σ-代数

1. 分别给出: 古典概型, n 重 Bernoulli 概型和几何概型的概率空间.

2. 假设样本空间 Ω 是一个可数集, 试建立一个相应的概率空间. 如果样本空间 Ω 是不可数集, 试建立一个相应的概率空间.

3. 验证 Lebesgue 测度是否为概率测度? 试用 Lebesgue 测度建立一个概率空间.

4. 设 A_n, $n = 1, 2 \ldots$ 是一列事件, 验证 $\overline{\lim}\, A_n$ 和 $\underline{\lim}\, A_n$ 也是事件.

5. 证明对称差满足如下性质:

(i) $(A\Delta B)\Delta(B\Delta C) = A\Delta C$

(ii) $(A\Delta B)\Delta(C\Delta D) = (A\Delta C)\Delta(B\Delta D)$

(iii) $A\Delta B = C \Longleftrightarrow A = B\Delta C$

(iv) $A\Delta B = C\Delta D \Longleftrightarrow A\Delta C = B\Delta D$

(v) $\mathbf{1}_{A\Delta B} = (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B) \pmod 2$

(vi) $A\Delta B = A^c\Delta B^c$

(vii) $(A_1 \circ A_2)\Delta(B_1 \circ B_2) \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2)$. 这里 $\circ$ 表示集合运算 $\cup$, $\cap$ 或 $\setminus$ 中的任何一个.

6. 设 $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in I$, 为一族 σ-代数, 证明 $\mathcal{F} := \cap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$ 也是一σ-代数. 这里 I 可能为非可数的.

7. (1). 设 $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ 均为 σ-代数 (代数). 对任意 $H \in \mathcal{H}$, 定义集类:

$$\mathcal{H}^H := \{A \in \mathcal{G};\ A \cap H \in \mathcal{H}\}$$

那么 $\mathcal{H}^H$ 是一σ-代数 (代数).

(2). 证明 $H \to \mathcal{H}^H$ 是减的 ($\mathcal{H}^\Omega = \mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}^\Omega = \mathcal{G}$). 进一步, $\forall\ H, H' \in \mathcal{H}$,

$$\mathcal{H}^{H\cup H'} = \mathcal{H}^H \cap \mathcal{H}^{H'}.$$

8. 证明 Borel σ-代数 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 满足:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\mathbb{R}} &= \sigma(\{(a,b);\ a<b\in\mathbb{R}\}) = \sigma(\{[a,b];\ a<b\in\mathbb{R}\}) = \sigma(\{(-\infty,b];\ b\in\mathbb{R}\}) \\ &= \sigma(\{(-\infty,b];\ b\in\mathbb{Q}\}).\end{aligned}$$

9. 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是一概率空间. 称事件 $F\in\mathcal{F}$ 为 零事件 (null event) 如果 $\mathbb{P}(F)=0$. 设 $\mathcal{N}$ 为所有零事件的全体, 定义集类:

$$\mathcal{G} := \{E\Delta N;\ E\in\mathcal{F},\ N\subset A,\ A\in\mathcal{N}\}.$$

证明: $\mathcal{G}$ 是包含 $\mathcal{F}$ 的一个 σ-代数.

(Hints: 注意到如下公式:

$$\begin{aligned}E\cup N &= (E\setminus A)\Delta\left[A\cap(E\cup N)\right], \\ E\Delta N &= (E\setminus A)\cup\left[A\cap(E\Delta N)\right] \quad).\end{aligned}$$

10. 证明 λ-类一定是单调类.

11. 设集类 Λ 满足:

(i) $\emptyset\in\Lambda$;

(ii) $\forall\ A\in\Lambda \Longrightarrow A^c\in\Lambda$;

(iii) $\forall\ A_j\in\Lambda$, $j=1,2,\ldots$, 且 $A_i\cap A_j=\emptyset\ (i\neq j) \Longrightarrow \cup_{j=1}^{\infty}A_j\in\Lambda$.

证明上面的条件等价于 λ-类的定义.

12. 证明 Halmos 单调类定理.

13. 证明 Dykin π-λ 类定理.

14. 设 $\mathcal{A}$ 是由样本空间 Ω 的某些子集形成的一代数. 现有两个概率空间 $(\Omega,\sigma(\mathcal{A}),\mathbb{P}_1)$ 和 $(\Omega,\sigma(\mathcal{A}),\mathbb{P}_2)$. 证明: 如果 $\forall\ A\in\mathcal{A}$, $\mathbb{P}_1(A)=\mathbb{P}_2(A)$, 那么上面两个概率空间事实上是同一概率空间.

