第 33 卷第 2 期　　大 学 数 学　　Vol. 33, No. 2
2017 年 4 月　　COLLEGE MATHEMATICS　　Apr. 2017

基于离散网格的流形曲面构造综述

刘利刚，　张　纯
（中国科学技术大学 数学科学学院，合肥 230026）

[摘　要] 基于离散网格的流形曲面构造技术不仅能够生成具有高阶光滑性的曲面，并且该曲面可以是任意拓扑结构的. 此外，在构造流形曲面时，无需进行额外的拼接操作，克服了传统曲面造型技术在进行面片之间的拼接时，计算量增大以及曲面光滑性难以保证的难题. 本文介绍了流形曲面构造的流程以及构造过程中的难点，然后将目前已有的流形曲面构造技术分为三大类：传统意义上的流形构造方法；基于规范区域的流形构造方法；基于样条曲面推广的流形构造方法. 并对每一类都进行详细地分类介绍. 最后，对其作一个总结以及对未来的展望.

[关键词] 流形曲面；任意拓扑；光滑性；局部构造；坐标卡
[中图分类号] TP391　[文献标识码] A　[文章编号] 1672-1454(2017)02-0001-15

1 引　　言

从实物模型构造任意拓扑结构的光滑曲面在计算机辅助几何设计与制造、计算机视觉、计算机图形学等领域扮演着重要的角色. 其中，应用最为广泛的是以 NURBS 为代表的样条曲面造型技术[1-4]. 这种方法的优点是每片曲面都可以很容易地构造出来，但是每片曲面都必须定义在矩形参数域上，是矩形曲面片，无法有效地表示任意拓扑形状的曲面. 此外，曲面片之间的光滑拼接难度很大，尤其是在涉及到多片拼接的边界点处，若要达到二阶、三阶及以上的光滑性，需要很大的内存空间以及计算量. 尽管也有三角域上的 NURBS 曲面[5]、T 样条曲面[6-8]，但表示复杂物体时同样需要拼接，这是一个相当困难的工作.

细分曲面(Subdivision Surfaces)[9-11]是一个网格序列的极限，网格序列则是通过采用一组细分规则(一般是加权平均)在给定初始网格中反复插入新顶点获得的. 这种方法不存在拼接的问题，并且只要在不规则拓扑处采用特殊的细分规则就可以克服参数曲面处理任意拓扑网格存在的困难. 在实际应用中，这种方法更为方便、高效. 然而，该方法创建的曲面只是一个极限形式，并没有一个显式的表达式. 另外，目前的大多数方法都难以达到高阶连续性，尤其是在奇异点处的连续性很难保证.

基于离散网格的流形曲面构造技术是一种新兴的曲面造型技术，由 Grimm 和 Hughes[12] 在 1995 年首次提出. 该方法基于流形的思想，将控制网格划分成若干个具有重叠区域的坐标卡(chart)，然后在每个坐标卡上分别建立描述该坐标卡局部几何信息的形状函数(embedding function)以及描述该坐标卡上形状函数对重建后流形曲面影响程度的混合函数(blending function)，最后利用形状函数在坐标卡之间的重叠区域上的共同作用，构造出完整的光滑曲面.

不同于传统 NURBS 构造，基于离散网格的流形曲面构造技术无需进行拼接操作，避免了面片拼接时计算量增大以及光滑性难以保证的难题. 此外，该方法可以构造出任意拓扑结构的曲面，并且通过坐标卡的划分，对每个坐标卡进行局部化操作，使得该方法效率更高、灵活性更强. 而基于该方法生成的曲

[收稿日期] 2017-02-18；[修改日期] 2017-03-05
[基金项目] 国家自然科学基金(61672482，11626253)；中科院“百人”计划
[作者简介] 刘利刚(1975—)，男，博士，教授，从事计算机图形学研究. Email：lgliu@ustc.edu.cn

面大都具有简单的显式表达式，并且很容易实现高阶光滑性，这对于模型的几何分析具有重大意义.

由于流形曲面构造技术的诸多优点以及在曲面建模等邻域广阔的应用前景，该项技术得到了广大学者的认可以及更深入的研究. 本文通过对目前已经发表的流形曲面构造技术相关的文章进行调研，将它们分为三大类：传统意义上的流形构造方法；基于规范区域的流形构造方法；基于样条曲面推广的流形构造方法. 通过总结每一类的优缺点，并指出未来的发展方向，供广大学者们研究学习.

2 流形曲面构造方法的介绍

2.1 流形的定义

定义 1 一个 n 维 C^k 原型微分流形(proto-manifold) K 包含了以下元素

(i) 包含了有限个坐标卡的集合 C，其中，坐标卡是 $\mathbb{R}^n$ 空间中的连通开集；

(ii) 集合 $V=\{V_{ij}\mid V_{ij}\subset U_i, U_i\in C\}$，其中，$V_{ii}=U_i$；

(iii) 转换函数的集合 $\Phi=\{\varphi_{ij}: V_{ij}\to V_{ji}\mid V_{ij}\subset U_i, V_{ji}\subset U_j\}$，其中，$\varphi_{ij}$ 满足以下几个条件

(a) φ_{ij} 是一个 C^k 连续的一一映射函数；

(b) $\varphi_{ij}^{-1}=\varphi_{ji}$；

(c) $\varphi_{ii}(x)=x, \forall x\in U_i$；

(d) $(\varphi_{ij}\circ\varphi_{jk})(x)=\varphi_{ik}(x), \forall x\in V_{ik}\cap V_{ij}$.

事实上，V_{ij} 描述了坐标卡 U_i 中与 U_j 重合的区域，而转换函数 φ_{ij} 定义了 V_{ij} 与 V_{ji} 中点的一一对应关系.

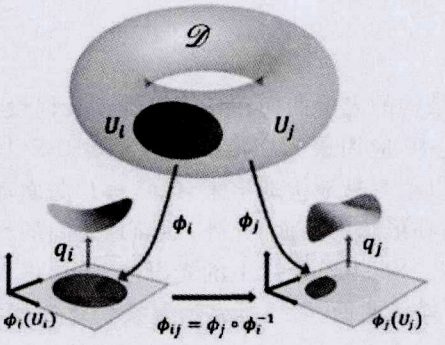

图 1 流形的定义[27]

2.2 流形曲面构造方法简介

流形曲面构造方法一般可以描述为以下过程. 给出一个多边形网格 $M=(V,F)$（V 为该多边形网格的顶点集，F 为对应的面的集合），我们想构造一个光滑的流形曲面 S 去逼近它. 首先，以该网格为流形曲面构造域 D，建立坐标卡 $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i=1}^N$，其中，$\varphi_i: U_i\to\mathbb{R}^2$ 是一个一一映射，所有的 U_i 能够将 D 完全覆盖. 任意两个坐标卡 (U_i,φ_i) 和 (U_j,φ_j) 之间可能存在重叠区域，也就是说 U_i 和 U_j 可能相交. 如果 U_i 和 U_j 相交，那么，定义一个转换函数 $\varphi_{ij}=\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}$，建立二者的重叠区域在各自参数域上的一一对应关系. 然后，在每个坐标卡上分别建立描述该坐标卡局部几何信息的形状函数 $\{q_i(u,v): \varphi_i(U_i)\to\mathbb{R}^3\}_{i=1}^N$ 以及描述该坐标卡上形状函数对重建后流形曲面影响程度的具有紧支集的混合函数 $\{B_i(u,v): \varphi_i(U_i)\to R\}_{i=1}^N$. 那么，流形曲面 S 可以表示为

$$f(x)=\sum_{i;x\in U_i}B_i(\varphi_i(x))q_i(\varphi_i(x)), \tag{1}$$

其中 $\sum\limits_{i;x\in U_i}B_i(\varphi_i(x))=1$.

