GAMES102 学习材料 (1)

1 函数插值

在许多实际问题中，某个函数 $f(x)$ 往往很复杂、没有解析表达或者未知。我们往往只能通过某些手段观测到反映该函数的一些采样数据。我们希望通过这些观测的采样数据来估计该函数的信息，并预测函数在其他观测点的值。这时，我们从观测数据来求得一个函数 $\phi(x)$ 来近似 $f(x)$。

定义：$f(x)$ 为定义在区间 $[a,b]$ 上的函数，$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为区间上 $n+1$ 个互不相同的点，Φ 为给定的某一函数类。求 Φ 上的函数 $\phi(x)$，满足：

$$\phi(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

则称 $\phi(x)$ 为 $f(x)$ 关于节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 在 Φ 上的插值函数。称 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为插值节点，称 $(x_i, f(x_i))$ 为插值点。

1.1 多项式插值定理

定理：若 x_i 两两不同，则对任意给定的 y_i，存在唯一的次数至多是 n 次的多项式 p_n，使得 $p_n(x_i) = y_i$ $i = 0, \cdots, n$。

证明：在幂基 $\{1, x, \cdots, x^n\}$ 下待定多项式 p 的形式为：

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

由插值条件 $p(x_i) = y_i, i = 0, \cdots, n$，得到如下方程组：

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_o^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

系数矩阵为 **Vandermonde** 矩阵，其行列式非零，因此方程组有唯一解。

1.2 不同形式的插值多项式

对于给定问题，插值多项式存在唯一。但是可以用不同的方法给出插值多项式的不同表示形式。

1.2.1 Lagrange 插值

Lagrange 基函数：由多项式插值定理存在函数 $l_i(x)$ 满足 $l_i(x_j) = \sigma_{ij}$：

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Lagrange 插值多项式：

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

1.2.2 Newton 插值

定义：

一阶差商：

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

k 阶差商：

设 $\{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$ 互不相同，$f(x)$ 关于 $\{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$ 的 k 阶差商为：

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_1, \cdots, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

所以 **Newton 插值多项式**表示为：

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

2 函数拟合

函数拟合是指：给出一组离散的点，需要确定一个函数来逼近原函数。由于离散数据通常是由观察或测试得到的，所以不可避免的会有误差。我们需要的逼近原函数的手段要满足如下两个条件：

1. 不要求过所有的点（可以消除误差影响）
2. 尽可能表现数据的趋势，靠近这些点

用数学的语言来说即是，需要在给定的函数空间 Φ 上找到函数 ϕ，使得 ϕ 到原函数 f 的距离最小。这里的距离指的是某种度量，不同的度量对应着不同的拟合方法。则函数 $\phi(x)$ 称为 $f(x)$ 在空间 Φ 上的拟合曲线。

2.1 函数拟合的最小二乘法问题

定义：$f(x)$ 为定义在去区间 $[a, b]$ 上的函数，$\{x_i\}_{i=0}^m$ 为区间上 $m+1$ 个互不相同的点，Φ 为给定的某一函数类。求 Φ 上的函数 $\phi(x)$ 满足 $f(x)$ 和 $\phi(x)$ 在给定的 $m+1$ 个点上的距离最小，如果这种距离取为 2-范数的话，则称为最小二乘问题。即：求 $\phi(x) \in \Phi$，使得：

$$R_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{m}(\phi(x_i) - f(x_i))^2}$$

最小。

2.1.1 最小二乘问题的求解

首先给出如下离散内积与离散范数的定义：

定义：函数 f, g 的关于离散点列 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 的离散内积为：

$$(f, g)_h = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i)$$

定义: 函数 f 的离散范数为：

$$||f||_h = \sqrt{(f, f)_h}$$

该种内积下，范数的定义与向量的 2 范数一致。

注：上述定义中的下标 h 表示对离散内积与离散范数的指代，类似 1-范数的定义 $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$，无其他特殊含义。

设 $\Phi = span\{\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_n\}$

$$\phi(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \cdots + a_n\phi_n(x)$$