15. 设 $\mathcal{H}$ 是所有满足以下条件的函数 $f:\Omega\to[-\infty,+\infty]$ 的全体:

(i) $\mathbf{1}_\Omega\in\mathcal{H}$;

(ii) $\mathcal{H}_b := \{f\in\mathcal{H};\ f \text{ is bounded}\}$ 是一向量空间;

(iii) $\mathcal{H}_+ := \{f\in\mathcal{H};\ f>0\}$ (resp. $\mathcal{H}_- := \{f\in\mathcal{H};\ f<0\}$) 在非减极限 (resp. 非增极限) 是”封闭”的.

假设 $\mathcal{C}$ 是由 Ω 的某些子集形成一 π-类且满足 $\forall\, C \in \mathcal{C}$, $\mathbf{1}_C \in \mathcal{H}$. 证明: $\mathcal{H}$ 包含所有 Ω 上有界 $\sigma(\mathcal{C})$-可测函数.

16. 设 $\mathcal{N}$ 是零事件的全体, 定义集类:

$$\bar{\mathcal{N}} := \{F \subset \Omega;\ \exists\, G \in \mathcal{N},\ F \subset G\}$$

和 σ-代数 $\bar{\mathcal{F}} := \sigma(\mathcal{F} \vee \bar{\mathcal{N}})$ 以及

$$\mathcal{H} = \left\{F \subset \Omega;\ \exists\, G \in \mathcal{F},\ F \Delta G \in \bar{\mathcal{N}}\right\}.$$

证明 $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{H}$.

概率测度

1. 设 $(S,\mathcal{G},\mu)$ 是一测度空间且 $\mu(S)\in(0,\infty)$, 试构造一个概率空间. 如果 S 是一个非空可数集以及 g 是 S 上的一个非负函数, 证明 $\mu(A)=\sum_{x\in A}g(x)$, $\forall\ A\in\mathcal{G}$ 是 $(S,\mathcal{G})$ 上的一个测度. 如果 $S\subset\mathbb{R}$ 是不可数集合, 假设 g 还满足 $\int_S g(x)dx<+\infty$, 证明 $\mu(A)=\int_A g(x)dx$, $\forall\ A\in\mathcal{G}$ 是 $(S,\mathcal{G})$ 上的一个有限测度.

2. 设 $n\in\mathbb{N}$, 考虑如下的样本空间:

$$\Omega=\big\{\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n);\ \omega_i=\text{"}a\text{" or "}b\text{"},\ \forall\ i=1,\dots,n\big\}.$$

已知: 如果样本点 $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)$ 恰有 $m\le n$ 个 "a", 则相应概率为 $\mathbb{P}(\{\omega\})=p^m(1-p)^{n-m}$. 进一步, 对任意 $A=\{w^1,\dots,w^{|A|}\}\in 2^\Omega$, 定义

$$\mathbb{P}(A)=\sum_{i=1}^{|A|}\mathbb{P}(\{w^i\}).$$

证明上面定义的集函数 $\mathbb{P}:2^\Omega\to\mathbb{R}$ 是一个概率测度.

3. 设 $A_i\in\mathcal{F}$, $i=1,2\dots$, 证明如下的容斥公式:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)=\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\sum_{J\subset\{1,2,\dots,n\},|J|=i}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right),$$
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)=\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\sum_{J\subset\{1,2,\dots,n\},|J|=i}\mathbb{P}\left(\bigcup_{j\in J}A_j\right).$$

4. 证明如下 Bonferroni 不等式:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\le\sum_{i=1}^m(-1)^{i-1}\sum_{J\subset\{1,2,\dots,n\},|J|=i}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right),\quad \text{if } m \text{ 为奇数;}$$
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\ge\sum_{i=1}^m(-1)^{i-1}\sum_{J\subset\{1,2,\dots,n\},|J|=i}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right),\quad \text{if } m \text{ 为偶数.}$$

特别地, 如果取 $m=1$, 则有如下不等式:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_j\right).$$

这意味着如下不等式成立:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) \geq 1 - \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_j^c\right).$$

5. 设 $A_i \in \mathcal{F}$, $i=1,2\ldots$ 且 $\mathbb{P}(A_i)=1$, 计算 $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{\infty} A_i)=?$

6. 证明概率测度的上下连续性.