通常情况下，流形曲面 S 的光滑性取决于以下几个方面

(i) 转换函数 φ_{ij} 的光滑性；

(ii) 混合函数的函数值以及 k 阶导数值在该坐标卡的边界上是否等于 0；

(iii) 形状函数的光滑性.

2.3 流形曲面构造中的重要因素

基于多边形网格的流形构造方法相较于传统的样条曲面构造技术、细分曲面构造技术等，最大的优势在于局部构造性、高效性、任意拓扑性以及高阶光滑性. 为了保证这些特性，在流形曲面构造过程中需要注意以下四点：坐标卡的选取以及参数化；转换函数的构造；混合函数的构造；形状函数的构造.

2.3.1 坐标卡的选取以及参数化

混合函数、转换函数以及形状函数均是建立在每个坐标卡的参数域上的，因此，坐标卡的选取以及参数化直接影响这三种函数的构造，是流形构造方法中最为关键的地方.

比较常见的坐标卡的选取规则有：网格顶点的领域；网格面的领域；网格边的领域.

坐标卡的参数化方法一般有如下几个

(i) 对于开网格，将其整体参数化到同一个平面上；对于封闭网格，可以将其参数化到球面上(亏格为 0)或者将其切开后，参数化到双曲圆盘上(亏格大于 0).

(ii) 每个坐标卡都参数化到独立的坐标系中，并且参数域是规则的(圆形或者矩形)，或者整个参数域可以连续映射到规则区域上.

(iii) 每个坐标卡都参数化到独立的坐标系中，参数域是不规则的，但是满足：参数域上的每个面可以连续映射到正方形或者三角形上.

选择合适的参数化方法实际上是为了解决转换函数的构造问题.

2.3.2 转换函数的构造

转换函数的构造是流形构造方法中的关键所在，也是最具技巧性的地方. 该函数定义了两个坐标卡的重叠区域在各自参数域上的一一对应关系，同时，为了保证最终构造的流形曲面的连续性，所有转换函数的连续性也需要达到一定的要求. 也就是说，给出平面上两块特定形状的区域，我们需要建立二者之间的连续可逆的映射(如图 1 所示).

显然，当这两块区域在同一坐标系中时(即：这些坐标卡整体参数化到同一坐标系中)，转换函数为恒等函数；当它们在各自独立的坐标系中时，若这两块区域的形状比较复杂，则很难建立相应的连续映射.

目前，大多数流形构造相关的文章[12, 13, 24−27]都采用间接性方法来构造转换函数，即：将独立坐标系下的两个坐标卡的重叠区域分别连续映射到正方形或者三角形上，从而建立这两个坐标卡之间的转换函数. 此时，应当选择合适的方法来定义坐标卡，尤其是坐标卡对应于网格上的区域大小，使得两个坐标卡的重叠区域在各自的参数域上可以连续变换到正方形或者三角形上.

文章[14−17]则通过将两个坐标卡上的映射函数(将坐标卡上的三维信息参数化到二维上的函数)组合起来，即为对应的转换函数；文章[19−23]是通过建立坐标卡之间的仿射变换来获取对应的转换函数.

2.3.3 混合函数的构造

每个坐标卡上的混合函数均为一个具有紧支集的光滑函数，描述了该坐标卡上局部几何形状对整体曲面的影响程度. 为了保证最终构造的流形曲面的光滑性，要求混合函数的函数值以及 k 阶导数值在坐标卡的边界上为 0(由公式(1)可知).

目前已有的所有流形构造方法中涉及到的混合函数均是定义在规则区域上的：矩形和圆形.

(i) 定义在矩形上的混合函数(不妨设为 $B(u,v)$)可以表示为某种单变量函数 $\eta(t)$ 在两个方向上的内积形式

$$B(u,v) = \eta(u)\eta(v)\ , \tag{2}$$

其中，$\eta(t)$ 的形状如图 2 左图所示.

(ii) 定义在圆上的混合函数则是一个径向基函数，该函数形状如图 2 左图所示.

由于大多数情况下，坐标卡的参数域是不规则的，而定义在不规则区域上的、满足上述条件的混合函数很难构造. 此时，通过选取合适的坐标卡以及参数化规则，将参数域基于面等几何元素划分成若干个不重叠的区域，每个区域可以连续映射到矩形上(相邻两个区域的共同边界恰好映射到矩形的某一条边上)，然后通过在矩形上建立混合函数得到每个区域上的混合函数. 此时，公式(2)中的 $\eta(t)$ 是形状如

图 2 右图所示的函数，从而保证整个坐标卡上的混合函数在中心位置值为 1，边界处值为 0.

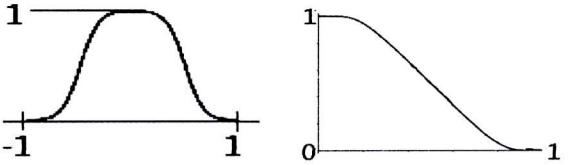

图 2 两种形式的混合函数

2.3.4 形状函数的构造

每个坐标卡上的形状函数描述了该坐标卡的局部几何信息，也直接影响了最终构造的流形曲面的形状. 一般情况下，有以下三种构造方法

(i) 简单地选取坐标卡中心对应于原始网格或者其细分网格上点的位置，作为该坐标卡上的形状函数；

(ii) 用一组多项式基函数去逼近坐标卡对应于原始网格或者其细分网格上的三维几何信息；

(iii) 用样条函数(B 样条函数、T 样条函数、Powell-Sabin 样条函数等)去逼近基于原始网格.

考虑到几何处理中有些模型可能会包含一些尖锐特征(如图 6 所示)，为了更好地描述这些尖锐特征，可通过额外添加 C^0 基函数来作拟合(文章[27])，从而构造出特征明显的模型. 或者，如文章[25]介绍的，通过构造特定的转换函数来描述尖锐特征.

3 传统意义上的流形构造方法

根据流形的定义规则，直接将网格划分成若干个具有重叠区域的坐标卡；然后，将每个坐标卡按照特定的参数化规则参数化到独立的平面坐标系中，并保证坐标卡之间的转换函数是连续的；最后，基于每个坐标卡的参数域分别建立对应的混合函数和形状函数.

这种传统意义上的流形构造方法，不需要做太多额外的预处理步骤，直接将划分好的坐标卡进行参数化，更加直观、高效.

根据坐标卡的参数化规则将这种方法细分成三类：不规则参数域；矩形参数域；圆形参数域.

