

第一讲：数学基础

§ 1. 质点运动学 I

运动学 (kinematics) 顾名思义是描述物体运动规律的学问。运动学仅关心如何描述运动，而不考虑力与运动的关系。例如，开普勒三大定律：

- 行星沿着椭圆轨道运动，太阳位于椭圆轨道的一个焦点。
- 行星到太阳的连线在相同时间内扫过的面积相等。
- 行星绕太阳运动的周期 T 的平方与该行星的椭圆轨道的半长轴 a 的立方成正比。

可以看到，上面的三条规律完全可以从观测得到（实验事实），而不涉及行星运动的原因。因此，测量是运动学的基础。图 1 是测量落体的下落高度 x 和下落时间 t 得到的结果。每一个点代表一对测量结果 (t, x) 。实际测量只能得到一系列点，但是只要有足够的耐心，我们可以得到一系列充分稠密的点。这一点使得我们相信，可以用曲线来描述落体运动以及一般运动，而不需要明确标定测量的点。

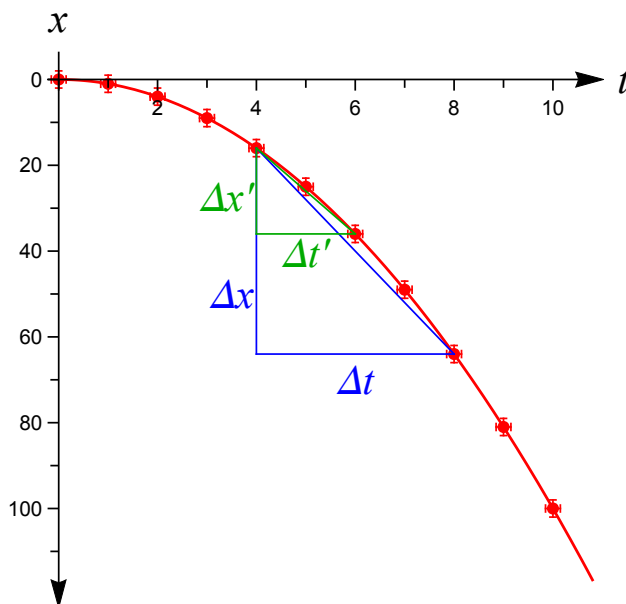


图 1. 自由落体的运动曲线。

1. **平均速度与瞬时速度** 为了分析运动的特征，我们首先将运动过程按照时间划分成若干个区间。在每一个区间，我们可以定义一个平均速度，

$$\bar{v}_{i \rightarrow i+1} = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} \quad (1)$$

在不引起混淆时，我们也可以把上面的定义写成，

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2)$$

从运动图上看，平均速度是连接区间两个端点的割线的斜率。当我们在某一个点附近，将区间选取的越来越小时，割线的斜率趋近于某一个极限值¹。这个值所对应的速度叫做瞬时速度 (instantaneous velocity)。

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3)$$

【例子】考虑自由落体运动 $x(t) = gt^2$ ；在区间 $(t, t + \Delta t)$ 之间的平均速度为，

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{g(t + \Delta t)^2 - gt^2}{\Delta t} \\ &= 2gt + g\Delta t \end{aligned}$$

现在我们求 t 时刻的瞬时速度，

$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2gt + g\Delta t) \\ &= 2gt \end{aligned}$$

莱布尼茨 (Gottfried W. Leibniz) 把通过取极限求瞬时速度的方法叫做微分 (differentiation)，并把上面的表达式记做微商 (infinitesimal quotient) 的形式，

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt} \quad (4)$$

微分的值 v 叫做导数 (derivative)。牛顿则把导数叫做流数 (fluxion)，记做，

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (5)$$

¹ 如果你实际做一下这件事情，很快会发现我们用来标记区间的整数会“不够用”，除非所要考察的点恰好是第一个点。对此我们可以把所要考察的点标记为第一个（或第零个）。

因此他的求导数的方法叫做流数法 (Method of Fluxions)。此外还有拉格朗日记法 $x'(t)$ 、欧拉记法 $Dx(t)$ 等。

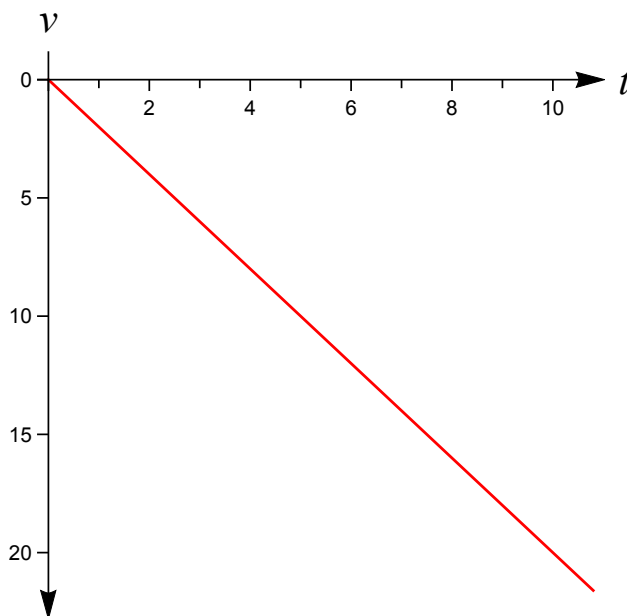


图 2. 自由落体的瞬时速度曲线。

2. 加速度 瞬时速度仍然是时间 t 的函数，因此可以对它进一步求时间微分，得到的量叫做加速度 (acceleration)：

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (6)$$

当然还可以定义更高阶的微分，比如加速度的时间导数叫做加加速度 (jerk/jolt)。这些高阶时间导数主要在工程实践和应用科学中 useful。在经典力学中，由于牛顿第二定律，我们只需要研究到加速度。偏离牛顿第二定律不是不可能，但可能会带来非物理的结果。例如，带电粒子运动时辐射出的电磁力（阿布拉罕-洛伦兹力）为，

$$\vec{F} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\vec{a}} \quad (7)$$

联立运动方程会发现，带电粒子会发生非物理的自加速现象。

§ 2. 微分与导数

1. 函数极限 如果当自变量 x 无限趋于某一个值 x_0 时, 函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一个数值 a , 则称 a 为函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 并记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ 。

【数学家的做法】函数 $f(x)$ 在 x_0 处的极限可以用不等式关系来更严格地定义: 对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - a| < \epsilon$, 则称 a 为 x 趋向于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ 。

在经典物理中, 一般会假定实际物理过程的极限总是存在的, 因此不需要严格地去检验 $\epsilon - \delta$ 方式的定义。

2. 导数 (*derivative*) 导数可以由极限来定义:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$$

或者

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$$

一般来说, 莱布尼茨记号会更常用一些, 我们稍后解释这些符号含义的时候再说。

导数的几何含义: 切线斜率 (*tangent*)

【例子】三角函数 (*trigonometric function*) 的导数

$$\begin{aligned} \sin' x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} \\ &= \sin x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \\ &= \sin x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \\ &= \cos x \end{aligned}$$

注意下图 3 的几何关系: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ 。取极限, $1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \Delta x \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$ 。

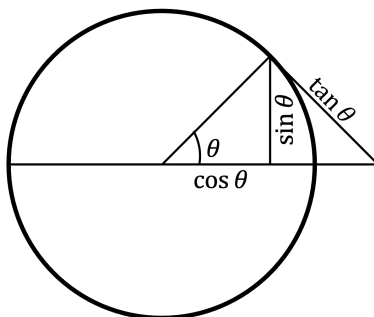


图 3. 三角函数关系: $\sin \theta < \theta$, $\tan \theta > \theta$

【例子】 指数函数 (*exponential function*) 的导数

$$\begin{aligned}
 (e^x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
 &= e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\
 &= e^x
 \end{aligned}$$

注意 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots$

3. 微分的基本规则:

- 函数和的导数:

$$\frac{d}{dt}(f + g) = \frac{d}{dt}f + \frac{d}{dt}g$$

【证明】

- 函数积的导数 (莱布尼茨法则 - Leibniz's rule/product rule) :

$$\frac{d}{dt}(fg) = \frac{d}{dt}fg + f \frac{d}{dt}g$$

【证明】

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dx}(fg) \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]g(x + \Delta x) + f(x)[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \\
 &= \frac{d}{dx}fg + f\frac{d}{dx}g
 \end{aligned}$$