7. 设 $A,B \in \mathcal{F}$, 称事件 A 与 B 是等价的如果 $\mathbb{P}(A\Delta B)=0$. 证明:

(i) 如果 A 与 B 是等价的, 则 $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)$;

(ii) 上面的等价关系事实上定义了一个等价类;

(iii) 设 $\mathbb{P}(A)=0$, 则 B 与 A 等价当且仅当 $\mathbb{P}(B)=0$;

(iv) 设 $\mathbb{P}(A)=1$, 则 B 与 A 等价当且仅当 $\mathbb{P}(B)=1$.

8. 设 $A_n \in \mathcal{F}$, $n=1,\ldots$. 证明如下等式:

$$\mathbf{1}_{\overline{\lim} A_n}(\omega) = \overline{\lim} \mathbf{1}_{A_n}(\omega);$$
$$\mathbf{1}_{\underline{\lim} A_n}(\omega) = \underline{\lim} \mathbf{1}_{A_n}(\omega).$$

9*. 设 $\forall\ (t,n) \in [0,T] \times \{0,1,\ldots\}$, $X_t^{(n)}: \Omega \to \mathbb{R}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上的随机变量 (以后我们可称 $\{X^{(n)}\}_{n=0,1,\ldots}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的一列随机过程), 已知存在一个常数 $C>0$ 使

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega;\ \sup_{t\in[0,T]} \left|X_t^{(n+1)}(\omega) - X_t^{(n)}(\omega)\right| > 2^{-(n+1)}\right\}\right) < \frac{C^n}{n!}, \quad n=0,1,\ldots.$$

证明: 存在一个 $\bar{\Omega} \in \mathcal{F}$ 且 $\mathbb{P}(\bar{\Omega})=1$ 使 $\forall\,\omega \in \bar{\Omega}$, 存在正整数值随机变量 $N(\omega)$ 满足:

$$\sup_{t\in[0,T]} \left|X_t^{(n+m)}(\omega) - X_t^{(n)}(\omega)\right| \leq 2^{-n}, \quad \forall\ m \geq 1 \text{ 及 } n \geq N(\omega).$$

10. 设 $A_n \in \mathcal{F}$, $n=1,2,\ldots$. 证明如下 Fatou 类引理:

$$\mathbb{P}\left(\underline{\lim} A_n\right) \leq \underline{\lim} \mathbb{P}\left(A_n\right) \leq \overline{\lim}\ \mathbb{P}\left(A_n\right) \leq \mathbb{P}\left(\overline{\lim} A_n\right).$$

11. 证明概率空间的完备化定理.

随机变量

1. 证明: $X = (X_1, \ldots, X_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ 是一随机向量 当且仅当 对每一个 $i = 1, \ldots, d$, $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个随机变量.

2. 设 $X : \Omega \to S$ 为一个映射 (不一定为随机变量), 验证如下 Ω 上的集类是否为 σ-代数?

(i) $\mathcal{G}_1 := \{X^{-1}(A);\ A \subset \mathbb{R}\}$, 这里取空间 $S = \mathbb{R}$;

(ii) $\mathcal{G}_2 := \{X^{-1}(A);\ A \subset \mathcal{S}\}$, 这里 $\mathcal{S}$ 为 S 上的某些子集所形成的 σ-代数;

(iii) $\mathcal{G}_3 := \{A \in \mathcal{S};\ X^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$, 这里 $\mathcal{F}$ 为事件域;

(iv) $\mathcal{G}_4 := \{A \subset S;\ X^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$.

3. 设 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ 是一随机变量. 试构造一列随机变量 $(X_n;\ n = 1, 2, \ldots)$ 满足: 对任意 $\omega \in \Omega$, $X_n(\omega)$ 关 于 n 是单调不减的且 $|X(\omega) - X_n(\omega)| \leq 2^{-n}$.

4. 设 X 是一取实值简单随机变量, 即其可写成 $X(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$, 这里 $a_i \in \mathbb{R}$ 且 $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, n$, 为 Ω 的一个划分. 写出 $\sigma(X)$. 如果 $X = \mathbf{1}_{A_1}$ 和 $Y = \mathbf{1}_{A_2}$ 是示性随机变量, 写出 $\sigma(X, Y)$.

5. 设 $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ 为一二维随机向量. 证明: 存在一 Borel-可测函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使 $Y = f(X)$ 当且仅当 $\sigma(Y) \subset \sigma(X)$.