3.1 不规则参数域

将基于网格顶点、面、边等建立的坐标卡参数化到独立坐标系中的不规则区域上，使得参数域上的每个面均可以连续映射到矩形或者三角形上. 而两个坐标卡之间的重叠部分为面，因此，可以轻易建立二者之间的转换函数. 此类方法根据坐标卡的选取可以分为以下两类：

(i) 根据网格的顶点、边、面分别建立坐标卡

任意输入一个多边形网格，将其作一次 Catmull-Clark 细分后，取细分网格的对偶网格. 对偶网格上的每个顶点度为 4，面为 n 边形. 然后，基于该对偶网格建立光滑的流形曲面[12]. 分别基于网格的顶点、边、面建立坐标卡，坐标卡对应的参数域如图 3 所示. 其中，顶点坐标卡的参数域是以顶点为中心，周围四个面的面心为角点的正方形；边坐标卡的参数域是钻石形状，相邻两个面的面心对应图中上下两个顶点；面坐标卡的参数域是一个正 n 边形，由面的内部区域组成. 其中，边坐标卡与顶点坐标卡之间转换函数的构造如图 4 所示.

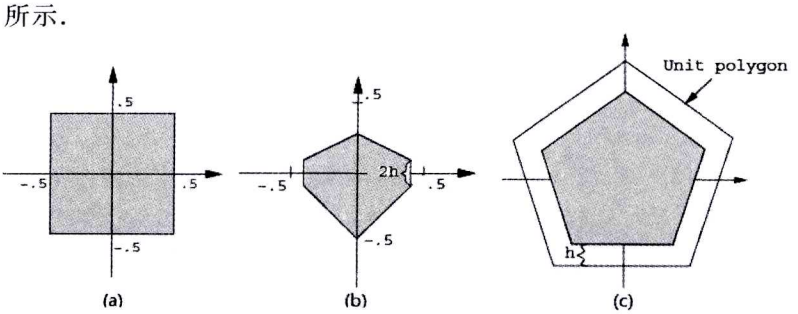

图 3 坐标卡的参数域：(a)顶点坐标卡；(b)边坐标卡；(c)面坐标卡[12]

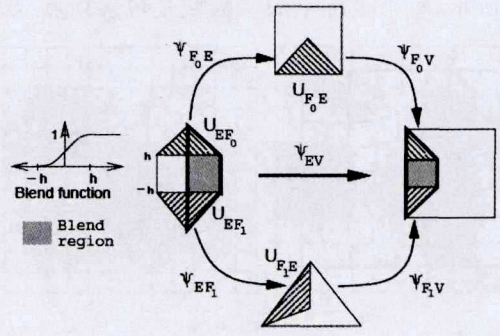

图 4　边坐标卡与顶点坐标卡之间转换函数的构造：
Ψ_{F_1E} 为边坐标卡到面坐标卡的转换函数；Ψ_{F_1V} 为面坐标卡到顶点坐标卡的转换函数[12]

只有不同类型的坐标卡之间存在重叠区域，即：顶点坐标卡与边坐标卡、顶点坐标卡与面坐标卡、边坐标卡与面坐标卡. 其中，面坐标卡和顶点坐标卡、边坐标卡的重叠区域为简单的四边形、三角形，因此，可以轻易构造它们之间的转换函数.

(ii) 基于顶点的 1 邻域建立坐标卡

输入一个四边形网格，基于顶点的一邻域建立坐标卡，每个坐标卡的参数域均是一个边界为曲线的星形[13, 26, 27]，如图 5 所示. 在参数域上，坐标卡上的每个面均是由一个正方形经过映射 Z^{4/k_i} 得到，其中 k_i 是顶点坐标卡对应的顶点的度. 因此，两个坐标卡之间的转换函数可以表示为 Z^{k_1/k_2}，是一个 C^∞ 函数. 然后，基于正方形建立混合函数，从而定义了面上的混合函数.

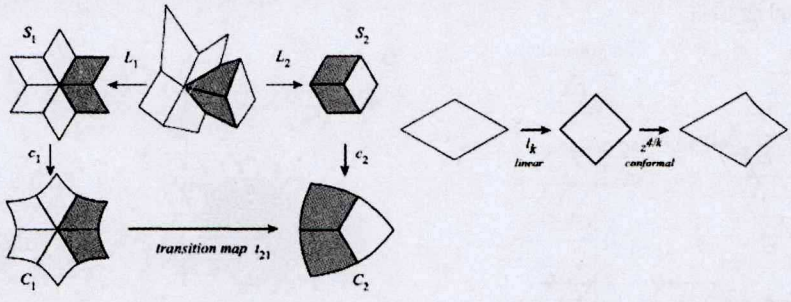

图 5　左图：坐标卡的参数化过程，其中，L_i 是分段双线性映射，c_i 的构造见右图；
右图：c_i 是建立在规则星形上的每块菱形上的，是一个线性函数和 Z^{4/k_i} 的组合[26]

该方法最大的优势在于构造了 C^∞ 连续的转换函数，然后再通过多项式逼近细分曲面的方法建立形状函数，可以构造出 C^∞ 连续的流形曲面. 如果在建立形状函数时，加入 C^0 基函数，则可以描述带尖锐特征的模型，如图 6 所示.

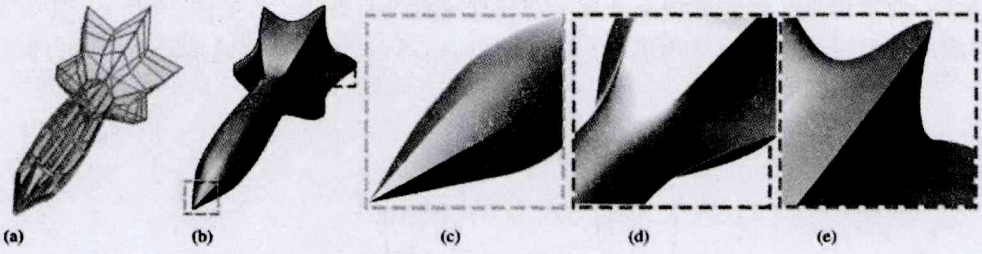

图 6　(a)原始网格：尖锐特征用粗线条画出；(b)创建的流形曲面；(c－e)(b)中三个方框的放大图[27]

3.2　矩形参数域

将网格基于顶点的 k 邻域或者基于面的 k 邻域建立坐标卡后，每个坐标卡的参数域为矩形，或者可以连续映射到矩形上. 然后在矩形上建立混合函数以及形状函数[28－30]. 此时，可以分为两种情况：

(i) 当输入为开网格时，采用 Floater 参数化方法[31]将网格整体参数化到平面正方形上，边界点均

匀分布在正方形边界上. 如图 7 所示,每个坐标卡的参数域是包含顶点或者面的 k 邻域的最小矩形.

