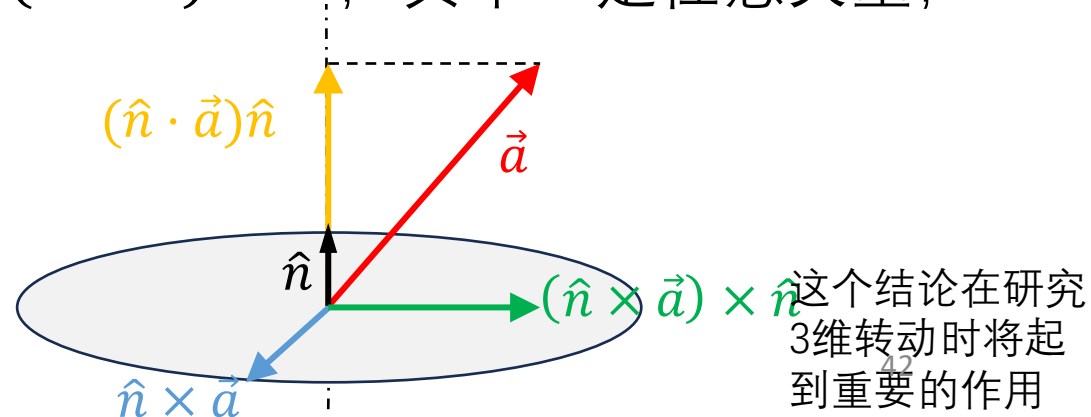


【例子】 证明: $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$

【例子】 证明: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

【例子】 证明: $\vec{a} \times [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] = \vec{b}[\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{d})] - (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d})$

【例子: 极分解定理】 证明: $\vec{a} = (\vec{a} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\hat{n} \times \vec{a}) \times \hat{n}$, 其中 $\vec{a}$ 是任意矢量,
 $\hat{n}$ 是任意单位矢量



b. 矢量微积分

矢量微积分可以按照分量来定义。例如,

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \sum_i \frac{da_i}{dt} \vec{e}_i$$

$$\int \vec{a}(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i \vec{a}(\xi_i) \Delta t_i = \sum_i \int a_i(t) dt \vec{e}_i$$

c. 偏微分与全微分

- 多元函数求导时需要区分求导的变量
- 以二元函数 $z = f(x, y)$ 为例:
 - 若 y 保持不变, 仅讨论 z 随 x 的变化, 其变化率用 f'_x 表示, 即

$$\frac{dz(x)}{dx} = f'_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

- 类似地若 x 保持不变, 仅讨论 z 随 y 的变化, 其变化率用 f'_y 表示, 即

$$\frac{dz(y)}{dy} = f'_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

- 这些对于函数自变量导数又叫做偏导数 (partial derivative)

- 下面考虑多元函数的微分。与一元函数不同，多元函数的微分允许多个自变量发生改变。例如，

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] \\ &= f'_x(x, y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + o(\Delta x) + o(\Delta y)\end{aligned}$$

取极限，可以得到：

$$dz = f'_x dx + f'_y dy ,$$

也可以记作：

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

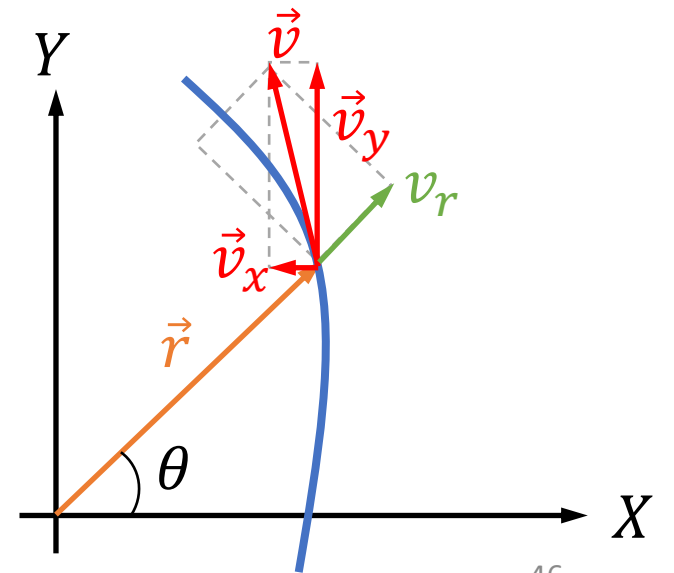
这里的微分又叫做全微分，其中的每一部分即 $f'_x dx$ 、 $f'_y dy$ 又叫做偏微分。

【例子】 极坐标下质点运动的径向速度。

解答： 径向距离 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

因此径向速度为：

$$\begin{aligned} v &= \frac{dr}{dt} = \frac{d\sqrt{x^2 + y^2}}{dt} \\ &= \frac{\partial\sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\sqrt{x^2 + y^2}}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{x}{r} \frac{dx}{dt} + \frac{y}{r} \frac{dy}{dt} = \cos \theta v_x + \sin \theta v_y \end{aligned}$$



c. 梯度、散度与旋度

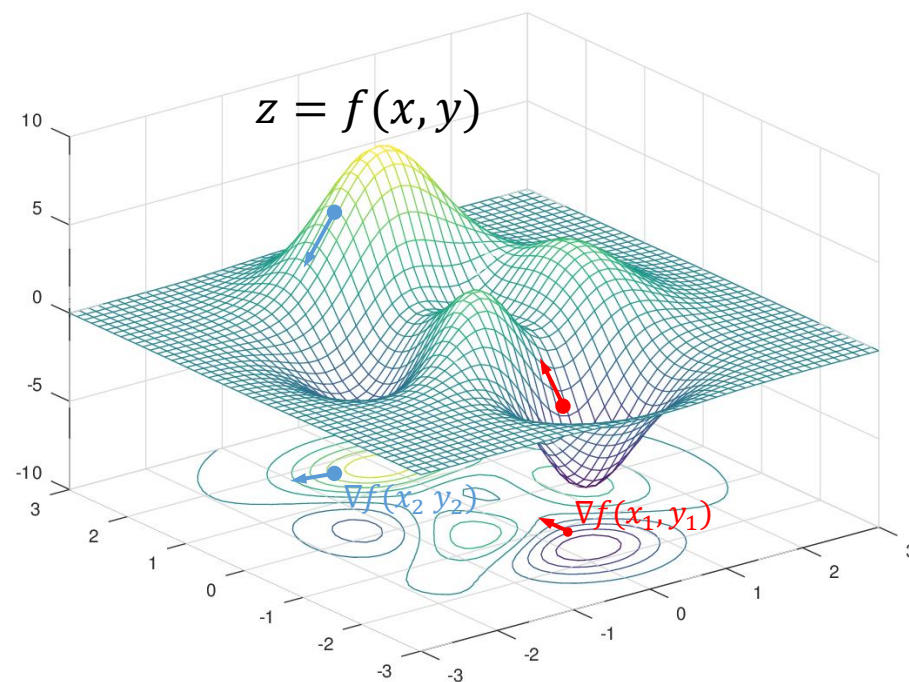
- **梯度：** 一个标量函数 $f(x, y, z)$ 的梯度(gradient)定义为,

$$\text{grad } f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i \equiv \nabla f$$