6. 设 $\Omega = [0, 1]$, m 为 Lebesgue 测度. 定义

$$X(\omega) = \begin{cases} a_1, & \omega \in [0, \frac{1}{4}], \\ a_2, & \omega \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ a_3, & \omega \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \qquad Y(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1, & \omega \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

其中 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ 互不相等. 证明存在一 Borel-可测函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使 $Y = f(X)$.

7. 设 $\mathcal{A}$ 为 S 上某些子集所形成的集类. 如果 $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S, \sigma(\mathcal{A}))$ 是一个随机变量, 证明:

$$\sigma(X) = \sigma\left(\{X^{-1}(A);\ A \in \mathcal{A}\}\right).$$

8. 设 (S, d) 是一个度量空间 (例如: $S = \mathbb{R}^n$). 称一个函数 $g : S \to \mathbb{R}$ 为下半连续函数 (l.s.c.) 如果其满足 $\underline{\lim}_{d(y,x)\downarrow 0} g(y) \geq g(x)$, $\forall\ x \in S$. 称一个函数 $g : S \to \mathbb{R}$ 为上半连续函数 (u.s.c.) 如果 $-g$ 是 l.s.c.. 证明:

(i) 如果 g 是 l.s.c., 则 $\forall\, b \in \mathbb{R}$, $g^{-1}((b, +\infty))$ 在 S 中是开的.

(ii) 任意下半连续函数都是 Borel (可测) 函数.

(iii) 任意连续函数都是 Borel (可测) 函数.

9. 设 S 为一拓扑空间, F 为 S 上一族连续实值函数的全体. 定义函数

$$g(x) := \sup_{f \in F} f(x), \qquad x \in S.$$

证明 g 是 Borel (可测) 函数. 如果 F 为 S 上一族 l.s.c. 实值函数的全体, 那么函数 g 是否还是 Borel (可测) 函数 ?

10. 设 $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 是一随机变量且 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一单调函数, 证明 $g(X)$ 也是一随机变量 (Hints: 证明任意单调函数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel (可测) 函数).

11. 对于 $k = 1, \ldots, n$, $X_k : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 是随机变量. 验证如下关系成立:

(i) $\sigma(X_k) = \sigma\left(\{\omega \in \Omega;\ X_k(\omega) \le a\},\ a \in \mathbb{R}\right)$, $k = 1, \ldots, n$;

(ii) $\sigma(X_k;\, k \le n) = \sigma\left(\{\omega \in \Omega;\ X_k(\omega) \le a_k,\ k = 1, \ldots, n\},\ a_k \in \mathbb{R},\ k = 1, \ldots, n\right)$

分布函数

1. 设 X, Y 是定义在同一概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 两个实值随机变量, 证明:

$$X = Y, \text{ a.s.} \Longrightarrow X = Y, \text{ in law}.$$

举反例说明上面的逆命题并不成立.

2. 设 X, Y 是分别定义概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 和 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$ 上的两个实值随机变量, 其分布定义为

$$\mathcal{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B), \qquad \mathcal{Q}_Y(B) := \mathbb{Q}(Y \in B), \qquad \forall\ B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

证明: 如果 X 和 Y 的分布函数相同则 $\mathcal{P}_X = \mathcal{Q}_Y$ on $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

3. 证明如下结论:

(i) 任意分布函数不连续点的全体是可数的;

(ii) 设 F 为一分布函数, 则

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0}[F(x+\epsilon) - F(x-\epsilon)] = \begin{cases} 0, & \text{if } x \text{ 为 } F \text{ 的连续点;} \\ \Delta F(x) & \text{if } x \text{ 为 } F \text{ 的不连续点.} \end{cases}$$

(iii) 设 $\{a_j;\ j = 1, 2, ...\}$ 为分布函数 F 的跳点, 则 $\forall\ x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \sum_{\{j;\ x-\epsilon < a_j < x\}} [F(a_j) - F(a_j-)] = 0;$$

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \sum_{\{j;\ x-\epsilon < a_j \le x\}} [F(a_j) - F(a_j-)] = \sum_{j=1}^{\infty} \Delta F(x) \mathbf{1}_{x=a_j}.$$

4. 设 $-\infty < c < d < \infty$. 现有一定义在 $I = [c, d]$ 上的单增函数 f. 对任意 $\epsilon > 0$, 定义

$$N = \text{Card}\left\{ f \text{ 的不连续点 } x;\ \Delta f(x) \ge \epsilon \right\}.$$

这里 Card$A$ 表示集合 A 元素的个数. 证明:

(i) $N \le (f(d) - f(c))/\epsilon$.

