中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

GAMES102

GAMES 102在线课程

几何建模与处理基础

刘利刚

中国科学技术大学

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

GAMES 102在线课程：几何建模与处理基础

NURBS曲线

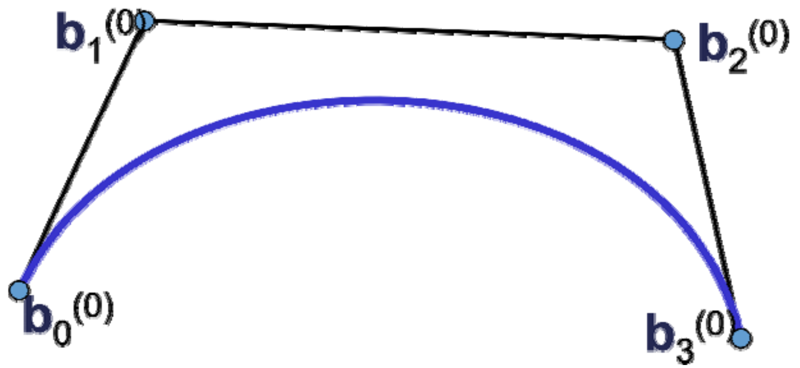
作业4情况

- 作业4情况
  - 演示优秀demo
  - 优秀代码和优秀报告
- 其他学员可以继续完成提交
  - 可参照优秀作业尽快完成，赶上大部队

回顾：Bézier曲线

- 类似RBF函数：对每个控制点叠加权函数
- 几何设计观点：给定控制顶点$\{b_i, i=0\sim n\}$，使用一组（随t变化的）权系数函数$\{B_i^n(t), i=0\sim n\}$对它们进行线性组合，得到的点的集合

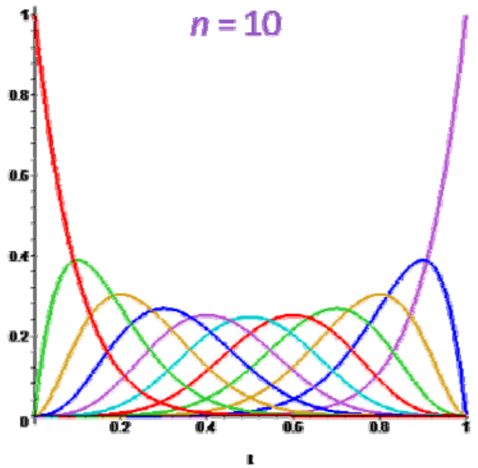
$$x(t)=\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\cdot b_i$$



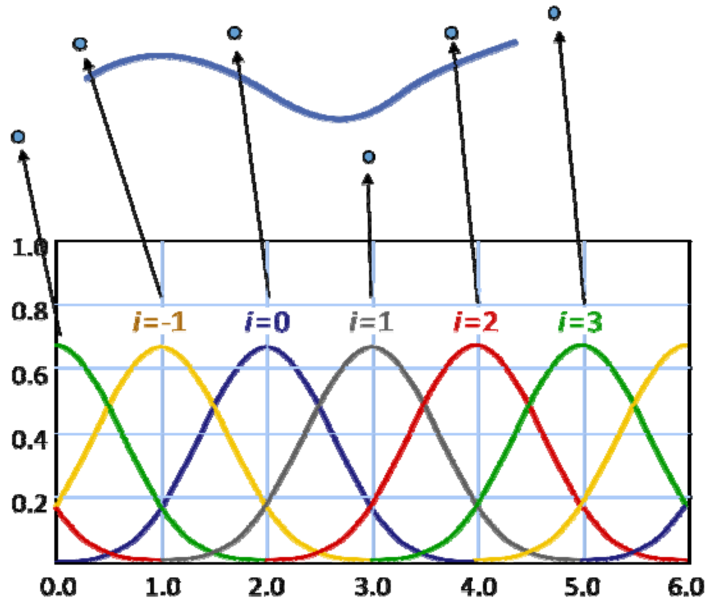
Bezier曲线的性质来源于Bernstein基函数的性质

回顾：B样条曲线

- Bézier曲线、RBF函数：每个控制点上的权系数函数都是全局（定义在整个定义域）的
- B样条曲线：每个控制点上的权系数函数是局部定义的（定义在其参数节点附近的支集）