倒三角(nabla)算子:

$$\nabla = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i$$

- $\nabla f(x, y, z)$ 构成一个矢量函数
- 某一点的梯度给出了函数在该点变化最快的方向和大小
- 标量场中某一点上的梯度与过该点的等高线垂直



- **散度：** 矢量函数 $\vec{F}(x, y, z) = \sum_i F_i \vec{e}_i$ 散度的定义为，

$$\operatorname{div} \vec{F} = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \left(\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i \right) \cdot \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$$

- 把空间中一点周围包围一个微小体积，计算单位时间内流出这个微小边界的净流量（通量），再除以这个体积，当体积缩小到零时，就是该点的散度：

$$\nabla \cdot \vec{F} = \lim_{\operatorname{Vol} D \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{S}}{\operatorname{Vol} D}$$

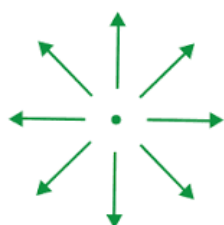
- 散度的几何含义是向量场在某一点处单位体积内的净通量（流出减去流入），用来描述向量场中这一点是“发源地”还是“汇聚点”

$$\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$$



源

$$\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$$

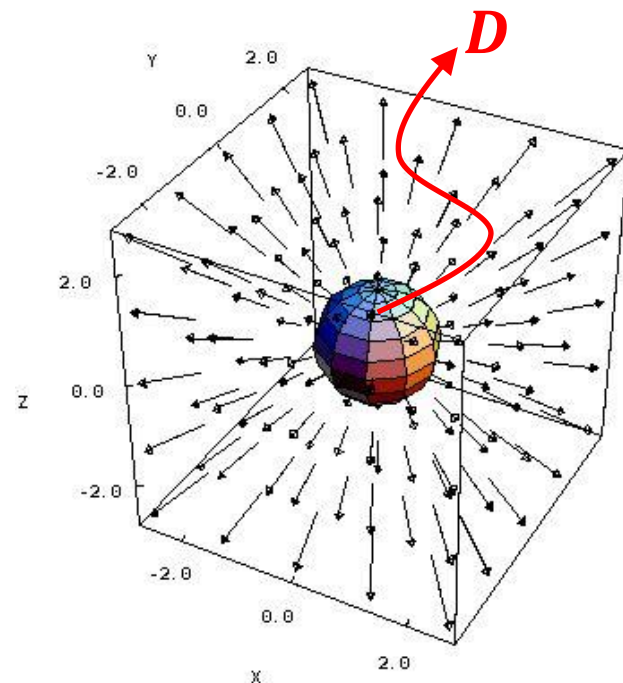


漏

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$$



无源



【例子】 静电场方程、静磁场方程：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

静电场的源是电荷，而静磁场无源（即不存在磁荷）。

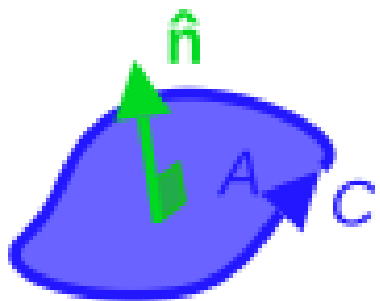
- 高斯公式： 矢量场散度的体积分等于该矢量穿过包围该体积的闭合曲面的总通量。

$$\oiint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_D \nabla \cdot \vec{F} \, dV$$

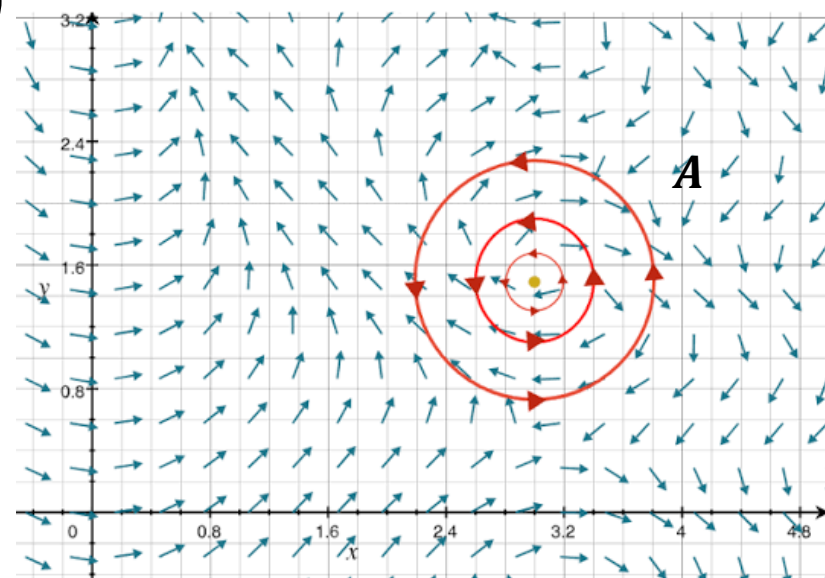
- **旋度：** 矢量函数 $\vec{F}(x, y, z) = \sum_i F_i \vec{e}_i$ 散度的定义为，

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z = \nabla \times \vec{F}$$

- 旋度刻画了矢量场 $\vec{F}$ 在该点上的旋转程度，其中：
 - 旋度的大小表示矢量场围绕该点旋转的剧烈程度，定义为单位面积上的环量极限
 - 旋度的方向是一个矢量，代表该点附近旋转最剧烈的平面的法线方向，其指向与旋转方向遵循右手定则（右手法则）