(ii) 用 (i) 证明定义在 $\mathbb{R}$ 上的任意单增函数的不连续点全体是可数的.

5. 证明离散型随机变量的分布函数是奇异 (Singular) 型分布函数.

6. 假设三维随机变量 (X_1, X_2, X_3) 服从 $(m; p_1, p_2, p_3)$ 的三项分布, 即其联合分布律为: $\forall\ i, j, k = 0, 1, \ldots, m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k) = \begin{cases} \frac{m!}{i!j!k!} p_1^i p_2^j p_3^k, & i + j + k = m; \\ \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

这里 $p_i \in (0, \infty)$, $i = 1, 2, 3$ 以及 $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. 计算:

(i) X_1 的分布函数;

(ii) $X_1 + X_2$ 的分布函数;

(iii) 设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n < m$. 计算如下条件分布函数:

$$\mathbb{P}(X_1 \le x | X_1 + X_2 = n), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

7. 设随机变量 X 服从参数为 (N, p) 的二项分布, 其中 $p \in (0, 1)$ 而 N 服从参数为 (m, q) 的二项分布. 这里 $m \in \mathbb{N}$ 和 $q \in (0, 1)$. 计算 X 的分布函数.

8. 设非负随机变量 Y 的分布函数是绝对连续的, 其密度函数为 $g(t)$, $t > 0$. 而对任意有限的 $t > 0$, 相应的分布函数 $G(t) < 1$. 证明:

(i) 对于 $t > 0$, 定义 $r(t) = \frac{g(t)}{1 - G(t)}$, 则

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \mathbb{P}(Y \in (t, t + \delta] | Y > t) = r(t).$$

(ii) 对于 $t > 0$, 分布函数

$$G(t) = 1 - \exp\left(- \int_0^t r(s) ds \right).$$

(iii) 如果 Y 服从参数为 $\lambda > 0$ 的几何分布, 则 $r(t) = \lambda$.

积分理论 (数学期望)

1. 设随机变量 X 可积且 $X \geq 0$, a.e. 以及 $\mathbb{E}[X]=1$, 对任意 $A \in \mathcal{F}$, 定义集函数:

$$\mu(A) := \mathbb{E}[X\mathbf{1}_A].$$

证明 μ 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个概率测度. 特别地, 如果取 $X=1$, 则 $\mu = \mathbb{P}$.

2. 设随机变量 X 可积且 $A \in \mathcal{N}$ (这里 $\mathcal{N}$ 表示所有零事件的全体), 证明:

$$\mathbb{E}[X\mathbf{1}_A] = 0.$$

3. 设随机变量 X 可积且 $X > 0$ a.e. on $E \in \mathcal{F}$. 证明: 如果 $\mathbb{E}[X\mathbf{1}_E] = 0$, 则 $\mathbb{P}(E) = 0$.

4. 设随机变量 X 可积且对任意 $E \in \mathcal{F}$, 都有 $\mathbb{E}[X\mathbf{1}_E] = 0$, 则 $X = 0$, a.e..

5. 设 X 为实值简单随机变量以及 $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$ 满足 $A_n \uparrow \Omega$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{A_n}] = \mathbb{E}[X].$$

6. 设随机变量 X_n, $n = 1, 2\ldots$, 满足: $\lim_{n\to\infty} X_n = X$, a.e. 且 $|X_n| \leq Y$, $\forall\, n = 1, 2, \ldots$. 这里 Y 是一非负可积随机变量, 证明:

$$\mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} X_n\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n\right].$$

7. 设 X_n, $n = 1, 2, \ldots$ 为一列随机变量且满足 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| < +\infty$, a.e..

8. 设 X 为只取正整数值的可积随机变量, 证明 $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$. 如果 X 仅仅是一个非负可积随机变量, 则有

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} \big[1 - F(t)\big] dt.$$

这里 $F(t)$, $t > 0$, 表示 X 的分布函数.