- 反函数的导数：【几何证明：斜率】

函数： $y = f(x)$ ，反函数（单调区间）： $x = f^{-1}(y)$ ，几何图像。

$$(f^{-1}(y))' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

【例子】 $(\ln x)' = 1/x$

$$y = f(x) = e^x, x = f^{-1}(y) = \ln y$$

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

【例子】 $y = \sin x, x = \arcsin y, (-1 \leq y \leq 1)$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

- 复合函数 (composite function) 的导数（链式法则 - chain rule）：

$$\frac{d}{dx}f(u(x)) = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}, \quad [f'_x(u(x)) = f'_u(u)u'_x]$$

【证明】

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dx} f(u(x)) \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u(x + \Delta x)) - f(u(x))}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u(x + \Delta x)) - f(u(x))}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x}, \quad \left(\Delta u \equiv u(x + \Delta x) - u(x) \rightarrow 0 \text{ as } \Delta x \rightarrow 0 \right) \\
 &= \frac{df}{du} \frac{du}{dx}
 \end{aligned}$$

【例子】

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^u \times (a \ln x)' = e^{a \ln x} a \frac{1}{x} = ax^{a-1}$$

【例子】

$$(\ln[x + \sqrt{x^2 + 1}])' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

• 函数商的导数:

$$\frac{d}{dt} \frac{f}{g} = \frac{\frac{d}{dt} f g - f \frac{d}{dt} g}{g^2}$$

【例子】

$$\tan' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

【例子】 $1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$

$$(\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + y^2}$$

双曲函数 (hyperbolic functions):

$$\begin{aligned}
 \sinh t &= \frac{e^t - e^{-t}}{2}, & \operatorname{arsinh} t &= \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}), \\
 \cosh t &= \frac{e^t + e^{-t}}{2}, & \operatorname{arcosh} t &= \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}), \quad (|t| > 1) \\
 \tanh t &= \frac{\sinh t}{\cosh t} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}, & \operatorname{artanh} t &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}. \quad (|t| < 1) \\
 \cosh^2 t - \sinh^2 t &= 1
 \end{aligned}$$

• 初等函数的导数 (图 5):

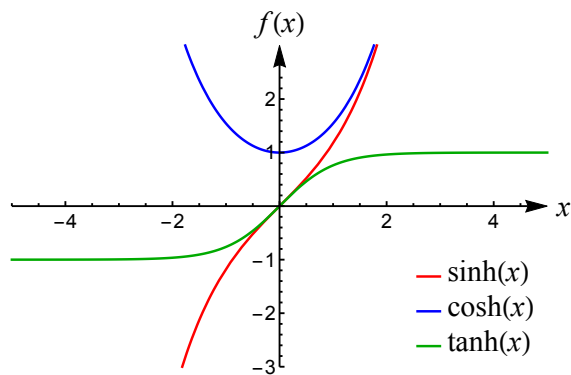


图 4. 双曲函数

$\frac{d}{dt} \text{Const} = 0$	$\frac{d}{dt} \sin t = \cos t$	$\frac{d}{dt} \arcsin t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\frac{d}{dt} t^a = at^{a-1}$	$\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t$	$\frac{d}{dt} \arccos t = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\frac{d}{dt} e^t = e^t$	$\frac{d}{dt} \tan t = \frac{1}{\cos^2 t}$	$\frac{d}{dt} \arctan t = \frac{1}{1+t^2}$
$\frac{d}{dt} \ln t = \frac{1}{t}$	$\frac{d}{dt} \sinh t = \cosh t$	$\frac{d}{dt} \operatorname{arcsinh} t = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
$\frac{d}{dt} a^t = a^t \ln a$	$\frac{d}{dt} \cosh t = \sinh t$	$\frac{d}{dt} \operatorname{arccosh} t = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}, (t > 1)$
$\frac{d}{dt} \log_a t = \frac{1}{t \ln a}$	$\frac{d}{dt} \tanh t = \frac{1}{\cosh^2 t}$	$\frac{d}{dt} \operatorname{arctanh} t = \frac{1}{1-t^2}, (t < 1)$

图 5. 常见函数的导数

4. 微分 (*differential*) 导数是通过商来定义的:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

反过来, 考虑自变量 x 增加 Δx 时, 函数该如何变化? 如果我们知道函数的解析形式, 当然可以直接求出来。但是, 很多情况下, 我们往往不知道 $f(x)$ 的解析形式, 但知道它在某点的导数 $f'(x)$ 。例如, 函数 $x(t)$ 为位置, 它对应的速度 $v(t) = x'(t)$ 往往可以通过能量守恒得到。

【例子】 火箭方程。真空中的火箭喷出燃料相对于火箭的速度为 u , 其质量随时间的改变为 $m(t)$ 。求火箭的推进力 $F(t)$ 。

根据牛顿第二定律, 计算推力需要计算加速度: $F = ma = m dv/dt$, 可我们并不知道 $v(t)$ 。不过速度与质量之间的关系由动量守恒给出。仍考虑火箭质量减少 Δm 时, 速度增

加 Δv ,

$$mv = (m - \Delta m)(v + \Delta v) - \Delta m(u - v) \Rightarrow \Delta v = \frac{\Delta m}{m - \Delta m}u \quad (8)$$

根据加速度的定义,

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u}{m - \Delta m} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{u}{m} m'(t) \quad (9)$$

因此, 火箭的推力,

$$F = ma = m'(t)u \quad (10)$$

【例子】如图 6, 已知拉绳的速度为 v , 求船的速度 u 。

根据定义, $u = \frac{dx}{dt}$, 但是 $x(t)$ 我们暂时不知道。我们知道的是 $v = \frac{dl}{dt}$ 。为了联系这两个物理量, 我们希望知道当绳子缩短 Δl 长度时, 小船前进多少。根据勾股定理可以找到两个量之间的关系,

$$x = \sqrt{l^2 - h^2} \quad (11)$$

因此,

$$\Delta x = \sqrt{l^2 - h^2} - \sqrt{(l - \Delta l)^2 - h^2} = \frac{2\Delta x l - \Delta l^2}{\sqrt{l^2 - h^2} + \sqrt{(l - \Delta l)^2 - h^2}} \quad (12)$$

从而速度,

$$u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2l - \Delta l}{\sqrt{l^2 - h^2} + \sqrt{(l - \Delta l)^2 - h^2}} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{l}{\sqrt{l^2 - h^2}} v \quad (13)$$

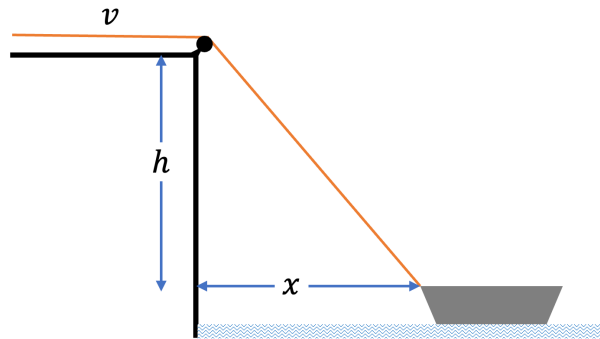


图 6.

从几何上看, $\Delta y/\Delta x$ 是割线斜率。我们可以反过来用切线斜率 $\frac{dy}{dx}$ 来估计割线斜率,

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + r(x, \Delta x)$$

那么现在的问题是, $r(x, \Delta x)$ 是多少?