全局基函数



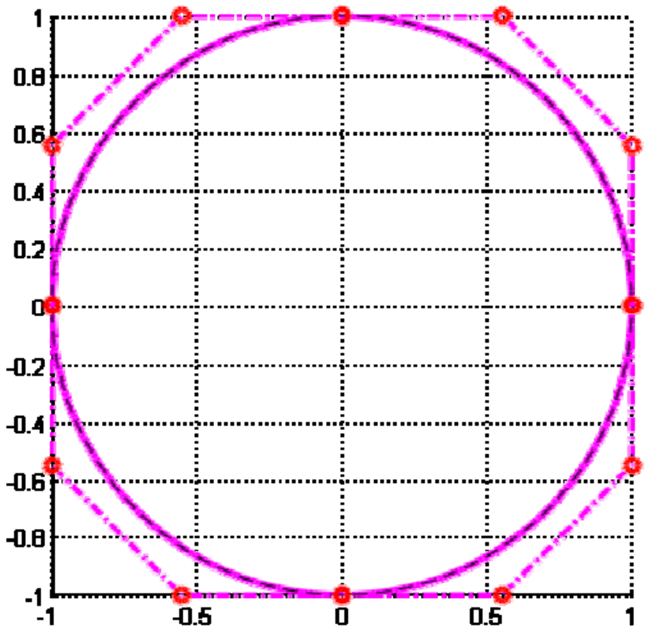
局部基函数

有理曲线

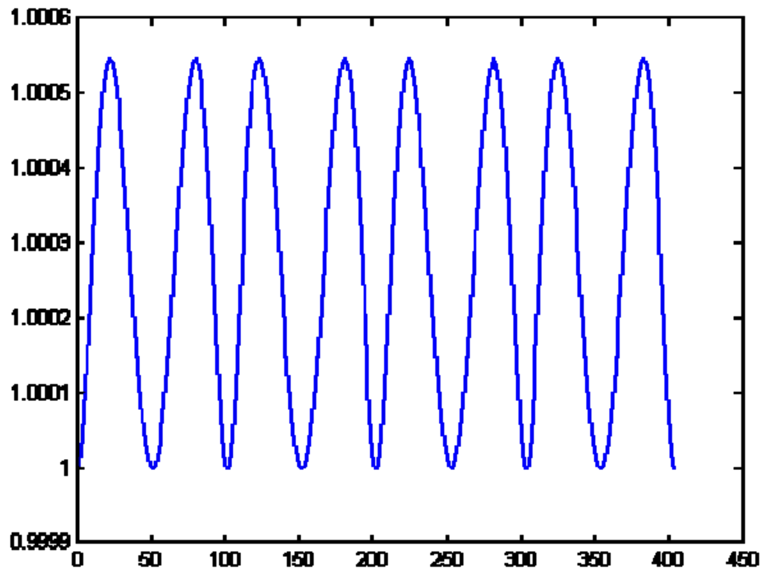
问题： Bézier曲线无法表示圆弧！

思考： 如何证明?

Approximation of Circle using Cubic Bezier



Evaluation of $(x^2 + y^2)$ for points on the Bezier curve



投影几何

- 2D case:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \omega x \\ \omega y \\ \omega \end{pmatrix}$$

- 3D case:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \omega x \\ \omega y \\ \omega z \\ \omega \end{pmatrix}$$

