第三章　小波变换

时频局部化
连续小波变换
二进小波变换
小波框架
正交小波

1 时频局部化

1.1. Fourier 变换的局限性

Fourier 变换

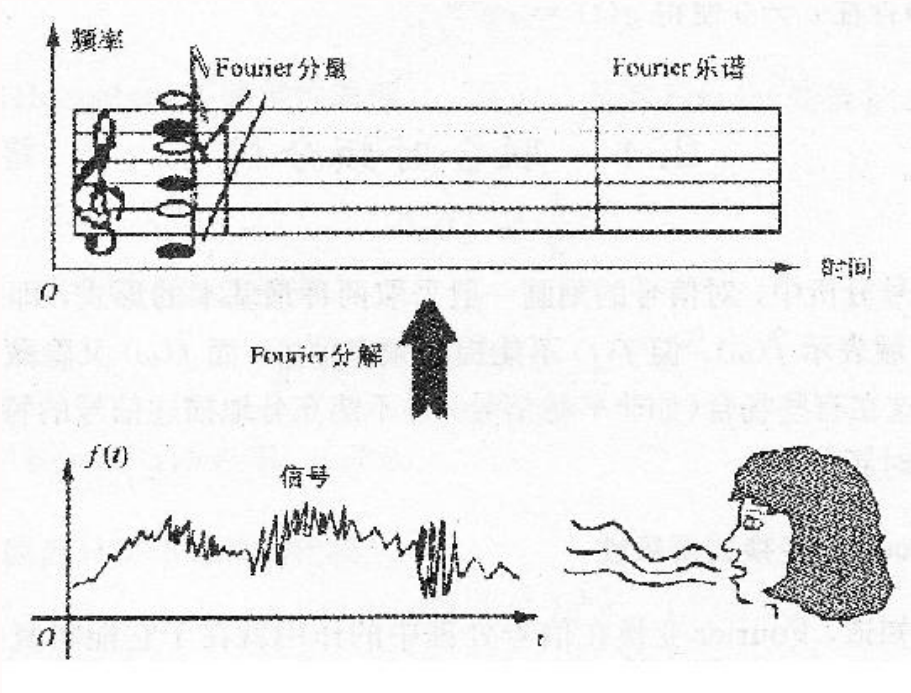
$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

Fourier 变换缺乏信号的局部化分析能力, 这是因为

- Fourier 变换要求提供信号在整个时域上的全部信息, 即任何局部的频谱特征都依赖于信号在整个时域的性质;
- 时间信号的局部改变会影响整个频谱; 频域的局部改变也会影响到整个时域的特性.

时频局部化
连续小波变换
二进小波变换
小波框架
正交小波



时频局部化
连续小波变换
二进小波变换
小波框架
正交小波

1.2. 窗函数

定义: 非平凡函数 $w \in L^2(\mathbb{R})$ 称为窗函数, 如果满足 $tw \in L^2(\mathbb{R})$.

中心和半径 对任意窗函数 w, 其中心 t^* 和半径 $\triangle_w$ 分别定义为

$$t^* = \frac{1}{\|w\|_{L^2}^2} \int_{\mathbb{R}} t|w(t)|^2 dt,$$

$$\triangle_w = \frac{1}{\|w\|_{L^2}} \left(\int_{\mathbb{R}} (t-t^*)^2 |w(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

例: 高斯型函数 $g_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$ 是窗函数, 其中心和半径分别为 $t^* = 0,\ \triangle_{g_\alpha} = \sqrt{\alpha}$.

窗函数性质

- $w(at)$ 的中心和半径分别为 t^*/a 和 $\triangle_w/|a|$;
- $aw(t)$ 的中心和半径分别为 t^* 和 $\triangle_w$;
- $w(t-t_0)$ 的中心和半径分别为 t^*+t_0 和 $\triangle_w$;
- $w(t)e^{i\omega t}$ 的中心和半径分别为 t^* 和 $\triangle_w$;

1.3. 短时 Fourier 变换 (STFT)

定义: 设 $g, \hat{g}$ 均为窗函数, 则 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 的短时 Fourier 变换定义为

$$Sf(\omega, b) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t-b)}e^{-i\omega t}dt.$$

特别地, 当窗函数取为高斯型函数

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}.$$

时, 相应的短时 Fourier 变换

$$G_\alpha f(\omega, b) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g_\alpha(t-b)e^{-i\omega t}dt$$

称为 Gabor 变换.