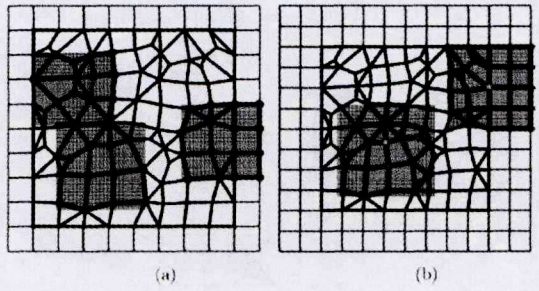

图 7 参数域上几个坐标卡的示例[28]

(ii) 当输入为封闭网格时,首先,采用 Catmull-Clark 细分方法将其细分,从而得到一个四边形网格. 如图 8 所示,基于顶点或者面的 k 邻域定义的坐标卡可以分为两类:不包含奇异点(网格顶点度不为 4)的坐标卡称为非奇异坐标卡;反之,称为奇异坐标卡. 非奇异坐标卡可以简单参数化到正方形上. 对于奇异坐标卡,将含有共同奇异点的所有坐标卡一起参数化到一个连续的星平面上,如图 9 所示. 然后重新定义这些奇异坐标卡,使得星平面上的每个坐标卡要么是一个菱形区域,要么是某条特定的曲线沿着某一方向移动一段距离时经过的区域(如图 9 中的阴影区域). 因此,每个坐标卡均能连续映射到正方形上.

该方法通过建立连续的星平面,重新定义奇异坐标卡的区域,实现奇异坐标卡与正方形的一一对应,从而建立坐标卡之间的转换函数. 此外,还充分展示了流形曲面相较于传统细分曲面的优势:很好地保证了奇异点附近的连续性.

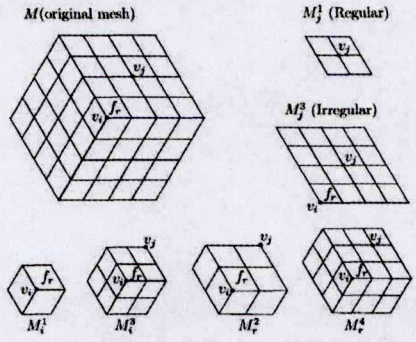

图 8 几个基于面定义的坐标卡和基于点定义的坐标卡[29]

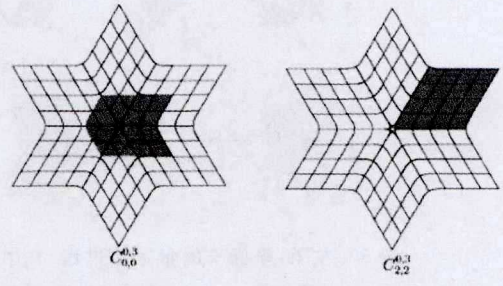

图 9 k 阶连续星平面上的两个坐标卡(阴影区域)[29]

3.3 圆形参数域

将基于三角形网格顶点建立的坐标卡参数化到圆形区域上,并在每个坐标卡上建立子坐标卡:面坐标卡和边坐标卡,使得顶点坐标卡的中心区域不与任何坐标卡重叠[24, 25],如图 10 所示. 其中,面坐标卡是三角形,对应的参数域是弯曲的三角形;边坐标卡是四边形,对应的参数域是弯曲的四边形.

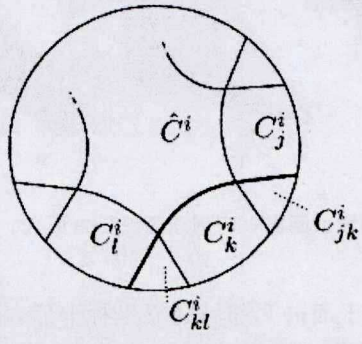

图 10 C_l^i, C_k^i 和 C_j^i 是边坐标卡; C_{kl}^i 和 C_{jk}^i 是面坐标卡; $\hat{C}^i$ 是坐标卡上不与任何坐标卡重叠的区域; 图中粗线为 C^1 连续的光滑曲线[24]

每个面坐标卡对应于三个顶点坐标卡的重叠区域，每个边坐标卡以及相邻的两个面坐标卡对应于两个顶点坐标卡的重叠区域. 如图 11 所示，每个边坐标卡均可以由一个正方形经过连续映射得到. 同样地，每个面坐标卡则可以由一个三角形经过连续映射得到. 由此，我们可以建立两个坐标卡之间的转换函数. 然后，在圆形区域上建立混合函数以及相应的形状函数.

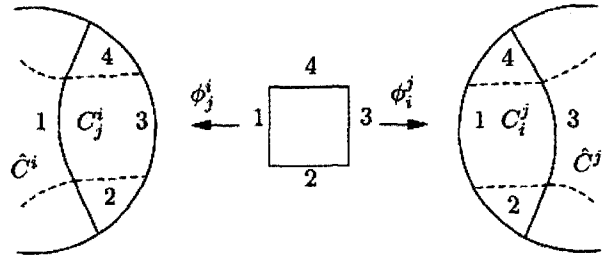

图 11　边坐标卡的参数化：图中的数字代表参数化时，正方形边的对应[24]

这个方法巧妙地将顶点坐标卡划分成若干个子坐标卡，并且构造出相应的连续函数将每一个子坐标卡映射到圆形区域上，从而确定了两个顶点坐标卡之间的转换函数. 圆形参数域则方便了混合函数的构造.

4　基于规范区域的流形构造方法

该方法主要是基于亏格为 n 的封闭多边形网格，来创建光滑的流形曲面：

(i) 当 $n=0$ 时，将该网格参数化到球面上，然后以球面为定义域，来创建相应的流形曲面；

(ii) 当 $n=1$ 时，将该网格参数化到平面上，并在该平面上创建流形曲面；

(iii) 当 $n>1$ 时，将该网格参数化到双曲空间上边数为 $4n$ 的多边形上，然后以该多边形为定义域，来创建流形曲面. 根据拓扑学知识，对于亏格为 n 的多边形网格，可以沿着 $2n$ 条切割线切开，然后参数化到边数为 $4n$ 的多边形上，如图 12 所示. 多边形上的每对边(例如 (a,a^{-1}))对应于网格上的一条切割线，所有的顶点对应于网格上的同一点. 因此，包含这一点的坐标卡将覆盖多边形的所有顶点，这就要求多边形每个顶点处的角度为 $2\pi/4n$，而这在欧拉空间上是无法满足的. 从而，我们需要在双曲空间上来建立对应的多边形. 每个坐标卡均可以连续可逆地映射到双曲空间中的多边形上，于是，第 i 个坐标卡的映射结合第 j 个坐标卡的逆映射即构成了这两个坐标卡之间的转换函数.

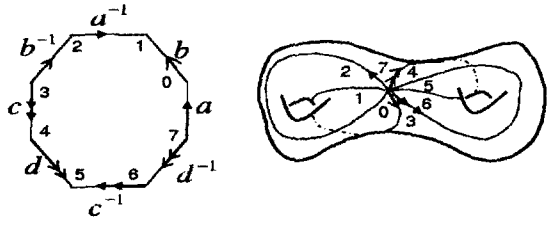

图 12　左图：顶点和边都带标记的八边形；
右图：画有切割线的亏格为 2 的环面，带标记的顶点对应左图的顶点[15]

与其他方法相比，该方法最大的优势在于克服了构造转换函数的难度，巧妙地将两个坐标卡上的映射函数组合起来，即为对应的转换函数. 此外，该方法建立了网格与球面(或者双曲空间上的多边形)之间的一一对应关系，从而可以建立网格与网格之间的对应关系.

根据坐标卡选取方法的不同，将此类方法分为两类：基于多边形几何元素建立坐标卡；基于 Voronoi 细分区域建立坐标卡.