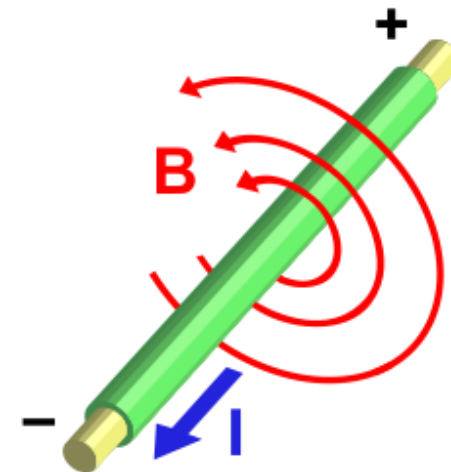
$$|\nabla \times \vec{F}| = \lim_{\text{Area } A \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\text{Area } A}$$



【例子】 安培定律:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

磁场的旋度是由电流提供的。



- 斯托克斯公式: 矢量场旋度的面积分等于该矢量沿该面边界的曲线积分 (环量)。

$$\oint_{\partial \Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

∇算子的性质：

$$\nabla = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i$$

∇算子既是微分也是个矢量，因此需要满足两种运算的规则。例如：

- 莱布尼茨法则：

$$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$$

- 混合积：

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

比起纯矢量的混合积展开多了一项。该等式的推导除了直接展开计算以外，还有一个技巧是引入费曼下标记号 ∇_A ，其表示该∇算子只作用在矢量函数 $\vec{A}$ 上。利用这一个记号，结合莱布尼茨法则，

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \nabla_A \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) + \nabla_B \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

再利用混合积公式将相应的算子与矢量函数结合即可。

【例子】 常见的一阶矢量微分恒等式：

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$$

$$(\vec{A} \times \nabla) \times \vec{B} = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} - \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B})$$

$$(\vec{A} \times \nabla) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

$$\nabla \cdot (f\vec{A}) = (\nabla f) \cdot \vec{A} + f\nabla \cdot \vec{A}$$

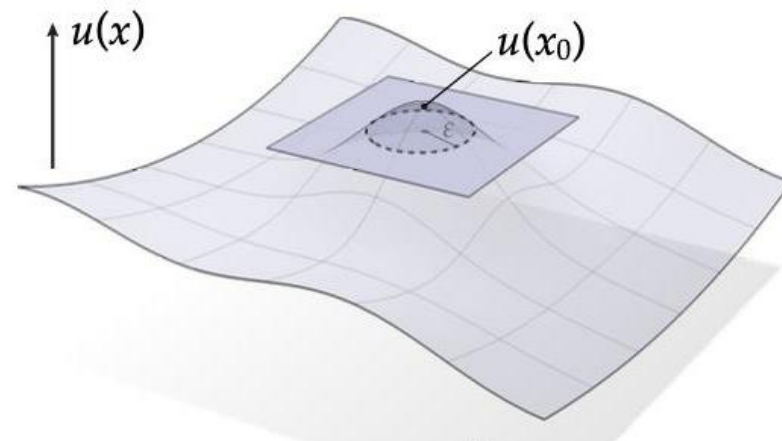
拉普拉斯算子：除一阶导数外，还可以引入二阶矢量微分，即含两个 ∇ 算子的导数。由于 ∇ 是个矢量，最简单的导数是一个标量函数梯度的散度，

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \sum_i f_i'' = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \nabla^2 f = \Delta f$$

这个算子叫做拉普拉斯算子，常记作 ∇^2 ，也记作 Δ 。

- 拉普拉斯算子衡量一个函数在某一点的值与其周围邻域平均值的偏离程度
- 正如一元函数的二阶导数反映函数的局域凸性，拉普拉斯算子反映多元函数局部的曲率或凹凸性

$$\nabla^2 u(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \left\{ \frac{1}{|S_\epsilon(x_0)|} \int_{S_\epsilon(x_0)} u(x) dx - u(x_0) \right\}$$



【例子】 拉普拉斯算符与物理中的最重要的一些方程有关：

- 泊松方程：

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$$

- 波动方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = \nabla^2 u(t, x)$$

- 薛定谔方程：

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x, y, z) = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi(t, x, y, z) + V(x, y, z) \psi(t, x, y, z)$$

- 由于拉普拉斯算子是一个标量算子，可以将其作用在矢量函数上：

$$\nabla^2 \vec{F} = \sum_i \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x_i^2}$$

其他二阶微分算子：

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla f &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) &= 0\end{aligned}$$

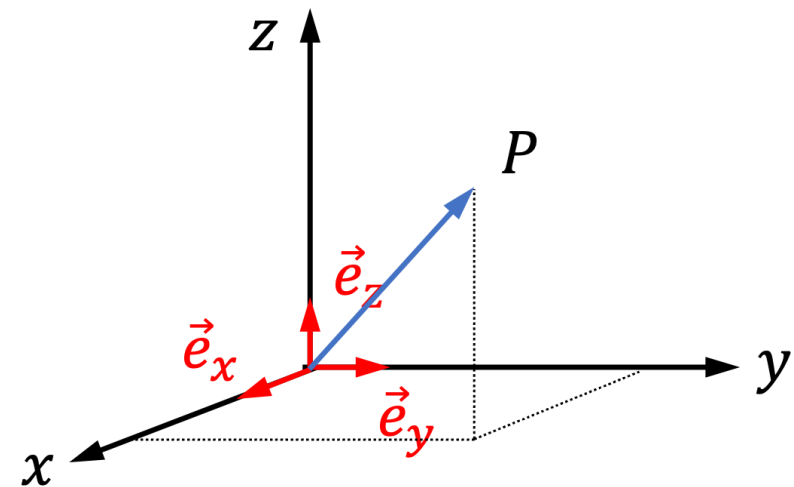
【例子】 常见的二阶矢量微分恒等式：

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \\ \nabla \cdot (f \nabla g) &= f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g, \\ f \nabla^2 g - g \nabla^2 f &= \nabla \cdot (f \nabla g - g \nabla f) \\ \nabla^2 (f \vec{A}) &= \vec{A} \nabla^2 f + 2(\nabla f \cdot \nabla) \vec{A} + f \nabla^2 \vec{A}\end{aligned}$$

§6 欧几里德几何

我们生活的时空是3维欧几里德时空，它是物理中最重要的一个矢量空间

- 位置矢量，点 P 相对于原点 O 的位置 $\overrightarrow{OP}$
- 笛卡尔坐标系(Cartesian coordinate system)
 - 基矢量： $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$
 - 正交归一 $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$
 - 不依赖于坐标（全局基矢量） $\rightarrow$ 物理存在性？
 - 位置矢量： $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \sum_i x_i \vec{e}_i$
 - 在物理上，一般约定采用右手坐标系，即 X 、 Y 、 Z 三个坐标轴满足右手定则



a. 极坐标系 (polar coordinate system)