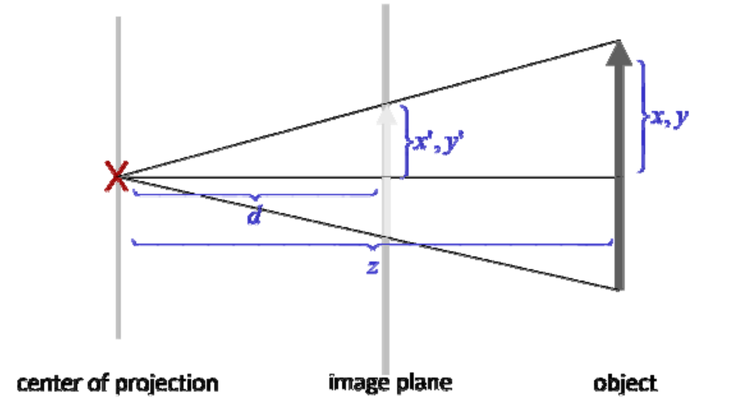
- 齐次坐标： $\boldsymbol{x} \to \begin{pmatrix} \omega \boldsymbol{x} \\ \omega \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{x} \to \begin{pmatrix} \omega \boldsymbol{x} \\ \omega \end{pmatrix}$$

欧氏坐标
（欧氏空间）

齐次坐标
（投影空间）

$$\frac{1}{\omega}\boldsymbol{x} \leftarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \omega \end{pmatrix}$$



$$x' = d\frac{x}{z}, \quad y' = d\frac{y}{z}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ \omega' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

有理Bezier曲线

- Rational Bezier curves in $\mathbb{R}^n$ of degree d:
  - Form a Bezier curve of degree d in $n+1$ dimensional space
  - Interpret last coordinates as homogenous component
  - Euclidean coordinates are obtained by projection

$$\boldsymbol{f}^{(hom)}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^{(d)}(t)\boldsymbol{p}_i\,, \quad \boldsymbol{p}_i \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\boldsymbol{f}^{(eucl)}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} B_i^{(d)}(t)\begin{pmatrix} p_i^{(1)} \\ \cdots \\ p_i^{(n)} \end{pmatrix}}{\sum_{i=0}^{n} B_i^{(d)}(t)p_i^{(n+1)}}$$

有理Bezier曲线

- 每个控制顶点上设置一个权系数

$$\boldsymbol{f}^{(eucl)}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} B_i^{(d)}(t)\omega_i \boldsymbol{p}_i}{\sum_{i=0}^{n} B_i^{(d)}(t)\omega_i} \qquad \boldsymbol{p}_i = \begin{pmatrix} p_i^{(1)} \\ \dots \\ p_i^{(n)} \end{pmatrix}$$

- 另一种形式

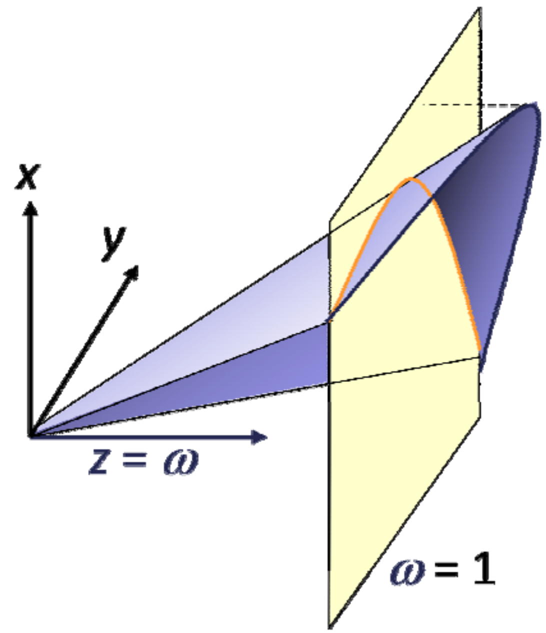
$$\boldsymbol{f}^{(eucl)}(t) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{p}_i \frac{B_i^{(d)}(t)\omega_i}{\sum_{j=0}^{n} B_j^{(d)}(t)\omega_i} = \sum_{i=0}^{n} q_i(t)\boldsymbol{p}_i$$