4.1　基于多边形几何元素建立坐标卡

根据多边形的几何元素创建 $2n+2$ 个坐标卡，使得这些坐标卡可以将多边形完全覆盖住[15, 16]. 第一个坐标卡对应多边形内部最大的圆盘，称之为内部坐标卡；第二个坐标卡是以顶点为中心的圆盘，覆

盖了多边形上的所有顶点，称之为顶点坐标卡；余下的 $2n$ 个坐标卡是基于 $2n$ 条切割线建立的单位正方形，覆盖了多边形上对应的两条边，称之为边坐标卡. 图 13 展示了相应坐标卡在多边形上的形状.

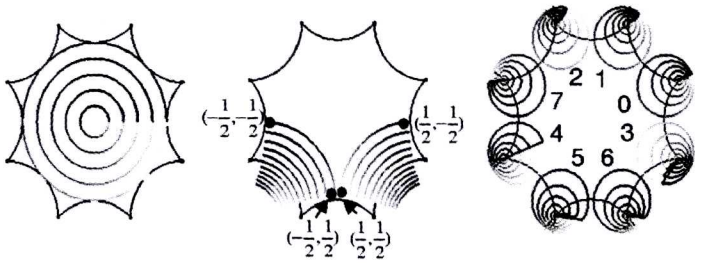

图 13 从左到右依次为：内部坐标卡；边坐标卡的一个示例；顶点坐标卡[15]

内部坐标卡和顶点坐标卡上的混合函数均是定义在圆上的径向基函数；边坐标卡上的混合函数则是定义在正方形上的张量积函数.

直接基于多边形几何元素创建坐标卡的方法比较直观、简洁，但是坐标卡的区域（尤其是内部坐标卡）比较大，而在较大的区域上创建一个样条曲面难度较大，不能很好地突显出流形构造方法的局部性，甚至会带来一定的局部误差.

4.2 基于 Voronoi 细分区域建立坐标卡

利用 Voronoi 细分将网格划分成若干个区域，每个区域向外延伸 1 邻域面，新得到的区域即为对应的坐标卡[17]. 图 14 展示了该类方法的构造过程. 每个坐标卡都可以使用对应的变换 M_D 参数化到平面上，然后经过一系列的旋转变换、仿射变换 M_W 映射到圆上，如图 15 所示. 因此，可以在圆上建立每个坐标卡上的混合函数.

此类方法基于 Voronoi 细分区域建立坐标卡，可以局部地调整每个坐标卡的大小，从而降低局部误差，使得该方法具有较高的灵活性.

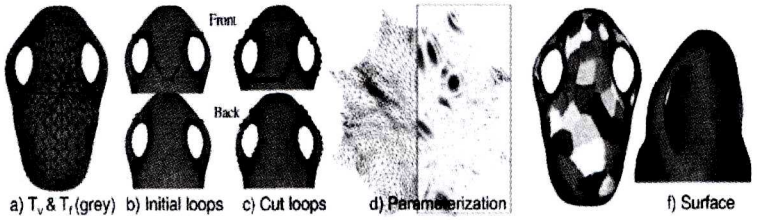

图 14 (a)亏格为 2 的环面；(b)初始的环线；(c)切线；(d)将网格切开后参数化到多边形上；(f)重建出来的光滑曲面，不同的颜色代表不同的坐标卡的中心区域[17]

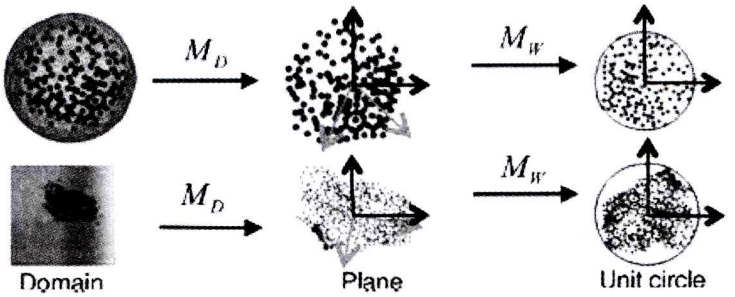

图 15 球面（第一行）和环面（第二行）上坐标卡映射函数的构造：M_D 将规范区域（球面、多边形）上的坐标卡映射到平面；M_W 通过旋转、伸缩变换将平面上的指定区域映射到圆上[17]

5 基于样条曲面推广的流形构造方法

传统的样条曲面（NURBS，B 样条曲面，T 样条曲面等）都是定义在平面区域上的，在过去的数十年

间，如何将样条理论自然地推广到流形上一直是几何建模领域的中心课题. 然而，无论学者和工程师们如何巧思妙想，殚精竭虑，曲面上的样条构造总是无法避免一些光滑性变差的奇异点. 并且，陈类理论明确指出这些努力是徒劳的，样条理论的基本构造决定了其内在不可避免的缺陷.

Gu 等人[20]理论上证明了：传统样条理论本质上是基于仿射几何不变量，那么，样条理论的推广依赖于流形是否允许定义仿射几何，或者等价地，流形是否有仿射结构. 如果流形定义中所有的转换函数均为仿射变换，那么该定义下的流形具有仿射结构. 然而，陈省身示性类理论证明，除了亏格为 1 的流形，其他的流形不存在仿射结构.

Gu 等人[20]指出：只要将流形上的奇异点去除，剩下的部分便具有仿射结构. 于是，基于黎曼曲面的共形映射，定位出流形上奇异点的位置，然后去除奇异点，诱导出余下部分的仿射结构. 此时，每个坐标卡均可以等距地映射到平面上，并且任意两个坐标卡之间的转换函数为仿射变换；然后在每个坐标卡上按传统方式定义样条曲面，如图 16 所示.

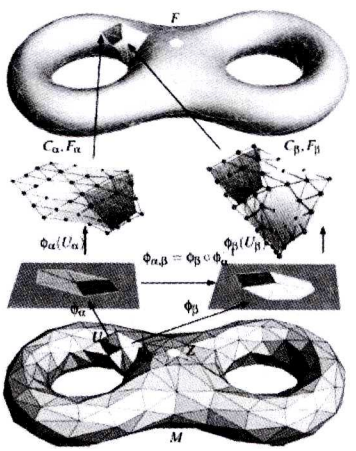

图 16　流形样条创建时的关键因素：
M 为任意拓扑结构的三角形网格，F 为流形样条曲面，
中间两行是两个有重叠区域的样条曲面片 $(\varphi_\alpha(U_\alpha), C_\alpha, F_\alpha)$、$(\varphi_\beta(U_\beta), C_\beta, F_\beta)$
二者对应的坐标卡之间的转换函数为仿射变换 $\varphi_{\alpha\beta}$．Z 为奇异点周围的区域[20]

假设两个有重叠区域的坐标卡在重叠部分拥有同样的控制网格，那么根据样条曲面的参数仿射不变性，定义在这两个坐标卡上的样条曲面在重叠部分具有完全相同的三维形状，因此，避免了构造坐标卡上混合函数的步骤. 最后，利用传统的空洞填补技术填补奇异点附近的区域.