对于2维欧几里德空间，另外一个常用的坐标系是极坐标系。其中的点既可以用笛卡尔坐标标记 (x, y) ，也可以用极坐标标记 (r, θ) ，两者满足：

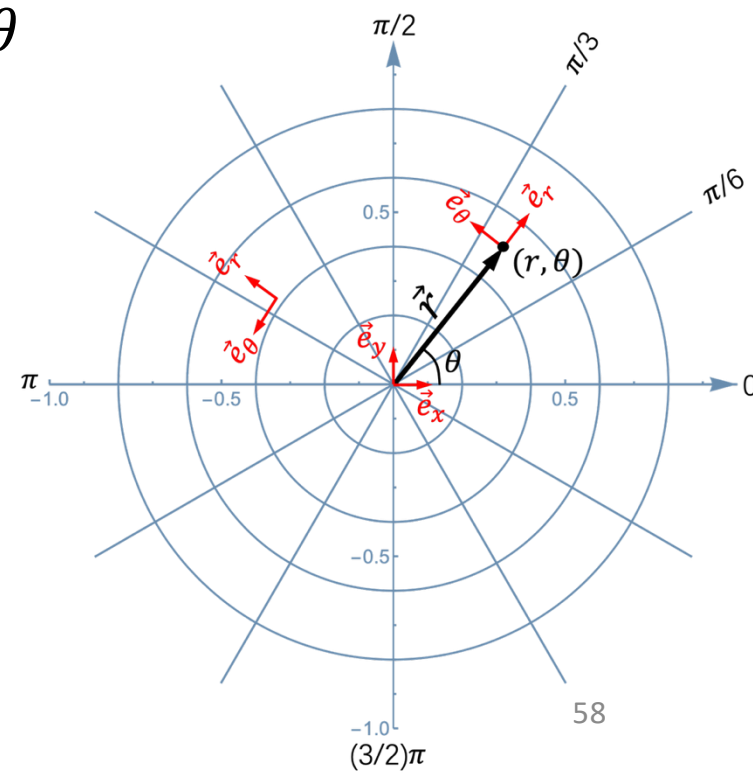
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arg(x + iy) \end{cases} \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

- 基矢量： $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$

- 正交归一： $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = 1, \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0 \Rightarrow \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

- 这组基矢量是角度 θ 的函数(局域基矢量)

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_y = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta \end{cases}$$



- 基矢量的微分：

$$d\vec{e}_r = \vec{e}_\theta d\theta, \quad d\vec{e}_\theta = -\vec{e}_r d\theta$$

【证明】 利用笛卡尔坐标基矢量

- 位置矢量：

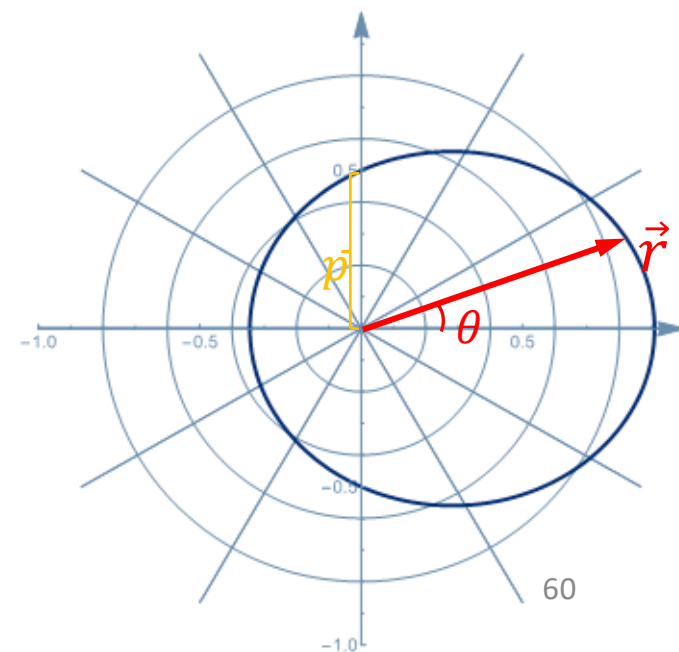
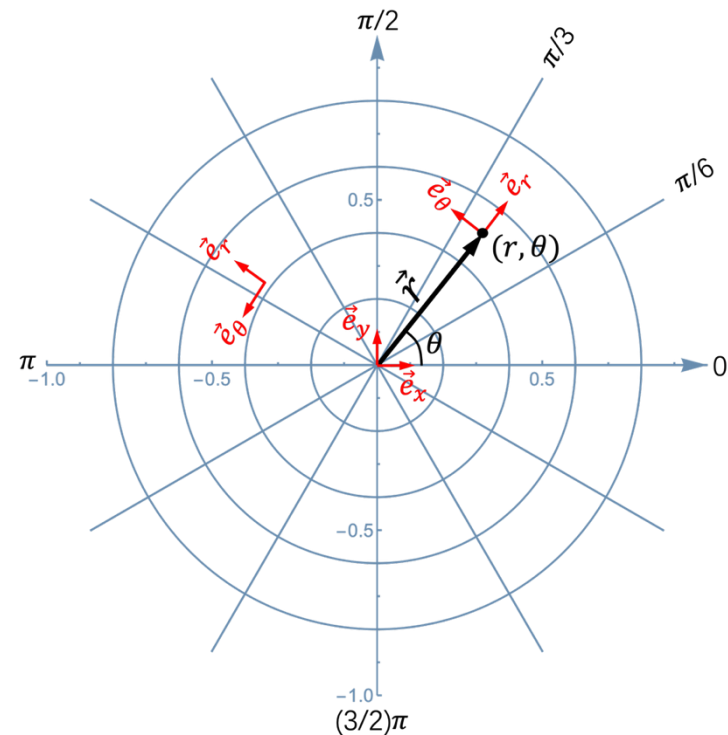
$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