9. 设 X 为一非负随机变量且 $c := \mathbb{E}[X^2] < +\infty$. 证明:

(i) 对任意常数 $a \in [0, \mathbb{E}[X])$, 成立

$$\mathbb{P}(X > a) \geq \frac{\{\mathbb{E}[X] - a\}^2}{c}.$$

(ii) 成立如下不等式:

$$\left\{\mathbb{E}\left[\left|X^2 - c\right|\right]\right\}^2 \leq 4c\left\{c - |\mathbb{E}[X]|^2\right\}.$$

(iii) 设 $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, n$. 求证

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}\left(A_i \bigcap A_j\right)}.$$

10. 设对任意 $(\alpha, \beta) \in J := J_1 \times J_2$, $\mathcal{H}_{\alpha,\beta} \subset \mathcal{F}$ 且对每一个 (α, β), $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ 均为 π-类, 证明: 若 $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$, $(\alpha, \beta) \in J$, 是相互独立的, 那么 $\mathcal{G}_\alpha := \sigma(\cup_{\beta \in J_2} \mathcal{H}_{\alpha,\beta})$, $\alpha \in J_1$, 也是相互独立的.

11. 设 $\mathcal{F}_{ij}$ $i = 1, 2 \ldots$, $1 \leq j \leq m(i)$ (其中 $m(i) > 1$) 是相互独立的 σ-代数. 定义 σ-代数:

$$\mathcal{G}_i = \sigma\left(\bigcup_{j=1}^{m(i)} \mathcal{F}_{ij}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

则 σ-代数 $\mathcal{G}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, 也是相互独立的.

12. 设 X_n, $n \in \mathbb{N}$ 是一列随机变量, 求证:

(i) 如果对任意 $n \geq 1$, σ-代数 $\mathcal{F}_n^X := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ 与 $\sigma(X_{n+1})$ 是独立的, 则 $X_1, X_2, X_3, \ldots$ 是相互独立的;

(ii) 如果 $X_1, X_2, X_3, \ldots$ 是相互独立的, 则 σ-代数 $\mathcal{F}_n^X := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ 与 $\mathcal{T}_n^X := \sigma(X_m;\ m > n)$ 是独立的.

13. 设 Y 为一正的随机变量且 $|Y|^{\max\{p,1\}}$ 可积 $p > 0$, 求证:

(i) 对任意 $q > p$, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Y^p\right] &= \int_0^\infty p y^{p-1} \mathbb{P}(Y > y) dy = \int_0^\infty p y^{p-1} \mathbb{P}(Y \geq y) dy \\ &= \left(1 - \frac{p}{q}\right) \int_0^\infty p y^{p-1} \mathbb{E}\left[\min\left\{\frac{Y}{y}, 1\right\}^q\right] dy.\end{aligned}$$

(ii) 现有随机变量 X 是非负的且满足 $\mathbb{P}(Y \geq y) \leq y^{-1}\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{Y \geq y}]$, $\forall\ y > 0$, 则

$$\mathbb{E}[Y] \leq 1 + \mathbb{E}\left[X \left\{\log(Y)\right\}^+\right].$$

14. 设随机变量 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立且 X_i 可积 $(i = 1, \ldots, n)$, 则

$$\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} X_k\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_k\right].$$

条件期望

1. 证明 Radon-Nikodym 定理, 即证明: 设 μ, ν 为可测空间 $(X, \mathcal{X})$ 上的两个 σ-有限测度且 $\nu << \mu$, 则存在一个 $\mathcal{X}$-可测的有限非负函数 f 使 $\nu = f\mu$. 进一步如果存在另一 $\mathcal{X}$-可测的有限非负函数 g 使 $\nu = g\mu$, 则 $\mu(\{x \in X;\ f(x) - g(x) \neq 0\}) = 0$.

2. 设 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$ 是一概率空间以及 m 为 Lebesgue 测度. 求证: $\mu << m$ 当且仅当 分布函数 $F(x) := \mu((-\infty, x])$, $x \in \mathbb{R}$, 是一个绝对连续函数.

3. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一概率空间, 随机变量 $Z, Y : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 相互独立, 则对任意 Borel 函数 $\varphi : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, 有

$$\mathbb{E}\left[\varphi(Z, Y)|\sigma(Y)\right] = g(Y), \qquad g(y) = \mathbb{E}\left[\varphi(Z, y)\right],\ y \in \mathbb{R}.$$

4. 设 $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. 定义条件方差 $\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}) := \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}\big]$, 其中 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 是任意的 σ-代数. 求证:

(a) $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[\mathrm{Var}(X|\mathcal{G})\right] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])$;

(b) 如果 σ-代数 $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$, 则 $\mathbb{E}\left[\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}_2)\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}_1)\right]$.