时频窗

假设 $g, \hat{g}$ 的中心和半径分别为 $t^*, \triangle_g$ 和 $\omega^*, \triangle_{\hat{g}}$.

- 令 $W_{\omega,b}(t) = g(t-b)e^{i\omega t}$, 则由 STFT 定义可得

$$Sf(\omega, b) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{W_{\omega,b}(t)}dt.$$

由于 $W_{\omega,b}$ 是一个窗函数, 且中心和半径分别为 $t^* + b$ 和 $\triangle_g$, 于是 $Sf(\omega, b)$ 给出了 f 在时间窗

$$[t^* + b - \triangle_g, t^* + b + \triangle_g]$$

内的局部化信息.

- 令 $V_{\omega,b}(\eta) = \widehat{W}_{\omega,b}(\eta) = e^{i\omega b}e^{-i\eta b}\hat{g}(\eta-\omega)$, 则 $V_{\omega,b}$ 是一个具有中心 $\omega^* + \omega$ 和半径 $\triangle_{\hat{g}}$ 的窗函数. 由于

$$Sf(\omega,b) = \langle f, W_{\omega,b}\rangle = \langle \hat{f}, V_{\omega,b}\rangle,$$

于是 $Sf(\omega,b)$ 还给出了 f 在频率窗

$$[\omega^* + \omega - \triangle_{\hat{g}}, \omega^* + \omega + \triangle_{\hat{g}}]$$

内的局部化信息.

综上所述, 短时 Fourier 变换 $Sf(\omega, b)$ 给出了信号在时频窗

$$[t^* + b - \triangle_g, t^* + b + \triangle_g] \times$$
$$[\omega^* + \omega - \triangle_{\hat{g}}, \omega^* + \omega + \triangle_{\hat{g}}],$$

中的局部化信息. 随着待分析的时间和频率 (b, ω) 的平移, 得到一系列时频窗. 这些时频窗具有不变的宽度 $2\triangle_g$ 和固定的面积 $4\triangle_g\triangle_{\hat{g}}$. 此外, 由 STFT 的反演公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} g(t-b) Sf(\omega, b) d\omega db$$

可知 STFT 确实包含了 f 的全部信息.

STFT 的局限性

- STFT 的窗口形状与大小保持不变, 与频率无关.
- STFT 不论怎样离散化, 都不可能称为一组正交基.

2 连续小波变换

2.1. 基小波

定义: 如果 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ 满足容许性条件

$$C_\psi := 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda < +\infty,$$

则称 ψ 为基小波.

常用基小波

Haar 小波

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \le t < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$\widehat{\psi}(\lambda) = \frac{4i}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\frac{\lambda}{2}} \frac{\sin^2 \frac{\lambda}{4}}{\lambda}$$

Marr 小波 (墨西哥帽子小波)

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1-t^2)e^{-t^2/2}$$

$$\widehat{\psi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda^2 e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

线性样条小波

$$\psi(t) = (h * \chi_{[0,1]})(t),$$

其中 h 是Haar 小波.

$$\psi(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < \frac{1}{2}, \\ 1-t, & \frac{1}{2} \le t < \frac{3}{2}, \\ t-2, & \frac{3}{2} \le t < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

时频局部化
连续小波变换
二进小波变换
小波框架
正交小波

容许性条件

直观意义 假设 $\psi \in L^1(\mathbb{R})$, 则 $\widehat{\psi}$ 是连续有界函数. 于是由容许性条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda < +\infty,$$

可得 $\widehat{\psi}(0) = 0$, 即 $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$. 由此可见 ψ 具有波动性. 又因为 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, 一般说来具有衰减性. 因此, 基小波 ψ 一定是振荡型的, 并且在有限区间外等于零或很快地趋于零. 这正是"小波"这一名称的由来.