- ∇ 算子和拉普拉斯算子：

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

【例子】 开普勒轨道，

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$

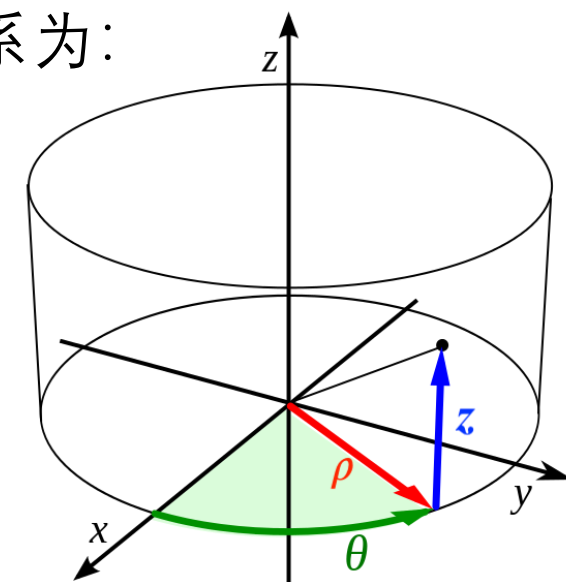


b. 柱坐标系 (cylindrical coordinate system)

对于3维欧几里德空间，将极坐标系增加一个z方向的坐标就可以得到柱坐标系。其中的点可以用柱坐标标记 (ρ, θ, z) ，它与笛卡尔坐标的关系为：

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arg(x + iy) \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

- 基矢量： $\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho$
 - 正交归一： $\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1, \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\theta = \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_z = 0$
$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$
 - 这组基矢量是角度 θ 的函数(局域基矢量)



$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_\rho - \sin \theta \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_y = \sin \theta \vec{e}_\rho + \cos \theta \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

- 基矢量的微分:

$$d\vec{e}_\rho = \vec{e}_\theta d\theta, \quad d\vec{e}_\theta = -\vec{e}_\rho d\theta, \quad d\vec{e}_z = 0$$

- 位置矢量:

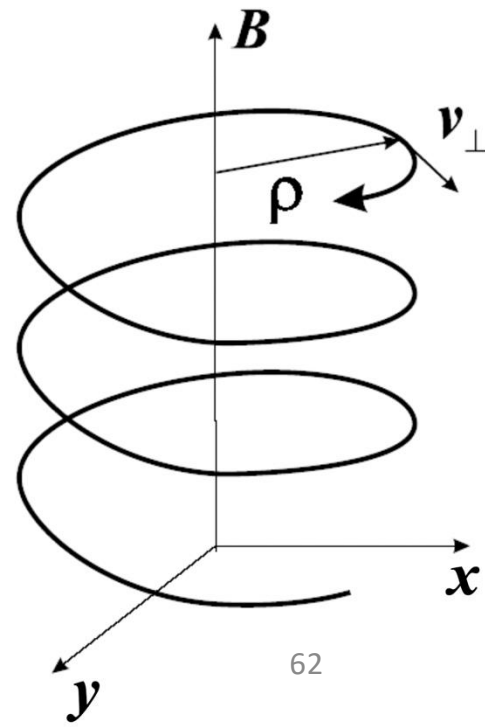
$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$$

- ∇ 算子和拉普拉斯算子:

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

【例子】带电粒子在匀强磁场中的回旋运动。

$$\vec{r} = r_L \vec{e}_\rho + v_z t \vec{e}_z$$



c. 球坐标系 (spherical coordinate system)

极坐标系在3维欧几里德空间的另外一个推广是球坐标系。在这个坐标系，点可以用球坐标标记为 (r, θ, ϕ) ，它与笛卡尔坐标的关系为：

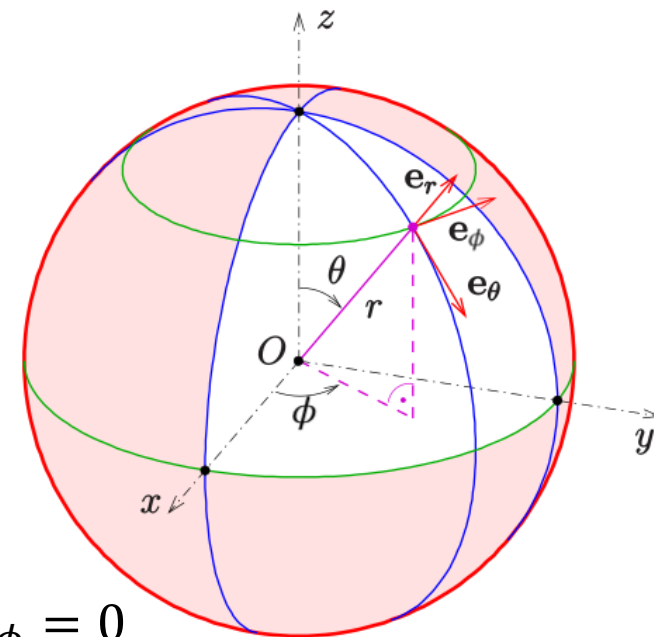
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arg(\sqrt{x^2 + y^2} + iz) \\ \phi = \arg(x + iy) \end{cases} \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

• 基矢量： $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$

• 正交归一： $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\phi = 1, \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\phi = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\phi = 0$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

• 这组基矢量是角度 θ, ϕ 的函数(局域基矢量)



$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{e}_x = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_r + \cos \theta \cos \phi \vec{e}_\theta - \sin \phi \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_y = \sin \theta \sin \phi \vec{e}_r + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_\theta + \cos \phi \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta \end{cases}$$

• 基矢量微分:

$$\begin{cases} d\vec{e}_r = \vec{e}_\theta d\theta + \sin \theta \vec{e}_\phi d\phi \\ d\vec{e}_\theta = -\vec{e}_r d\theta + \cos \theta \vec{e}_\phi d\phi \\ d\vec{e}_\phi = -\sin \theta \vec{e}_r d\phi - \cos \theta \vec{e}_\theta d\phi \end{cases}$$

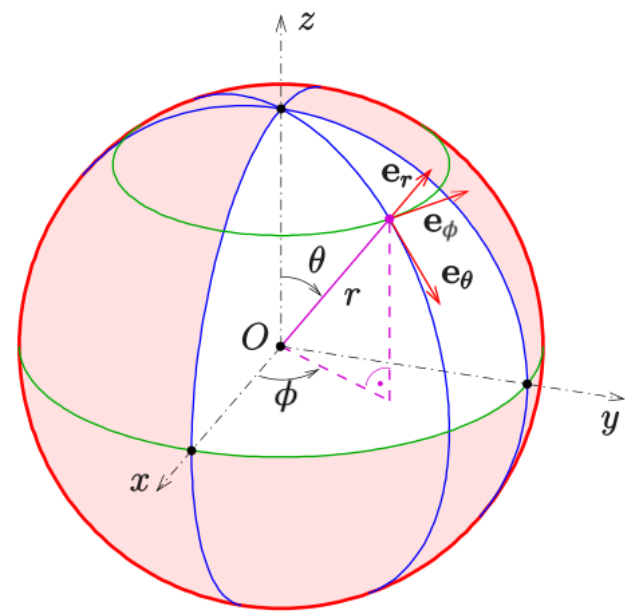
• 位置矢量:

$$\vec{r} = r \vec{e}_r$$

• ∇ 算子和拉普拉斯算子:

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$



【例子】 地理坐标：合肥北纬 31.8639° ，东经 117.2808° ，海拔37米



d. 曲线

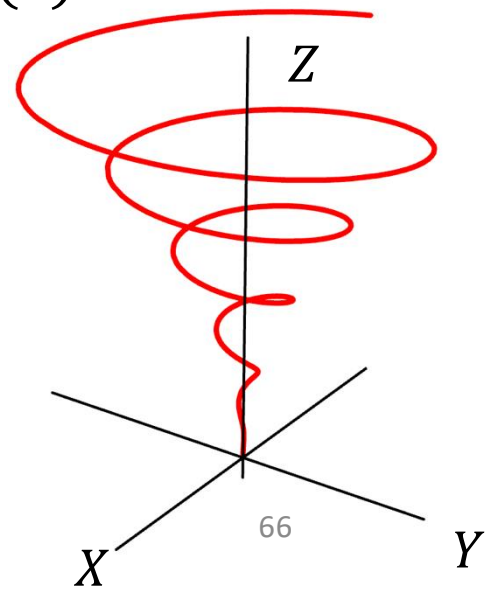
由参数方程组：

$$\begin{cases} x = \gamma_x(s) \\ y = \gamma_y(s), \\ z = \gamma_z(s) \end{cases} \quad s \in [a, b] \subset \mathbb{R}$$

确定的点集叫做一条曲线。可以记为矢量形式， $\vec{r} = \vec{\gamma}(s)$ 或者 $\vec{r} = \vec{r}(s)$

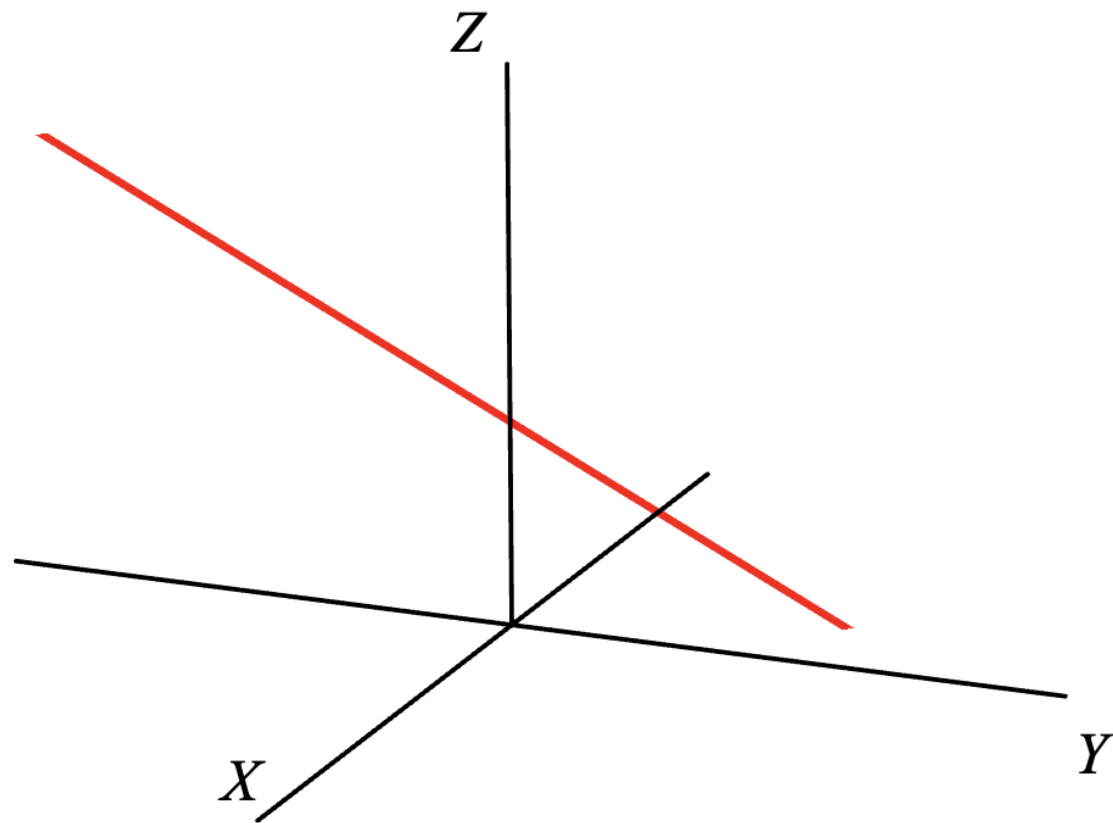
【例子】

$$\begin{cases} x = s^2 \cos s \\ y = s^2 \sin s, \\ z = s \end{cases} \quad s \in [0, 8\pi]$$



【例子】 直线

$$\vec{r}(s) = \vec{r}_0 + s\vec{\tau}, \quad s \in [a, b] \subset \mathbb{R}, |\vec{\tau}| = 1$$



线元：曲线位置向量的微分叫做线元(line element),

$$d\vec{r} = \vec{r}(s + ds) - \vec{r}(s) = \vec{r}'(s)ds$$

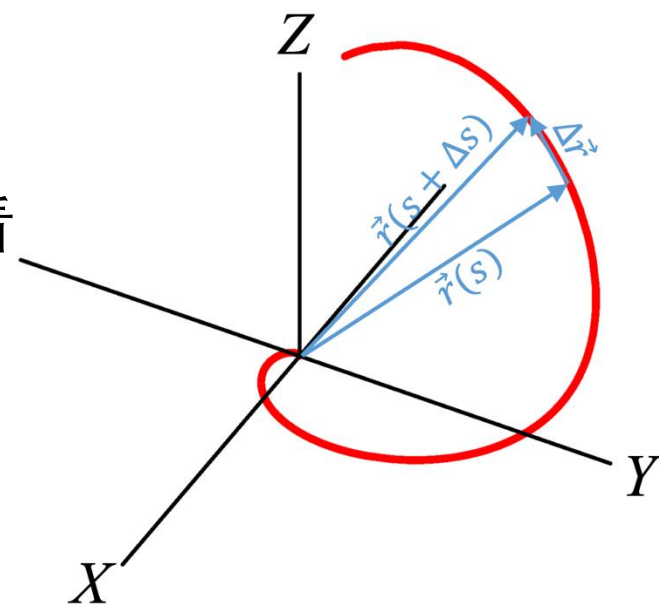
- 切矢量(tangent vector): 微分的本质是线性化, 因此不难看出线元与曲线相切, 单位切矢量:

$$\vec{\tau}(s) = \frac{\vec{r}'(s)}{|\vec{r}'(s)|}$$

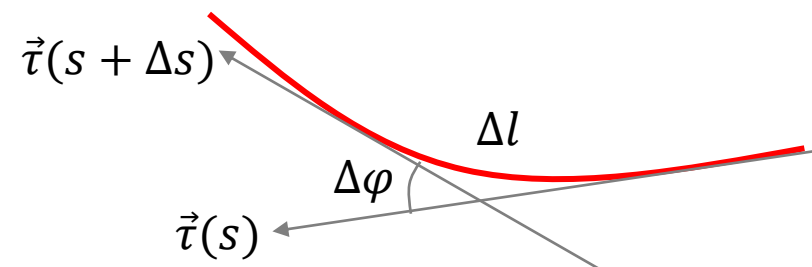
- 曲率: 曲线的曲率定义为相邻切线的夹角与线元长度之比,

$$\begin{aligned}\kappa &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{|\vec{\tau}(s) \times \vec{\tau}(s + ds)|}{|d\vec{r}|} \\ &= \frac{|\vec{\tau} \times \vec{\tau}'|}{|\vec{r}'|} = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}\end{aligned}$$

曲率的倒数叫做曲率半径, $\rho = \kappa^{-1}$



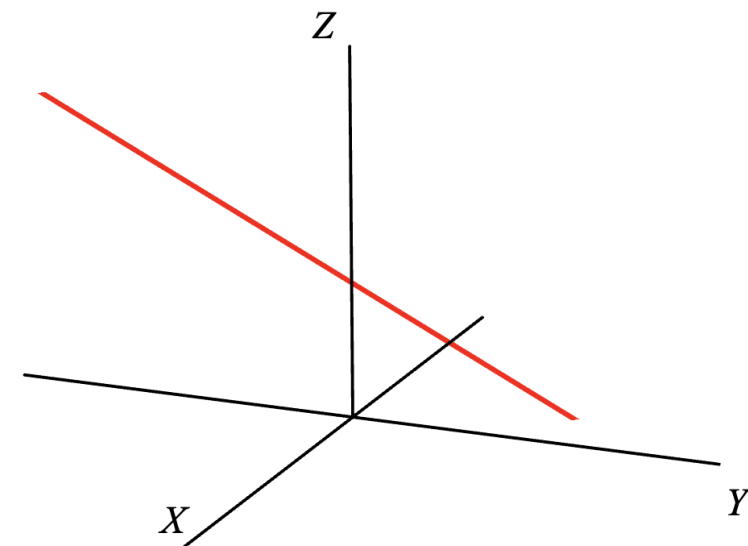
$$\vec{\tau}(s) \times \vec{\tau}(s + \Delta s) = \Delta\varphi$$



【例子】直线的切向量：

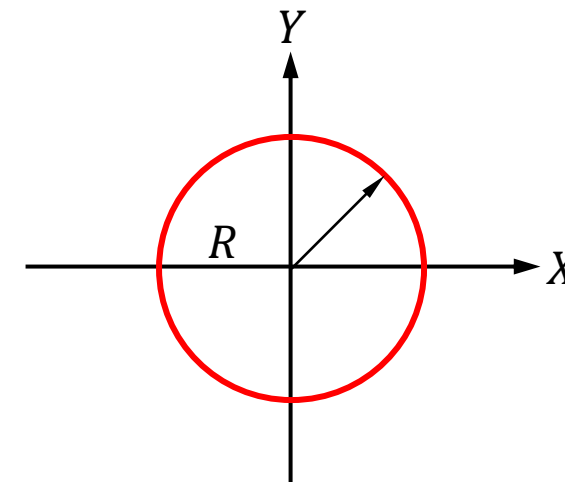
$$\vec{r}'(s) = \vec{t}$$

直线的曲率为0



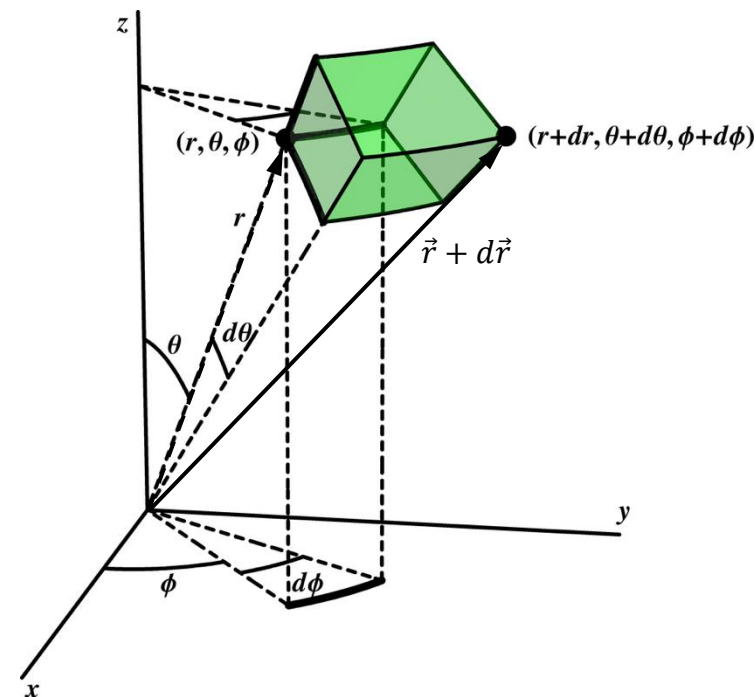
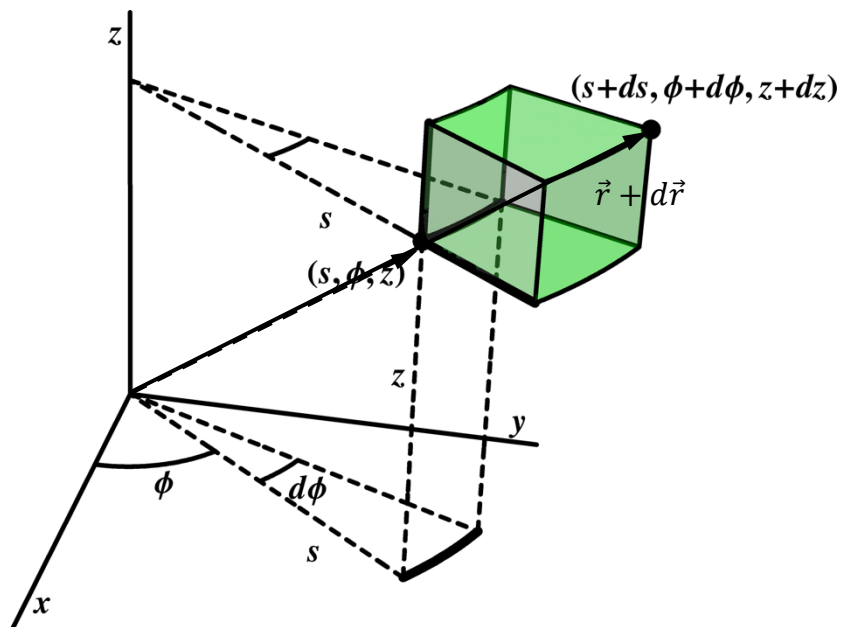
【例子】圆的曲率：