则最小二乘问题为:

$$||f(x)-(a_0\phi_0(x)+a_1\phi_1(x)+\cdots+a_n\phi_n(x))||_h$$

关于系数 $\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$ 最小。

$$\begin{aligned}
&||f(x)-(a_0\phi_0(x)+a_1\phi_1(x)+\cdots+a_n\phi_n(x))||_h^2\\
=&||f||_h^2-2(f,a_0\phi_0(x)+a_1\phi_1(x)+\cdots+a_n\phi_n(x))_h+||a_0\phi_0(x)+a_1\phi_1(x)+\cdots+a_n\phi_n(x)||_h^2\\
=&||f||_h^2-2\sum_{k=0}^{n}a_k(f,\phi_k)_h+\sum_{i,k=0}^{n}a_ia_k(\phi_i,\phi_k)_h\\
=&Q(a_0,a_1,\cdots,a_n)
\end{aligned}$$

由于它关于系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 最小，因此有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial a_i}&=0,\quad i=0,1,\cdots,n\\
i.e.\quad \sum_{k=0}^{n}a_k(\phi_i,\phi_k)_h&=(f,\phi_i)_h,\quad i=0,1,\cdots,n
\end{aligned}$$

写成矩阵形式有:

$$\begin{pmatrix}(\phi_0,\phi_0)_h & \dots & (\phi_0,\phi_n)_h\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (\phi_n,\phi_0)_h & \dots & (\phi_n,\phi_n)_h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f,\phi_0)_h\\ \vdots\\ (f,\phi_n)_h\end{pmatrix}$$

2.1.2 线性拟合

例 1：取 Φ 为线性多项式空间，函数空间的基为 $\{1,x\}$, 拟合曲线为 $y=a+bx$，则法方程为:

$$\begin{pmatrix}(1,1)_h & (1\ x)_h\\ (x,1)_h & (x,x)_h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f,1)_h\\ (f,2)_h\end{pmatrix}$$

2.1.3 二次拟合

例 2：取 Φ 为线性多项式空间，函数空间的基为 $\{1,x,x^2\}$, 拟合曲线为 $y=a_0+a_1x+a_2x^2$，则法方程为:

$$\begin{pmatrix}(1,1)_h & (1\ x)_h & (1,x^2)_h\\ (x,1)_h & (x,x)_h & (x,x^2)_h\\ (x^2,1)_h & (x^2,x)_h & (x^2,x^2)_h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f,1)_h\\ (f,x)_h\\ (f,x^2)_h\end{pmatrix}$$

3 Weierstrass 第一逼近定理

定理：设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则存在多项式序列 $P_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。也就是对任意给定的 $\epsilon > 0$，存在多项式 $P(x)$，使得：

$$|P(x) - f(x)| < \epsilon$$

对一切 $x \in [a,b]$ 成立。

证：不失一般性，设 $[a,b]$ 为 $[0,1]$，使用构造性的证明。

设 X 是 $[0,1]$ 上连续函数 $f(t)$ 的全体构成的集合，Y 是多项式全体构成的集合，定义映射：

$$\begin{aligned} B_n: \ X \ &\to \ Y \\ f(t) &\mapsto B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

得到 $B_n(f,x)$，$B_n(f,x)$ 表示 $f \in X$ 在映射 B_n 作用下的像，它是以 x 为变量的 n 次多项式，称为 f 的 n 此 **Bernstein** 多项式。

关于映射 B_n, 有下述基本性质与基本关系式：

1. 线性性: 对于任意 $f, g \in X$ 及 $\alpha, \beta \in R$，成立

$$B_n(\alpha f + \beta g, x) = \alpha B_n(f,x) + \beta B_n(g,x)$$

2. 单调性: 若 $f(t) \geq g(t) (t \in [a,b])$, 则

$$B_n(f,x) \geq B_n(g,x) \quad x \in [a,b]$$

3.

$$\begin{aligned} B_n(1,x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1 \\ B_n(t,x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x \\ B_n(t^2,x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x^2 + \frac{x-x^2}{n} \end{aligned}$$

函数 $(t-s)^2$ 在 B_n 映射下的像 (视 s 为常数):

$$\begin{aligned} B_n((t-s)^2, x) &= B_n(t^2,x) - 2sB_n(t,x) + s^2 B_n(1,x) \\ &= x^2 + \frac{x-x^2}{n} - 2sx + s^2 = (x-s)^2 + \frac{x-x^2}{n} \end{aligned}$$