一个充分条件

假设 $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \bigcap L^1(\mathbb{R})$, 且满足如下条件

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0;$

2. $|\psi(t)| \leq \dfrac{C}{(1+|t|)^{1+\epsilon}},\ C > 0, \epsilon > 0;$

则 ψ 满足容许性条件, 进而 ψ 是基小波.

2.2. 连续小波变换

定义: 假设 ψ 是一基小波, 将基小波伸缩和平移得到小波序列

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2}\psi(\frac{t-b}{a}),$$

其中 $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. 对于 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 其连续小波变换定义为

$$\begin{aligned}(W_\psi f)(a,b) &= \langle f, \psi_{a,b}\rangle \\ &= |a|^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi(\frac{t-b}{a})}dt.\end{aligned}$$

基本性质

假设 ψ, ϕ 是基小波, $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, 则

- $(W_\psi(\alpha f + \beta g))(a,b) = \alpha(W_\psi f)(a,b) + \beta(W_\psi g)(a,b)$;
- $(W_\psi(T_c f))(a,b) = (W_\psi f)(a, b-c)$, 其中 $T_c f(t) = f(t-c)$;
- $(W_\psi(D_c f))(a,b) = \frac{1}{\sqrt{c}}(W_\psi f)(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$, 其中 $D_c f(t) = \frac{1}{c} f(\frac{t}{c}),\ c > 0$;
- $(W_{\alpha\psi+\beta\phi} f)(a,b) = \overline{\alpha}(W_\psi f)(a,b) + \overline{\beta}(W_\phi f)(a,b)$;
- $(W_{T_c\psi}(f))(a,b) = (W_\psi f)(a, b+ca)$;
- $(W_{D_c\psi}(f))(a,b) = \frac{1}{\sqrt{c}}(W_\psi f)(ac, b)$.

Parseval 等式

假设 $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, ψ 为一基小波, 则

$$\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(W_\psi f)(a,b)\overline{(W_\psi g)(a,b)}\frac{1}{a^2}dadb = \langle f, g\rangle.$$

特别地,

$$\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|(W_\psi f)(a,b)|^2\frac{1}{a^2}dadb = \|f\|_{L^2}^2.$$

证明 由 Fourier 变换

$$\widehat{\psi}_{a,b}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |a|^{-1/2} \psi(\frac{t-b}{a}) e^{-it\lambda} dt = |a|^{1/2} e^{-ib\lambda} \widehat{\psi}(a\lambda)$$

可得

$$\begin{aligned}(W_\psi f)(a,b) &= \langle f, \psi_{a,b} \rangle \\ &= \langle \hat{f}, \widehat{\psi}_{a,b} \rangle \\ &= |a|^{1/2} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda) \overline{\widehat{\psi}(a\lambda)} e^{ib\lambda} d\lambda.\end{aligned}$$

设 $F_a(\lambda) = \overline{\hat{f}(\lambda)} \widehat{\psi}(a\lambda)$, $G_a(\lambda) = \overline{\hat{g}(\lambda)} \widehat{\psi}(a\lambda)$, 于是

$$(W_\psi f)(a,b) = |a|^{1/2} \overline{\widehat{F_a}(b)},$$

$$(W_\psi g)(a,b) = |a|^{1/2} \overline{\widehat{G_a}(b)}.$$

由上式可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}(W_\psi f)(a,b)\overline{(W_\psi g)(a,b)}db\Big)\frac{1}{a^2}da\\
=&\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\overline{\widehat{F_a}(b)}\widehat{G_a}(b)db\Big)\frac{1}{|a|}da\\
=&\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\overline{F_a(\lambda)}G_a(\lambda)d\lambda\Big)\frac{1}{|a|}da\\
=&\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\lambda)\overline{\hat{g}(\lambda)}|\widehat{\psi}(a\lambda)|^2d\lambda\Big)\frac{1}{|a|}da\\
=&\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\lambda)\overline{\hat{g}(\lambda)}\Big(\int_{\mathbb{R}}\frac{|\widehat{\psi}(a\lambda)|^2}{|a|}da\Big)d\lambda\\
=&\,C_\psi\langle f,g\rangle.
\end{aligned}
$$