$$\begin{aligned} \begin{cases} x(s) = R \cos s \\ y(s) = R \sin s \end{cases} &\Rightarrow \vec{r}(s) = R\vec{e}_r, \theta = s \\ \Rightarrow \vec{r}' &= R\vec{e}_\theta, \vec{t}(\theta) = \vec{e}_\theta, \vec{t}'(\theta) = -\vec{e}_r \\ &\Rightarrow \kappa = R^{-1}, \quad \rho = R \end{aligned}$$



曲线线元的坐标表示：

- 直角坐标表示： $d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$
- 极坐标/柱坐标表示： $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$
- 球坐标表示： $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi\vec{e}_\phi$



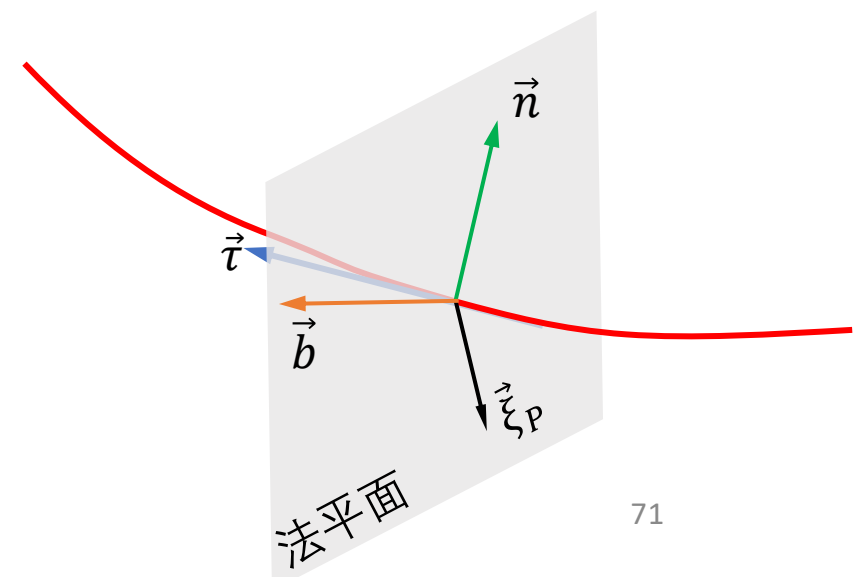
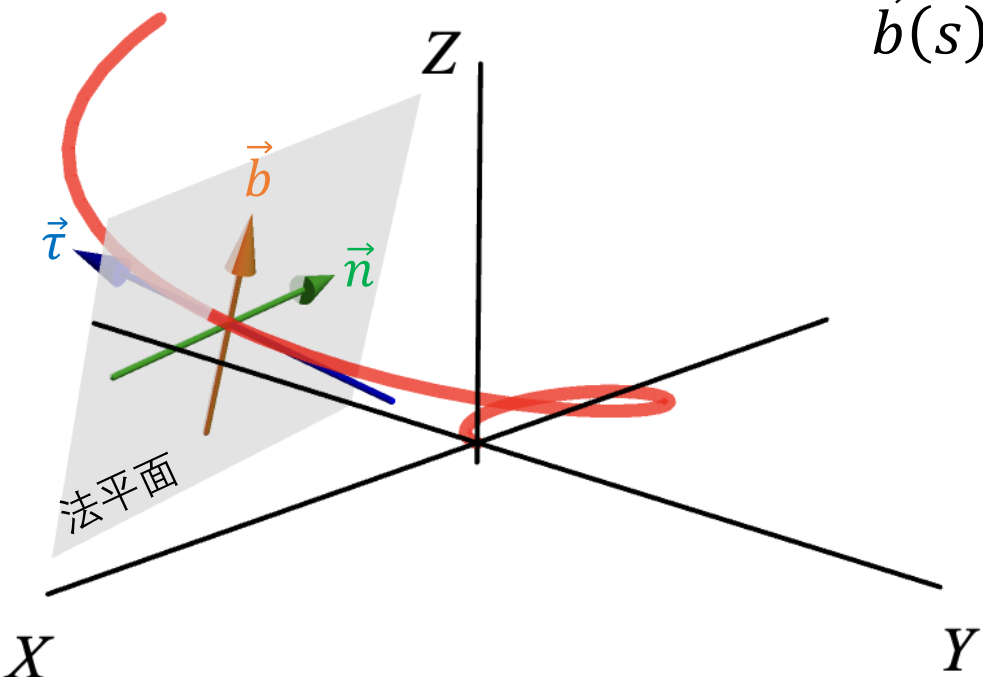
- 法平面：与切矢量垂直的点的集合

$$(\vec{\xi}_P - \vec{r}(s)) \cdot \vec{\tau}(s) = 0$$

- 法向量(normal vector)与次法向量(binormal vector):

$$\vec{n}(s) = \frac{\vec{\tau}'(s)}{|\vec{\tau}'(s)|} = \frac{\vec{r}''|\vec{r}'|^2 - \vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{r}'')}{|\vec{r}'||\vec{r}' \times \vec{r}''|},$$

$$\vec{b}(s) = \vec{\tau}(s) \times \vec{n}(s) = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}$$



谢谢！