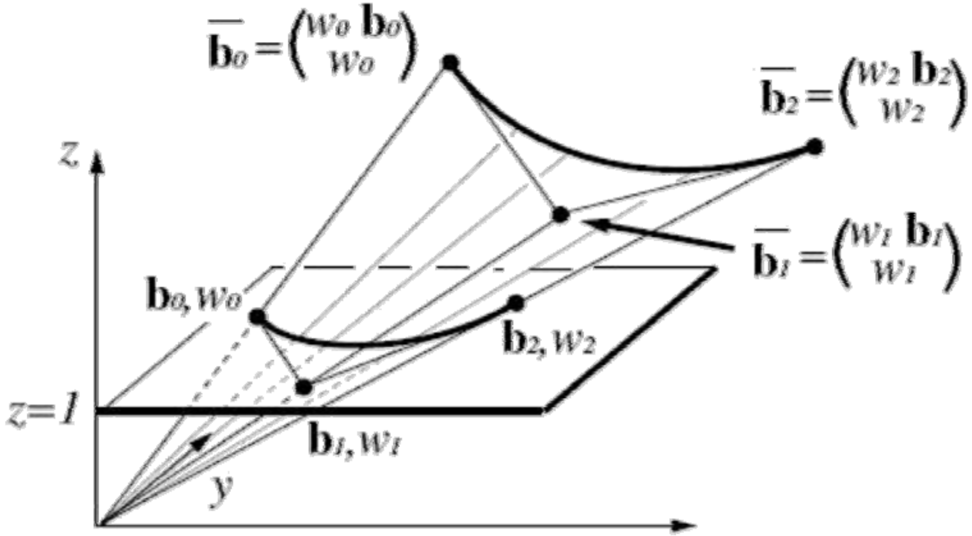
with $\sum_{i=0}^{n} q_i(t) = 1$

- 如权系数都相等，则退化为Bezier曲线

有理Bezier曲线的几何解释

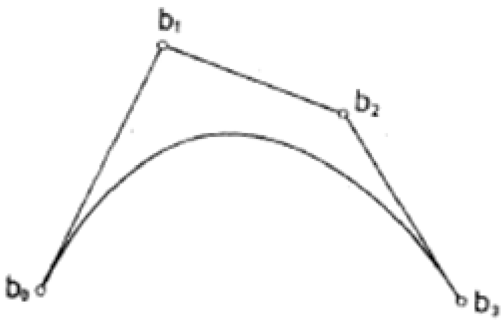
- 高维的Bezier曲线的中心投影



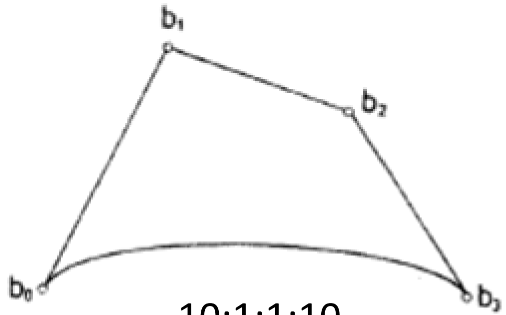


权系数对曲线形状的影响

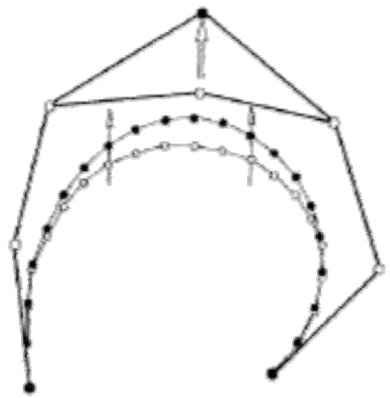
- 控制顶点的权系数越大，曲线就越靠近该点



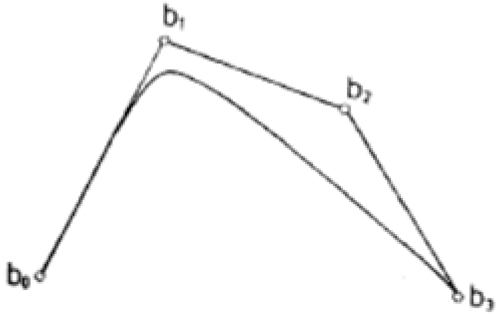
1:1:1:1



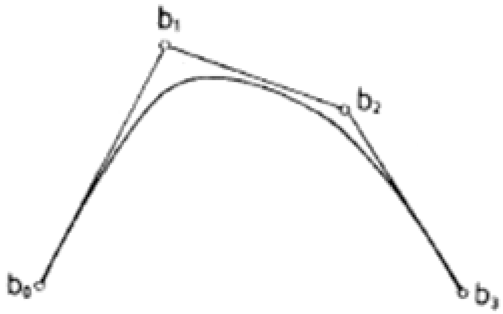