5. 设 $N(\omega)$ 是一个取非负整数值随机变量, 而 $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots$ 为定义在同一概率空间上的随机变量. 已知 $N(\omega)$ 与 $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots$ 相互独立. 假设 $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq i)\mathbb{E}[|\xi_i|]$ 有限, 求证:

(a) 定义随机变量 $X(\omega) := \sum_{i=1}^{N(\omega)} \xi_i(\omega)$, 则 $X(\omega)$ 是可积的, 且

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq i)\mathbb{E}[\xi_i].$$

(b) 如果 $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots$ 是独立同分布的, 则有 Wald 等式:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[\xi_1].$$

进一步, 如果 $\xi_1(\omega)$ 和 $N(\omega)$ 都是平方可积的, 则 $X(\omega)$ 也是平方可积的, 并且

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(\xi_1)\mathbb{E}[N] + \mathrm{Var}(N)\left(\mathbb{E}[\xi_1]\right)^2.$$

6. 设 $X_n(\omega)$, $n=1,2,\ldots$, 为一列定义在同一概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的非负可积随机变量, 并且 $\liminf_{n\to\infty} X_n(\omega)$ 也是可积的, 则对任意 σ-代数 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$,

$$\mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}\right] \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{G}\right].$$

7. 设 $X_i\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, $i=1,2$. 如果对任意 $A\in\mathcal{F}$, $\mathbb{E}[X_1\mathbf{1}_A]\le\mathbb{E}[X_2\mathbf{1}_A]$, 则 $\mathbb{P}(X_1\le X_2)=1$, (i.e., $X_1\le X_2$, a.e.).

8. 设 $\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\ldots$ 为定义在同一概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上独立同分布的可积随机变量 且 $\mathbb{E}[\xi_1]=0$, 定义随机游动 $X_n(\omega):=\sum_{k=1}^n\xi_k(\omega)$, $n=1,2,\ldots$. 设 $\mathcal{F}_n=\sigma(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $n=1,2,\ldots$. 证明: 对任意 $n,m=1,2,\ldots$,

$$\mathbb{E}\left[X_{n+m}|\mathcal{F}_n\right]=\mathbb{E}\left[X_{n+m}|\sigma(\xi_1,\ldots,\xi_n)\right]=X_n.$$

9. 设 $\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\ldots$ 为定义在同一概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上独立同分布的可积随机变量 且 $\mathbb{E}[\xi_1]=1$, 定义 $X_n(\omega):=\prod_{k=1}^n\xi_k(\omega)$, $n=1,2,\ldots$. 设 $\mathcal{F}_n=\sigma(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $n=1,2,\ldots$. 证明: 对任意 $n,m=1,2,\ldots$,

$$\mathbb{E}\left[X_{n+m}|\mathcal{F}_n\right]=\mathbb{E}\left[X_{n+m}|\sigma(\xi_1,\ldots,\xi_n)\right]=X_n.$$

10. 设 $Y(\omega)$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的一个可积随机变量. 设 $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\cdots\subset\mathcal{F}$ 为一列单增 σ-代数, 对任意 $n=1,2,\ldots$, 定义

$$X_n(\omega)=\mathbb{E}\left[Y|\mathcal{F}_n\right](\omega).$$

证明: 对任意 $n,m=1,2,\ldots$,

$$\mathbb{E}\left[X_{n+m}|\mathcal{F}_n\right]=X_n.$$

*Hints: 第 8-10 题所要证明的关于 $X=\{X_n;\ n=1,2,\ldots\}$ 的等式实际上是证明 X 为一离散时间 $\{\mathcal{F}_n;\ n=1,2\ldots\}$-鞅 (martingale).

随机变量列的收敛

下面的 $X_n(\omega), X(\omega)$ $Y_n(\omega), Y(\omega)$ 表示同一概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 下的一列随机变量以及 $\Rightarrow$ 表示依分布收敛.

1. 证明如下结论:

(i) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < +\infty$, 则 $X_n \stackrel{a.e.}{\to} X$.

(ii) $X_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} X$ 当且仅当 对任意 $\{X_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ 的子列均包含一个几乎处处收敛到 X 的子列.

2. 证明: 几乎处处收敛, 依概率收敛和 L^p-收敛的极限是几乎处处唯一的.