由于 f 在 $[0,1]$ 上连续，所以有界，即存在 $M>0$，对于一切 $t\in[0,1]$，成立：

$$|f(t)|\leq M$$

根据 **Cantor** 定理，f 在 $[0,1]$ 上一致连续，于是对于任意给定的 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，对一切 $t,s\in[0,1]$:

当 $|t-s|<\delta$ 时，成立：

$$|f(t)-f(s)|<\frac{\epsilon}{2}$$

当 $|t-s|\geq\delta$ 时，成立：

$$|f(t)-f(s)|\leq 2M\leq\frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2$$

于是对一切 $t,s\in[0,1]$, 成立：

$$|f(t)-f(s)|\leq\frac{\epsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2$$

即：

$$-\frac{\epsilon}{2}-\frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2\leq f(t)-f(s)\leq\frac{\epsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2$$

对上式左端，中间，右端三式（视 t 为变量，s 为常数）考虑在映射 B_n 作用下的像，得到对一切 $x,s\in[0,1]$，成立：

$$-\frac{\epsilon}{2}-\frac{2M}{\delta^2}[(x-s)^2+\frac{x-x^2}{n}]\leq B_n(f,x)-f(s)\leq\frac{\epsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2}[(x-s)^2+\frac{x-x^2}{n}]$$

令 $s=x$，注意到 $x(1-x)\leq\frac{1}{4}$，即得到对一切 $x\in[0,1]$，成立：

$$|\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})C_n^k x^k(1-x)^{n-k}-f(x)|\leq\frac{\epsilon}{2}+\frac{M}{2n\delta^2}$$

取 $N=\lceil\frac{M}{\delta^2\epsilon}\rceil$，当 $n>N$ 时：

$$|\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})C_n^k x^k(1-x)^{n-k}-f(x)|<\epsilon$$

对一切 $x\in[0,1]$ 成立。 ■

4 Weierstrass 第二逼近定理

定理：设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，则存在三角多项式序列一致收敛于 $f(x)$。也就是对于任意给定的 $\epsilon > 0$，存在三角多项式 $T(x)$，使得:

$$|T(x) - f(x)| < \epsilon$$

对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 成立。

先证明一个引理:

引理：设 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续，则对于任意 $\epsilon > 0$，存在余弦三角多项式 $T(x)$，使得:

$$|T(x) - g(x)| < \epsilon$$

对一切 $x \in [0, \pi]$ 成立。

证：由 $g(\arccos y)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续，由 **Weierstrass** 第一逼近定理，对任意 $\epsilon > 0$，存在多项式 $P(y)$，使得:

$$|P(y) - g(\arccos y)| < \epsilon$$

对一切 $y \in [-1, 1]$ 成立，即:

$$|P(\cos x) - g(x)| < \epsilon$$

对一切 $x \in [0, \pi]$ 成立。由三角恒等式

$$\begin{aligned}
&\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \\
&\cos^3 x = \frac{1}{4}(3 + \cos 3x), \\
&\cdots, \\
&\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}}(\sum_{k=1}^{n-1} C_{2n}^k \cos 2(n-k)x + \frac{1}{2}C_{2n}^n), \\
&\cos^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^k \cos{(2n-2k+1)x}
\end{aligned}$$

可知 $P(\cos x) = T(x)$ 是余弦三角多项式。

推论：设 $g(x)$ 是以 2π 为周期的连续偶函数，则 **Weierstrass** 第二逼近定理成立，且三角多项式是余弦三角多项式。

Weierstrass 第二逼近定理的证明:

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，令:

$$\phi(x) = f(x) + f(-x),\ \psi(x) = [f(x) - f(-x)]\sin x$$

则 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 都是以 2π 为周期的连续偶函数，由上面推论，可知对任意给定的 $\epsilon > 0$，存在余弦三角多项式 $T_1(x)$ 与 $T_2(x)$，使得：

$$|\phi(x) - T_1(x)| < \frac{\epsilon}{2},\ |\psi(x) - T_2(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 成立。