这种基于样条曲面推广的流形构造方法无需构造坐标卡上的混合函数，也无需像其他方法那样需要将具有重叠区域的多个坐标卡上的形状函数线性组合到一起来获得最终的光滑曲面. 同时，该方法将样条曲面自然地推广到了具有任意拓扑结构的流形曲面上，使得该流形曲面同样具有很好的性质，从而，进一步扩展了样条曲面的应用范围.

根据网格仿射结构获取方式的不同，将此类方法具体划分成两类：基于全纯 1-形式(Holomorphic 1-form)诱导出仿射结构；基于离散 Ricci 流诱导出仿射结构.

5.1　基于全纯 1-形式诱导出仿射结构

根据黎曼曲面的知识，我们知道利用黎曼曲面上全纯 1-形式的积分，可以构造出定义在黎曼面上的共形映射. 首先，计算曲面上的微分形式，然后通过积分来构造共形映射. 该方法可以处理任意亏格的拓扑曲面，并且引入了张量积结构，这对流形样条的构造非常重要. 但该方法的缺点是：曲面上的全纯 1-形式存在奇异点，并且奇异点的位置是不可控制的.

定义 2　给出具有共形结构 A 的黎曼曲面 M，这里的共形结构是指，坐标卡之间的转换函数均为共形映射. 全纯 1-形式 w 是一种复微分形式，使得在每个坐标卡 $(U,\varphi) \in A$ 上

$$w = f(z)\mathrm{d}z,$$

这里的 $f(z)$ 为解析函数.

利用文章[32,33]提出的算法，对三角形网格作共形参数化，从而诱导出该网格的仿射结构. 根据坐标卡选取方式的不同，将此类方法分为如下两类

(i) 根据上述得到的微分形式 $w = f(z)\mathrm{d}z$ 找出奇异点，将奇异点以及其邻面去除，计算出能将余下部分完全覆盖住的坐标卡[19, 20]. 坐标卡的计算流程如下

(a) 以顶点的 k 邻域创建坐标卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 、(U_β, φ_β)，通过 $U_\alpha \cup U_\beta$ 的欧拉数来判断 $U_\alpha \cup U_\beta$ 是否与圆盘拓扑同胚的，如果不是，则将 U_α 细分；

(b) 选择顶点 $P_\alpha \in U_\alpha$，则 $\forall P \in U_\alpha$，$\varphi_\alpha(P) = \int_{P_\alpha}^{P} w$；

(c) 转换函数 $\varphi_{\alpha\beta} = \int_{P_\alpha}^{P_\beta} w$.

然后在每个坐标卡上建立样条曲面(三角形域上的 B 样条曲面或者 Powell-Sabin 样条曲面)，并采用传统的空洞填补技术对奇异点附近区域进行填补.

(ii) 如图 17 所示，对于亏格大于 1 的曲面，根据共形结构上所有轨迹经过奇异点的水平线，将曲面分成若干个面片，每个面片均可以共形参数化到矩形平面上，然后在每个面片上定义 T 样条曲面，从而将所有面片粘合到一起[21].

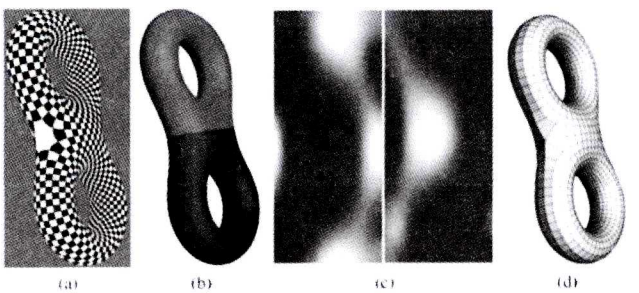

图 17 (a)共形参数化； (b)经过奇异点的水平轨迹将曲面划分成两个面片；
(c)每个面片参数到矩形平面上； (d)在每个面片上创建四边形网格，并将它们粘合到一起[21]

5.2 基于离散 Ricci 流诱导出仿射结构

离散 Ricci 流可以看成是一个特殊的凸能量函数的负梯度流，它的收敛速度非常快. 利用 circle packing 把网格度量定义在顶点处，然后从 $\mathbb{R}^3$ 诱导的度量出发，通过能量函数的梯度方向逐步调整网格度量，从而可以实现网格的全局共形参数化.

利用离散 Ricci 流诱导出网格的仿射结构有以下两种方法

(i) 当输入网格亏格大于 1 时，采用离散 Ricci 流方法将原始网格以及具有相同拓扑的多面体分别共形参数化到双曲圆盘上，然后，根据二者在双曲圆盘上的参数化，建立二者之间的一一对应关系[23]，如图 18 所示.

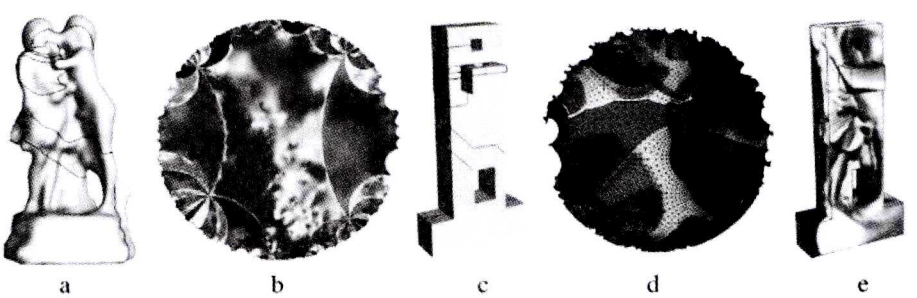

图 18 构建高亏格网格与多面体的一一对应关系[23]

将多面体的顶点全部去除，剩下的部分即具有仿射结构. 于是，分别基于多面体的面和边建立坐标

卡，并在每个坐标卡上构造相应的 T 样条曲面. 最后，再将去除的顶点周围采用空洞填补技术进行填补，如图 19 所示.

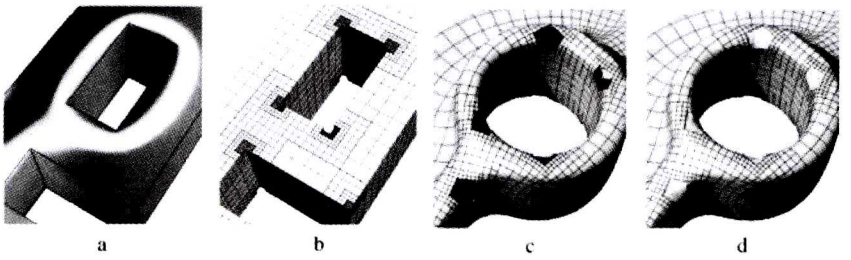

图 19　创建 T 样条流形时对奇异点的处理：（a）顶点均为奇异点的多面体；（b）去除顶点后的流形定义域；（c）去除顶点后创建的 T 样条曲面；（d）奇异点附近填补后的完整曲面[23]

(ii) 如图 20 所示：用户在网格上选取一个奇异点，并选取经过奇异点的切割线将网格切开；利用离散 Ricci 流计算出平面上的 circle packing 度量，从而实现网格的共形参数化；然后建立两种坐标卡：能将整个参数域都覆盖住的中心坐标卡；能将某条切割线覆盖住的边坐标卡[22]. 坐标卡之间的转换函数为仿射变换. 该方法的优势在于，可以选取最少的奇异点数目，且奇异点数最少为 1. 另外，奇异点的位置可以灵活选择.