3. 证明如下拓展的 Portmanteau 定理: 设 X_n, $n = 1, 2, \ldots$ 及 X 为概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 下的随机变量, 且 $F_n(x)$ 和 $F(x)$ 分别表示 X_n 和 X 的分布函数. 进一步用 $C_{b,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上所有有界李普希兹连续函数的全体, 则如下条件等价:

(1) $F_n \stackrel{w}{\Rightarrow} F$, $n \to \infty$;

(2) 对任意 $f \in C_b(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}[f(X_n)] \stackrel{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}[f(X)]$;

(3) 对任意 $f \in C_{b,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}[f(X_n)] \stackrel{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}[f(X)]$;

(4) 对任意非负 $f \in C(\mathbb{R})$, $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] \geq f(X)$;

(5) 对任意 $C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 且为开集, $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in C) \geq \mathbb{P}(X \in C)$;

(6) 对任意 $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 且为闭集, $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in D) \leq \mathbb{P}(X \in D)$;

(7) 对任意 $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 且 $\mathbb{P}(X \in \partial B) = 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in B) = \mathbb{P}(X \in B)$.

4. 证明如下的收敛结果:

(i) $X_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} X$ 及 $Y_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} Y$, 则 $X_n + Y_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} X + Y$.

(ii) $X_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} X$ 及 $Y_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} Y$, 则 $X_nY_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} XY$.

(ii) $X_n \stackrel{L^p}{\to} X$ 及 $Y_n \stackrel{L^p}{\to} Y$, 则 $X_n + Y_n \stackrel{L^p}{\to} X + Y$.

(iv) $X_n \Rightarrow X$ 及 $Y_n \Rightarrow Y$, 并且对每一个 $n \geq 1$, X_n 与 Y_n 相互独立以及 X 与 Y 相互独立, 则 $X_n + Y_n \Rightarrow X + Y$.

5. 证明: 如果 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ 及 $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, 则 $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X, Y)$.

6. 证明: 如果 $X_n \Rightarrow X$ 及 $Y_n \Rightarrow c$, 这里 c 是一个实数, 则 $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, c)$.

7. 证明: 如果 $|X_n - Y_n| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ 且 $X_n \Rightarrow X$, 则 $Y_n \Rightarrow X$.

8. 证明 Slutzky 定理, 即 如果 $X_n \Rightarrow X$ 及 $Y_n \Rightarrow c$, 则

$$X_n + Y_n \Rightarrow X + c, \quad X_n Y_n \Rightarrow cX, \quad X_n / Y_n \Rightarrow X/c, \quad \text{if } c \neq 0.$$

9. 设 $X_n \xrightarrow{L^p} X$, 证明: 对任意李普希兹函数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 有 $g(X_n) \xrightarrow{L^p} g(X)$. 这说明连续映射定理对 L^p 收敛并不成立, 但如果把连续映射定理中的函数条件换成: 函数 g 是李普希兹的, 则连续映射定理中的结论对几乎处处收敛, 依概率收敛, L^p-收敛, 和依分布收敛都成立, 因为李普希兹函数一定是连续函数.

10. 设 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \nu)$ 为一概率空间且 $\Phi_\nu(\theta) = \nu(e^{\mathrm{i}\theta x})$ 为特征函数, $\theta \in \mathbb{R}$. 证明如下不等式: 对任意 $r > 0$,

$$\frac{1}{r} \int_{-r}^{r} (1 - \Phi_\nu(\theta))\, d\theta \geq \mu\left(\left[-\frac{2}{r}, \frac{2}{r}\right]^c\right).$$

11. 设 $C^{0,\alpha}([0,T])$ 表示定义在 $[0,T]$ 上所有 α-Hölder-连续函数的全体, 其中 $\alpha \in (0,1]$. 定义:

$$B_\lambda = \{g \in C([0,T]);\ |g|_{0,\alpha} \leq \lambda\}, \qquad \lambda > 0.$$

这里

$$|g|_{0,\alpha} = \sup_{t \in [0,T]} |g(t)| + \sup_{s,t,\in[0,T],\ t \neq s} \frac{|g(t) - g(s)|}{|t - s|^\alpha}.$$

求证 B_λ 是 $C^{0,\alpha}([0,T])$ 中的一个紧集.

12. 设 $\{I_n(t,\omega)\}_{n \geq 1}$, $t \in [0,T]$, 为一族随机变量且对任意 $n \geq 1$ 和 $\omega \in \Omega$, $t \to I_n(t,\omega)$ 是连续的. 假设如下条件成立

$$\sup_{n \geq 1} \int_\Omega |I_n(\cdot,\omega)|_{0,\alpha}\, d\mathbb{P}(\omega) = M_T < \infty.$$

这里 $M_T > 0$ 是只依赖于 T 的正常数. 求证 $\{I_n(\cdot,\omega)\}_{n \geq 1}$ 在 $C([0,T])$ 上是一致胎紧的.