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(x, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) = 0.$$

第二个等号是根据导数的定义。因此, 虽然我们不知道 $r(x, \Delta x)$ 在一般情况下的具体形式 (也不需要知道), 我们得到了它的一个重要性质,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(x, \Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

我们把这样的量叫做 Δx 的高阶无穷小, 并记做 $o(\Delta x)$ 。类似地, 如果是同阶量, 我们记做 $O(\Delta x)$ 。

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

【规则】: 当取无穷小极限时, Δ 替换成 d 。因此, $df(x) = f(x + dx) - f(x) = f'(x)dx$ 。

比较导数的定义, 也是通过有限差来定义的。取极限以后, 差分号替换成了 $\Delta \rightarrow d$ 。这里, 我们也采用类似地记号, 对上面的式子取极限, 并把差分替换成微分号,

$$df(x) = f(x + dx) - f(x) = f'(x)dx$$

与导数比较, 现在可以把导数当成一个真正的微商。

【规则】: 所有的 (一阶) 微分, 都可以当成微商来做运算。

复合函数微分: 复合函数导数需要指定对谁求导, 例如 $f(u(x))$, $f'_x \neq f'_u$, 实际上, 根据链式法则 $f'_x = f'_u u'_x$ 。那么现在, $d_x f \stackrel{?}{=} d_u f$

$$d_u f(u) = f'_u(u)du = f'_u(u)u'_x dx$$

||

$$d_x f(u(x)) = f'_x(u(x))dx = f'_u(u)u'_x$$

这叫做一阶微分不变性。这个从莱布尼茨记号, 也就是微商规则可以看出来,

$$d_x f = \frac{df}{dx} dx = \frac{df}{du} \frac{du}{dx} dx = d_u f \equiv df$$

【例子】：莱布尼茨法则（图 7）：

$$d(uv) = u dv + v du$$

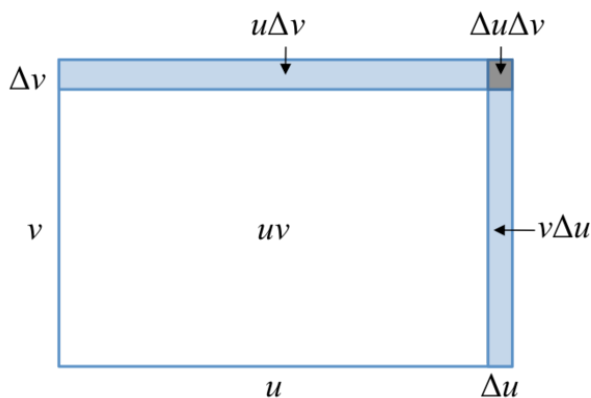


图 7. 莱布尼茨法则的几何解释。

【例子】隐函数的微分：已知 $F(x, y(x)) = 0$ ，求 $y'(x)$ 。

$$dF(x, y) = 0 \Rightarrow F'_x(x, y)dx + F'_y(x, y)dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

【例子】参数方程的微分：已知 $x = \sin t, y = \cos t$ ，求 $y'(x)$ 。

$$y'(x) = dy/dx \Rightarrow dx = x'(t)dt = \cos t dt, dy = y'(t)dt = -\sin t dt \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\tan t$$

直接计算： $t = \arcsin x, y = \pm\sqrt{1-x^2}$ 。

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = -\tan t$$

【总结】：可见，求函数的微分，比求函数本身一般来说是要简单的。这是因为，**函数的微分本质上是一种局部线性化**。函数微分中所蕴含的这种数学结构，要到微分几何中才能探讨清楚。

【例子】参数方程的微分：已知 $F(x(t), y(t), t)$ ，求 $\frac{dF}{dt}$ 。

$$dF = F'_x dx + F'_y dy + F'_t dt = F'_x x' dt + F'_y y' dt + F'_t dt \Rightarrow \frac{dF}{dt} = F'_x x' + F'_y y' + F'_t$$

5. 高阶导数 (*high-order derivatives*) 和高阶微分 【记号】

$$f''(x), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f^{(n)}, \quad \frac{d^n f}{dx^n}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2}$$

其中约定 $dx^n = (dx)^n$, $d^n f = f^{(n)} dx^n$ 。但是注意, 如果 $f(u(x))$ 是一个复合函数, 微分不变性不再成立:

$$\begin{aligned} d_x^2 f &= f''_x(u(x)) dx^2 = (f'_u u'_x)' dx^2 = (f''_u u'^2 + f'_u u''_x) dx^2 = f''_u du^2 + f'_u d^2 u, \\ d_u^2 f &= f''_u du^2 \end{aligned}$$

6. 泰勒展开 (*Taylor expansion*) 【思考】微分运算本质上是在局部线性化函数。如何获得函数的局部高阶信息?

$n+1$ 次可微分函数 $f(x)$ 的泰勒多项式定义为 ($x_0 \in I$),

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

【泰勒定理】设 $f(x)$ 在区间 I 有 $n+1$ 阶导数, $x_0 \in I$, 则对于任何 $x \in I$,

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1)$$

特别地, 对于光滑函数 $f(x)$,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \cdots$$

或者:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2!} f''(x)\Delta x^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(x)\Delta x^3 + \cdots$$

【例子】

$$\begin{aligned} \sin^{(2n)} x &= (-1)^n \sin x, \quad \sin^{(2n+1)} x = (-1)^n \cos x, \\ \cos^{(2n)} x &= (-1)^n \cos x, \quad \cos^{(2n+1)} x = (-1)^n \sin x. \end{aligned}$$

$\sin x$ 和 $\cos x$ 的 Taylor 级数:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \cdots; \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \cdots$$

应用：

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}\right)}{\Delta x^2} = \frac{1}{6}$$

7. 函数形状的刻画 导数 $f'(x)$ 表示函数的斜率，因此可以用来刻画函数的单调性 (monotonicity)。二阶导数 $f''(x)$ 表示函数变化的趋势。 $f'(x) = 0$ 叫做函数的驻点 (stationary point)， $f''(x) = 0$ 的点叫做函数的拐点 (Inflection point, flex)。鞍点 (saddle point)：非局部极值点的驻点。

【定理】设 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上可导，若 $f'(x) \geq 0$ (≤ 0)，则 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调增 (减)，反之亦然。

【定理】设在区间 I 中 $f''(x) \leq 0$ ，则 $f(x)$ 在 I 为凸函数。

连续函数的极值点：端点、驻点、不可微点。 $f'(x_0) = 0$ ，其中，极大值： $f''(x_0) < 0$ ，极小值： $f''(x_0) > 0$ 。

函数形状的刻画：

- 定义域、周期性、奇偶性、不连续点、不可微点，奇点
- 单调区间、极值点
- 凹凸区间、拐点
- 渐进线
- 特殊点，如零点

【例子】绘制 $f(x) = x + 1/x$ 的形状，并求函数最小值。

【例子】绘制 Swish 函数 $f(x) = \frac{x}{1+e^{-x}}$ 的图像。

【例子】绘制 softplus 函数 $f(x) = \ln(1 + e^x)$ 的图像。

【例子】求函数 $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ 的最大值。

§ 3. 质点运动学 II

假设我们知道运动速度作为时间的函数 $v(t)$ 和物体的初始位置 x_0 ，如何求任意时刻物体的位置 $x(t)$ 呢？换句话说，就是求一个函数 $x(t)$ 使得，

$$x'(t) = v(t), \quad (x(0) = x_0) \quad (14)$$

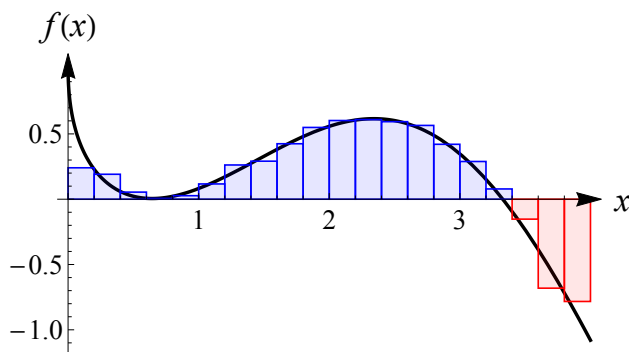


图 8. 积分表示曲线 $y = f(x)$ 与坐标轴 $y = 0$ 之间的区域的面积。坐标轴上方的面积 (蓝色) 约定为正, 下方的图形面积 (红色) 约定为负。

还是按照前面的办法, 将运动按照时间划分成若干区间。假如我们知道每一个区间的平均速度 $\bar{v}_{i \rightarrow i+1}$, 我们就可以一步一步地从初始位置爬过来,

$$x_i = x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \bar{v}_{k \rightarrow k+1} \Delta t_{k \rightarrow k+1} \quad (15)$$

为了用瞬时速度代替平均速度, 我们需要将区间划分的无限细,

$$x(t) = x_0 + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{i-1} \bar{v}_{k \rightarrow k+1} \Delta t_{k \rightarrow k+1} = x_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau \quad (16)$$

这个运算就叫做积分。对比 (14), 微分与积分互为逆运算, 也就是说,

$$\int_a^b \dot{x}(t) dt = x(b) - x(a), \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^t v(\tau) d\tau = v(t) \quad (18)$$

§ 4. 积分

上面对于积分的定义, 可以推广到任意连续函数。例如考虑函数 $y = f(x)$, 其中 $x \in [a, b]$, 定积分定义为,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i). \quad (19)$$

从几何上看, 该积分表示曲线 $y = f(x)$ 与坐标轴 $y = 0$ 之间的面积。

微积分基本定理告诉我们微分与积分互为逆运算：

$$\int_a^b F'(x)dx = F(a) - F(b), \quad (20)$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (21)$$