反演公式

由 $(W_\psi f)(a,b),\ a,b\in\mathbb{R}$, 重构 f

假设 ψ 是基小波, $f\in L^2(\mathbb{R})$, 则在 f 的连续点有反演公式

$$f(t)=\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|a|^{-1/2}\psi(\frac{t-b}{a})(W_\psi f)(a,b)\frac{dbda}{a^2}.$$

由 $(W_\psi f)(a,b),\ a>0, b\in\mathbb{R}$, 重构 f

假设 ψ 是基小波, 并且满足

$$2\pi\int_0^{+\infty}\frac{|\widehat{\psi}(\lambda)|^2}{\lambda}d\lambda = 2\pi\int_0^{+\infty}\frac{|\widehat{\psi}(-\lambda)|^2}{\lambda}d\lambda = \frac{1}{2}C_\psi < \infty,$$

则对任意的 $f,g\in L^2(\mathbb{R})$, 有

$$\frac{2}{C_\psi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(W_\psi f)(a,b)\overline{(W_\psi g)(a,b)}\frac{1}{a^2}dadb = \langle f,g\rangle.$$

并且对任意的 $f\in L^2(\mathbb{R})$, 在 f 的连续点有反演公式

$$f(t) = \frac{2}{C_\psi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|a|^{-1/2}\psi(\frac{t-b}{a})(W_\psi f)(a,b)\frac{dbda}{a^2}.$$

2.3. 小波时频分析-数学显微镜

假设 ψ 是一个基小波, 并且 ψ 及其 Fourier 变换 $\widehat{\psi}$ 都是窗函数, 其中心和半径分别为

$$
\begin{aligned}
t^* &= \frac{1}{\|\psi\|_{L^2}^2}\int_{\mathbb{R}} t|\psi(t)|^2 dt, \\
\triangle_\psi &= \frac{1}{\|\psi\|_{L^2}}\Big(\int_{\mathbb{R}} (t-t^*)^2|\psi(t)|^2 dt\Big)^{1/2}, \\
\omega^* &= \frac{1}{\|\hat{\psi}\|_{L^2}^2}\int_{\mathbb{R}} \omega|\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega, \\
\triangle_{\hat{\psi}} &= \frac{1}{\|\hat{\psi}\|_{L^2}}\Big(\int_{\mathbb{R}} (\omega-\omega^*)^2|\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega\Big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

假定实际选择的基小波能使 ω^* 为正数, 且在小波序列 $\psi_{a,b}$ 中参数 $a > 0$.

- 由 ψ 是一个窗函数可知, $\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2}\psi(\frac{t-b}{a})$ 也是一个窗函数, 其中心和半径分别为 $at^* + b, a\triangle_\psi$. 由连续小波变换的定义

$$(W_\psi f)(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\psi_{a,b}(t)}dt$$

可知, $(W_\psi f)(a,b)$ 给出了信号在时间窗

$$[b + at^* - a\triangle_\psi, b + at^* + a\triangle_\psi]$$

内的局部化信息.

- 由 $\widehat{\psi}_{a,b}(\omega) = |a|^{1/2} e^{-ib\omega} \widehat{\psi}(a\omega)$ 可知是 $\widehat{\psi}_{a,b}$ 是一个窗函数, 其中心和半径分别为 ω^*/a 和 $\triangle_{\hat{\psi}}/a$. 于是由小波变换的频域表示

$$(W_\psi f)(a,b) = \langle \hat{f}, \widehat{\psi}_{a,b} \rangle$$

可知, 小波变换具有表征信号频域上局部性质的能力, 它给出了信号在频率窗

$$[\frac{\omega^*}{a} - \frac{\triangle_{\widehat{\psi}}}{a}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{\triangle_{\widehat{\psi}}}{a}]$$

内的局部信息.