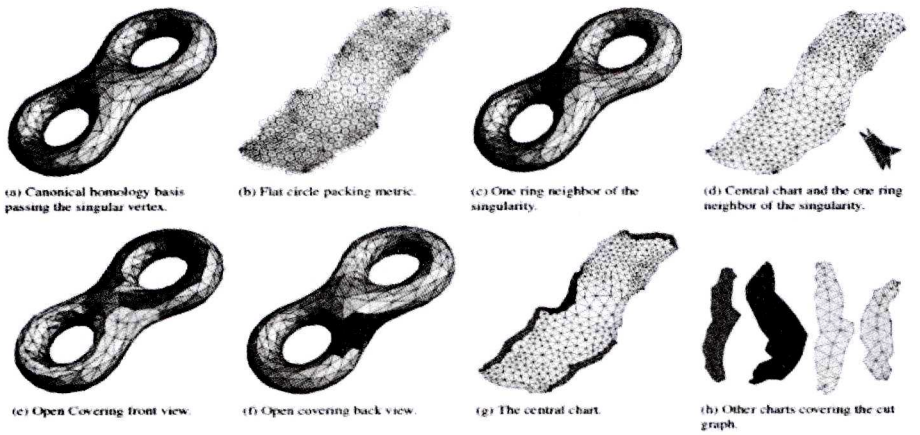

图 20　利用离散 Ricci 流诱导出网格的仿射结构[22]

6　总结与展望

基于离散网格的流形曲面构造技术通过将网格划分成若干个具有重叠区域的坐标卡，并在每个坐标卡上建立描述该坐标卡局部几何信息的形状函数以及代表该形状函数对最终曲面影响程度大小的混合函数，从而利用形状函数在坐标卡之间的重叠区域的共同作用，构建出逼近原始网格的光滑曲面. 本文将目前已有的流形曲面构造技术分为三大类：传统意义上的流形构造方法；基于规范区域的流形构造方法；基于样条曲面推广的流形构造方法. 表 1 展示了这些文章各自的特性以及类别.

相对于传统的曲面造型技术，流形曲面构造技术的优点主要有以下几点

(i) 输入的网格可以是任意拓扑结构的；

(ii) 局部构造性；

(iii) 曲面具有高阶光滑性，克服了传统曲面造型技术在拼接面片时，曲面光滑性难以保证的难题.

此外，基于样条曲面推广的流形构造方法将传统的平面上的样条曲面构造技术推广到了流形区域上，丰富了样条曲面理论，是样条曲面发展过程中的一大突破.

表 1 所有流形曲面构造文章的特性

文章	连续性	预处理	坐标卡	混合函数	形状函数	分类
[12]	C^k	取细分网格的对偶网格，使网格顶点度均为 4	含三种坐标卡：顶点、边、面	张量积 B 样条函数	取控制点	1
[28]	C^k	参数化到平面	基于顶点或者基于面的坐标卡(延伸到矩形上)	张量积 B 样条函数	取控制点	1
[29]	C^k	几次 Catmull-clark 细分	基于顶点或者基于面的坐标卡(分为奇异与非奇异坐标卡)	张量积 B 样条函数	取控制点	1
[30]	C^k	[28][29]的综合				1
[13]	C^∞	四边形网格	顶点坐标卡	C^∞ 函数	多项式	1
[26]	C^k	四边形网格	顶点坐标卡	多项式函数	多项式或张量积 B 样条函数	1
[24]	C^k		含三种坐标卡：顶点、边、面	径向基函数	多项式(与法向有关)	1
[25]	C^0		含三种坐标卡：顶点、边、面	径向基函数	多项式	1
[27]	C^∞/C^0		顶点坐标卡	C^∞ 函数	多项式以及 C^0 基函数	1
[14]	C^k	参数化到球面或者环面上(只考虑亏格为 0 或者 1)	亏格为 0，6 个坐标卡；亏格为 1，9 个坐标卡	张量积 B 样条函数	分层 B 样条函数	2
[15]	C^k	参数化到双曲空间的多边形上	亏格为 n：$2n+2$ 个坐标卡	样条函数(正方形上和圆上)	样条函数	2
[16]	C^k	[14][15]的综合				2
[17]	C^k	参数化到双曲空间的多边形上	Voronoi 细分区域的延伸	圆上的多项式函数	多项式	2
[20]	C^k	基于全纯 1-形式诱导出仿射结构	顶点坐标卡(可能经过细分)	三角形 B 样条函数		3
[19]	C^1	同上	顶点坐标卡(可能经过细分)	Powell-Sabin 样条(插值顶点和法向)		3
[21]	C^k	同上	矩形坐标卡	T 样条函数		3
[23]	C^k	同上	面、边坐标卡	多面体上的 T 样条函数		3
[22]	C^k	基于离散 Ricci 流诱导出仿射结构	网格切开后，整体作为一个坐标卡，边界边上建立坐标卡	三角形 B 样条函数		3

注 分类一列中，1 代表传统意义上的流形构造方法；2 代表基于规范区域的流形构造方法；3 代表基于样条曲面推广的流形构造方法.

目前，基于离散网格的流形曲面构造技术虽然已经发展地比较完善，但是仍然存在一些问题需要解决. 这也是未来这方面的研究重点和可能的发展方向：

(i) 流形构造技术在工业制造中的推广

虽然基于离散网格构造的流形曲面具有很多良好的性质，但是将该项技术大规模推广到工业制造上仍然存在一定的难度. 例如，在实际建模中，可能需要实时地将模型的局部信息进行修改，然而目前大多数相关的方法都有一定的局限性，并且也没有学者做过相关方面的研究.

(ii) 寻找不依赖于仿射结构的样条机制[22]

传统的平面区域上的样条曲面是基于仿射几何不变量的，因此，将其推广到流形区域上，就要求流形区域具有仿射结构. 为了获取这一仿射结构，需要对输入的多边形网格进行全局共形参数化，而这个过程是比较复杂的. 如果能够找到不依赖于仿射结构的样条机制，则可以避免这一步骤.

(iii) 模型上尖锐特征的描述

目前，能够描述模型上尖锐特征的方法只有两种. 一种是通过在构造形状函数时加入 C^0 基函数，从而刻画模型上的尖锐特征，但是该方法不能保证指定的特征区域一定是 C^0 的；另一种是通过构造 C^0 转换函数的方法实现尖锐特征的描述，然而，该方法必须要用户指定尖锐特征的具体位置，并且构造转换函数的过程比较复杂，构造的结果相对而言也不是很理想. 因此，寻找一个有效的描述模型上尖锐特征的流形曲面构造技术仍然是我们需要共同努力的方向.

[参 考 文 献]

[1] Forsey D R, Bartels R H. Hierarchical B-spline refinement[J]. ACM Siggraph Computer Graphics, 1988, 22(4): 205－212.

[2] Eck M, Hoppe H. Automatic reconstruction of B-spline surfaces of arbitrary topological type[C]. Proceedings of the 23rd annual conference on Computer graphics and interactive techniques. ACM, 1996: 325－334.

[3] Piegl L, Tiller W. The NURBS book[M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2012.