若

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx \quad (22)$$

我们把 $F(x)$ 叫做 $f(x)$ 的原函数，逆运算 $\int$ 叫做不定积分。不定积分定义到任意一个常数。它与定积分的区别主要是定积分指定了原函数在区间端点处的值，从而确定了这个任意常数。

下面来回忆一下基本的积分规则：

- 零的积分：

$$\int 0dt = C$$

所有不定积分定义到一个任意常数。

- 函数和的积分：

$$\int (f + g)dt = \int fdt + \int gdt$$

- 分部积分：

$$\int fg'dt = fg - \int f'gdt$$

- 变量代换：

$$\int f(u)du = \int f(u(t))u'(t)dt$$

- 常见函数的不定积分（图 9）：

【例题】 求积分 $\int \sin x \cos x dx$

【例题】 求积分 $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$

【例题】 求积分 $\int \frac{1+x^4}{1+x^2} dx$

【费曼技巧】：求积分： $\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$

$\int 0 dx = \text{Const}$	$\int \cos x = \sin x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$
$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1}, (a \neq -1)$	$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x $	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsinh} x$
$\int e^x dx = e^x$	$\int \sinh x dx = \cosh x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosh} x, (x > 1)$
$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x$	$\int \cosh x dx = \sinh x$	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctanh} x, (x < 1)$
	$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x$	

图 9. 常见函数的积分

$$\begin{aligned}
F(t) &\equiv \int_0^\infty e^{-tx} dx = \frac{1}{t} \\
F'(t) &= - \int_0^\infty x e^{-tx} dx = -\frac{1}{t^2} \\
F''(t) &= + \int_0^\infty x^2 e^{-tx} dx = 2\frac{1}{t^3} \\
\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx &= F''(1) = 2.
\end{aligned}$$

1. 数值微积分 计算陌生积分的首选是数学软件 (Mathematica, Matlab), 微分比较好算, 但也会有需要数学软件帮助的时候。

- Mathematica 语言指导:
<https://reference.wolfram.com/language/tutorial/Calculus.html.zh>
- Matlab 语言指导:
<https://ww2.mathworks.cn/help/symbolic/calculus.html>

除此之外也可以采用比较传统的办法, 查积分表。出版的比较有名的积分表是前苏联数学家 Gradshteyn 和 Ryzhik 编撰的 Table of Integrals, Series, and Products。现在已经更新到了 2014 年第八版。在线的数学手册包含了特殊函数的应用与积分。Abramowitz & Stegun 主编的数学手册历来放在物理学家的案头, 现有电子扫描版: <https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/>。此外美国国家标准局 NIST 也建立了网上的电子数学函数库: <https://dlmf.nist.gov/>

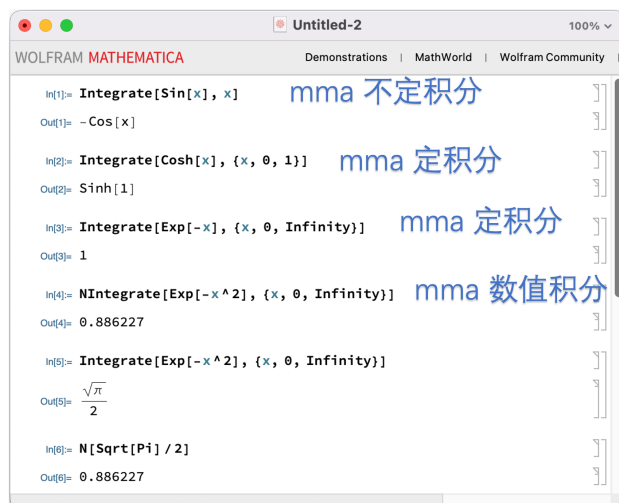


图 10. 数学软件 Mathematica 计算积分的几个例子

【例子】伽利略的落体实验。我们前面提到伽利略曾假设自由落体的速度 v 正比于其运动距离，然后利用逻辑推理得到矛盾。现在用微积分方法推导一下这个问题，看看为什么会有矛盾。

解：

$$v = kx$$

即，

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= kx \\ \Rightarrow \frac{dx}{x} &= kdt \\ \Rightarrow \ln x \Big|_{x_0}^x &= kt \\ \Rightarrow \ln \frac{x}{x_0} &= kt \\ \Rightarrow x &= x_0 e^{kt} \end{aligned}$$

其中， x_0 是初始位置。在自由落体中， $x_0 = 0$ 。因此我们得到 $x(t) = 0$ 。这是唯一自洽的解。

【例子】一滴雨自静止开始从高空垂直掉落，重力加速度为 g ，空气阻力为 $f = -mkv^2$ ，这里， v 为雨滴速度， m 为雨滴质量。求：

- (a) 雨滴下落速度 v 作为时间 t 的函数;
 (b) 雨滴下落距离 s 作为时间 t 的函数;
 (c) 雨滴下落速度 v 作为下落距离 s 的函数;
 (d) 雨滴的收尾速度 v_f ;

(a) 解: 第一步: 牛顿第二定律

$$\begin{aligned}
 m \frac{dv}{dt} &= mg - mkv^2 \\
 \Rightarrow \frac{dv}{g - kv^2} &= dt, \\
 \Rightarrow \int \frac{dv}{g - kv^2} &= \int dt, \quad \text{【不定积分】} \\
 \Rightarrow \int \frac{dv}{1 - \frac{k}{g}v^2} &= gt, \quad \left(\int \frac{dx}{1 - x^2} = \operatorname{arctanh} x \right)
 \end{aligned}$$

引入变量: $u = \sqrt{\frac{k}{g}}v \Rightarrow du = \sqrt{\frac{k}{g}}dv \Leftrightarrow dv = \sqrt{\frac{g}{k}}du$, 【注意, $\sqrt{\frac{g}{k}}$ 是速度量纲, 可以引入一个特征速度, $v_f = \sqrt{\frac{g}{k}}$ 】

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{k}} \int \frac{du}{1 - u^2} &= gt, \\
 \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{arctanh} u + C &= gt, \\
 \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{k}{g}}v + C &= gt
 \end{aligned}$$

初始条件: $t = 0$, 速度 $v = 0$, 因此可以得出, $C = 0$ 。

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{k}{g}}v &= gt \\
 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{g}{k}} \tanh \sqrt{gk}t}
 \end{aligned}$$

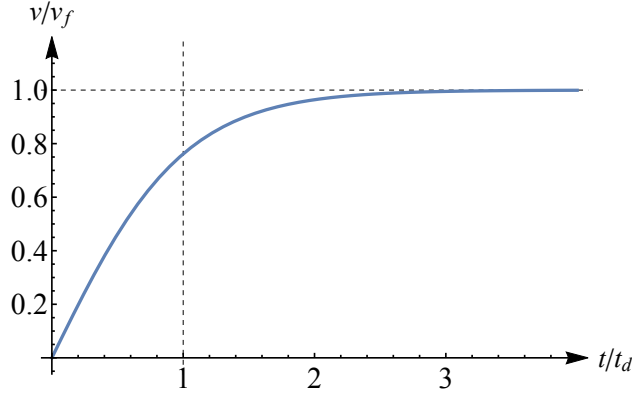


图 11. 考虑空气阻力的自由下落。 $v_f = \sqrt{g/k}$, $t_d = g/v_d = \sqrt{gk}$ 分别是下落的收尾速度和特征时间。

画出函数图像，可以得到： $v_f = \sqrt{\frac{g}{k}}$ ——量纲分析确实如此。解可以改写

$$v = v_f \tanh \frac{gt}{v_f}$$

极限情况：如果空气阻力很小 $k \ll 1 \Rightarrow v_f \gg 1$ 或者 $t \ll 1$ ，应该恢复到自由落体解。

$$v = \lim_{v_f \rightarrow \infty} v_f \tanh \frac{gt}{v_f} = gt$$

(b) 解：

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= v = v_f \tanh \frac{gt}{v_f} \\ \Rightarrow \int ds &= v_f \int \tanh \frac{gt}{v_f} dt, \\ \left(\int \tanh x dx &= \int \frac{\sinh x}{\cosh x} x dx = \int \frac{d \cosh x}{\cosh x} = \ln \cosh x \right) \\ \Rightarrow s + C &= \frac{v_f^2}{g} \ln \cosh \frac{gt}{v_f}, \quad \text{【注意积分常数、检查量纲】} \\ \Rightarrow \boxed{s = \frac{v_f^2}{g} \ln \cosh \frac{gt}{v_f}} &= v_f t + \frac{v_f^2}{g} \ln \frac{1}{2} [1 + \exp(-\frac{2gt}{v_f})] \end{aligned}$$