灵活可变的时频窗

- 连续小波变换具有时频局部化特征, $(W_\psi f)(a,b)$ 给出了信号在时间-频率平面中一个矩形时频窗

$$[b+at^*-a\triangle_\psi, b+at^*+a\triangle_\psi]\times$$
$$[\frac{\omega^*}{a}-\frac{\triangle_{\widehat{\psi}}}{a}, \frac{\omega^*}{a}+\frac{\triangle_{\widehat{\psi}}}{a}]$$

内的局部信息.

- 时频窗的宽度为 $2a\triangle_\psi$, 面积为 $4\triangle_\psi\triangle_{\widehat{\psi}}$. 当检测高频信息时 (对于小的 $a>0$), 时间窗自动变窄; 当检测低频信息时 (对于大的 $a>0$), 时间窗自动变宽.

3 二进小波变换

3.1. 尺度参数离散化

在连续小波变换 $(W_\psi f)(a,b)$ 的频率窗

$$[\frac{\omega^*}{a}-\frac{\triangle_{\widehat{\psi}}}{a},\frac{\omega^*}{a}+\frac{\triangle_{\widehat{\psi}}}{a}]$$

中, 取 $a_j=\frac{1}{2^j}$, 并且假设 $\omega^*=3\triangle_{\widehat{\psi}}$, 则频率窗为

$$[2^{j+1}\triangle_{\widehat{\psi}},2^{j+2}\triangle_{\widehat{\psi}}].$$

于是, 小波变换 $(W_\psi f)(\frac{1}{2^j}, b)$ 给出了信号在频带

$$[2^{j+1}\triangle_{\widehat{\psi}}, 2^{j+2}\triangle_{\widehat{\psi}}]$$

中的局部信息. 同时,

$$(0,\infty) = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}}[2^{j+1}\triangle_{\widehat{\psi}}, 2^{j+2}\triangle_{\widehat{\psi}}]$$

给出了正频率域 $(0,\infty)$ 的一个二进划分. 因此, 由小波变换值

$$(W_\psi f)(\frac{1}{2^j}, b), \quad j \in \mathbb{Z},$$

可以得到信号在所有频域上的信息.

注 条件 $\omega^* = 3\triangle_{\widehat{\psi}}$ 是很容易满足的.

假设 ψ 是一个基小波. 令 $\widetilde{\psi}(t) = e^{i\alpha t}\psi(t)$, 则 $\widehat{\widetilde{\psi}}(\omega) = \widehat{\psi}(\omega - \alpha)$. 于是, $\widehat{\widetilde{\psi}}$ 的中心和半径分别为

$$\widetilde{\omega}^* = \omega^* + \alpha,$$

$$\triangle_{\widehat{\widetilde{\psi}}} = \triangle_{\widehat{\psi}}.$$

选取 $\alpha = 3\triangle_{\widehat{\psi}} - \omega^*$, 即可得 $\widetilde{\omega}^* = 3\triangle_{\widehat{\widetilde{\psi}}}$.

3.2. 二进小波变换

任一信号 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 是否能由连续小波变换 $(W_\psi f)(a,b)$ 在离散化尺度参数 $a_j = 1/2^j,\ j \in \mathbb{Z}$ 下重构?