10:1:1:10



移动控制顶点



1:10:1:10



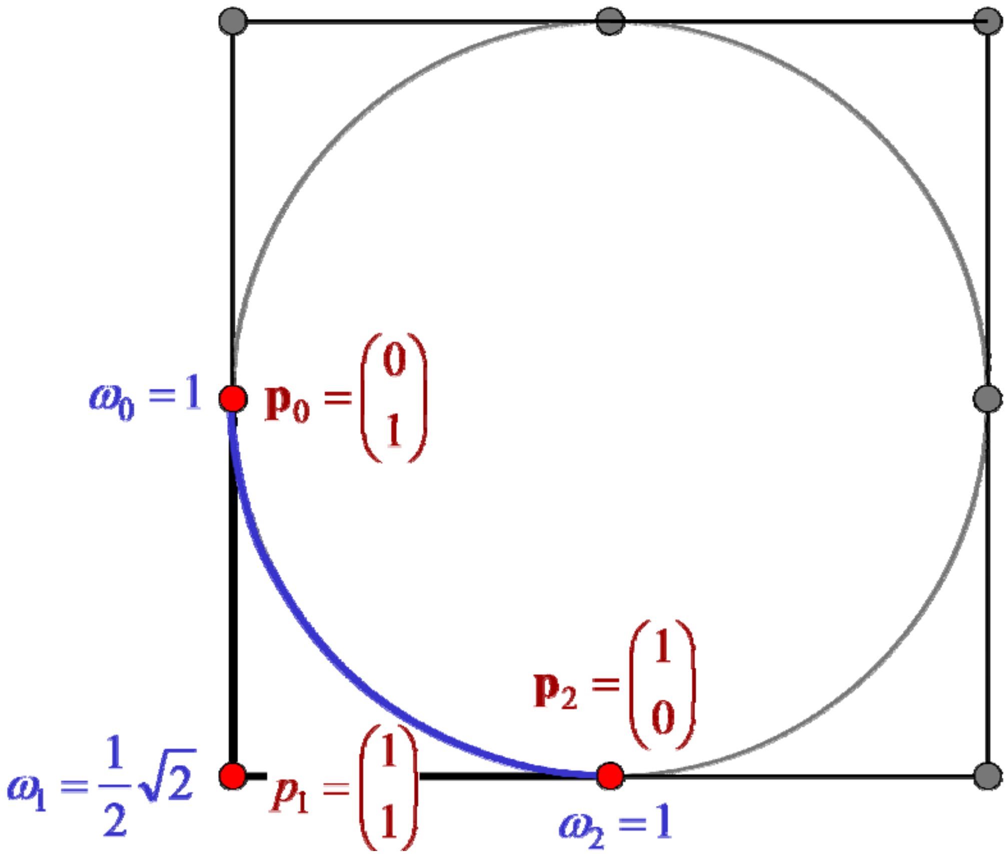
1:10:10:1

增加权系数

有理Bezier曲线的性质

- 具有Bezier曲线的大部分性质（设$\omega_i > 0, i = 1 \sim n$）：
  - 端点插值
  - 端点切线
  - 凸包性
  - 导数递推性
  - de Casteljau作图算法
  - …

2次有理Bezier曲线表示圆



NURBS曲线

NURBS: Non-Uniform Rational B-Spline （非均匀有理B样条）

NURBS: Rational B-Splines

- Formally:($N_i^{(d)}$:B-spline basis function i of degree d)