极限情况： $t \gg 1$ ，速度达到收尾速度 v_f ，距离 $s \sim v_f t$ 。当 $t \ll 1$ ，速度很小，阻力远小于重力，因此距离应该近似等于自由落体 $\frac{1}{2}gt^2$ 。

(c) 解：既可以将 t 反解为 s 的函数。也可以直接求解——利用链式法则：

$$\begin{aligned}\frac{dv}{ds} &= \frac{dv}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{g - kv^2}{v} \\ \Rightarrow \int \frac{v dv}{g - kv^2} &= \int ds \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{dv^2}{g - kv^2} &= s + C \\ \Rightarrow \ln(g - kv^2) &= -2ks + C \quad \text{【量纲分析 } ks\text{】}\end{aligned}$$

初始时刻： $v = 0, s = 0 \Rightarrow C = \ln g$ 。因此，

$$\begin{aligned}\Rightarrow (g - kv^2) &= ge^{-2ks} \\ \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{g}{k}[1 - e^{-2ks}]}} &= v_f [1 - e^{-2ks}]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

极限分析，长距离 $s \rightarrow \infty, v \rightarrow v_f$ ，短距离 $s \rightarrow 0$ ，自由落体： $v = \sqrt{2gs}$ 。

(d) 解：收尾速度的另一种解法，力平衡 $mg = mkv_f^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{g/k}$ 。

§ 5. 矢量代数

现实世界的运动既有距离又有方向。为了描述这些运动，我们需要引入一个新的数学对象——矢量又叫做向量。这一节介绍矢量的基本代数运算，加法和乘法。

1. 矢量的定义 矢量，简而言之，是既有大小又有方向并按照一定规则相加的量。标量（例如数）是只有大小（可以有正负号）没有方向的量。在物理上，矢量一般记做 $\vec{a}$ ，或者黑体 $\mathbf{a}$ 。它的大小记做 $|\vec{a}|$ 、 $|\mathbf{a}|$ 或者白体的 a 。我们还会定义沿着矢量的方向的单位矢量， $\hat{a} \equiv \vec{a}/|\vec{a}|$ 。很显然， $|\hat{a}| = 1$ 。

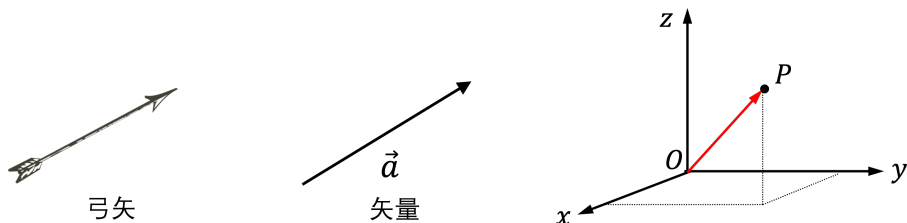


图 12. 矢量就是既有大小又有方向并按照一定规则相加的量。空间的点 P 相对于原点 O 的位置 $\overrightarrow{OP}$ 是物理上最常见的矢量。

在物理上最常见的矢量是空间的点相对于原点的位置，叫做位置矢量。所有的位置合

起来构成空间²。数学上，将位置的性质抽象出来，可以用来定义更一般的矢量和及其集合——矢量空间。这里我们不去讨论定义矢量的公理化定义，仅提及矢量所满足的一般性质。

两个矢量如果大小、方向都相同，就叫说两个矢量是相等的。注意，一般矢量并不一定从原点出发，它们在空间是没有固定点的，可以任意移动。如果两个矢量大小相等，方向相反，可以把其中的一个矢量记成另外一个矢量 $\vec{a}$ 的负矢量 $-\vec{a}$ 。

零矢量大小为 0，没有方向，记成 $\vec{0}$ 或者 0。

2. 矢量加法 矢量的加法遵循平行四边形法则（图 13）。

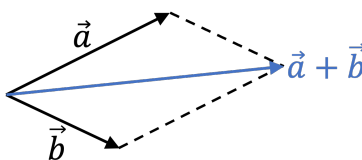


图 13. 平行四边形法则

矢量加法满足：

1. 交换律： $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. 结合律： $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

矢量减法可以通过加法来定义： $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

通过这些规则，以及一些其他必要的公设，矢量的很多性质可以严格证明出来，结果跟我们的时空直觉一样，这里不作推导证明。

3. 矢量数乘 矢量有两种基本乘法，数乘和点乘。

矢量数乘是一个数（标量） λ 与一个矢量 $\vec{a}$ 相乘，其结果 $\lambda\vec{a}$ 仍然是一个矢量，其方向不变（包括相反），长度为原来矢量的 $|\lambda|$ 倍。数乘满足结合律和对加法的分配律。

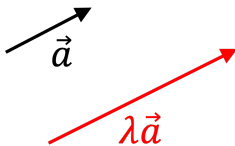


图 14. 矢量数乘

² 该空间实际上是一个仿射空间，它既是一个矢量空间，还允许点沿着矢量移动。

4. **矢量点乘** 矢量点乘又叫做内积 (inner product)、点积 (dot product)。两个矢量点乘的结果是一个数 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$ ，其中 θ 为两个矢量之间的夹角。内积满足交换律，即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ 和对加法的分配律以及对数乘的结合律。

几何解释 (图 15)。

应用：

- 模平方： $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$ 模平方
- 矢量垂直：如果两个矢量的内积为 0，称这两个矢量垂直： $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ 。

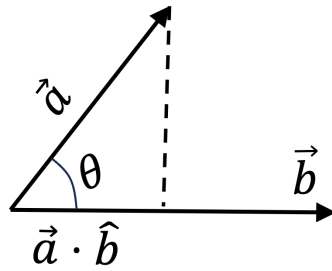


图 15. 矢量点乘

【例子】柯西不等式： $|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \geq (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

【例子】Thales 定理：如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，证明 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 垂直

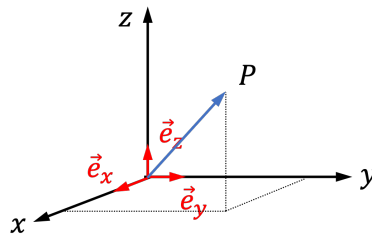


图 16. 基矢量与分量表示

5. **分量表示** 矢量可以通过分量来表示。 $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = \sum_i a_i \vec{e}_i$. 这里， $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ 叫做单位基矢量，又叫做基矢量，简称基矢，可以统一记为 $\vec{e}_i$ 其中 $i = 1, 2, 3$ 分别表示 x, y, z 方向。基矢量也常常记为 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 。

基矢量的性质：长度为 1，互相垂直： $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = |\vec{e}_i| = 1$ ， $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$ ，可以合写为：

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (23)$$

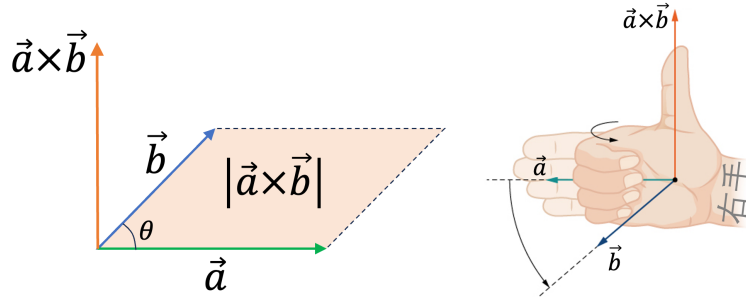


图 17. 矢量的叉乘

其中 δ_{ij} 叫做克罗内克 (Kronecker) 记号。

利用分量形式, 矢量的很多性质可以很容易表示出来, 例如,

- 相加: $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{e}_x + (a_y + b_y)\vec{e}_y + (a_z + b_z)\vec{e}_z$
- 数乘: $\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{e}_x + \lambda a_y\vec{e}_y + \lambda a_z\vec{e}_z$ (分配律)
- 内积: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_i a_i b_i$ 。
- 模: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
- 取分量: $a_i = \vec{e}_i \cdot \vec{a}$

【例子】已知两个矢量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的分量, 求其之间的夹角 θ 。

解:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (24)$$

【例子】柯西不等式: $(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) \geq (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2$