定义 一个函数 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ 称为二进小波, 如果存在两个正常数 A 和 B, 满足 $0 < A \le B < +\infty$, 使得稳定性条件

$$A \le \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \le B$$

成立. 对 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 其二进小波变换定义为

$$(W_\psi^j f)(b) = 2^{j/2}(W_\psi f)(\frac{1}{2^j}, b),\ b \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{Z}.$$

稳定性条件解释

稳定性条件

$$A \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \leq B$$

等价于对于任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$A\|f\|_2^2 \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|W_\psi^j f\|_2^2 \leq B\|f\|_2^2.$$

二进小波必是基小波

定理 假设 ψ 是二进小波, 则它是满足

$$A\ln 2 \le \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega \le B\ln 2,$$

$$A\ln 2 \le \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega \le B\ln 2,$$

的基小波. 特别地, 如果 $A = B$, 则有

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = 4\pi A\ln 2.$$

证明 由变量替换可得

$$\int_1^2 \frac{|\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2}{\omega} d\omega = \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega.$$

于是, 由稳定性条件得

$$\int_1^2 \frac{A}{\omega} d\omega \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega \leq \int_1^2 \frac{B}{\omega} d\omega.$$

从而有

$$A \ln 2 \leq \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega \leq B \ln 2.$$

类似地, 利用

$$\int_{-2}^{-1} \frac{|\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2}{-\omega} d\omega = \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \frac{|\widehat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega.$$

及稳定性条件可得

$$\int_{-2}^{-1} \frac{A}{-\omega} d\omega \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \frac{|\widehat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega \leq \int_{-2}^{-1} \frac{B}{-\omega} d\omega.$$

从而有

$$A \ln 2 \leq \int_{0}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega \leq B \ln 2.$$

3.3. 二进对偶

定义 假设 ψ 是一个二进小波. 称

$$\widehat{\psi^*}(\omega) = \frac{\widehat{\psi}(\omega)}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2}$$

的 Fourier 逆变换 $\psi^* \in L^2(\mathbb{R})$ 为 ψ 的二进对偶.

定理 假设 ψ 是一个二进小波. 则其二进对偶 ψ^* 也是一个二进小波, 并且满足

$$\frac{1}{B} \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi^*}(2^{-j}\omega)|^2 \leq \frac{1}{A}.$$

此外, 对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 有反演公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi^j f)(b) 2^j \psi^*(2^j(t-b)) db.$$

证明 由 ψ^* 的 Fourier 变换可得

$$\widehat{\psi^*}(2^{-j}\omega) = \frac{\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2}.$$

从而有

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi^*}(2^{-j}\omega)|^2 &= \frac{\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2}{(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2)^2} \\ &= \frac{1}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2}.\end{aligned}$$

因此, ψ^* 是二进小波, 且满足

$$\frac{1}{B} \le \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi^*}(2^{-j}\omega)|^2 \le \frac{1}{A}.$$

令 $g_j(t) = 2^j\overline{\psi(-2^j t)}$, 则有

$$\begin{aligned}(W_\psi^j f)(b) &= 2^{j/2}(W_\psi f)(\tfrac{1}{2^j}, b)\\ &= 2^j \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\psi(2^j(t-b))}dt\\ &= (f * g_j)(b).\end{aligned}$$

由 $\hat{g}_j(\omega) = \overline{\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)}$ 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(W_\psi^j f)(b)2^j\psi^*(2^j(t-b))db\\ =&\frac{1}{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\overline{\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)}\widehat{\psi^*}(2^{-j}\omega)e^{it\omega}d\omega\\ =&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{it\omega}d\omega\\ =&f(t).\end{aligned}$$

4 小波框架

4.1. 时间参数离散化

为了计算的有效性, 将时间参数 b 离散化

$$b_{j,k} = \frac{k}{2^j} b_0, \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

其中 $b_0 > 0$ 是一个固定常数, 称为抽样速率. 进一步引入

$$\psi_{b_0;j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k b_0), \ j, k \in \mathbb{Z},$$

考虑对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 利用连续小波变换的离散信息

$$(W_\psi f)(\frac{1}{2^j}, b_{j,k}) = \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle$$

重构 f.