记 $T_3(x) = T_1(x)\sin^2 x + T_2(x)\sin x$，于是由：

$$|\phi(x)\sin^2 x - T_1(x)\sin^2 x| < \frac{\epsilon}{2}, |\psi(x)\sin x - T_2(x)\sin x| < \frac{\epsilon}{2}$$

得到：

$$|2f(x)\sin^2 x - T_3(x)| < \epsilon \tag{1}$$

对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 成立。由于上式对 $f(t - \frac{\pi}{2})$ 也成立，于是也有：

$$|2f(t - \frac{\pi}{2})\sin^2 t - T_4(t)| < \epsilon$$

令 $x = t - \frac{\pi}{2}$，得到：

$$|2f(x)\cos^2 x - T_4(x + \frac{\pi}{2})| < \epsilon \tag{2}$$

对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 成立。

记 $T_5(x) = \frac{1}{2}[T_3(x) + T_4(x + \frac{\pi}{2})]$，结合(1)和(2)，得到：

$$|f(x) - T_5(x)| < \epsilon$$

对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 成立。 ■

5 距离空间的完备性

定义：设 X 是距离空间，$\{x_n\} \subset X$。$\{x_n\}$ 是 X 中的基本列，是指对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N = N(\epsilon)$，当 $m, n > N$ 时，有 $\rho(x_m, x_n) < \epsilon$。

定义：称 X 是完备距离空间，是指 X 中的任何基本列都收敛于 X 中的点。

例：$C[a,b]$ 按距离 $\rho(x,y) = \max|x(t) - y(t)|$ 是完备距离空间。

6 Fourier 级数

首先，周期函数是客观世界中周期运动的数学表述，如物体挂在弹簧上作简谐振动、单摆振动、无线电电子振荡器的电子振荡等，大多可以表述为：

$$f(t) = A\sin(\omega t + \psi)$$

这里 t 表示时间，A 表示振幅，ω 为角频率，ψ 为初相（与考察时设置原点位置有关，可以理解为一个常量）。

然而，世界上许多周期信号并非正弦函数那么简单，如方波、三角波等。于是傅里叶在其著作《热的解析理论》中，推导出用一系列的三角函数 $A_n\sin(n\omega t + \psi_n)$ 之和来表示那个较复杂的周期函数 $f(x)$，即：

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(n\omega t + \psi_n) \tag{3}$$

由 ψ_n 为常数，A_n 也是常数，则对上式进行变形：

$$A_n\sin(n\omega t + \psi_n) = A_n\sin\psi_n\cos(n\omega t) + A_n\cos\psi_n\sin(n\omega t)$$

记 $a_n = A_n\cdot\sin\psi_n$, $b_n = A_n\cos\psi_n$，则(3)可写为如下形式：

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)] \tag{4}$$

即是常见的 **Fourier** 级数形式。

6.1 系数求解

对(4)式从 $[-\pi, \pi]$ 积分，得：

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt &= \int_{-\pi}^{\pi} A_0 dt + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)]dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} A_0 dt + 0 \\
&= 2\pi A_0
\end{aligned}$$

解得：$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)$。
这样就求得了第一个系数 A_0 的表达式，接下来求 a_n 和 b_n 的表达式。用 $\cos(k\omega t)$ 乘(4)式两边得：

$$f(t)\cdot\cos(k\omega t) = A_0\cos(k\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega t)\cos(k\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\cos(k\omega t)]$$

对上式从 $[-\pi, \pi]$ 积分，得：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\cos(k\omega t)dt = A_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\omega t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\omega t)\cos(k\omega t)dt + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n\omega t)\cos(k\omega t)dt]$$

由三角函数系的正交性，A_0 和 b_n 后积分均为 0，a_n 后积分当且仅当 $k=n$ 时不为 0，所以：

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\cos(n\omega t)dt &= a_n\ int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(n\omega t)dt \\ &= \frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2n\omega t)dt \\ &= \frac{a_n}{2}(\int_{-\pi}^{\pi}1dt+\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2n\omega tdt) \\ &= \frac{a_n}{2}\dot{2}\pi = a_n\pi\end{aligned}$$

解得：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\cos(n\omega t)dt$$

同理用 $\sin(k\omega t)$ 乘(4)式两边得：

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\sin(n\omega t)dt$$

令 $a_0=2A_0$ 则有：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)]$$