证明: $|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \geq (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta)^2$, 两边用分量展开可以得到柯西不等式, 等号只在 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 时取到。

6. 矢量外积 (叉乘) 矢量外积给出一个新的矢量, $\vec{a} \times \vec{b} \equiv \vec{c}$, 其大小 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta$, 方向为垂直于矢量 $\vec{a}, \vec{b}$ 所在的平面, 按右手定则为正, 如图 17所示。几何含义: 矢量外积的大小等于两个矢量所构成的平行四边形的面积。

分量表示: $\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{e}_z$

外积的性质:

- 如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行, $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, 特别地, $\vec{a} \times \vec{a} = 0$; 反过来, 如果 $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行, 即 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$

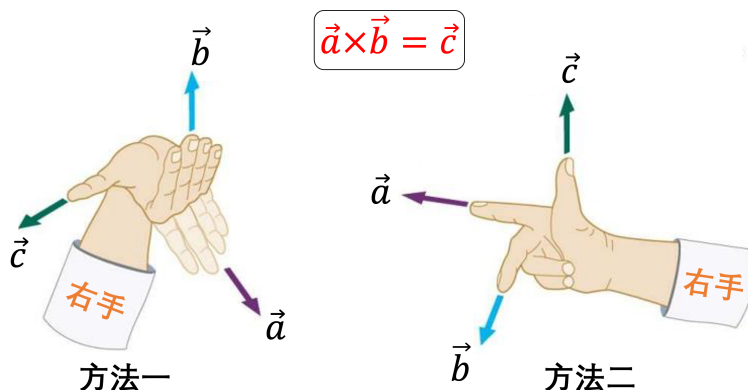


图 18. 右手定则示意图

- 如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直, $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$
- 矢量外积与矢量垂直: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$
- 叉乘不具有交换性, 实际上 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

基矢量之间的叉乘 $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y, \vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0$ 。这里要非常注意基矢量叉乘的次序 (图 19)。

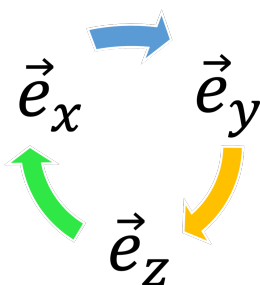


图 19. 叉乘的循环

7. 多重积与混合积

- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (bac-cab 公式)

【证明】方法一: 直接利用分量表达式计算 (课后练习)

方法二: 如图 20所示, 首先根据叉乘的性质 $\vec{b} \times \vec{c}$ 垂直与 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$, 即垂直于两个矢量所在的平面。而 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ 又垂直于 $\vec{b} \times \vec{c}$, 因此 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ 一定位于 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 所在的平面内, 即可以表示成: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \mu\vec{b} + \sigma\vec{c}$ 的形式。

另一方面, 又已知 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ 垂直于 $\vec{a}$ 。因此, 可以得到 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \mu(\vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{c} \cdot \vec{a}} \vec{c}) \equiv \lambda[\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})]$ 。

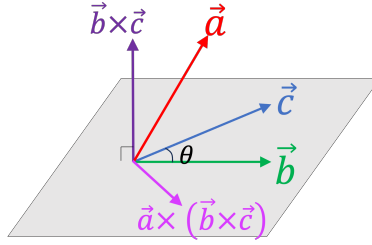
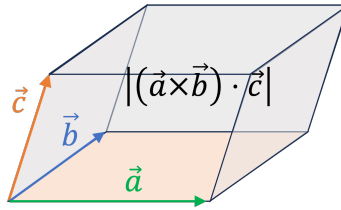


图 20. BAC-CAB 规则的几何证明

最后一步改写是因为三重积关于三个矢量都是线性的，因此这样得到的待定系数 λ 与三个矢量无关。因此可以找一个特殊情况确定 λ ，例如取 $\vec{a} = \vec{b} = \vec{e}_x$, $\vec{c} = \vec{e}_y$ 。已知， $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$ ，因此 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{e}_z$ ，由此可以得到 $\lambda = 1$ 。

- $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$

混合积的几何含义：向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 所形成的平行六面体的体积（图 21）

图 21. 混合积的几何含义：向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 所形成的平行六面体的体积

分量形式：

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x - a_x b_z c_y - a_y b_x c_z \quad (25)$$

行列式记法（其实也没啥用）：

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (26)$$

【例子】

- 证明 $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$
- 证明 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

提示：应用多重积公式

- 证明 $\vec{a} \times [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] = \vec{b}[\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{d})] - (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d})$

提示：应用多重积公式

- **极分解 (polar decomposition)**: $\hat{n}$ 是一个单位矢量, 证明: 任意矢量 $\vec{a}$ 可以沿着 $\hat{n}$ 分解为,

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\hat{n} \times \vec{a}) \times \hat{n} \quad (27)$$

这个定义在研究 3 维转动时将起到重要的作用。

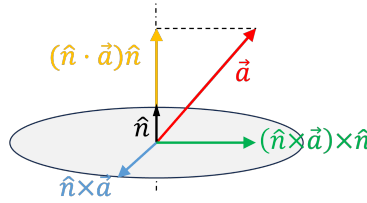


图 22. 极分解定理的几何说明

8. 矢量微积分 矢量微积分可以按照分量来定义:

$$\frac{d}{dt}\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sum_i (a_i(t + \Delta t) - a_i(t))\vec{e}_i}{\Delta t} = \sum_i \frac{d}{dt}a_i\vec{e}_i \quad (28)$$

$$\int \vec{a}(t)dt = \sum_i \vec{e}_i \int a_i(t)dt \quad (29)$$

【例子】 $\vec{a}(t) = \vec{e}_x + t\vec{e}_y$, $\frac{d}{dt}\vec{a} = \vec{e}_y$ 。注意, $\frac{d}{dt}\vec{a} \neq \frac{d}{dt}a\hat{a}$ 。

$$\frac{d}{dt}a = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \hat{a} = \frac{\vec{e}_x + t\vec{e}_y}{\sqrt{1+t^2}}$$

矢量微分的加法:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{d}{dt}\vec{a} + \frac{d}{dt}\vec{b}$$

矢量的乘法 (莱布尼茨法则):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[f(t)\vec{a}(t)] &= \sum_i \frac{d}{dt}[f(t)a_i(t)\vec{e}_i] = \\ &= \sum_i \left(\frac{d}{dt}f(t)a_i(t)\vec{e}_i + f(t)\frac{d}{dt}a_i(t)\vec{e}_i \right) = \frac{d}{dt}f(t)\vec{a}(t) + f(t)\frac{d}{dt}\vec{a}(t). \end{aligned}$$

根据莱布尼茨法则, $\frac{d}{dt}\vec{a} = \frac{d}{dt}a\hat{a} + a\frac{d}{dt}\hat{a} \neq \frac{d}{dt}a\hat{a}$ 。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)] &= \sum_i \frac{d}{dt}[a_i(t)b_i(t)] = \\ \sum_i \left(\frac{d}{dt}a_i(t)b_i(t) + b_i(t)\frac{d}{dt}a_i(t) \right) &= \frac{d}{dt}\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \frac{d}{dt}\vec{b}(t).\end{aligned}$$

§ 6. 欧几里德几何

3 维欧几里德空间 (Euclidean space) 是物理中最重要的一个矢量空间。这一节介绍 3 维欧氏空间的基本性质。前面介绍过, 欧几里德空间中的点相对于原点构成一组矢量, 叫做位置矢量 (position vector), 简称位矢。位矢是欧几里德空间中的基本矢量。除了位置矢量以外, 欧几里德空间还可以定义其他矢量, 例如切矢量, 将在稍后介绍。

1. 笛卡尔坐标系 (*Cartesian coordinate system*) 在欧几里德空间可以选定三个固定的正交方向作为三个坐标轴, 分别记作 X, Y, Z 方向。任何一个点 P 及其位置矢量 $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ 可以由这三个方向的一组数 (x, y, z) 唯一指定, 这一组数叫做点 P 的笛卡尔坐标。

选定欧几里德空间三个坐标轴方向的单位方向矢量作为基矢量 $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ 。这些基矢量是正交归一的,

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad (30)$$

注意, 这些基矢量不依赖于坐标, 换句话说它们是全局基矢量。物理上的存在性?