时频局部化
连续小波变换
二进小波变换
小波框架
正交小波

4.2. 框架理论 (Duffin, Schaeffer, 1952)

4.2.1. 框架

定义: 设 $\{\phi_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的序列, 如果存在常数 A, B, 满足 $0 < A \le B < +\infty$, 使得对任意的 $f \in H$, 有

$$A\|f\|^2 \le \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle f, \phi_j\rangle|^2 \le B\|f\|^2,$$

则称 $\{\phi_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ 是 H 中的一个框架, A, B 称为框架的上、下界. 如果 $A = B$, 则称 $\{\phi_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ 是 H 中的紧框架.

例 设 $H=\mathbb{R}^2$, $e_1=(0,1), e_2=(-\sqrt{3}/2,-1/2), e_3=(\sqrt{3}/2,-1/2)$. 对任意的 $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, 有

$$\sum_{j=1}^{3}|\langle x,e_j\rangle|^2=\frac{3}{2}(x_1^2+x_2^2)=\frac{3}{2}\|x\|^2.$$

于是, $\{e_1,e_2,e_3\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的紧框架, 其中 $A=B=3/2$. 显然, $\{e_1,e_2,e_3\}$ 是线性相关的, 从而构不成 $\mathbb{R}^2$ 的基.

框架与标准正交基

定理 Hilbert 空间 H 中的序列 $\{\phi_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ 是标准正交基的充分必要条件是 $\{\phi_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ 构成 H 的紧框架, 且 $A = B = 1$, $\|\phi_j\| = 1, j \in \mathbb{Z}$.

证明 (充分性) 由 $\{\phi_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ 构成 H 的 $A = B = 1$ 的紧框架可知, 对任意的 $f \in H$, 有

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle f, \phi_j\rangle|^2 = \|f\|^2.$$

特别取 $f = \phi_k$, 则有

$$\|\phi_k\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle \phi_k, \phi_j\rangle|^2.$$

因为 $\|\phi_k\| = 1$, 所以 $\sum_{j\neq k} |\langle \phi_k, \phi_j\rangle|^2 = 0$. 从而 $\langle \phi_k, \phi_j\rangle = \delta_{jk}$, 即 $\{\phi_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ 是 H 中的标准正交集.

4.2.2. 框架算子与对偶框架

定义 设 $\{\phi_j,\ j\in\mathbb{Z}\}$ 是 Hilbert 空间 H 的一个框架. 称线性算子

$$F: H\to l^2,\ Ff=\{\langle f,\phi_j\rangle\}_{j\in\mathbb{Z}},\ \forall\, f\in H,$$

为框架 $\{\phi_j,\ j\in\mathbb{Z}\}$ 的分析算子. 称 F 的伴随算子

$$F^*: l^2\to H,\ F^*c=\sum_{j\in\mathbb{Z}}c_j\phi_j,\ \forall\, c=\{c_j\}_{j\in\mathbb{Z}}\in l^2,$$

为框架 $\{\phi_j,\ j\in\mathbb{Z}\}$ 的综合算子. 令 $T=F^*F$, 则

$$T: H\to H, Tf=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\langle f,\phi_j\rangle\phi_j,\ \forall\, f\in H.$$

称 T 为框架 $\{\phi_j,\ j\in\mathbb{Z}\}$ 的框架算子.

框架算子的性质

根据框架算子 T 的定义, 易知

$$\langle Tf, f\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle f, \phi_j\rangle|^2.$$

因此, 框架条件等价于, 对于任意的 $f \in H$

$$A\langle f, f\rangle \le \langle Tf, f\rangle \le B\langle f, f\rangle,$$

即

$$AI \le T \le BI,$$

其中 I 为恒等算子.