[4] Hughes T J R, Reali A, Sangalli G. Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2010, 199(5): 301－313.

[5] Qin H, Terzopoulos D. Triangular NURBS and their dynamic generalizations[J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14(4): 325－347.

[6] Silvetti A, Delrieux C, Castro S. T-Splines: a new schema for C 2 spline interpolation[C]. Computer Science Society, 1997. Proceedings., XVII International Conference of the Chilean. IEEE, 1997: 240－245.

[7] Sederberg T W, Zheng J, Bakenov A, et al. T-splines and T-NURCCs[C]. ACM transactions on graphics (TOG). ACM, 2003, 22(3): 477－484.

[8] Li X, Zheng J, Sederberg T W, et al. On linear independence of T-spline blending functions[J]. Computer Aided Geometric Design, 2012, 29(1): 63－76.

[9] Catmull E, Clark J. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes[J]. Computer-aided design, 1978, 10(6): 350－355.

[10] Doo D. A subdivision algorithm for smoothing down irregularly shaped polyhedrons[C]. Proceedings on interactive techniques in computer aided design. 1978, 157: 165.

[11] Nießner M, Loop C, Meyer M, et al. Feature-adaptive GPU rendering of Catmull-Clark subdivision surfaces[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2012, 31(1): 6.

[12] Grimm C M, Hughes J F. Modeling surfaces of arbitrary topology using manifolds[C]. Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques. ACM, 1995: 359－368.

[13] Ying L, Zorin D. A simple manifold-based construction of surfaces of arbitrary smoothness[C]. ACM Transactions on Graphics (TOG). ACM, 2004, 23(3): 271－275.

[14] Grimm C M. Simple manifolds for surface modeling and parameterization[C]. Shape Modeling International, 2002. Proceedings. IEEE, 2002: 237－244.

[15] Grimm C, Hughes J. Parameterizing n-holed tori[M]. Mathematics of Surfaces. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2003: 14－29.

[16] Grimm C M. Parameterization using manifolds[J]. International Journal of Shape Modeling, 2004, 10(01): 51－81.

[17] Grimm C, Ju T, Phan L, et al. Adaptive smooth surface fitting with manifolds[J]. The Visual Computer, 2009, 25(5－7): 589－597.

[18] Wallner J, Pottmann H. Spline orbifolds[J]. Curves and Surfaces with Applications in CAGD, 1997: 445－464.

[19] He Y, Jin M, Gu X, et al. AC 1 globally interpolatory spline of arbitrary topology[M]. Variational, Geometric, and Level Set Methods in Computer Vision. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2005: 295－306.

[20] Gu X, He Y, Qin H. Manifold splines[J]. Graphical Models, 2006, 68(3): 237－254.

[21] He Y, Wang K, Wang H, et al. Manifold T-spline[C]. International Conference on Geometric Modeling and Processing. Springer Berlin Heidelberg, 2006: 409－422.

[22] Gu X, He Y, Jin M, et al. Manifold splines with a single extraordinary point[J]. Computer-Aided Design, 2008, 40(6): 676－690.

[23] Wang H, He Y, Li X, et al. Polycube splines[J]. Computer-Aided Design, 2008, 40(6): 721－733.
[24] Della Vecchia G, Jüttler B, Kim M S. A construction of rational manifold surfaces of arbitrary topology and smoothness from triangular meshes[J]. Computer Aided Geometric Design, 2008, 25(9): 801－815.
[25] Della Vecchia G, Jüttler B. Piecewise rational manifold surfaces with sharp features[C]. IMA International Conference on Mathematics of Surfaces. Springer Berlin Heidelberg, 2009: 90－105.
[26] Tosun E, Zorin D. Manifold-based surfaces with boundaries[J]. Computer Aided Geometric Design, 2011, 28(1): 1－22.
[27] Wang R, Liu L, Yang Z, et al. Construction of Manifolds via Compatible Sparse Representations[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2016, 35(2): 14.
[28] Navau J C, Garcia N P. Modelling surfaces from planar irregular meshes[J]. Computer Aided Geometric Design, 2000, 17(1): 1－15.
[29] Navau J C, Garcia N P. Modeling surfaces from meshes of arbitrary topology[J]. Computer Aided Geometric Design, 2000, 17(7): 643－671.
[30] Cotrina-Navau J, Pla-Garcia N, Vigo-Anglada M. A generic approach to free form surface generation[J]. Journal of Computing and Information Science in Engineering, 2002, 2(4): 294－301.
[31] Floater M S. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations[J]. Computer aided geometric design, 1997, 14(3): 231－250.
[32] Gu X, Yau S T. Computing conformal structure of surfaces[J]. arXiv preprint cs/0212043, 2002.
[33] Gu X, Yau S T. Global conformal surface parameterization[C]. Proceedings of the 2003 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing. Eurographics Association, 2003: 127－137.

Survey on Manifold Construction Based on Polygonal Mesh

LIU Li-gang, *ZHANG Chun*
(School of Mathematical Science, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: Manifold construction method based on polygonal mesh can generate surfaces with high orders of smoothness and the surface can be of arbitrary topology. Besides, there is no need of extra patching or trimming operations which increases computational cost and results in low orders of smoothness for traditional surface construction methods. Manifold construction theory and difficulties when constructing surfaces with the method are presented in this paper. We have surveyed geometric computing researches in manifold construction. The researches are classified into three categories according to the characteristics of the methods: traditional manifold construction, canonical surfaces based construction, and manifold spline. Each category is introduced in detail. Finally, we come to a conclusion and present a few future directions of manifold construction.

Key words: manifold surface; arbitrary topology; smoothness; local construction; chart

刘利刚教授简历：

刘利刚，男，1975 年生于江西省吉安市. 中国科学技术大学教授，博士生导师，中国科学院“百人计划”，中国科学院特聘研究员. 于 2001 年在浙江大学获得应用数学博士学位；2001 年至 2004 年期间在微软亚洲研究院工作；2004 年至 2011 年期间在浙江大学数学系工作. 2009 年至 2011 年期间，在美国哈佛大学进行学术访问研究. 研究兴趣包括计算机图形学，3D 几何建模与处理，3D 打印中的几何优化等. 已在计算机图形学顶级(TOP)期刊 ACM Transactions on Graphics 上发表论文十余篇. 主持国家自然科学基金项目 4 项，2012 年获得国家自然科学“优秀青年基金”项目. 获得国家发明专利 2 项，计算机软件著作权 15 项. 获得“微软青年教授”奖(2006)、陆增镛 CAD&CG 高科技奖一等奖(2010)、国家自然科学奖二等奖(2013)、中科大校友基金会青年教师事业奖(2014)、中国科大—兴业证券教育奖(2016)等奖项. 国际会议 GMP 2017 大会共同主席，SPM 2014，SGP 2015，CVM 2016，CAD/Graphics 2017 的论文共同主席. 中国计算机学会计算机辅助设计与图形学专业委员会常务委员，中国工业与应用数学学会

几何设计与计算专业委员会秘书长. 目前担任以下学术期刊的编委：

* IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics
* IEEE Computer Graphics & Applications
* Computer Aided Geometric Design
* Computer Graphics Forum
* The Visual Computer
* 软件学报