点 P 的位置矢量

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \equiv \sum_i x_i\vec{e}_i \quad (31)$$

在物理上, 一般约定采用右手坐标系, 即 X, Y, Z 三个坐标轴满足右手定则。

2. 极坐标系 (*polar coordinate system*) 对于 2 维欧几里德空间, 另外一个常用的坐标系是极坐标系。其中的点既可以用笛卡尔坐标标记 (x, y) , 也可以用极坐标标记 (r, θ) , 两者满足:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arg(x + iy) \in [0, 2\pi) \end{cases} \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (32)$$

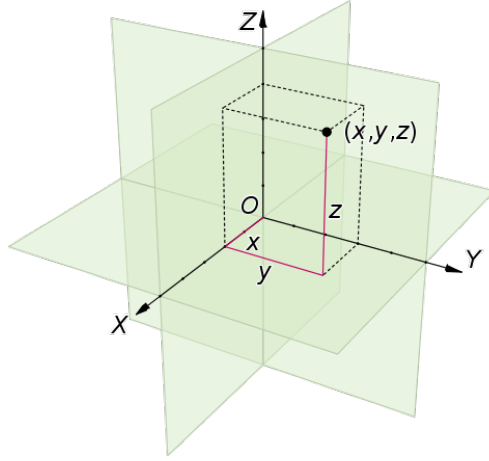


图 23. 笛卡尔坐标系

引入正交基矢量 ($\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = 1, \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0$),

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = \frac{\hat{z} \times \vec{r}}{r} = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_y = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta \end{cases}$$

注意，基矢量 $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ 是坐标 (角度 θ) 的函数。换句话说，极坐标的基矢量是局域基矢量。可以计算基矢量相对于角度的微分，

$$d\vec{e}_r = \vec{e}_\theta d\theta, \quad d\vec{e}_\theta = -\vec{e}_r d\theta \quad (33)$$

这个关系可以通过表示成笛卡尔坐标的基矢量得到。

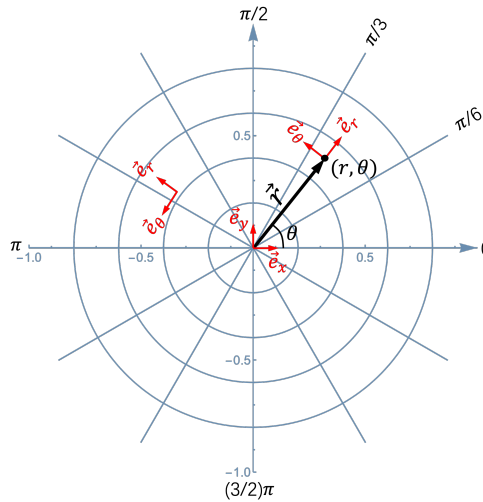


图 24. 极坐标系

在极坐标中位置矢量较为简单，可以表示为，

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \quad (34)$$

【例子】开普勒轨道：

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \quad (35)$$

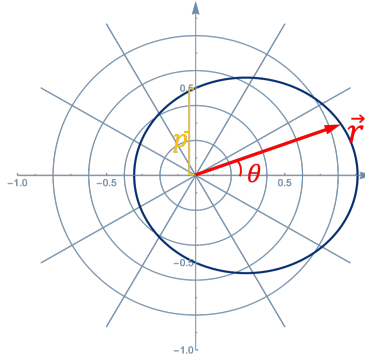


图 25. 开普勒轨道

极坐标中的一般矢量可以表示为 $\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta$ ，利用分量关系 (32)：

$$\begin{cases} a_r = a_x \cos \theta + a_y \sin \theta = \vec{a} \cdot \vec{e}_r \\ a_\theta = -a_x \sin \theta + a_y \cos \theta = (\vec{e}_r \times \vec{a}) \cdot \vec{e}_z \end{cases}$$

这里， θ 是参考点处的极角。换句话说，一般矢量 $\vec{a}$ 的极坐标 (a_r, a_θ) 与矢量 $\vec{a}$ 的起点的选择有关。

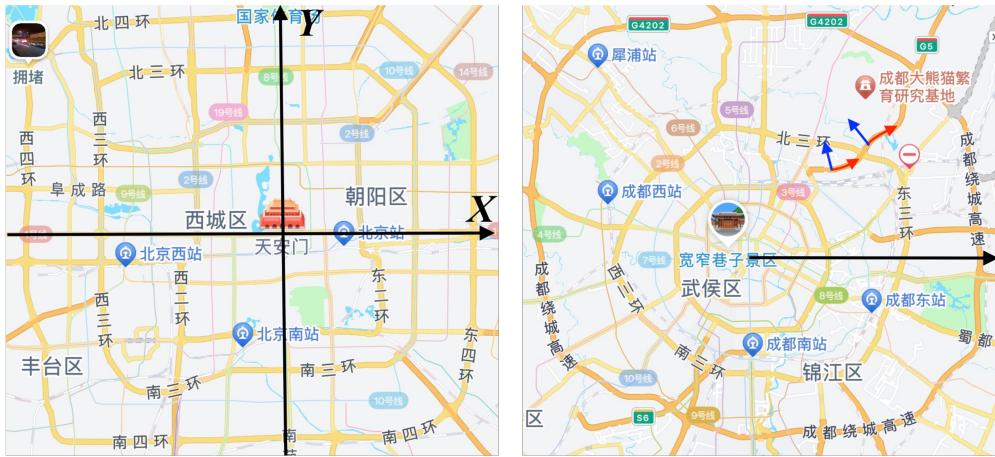


图 26. 北京城市地图接近笛卡尔坐标系，而成都城市地图接近极坐标系

3. 柱坐标 (*Cylindrical coordinate system*) 极坐标可以直接推广到 3 维欧氏空间的柱坐标。其中的点既可以用笛卡尔坐标标记 (x, y, z) ，也可以用柱坐标标记 (ρ, θ, z) ，

其中,

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arg(x + iy) \in [0, 2\pi) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

引入正交基矢量 ($\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1, \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\theta = \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_z = 0$),

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \frac{\vec{\rho}}{\rho} = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = \frac{\hat{z} \times \vec{\rho}}{\rho} = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_\rho - \sin \theta \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_y = \sin \theta \vec{e}_\rho + \cos \theta \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

其中, $\vec{\rho} = \vec{r} - z\vec{e}_z$. 位置矢量的柱坐标表示: $\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$.

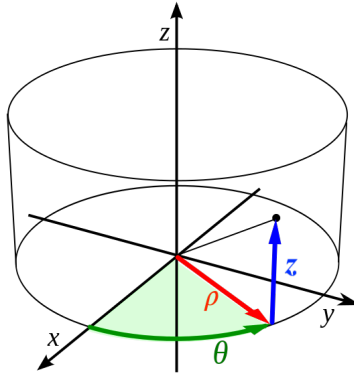


图 27. 柱坐标系

【例子】带电粒子在匀强磁场中的回旋运动。

$$\vec{r} = r_L \vec{e}_\rho + v_z t \vec{e}_z$$

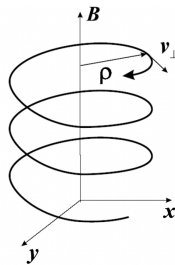


图 28. 磁场中带电粒子的回旋运动可以用柱坐标系描述

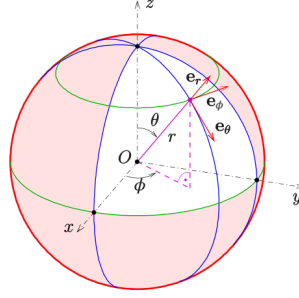


图 29. 球坐标

4. 球坐标 (*Spherical coordinate system*) 另外一种将 2 维极坐标推广到 3 维的办法是球坐标。3 维空间的点 (x, y, z) 在球坐标下表示为 (r, θ, ϕ) , 其中,

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{r} \in [0, \pi] \\ \phi = \arg(x + iy) \in [0, 2\pi) \end{cases} \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

【例子】地理坐标：合肥北纬 31.8639° ，东经 117.2808° ，海拔 37 米



图 30. 地理坐标使用球坐标来标记地理位置。

引入正交基矢 ($\vec{e}_i^2 = 1, \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$)

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{e}_x = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_r + \cos \theta \cos \phi \vec{e}_\theta - \sin \phi \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_y = \sin \theta \sin \phi \vec{e}_r + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_\theta + \cos \phi \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta \end{cases}$$

注意，球坐标的基矢量与极角 (θ, ϕ) 有关，也就是说球坐标的基矢量是局域的。基矢量的

微分是,

$$d\vec{e}_r = \vec{e}_\theta d\theta + \sin\theta \vec{e}_\phi d\phi, \quad (36)$$

$$d\vec{e}_\theta = -\vec{e}_r d\theta + \cos\theta \vec{e}_\phi d\phi, \quad (37)$$

$$d\vec{e}_\phi = -(\sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\theta) d\phi \quad (38)$$