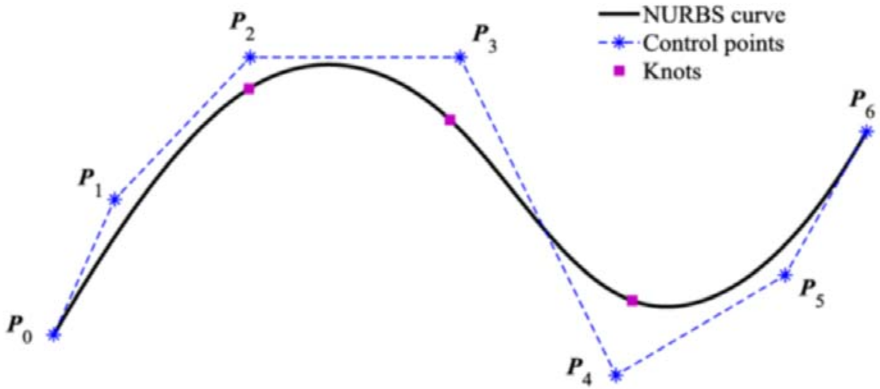
$$\boldsymbol{f}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i^{(d)}(t)\omega_i \boldsymbol{p}_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i^{(d)}(t)\omega_{\boldsymbol{i}}}$$

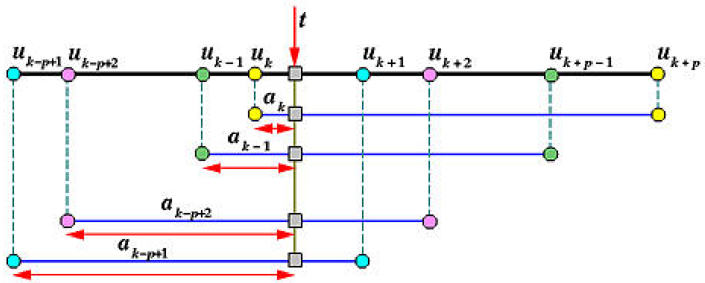
- Knot sequences etc. all remain the same
- De Boor algorithm – similar to rational de Casteljau alg.
  - option 1. – apply separately to numerator, denominator
  - option 2. – normalize weights in each intermediate result

  - the second option is numerically more stable

NURBS曲线

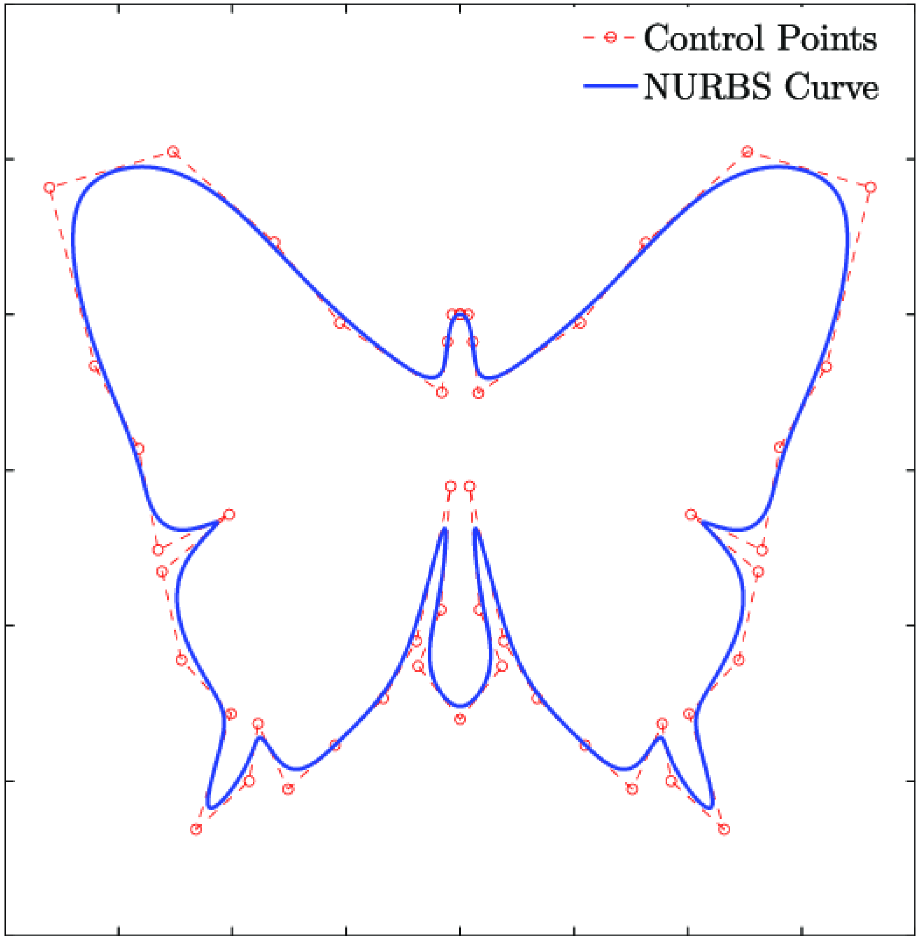
- 影响NURBS曲线建模的因素
  - 控制顶点：用户交互的手段
  - 节点向量：决定了B样条基函数
  - 权系数：也影响曲线的形状，生成圆锥曲线等



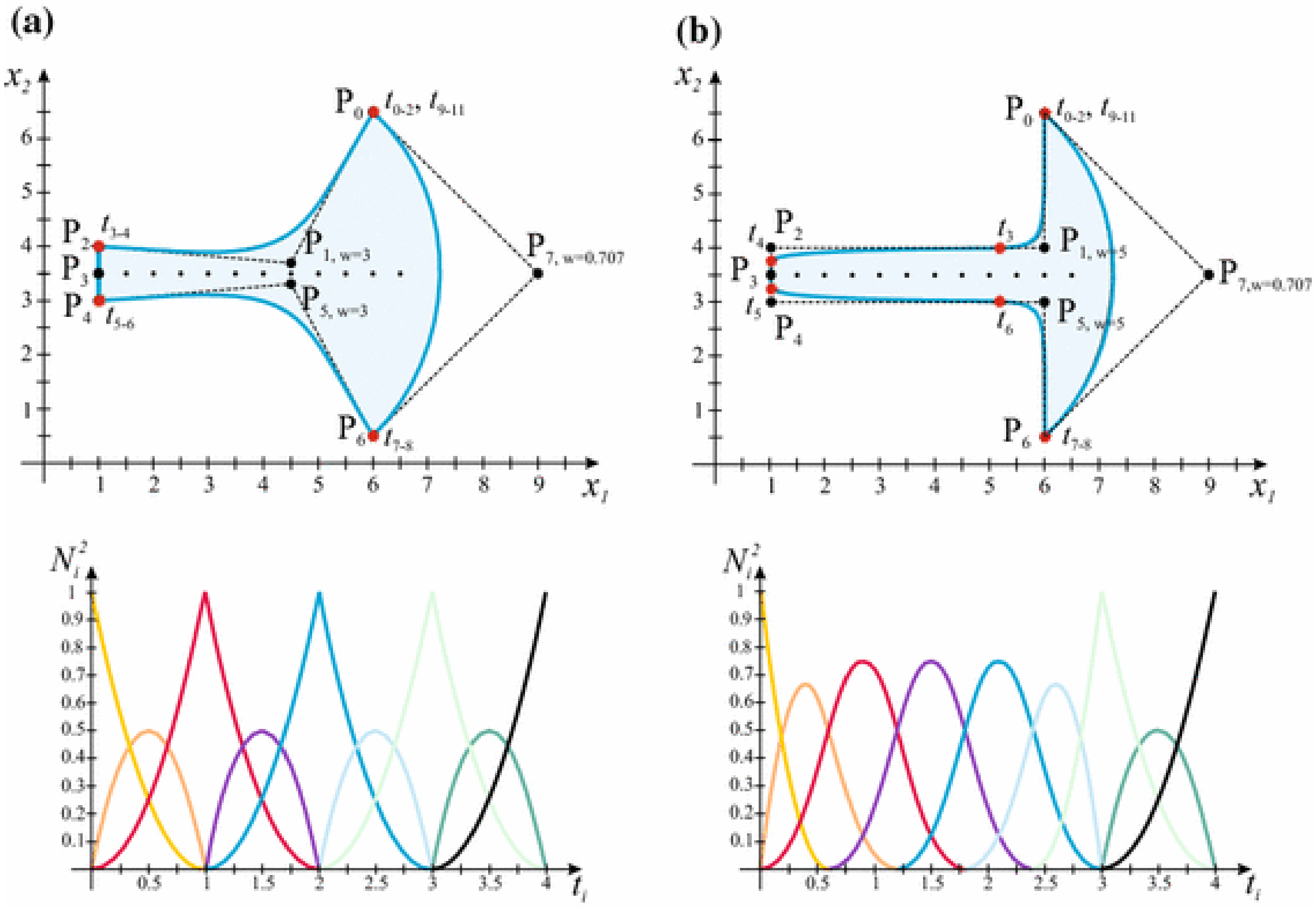


- NURBS曲线的性质
  - 大部分与Bezier/B样条曲线类同：具有良好的几何直观性

NURBS曲线的例子



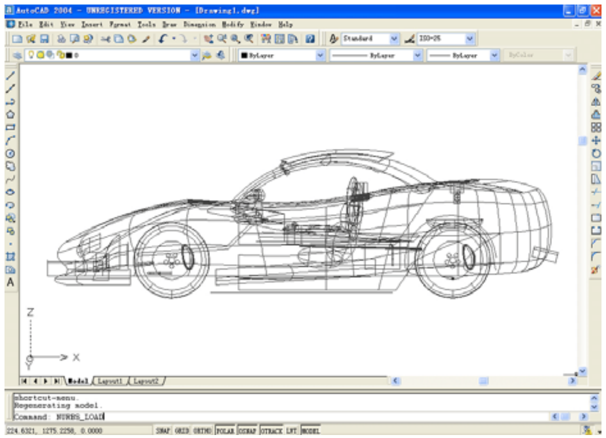
NURBS曲线的例子

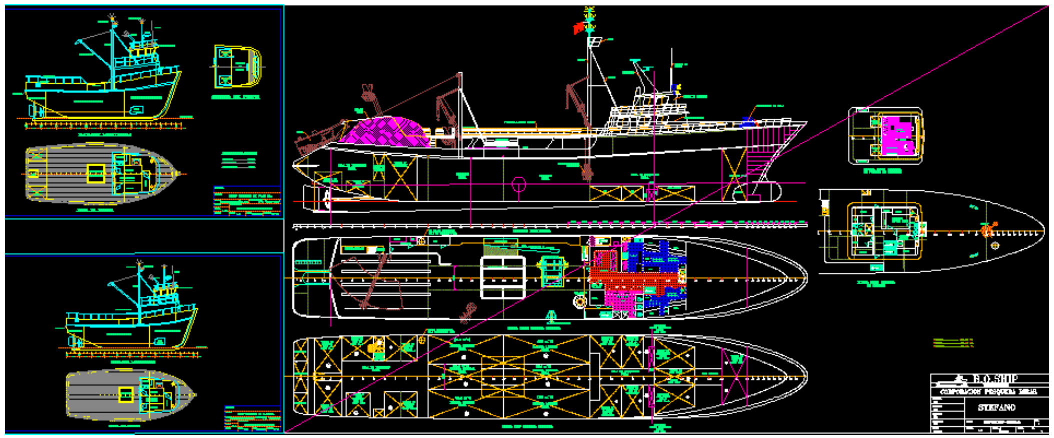


NURBS曲线

产品设计的工业标准

- NURBS曲线/曲面表达是当前的工业标准
  - 工业CAD软件的基本表达形式
  - 各种CAD系统的数据交换标准





- 3D建模软件：
  - 工业设计：AutoCAD, CATIA, SolidWorks, Rhino, …
  - 动画设计：3DS Max, Maya, SoftImage, Cinema 4D, …

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

谢 谢 ！