在球坐标下, 位置矢量较为简单 $\vec{r} = r\vec{e}_r$ 。

5. 曲线: 由参数方程组 $\vec{r} = (\gamma_x(s), \gamma_y(s), \gamma_z(s)), s \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ 确定的点集叫做一条曲线。分量形式:

$$x = \gamma_x(s), y = \gamma_y(s), z = \gamma_z(s).$$

也可以使用曲线坐标表示曲线。一般情况下, 不显式指定曲线方程时, 可以将曲线直接记做 $\vec{r}(s)$. 注意, 不同的参数化形式可能对应几何上相同的曲线。

【例子】

$$\begin{cases} x = s^2 \sin 2\pi s, \\ y = s^2 \cos 2\pi s, \\ z = s \end{cases} \quad s \in [0, 6]$$

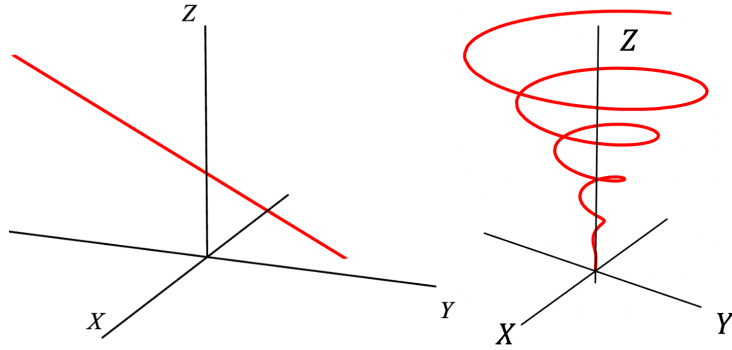


图 31. 曲线

【例子】

$$\vec{r}(s) = \vec{r}_0 + s\vec{\tau}, \quad s \in \mathbb{R}, |\vec{\tau}| = 1$$

6. 曲线微分 位置坐标 $\vec{r}$ 的微分 $d\vec{r}$ 叫做曲线的线元 (line element), 如图 32所示,

$$d\vec{r} = \vec{r}(s + ds) - \vec{r}(s) = \vec{r}'(s)ds$$

线元在不同坐标系的分量表示形式,

- 在直角坐标下, $d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$

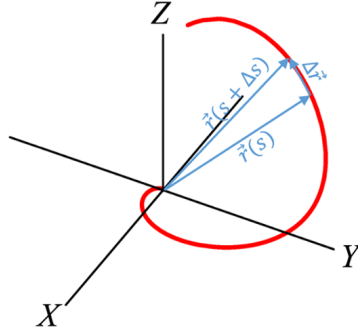


图 32. 曲线的微分

- 在极坐标下, $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta$;
- 在柱坐标下, $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$;
- 在球坐标下, $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi\vec{e}_\phi$

切矢量 (tangent vector): 微分的本质是线性化。从几何上看, 线元沿着曲线切线方向, 可以定义单位切矢量:

$$\vec{\tau}(s) = \frac{\vec{r}'(s)}{|\vec{r}'(s)|} \quad (39)$$

曲率 (curvature): 曲线的曲率定义为相邻切线的夹角与线元长度之比,

$$\kappa(s) = \frac{d\varphi(s)}{dr} \quad (40)$$

$$= \frac{|\vec{\tau}(s) \times \vec{\tau}(s + ds)|}{|d\vec{r}|} \quad (41)$$

$$= \frac{|\vec{\tau}(s) \times [\vec{\tau}(s + ds) - \vec{\tau}(s)]|}{|d\vec{r}|} \quad (42)$$

$$= \frac{|\vec{\tau}(s) \times \vec{\tau}'(s)|}{|\vec{r}'|} \quad (43)$$

$$= \frac{|\vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s)|}{|\vec{r}'|^3} \quad (44)$$

曲线的曲率与曲线的参数化形式无关, 仅与曲线形状有关。曲线曲率的倒数叫做曲率半径: $\rho(s) = \kappa^{-1}(s)$ 。

【例子】 直线的切向量: $\vec{r}'(s) = \vec{\tau}$, 是个常向量, 因此直线的曲率为 0。

【例子】 圆的曲率:

$$\begin{cases} x = R \cos s, \\ y = R \sin s, \end{cases} \Rightarrow r(s) = R, \theta(s) = s \Rightarrow \vec{r}(s) = R\vec{e}_r. \quad (45)$$

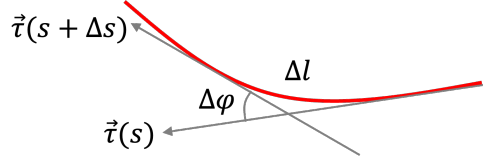


图 33. 曲率。注意到： $\vec{\tau}(s) \times \vec{\tau}(s + ds) = \sin d\varphi = d\varphi$

切线： $\vec{r}'(s) = R\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{\tau}(\theta) = \vec{e}_\theta$ 。

切向量的导数： $\vec{\tau}'(\theta) = -\vec{e}_r$ 。

曲率： $\kappa = R^{-1} = \rho^{-1}$ 。

圆的曲率半径是其半径。

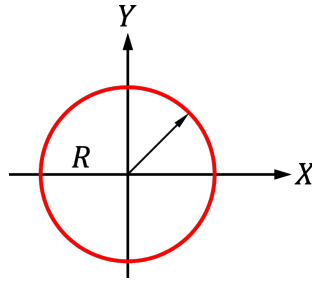


图 34. 圆的曲率。

法平面 (normal plane): 定义曲线的法平面为与切向量垂直的点集： $P = \{\vec{\xi} | (\vec{\xi} - \vec{r}(s)) \cdot \vec{r}'(s) = 0\}$ 。

在法平面上有两个特殊的单位矢量，法矢量 (normal vector) 和次法矢量 (binormal vector)，如图 35所示。法矢量定义为切矢量的导数的方向矢量，即曲线在局部弯曲的方向，

$$\vec{n}(s) = \frac{\vec{\tau}'(s)}{|\vec{\tau}'(s)|} \quad (46)$$

$$= \frac{\vec{r}'' |\vec{r}'|^2 - \vec{r}' (\vec{r}' \cdot \vec{r}'')}{|\vec{r}'| |\vec{r}' \times \vec{r}''|}, \quad (47)$$

$$= \frac{(\vec{r}' \times \vec{r}'') \times \vec{r}'}{|\vec{r}'| |\vec{r}' \times \vec{r}''|}, \quad (48)$$

而次法矢量则与切矢量、法矢量垂直：

$$\vec{b}(s) = \vec{\tau} \times \vec{n} \quad (49)$$

$$= \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|} \quad (50)$$

利用微分不变性，不难证明切矢量、法矢量、次法矢量与曲线的参数化形式无关，仅依赖于曲线的几何形状。

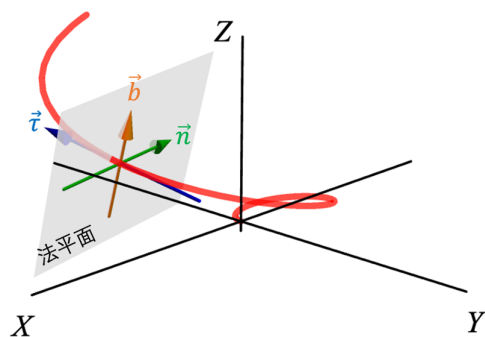


图 35. 切矢量、法矢量、次法矢量。

7. 曲线积分：考虑一条曲线 $\gamma: \vec{r} = \vec{r}(s)$ ，其中 $s \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ 。

第一类曲线积分：

$$\int_{\gamma} f(\vec{r}) |d\vec{r}| = \int_a^b f(\vec{r}) |\dot{\vec{r}}(s)| ds$$

这里， $|d\vec{r}| = \sqrt{d\vec{r}^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ 为线元的长度， $\dot{\vec{r}} = d\vec{r}/ds$ 。

【例子】曲线的弧长：

$$\int_{\gamma} |d\vec{r}| = \int_a^b |\dot{\vec{r}}(s)| ds = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx$$

第二类曲线积分：考虑矢量 $\vec{a}$ 沿着曲线 γ 的积分，

$$\int_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_a^b (\vec{a} \cdot \dot{\vec{r}}) ds$$