可得

- $T^* = T$, 并且

$$A\|f\| \le \|Tf\| \le B\|f\|, \quad f \in H.$$

- T 可逆, 并且 T^{-1} 满足

$$(T^{-1})^* = T^{-1},$$

$$\frac{1}{B}\|f\| \le \|T^{-1}f\| \le \frac{1}{A}\|f\|, \quad f \in H,$$

$$\frac{1}{B}I \le T^{-1} \le \frac{1}{A}I.$$

定理 假设 $\{\phi_j,\ j\in\mathbb{Z}\}$ 是 Hilbert 空间 H 的一个以A, B 为框架界的框架, T 为相应的框架算子. 令

$$\widetilde{\phi}_j = T^{-1}\phi_j,\ j\in\mathbb{Z}.$$

则 $\{\widetilde{\phi}_j,\ j\in\mathbb{Z}\}$ 是 H 的以 B^{-1}, A^{-1} 为框架界的框架. 称 $\{\widetilde{\phi}_j,\ j\in\mathbb{Z}\}$ 为 $\{\phi_j,\ j\in\mathbb{Z}\}$ 的对偶框架.

证明: 对任意的 $f \in H$, 有

$$\langle f, \widetilde{\phi}_j \rangle = \langle f, T^{-1}\phi_j \rangle = \langle T^{-1}f, \phi_j \rangle.$$

从而

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle f, \widetilde{\phi}_j \rangle|^2 &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle T^{-1}f, \phi_j \rangle|^2 \\ &= \|F(T^{-1}f)\|^2 \\ &= \langle T^{-1}f, f \rangle. \end{aligned}$$

再由

$$\frac{1}{B}I \le T^{-1} \le \frac{1}{A}I$$

可得

$$\frac{1}{B}\|f\|^2 \le \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle f, \widetilde{\phi}_j \rangle|^2 \le \frac{1}{A}\|f\|^2.$$

4.2.3. 框架展开

定理 假设 $\{\phi_j,\ j\in\mathbb{Z}\}$是 Hilbert 空间 H 的一个框架, 并且$\{\widetilde{\phi}_j,\ j\in\mathbb{Z}\}$ 是其对偶框架. 则对任意的 $f\in H$, 有

$$f=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\langle f,\phi_j\rangle\widetilde{\phi}_j$$

或

$$f=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\langle f,\widetilde{\phi}_j\rangle\phi_j.$$

证明 对任意的 $f \in H$, 有

$$
\begin{aligned}
f = T^{-1}Tf &= T^{-1}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, \phi_j\rangle \phi_j\Big) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, \phi_j\rangle (T^{-1}\phi_j) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, \phi_j\rangle \widetilde{\phi}_j.
\end{aligned}
$$

对于第二个重构公式, 我们有

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\phi}_j\rangle \phi_j &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, T^{-1}\phi_j\rangle \phi_j \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle T^{-1}f, \phi_j\rangle \phi_j \\
&= T(T^{-1}f) = f.
\end{aligned}
$$

框架展开的特殊性

- 如果 $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\phi_j$, 其中 $\{c_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l^2$ 满足 c_j 不全等于 $\langle f, \widetilde{\phi}_j\rangle$.

则

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_j|^2 > \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle f, \widetilde{\phi}_j\rangle|^2.$$

这说明,

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\phi}_j\rangle \phi_j.$$

是利用框架 $\{\phi_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ 展开时, 最“节省”的展开方式.

- 如果对任意的 $f \in H$, $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, \phi_j \rangle u_j$. 则对任意的 $f \in H$,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle u_j, f\rangle|^2 \geq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle \widetilde{\phi}_j, f\rangle|^2.$$

这说明,

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, \phi_j \rangle \widetilde{\phi}_j$$

是相同系数的不同展开中最“节省”的.

4.3. 小波框架

定义 对于函数 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, 如果序列

$$\psi_{b_0;j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - kb_0),\ j,k \in \mathbb{Z},$$

构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个框架, 则称 ψ 生成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个小波框架 $\{\psi_{b_0;j,k},\ j,k \in \mathbb{Z}\}$ 而有抽样速率 b_0.

定理 假设 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ 生成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个小波框架 $\{\psi_{b_0;j,k},\ j,k \in \mathbb{Z}\}$ 而有抽样速率 b_0, 且框架界为 A, B. 则 ψ 是一个二进小波, 且

$$b_0 A \le 2\pi \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 \le b_0 B.$$

时频局部化
连续小波变换
二进小波变换
小波框架
正交小波

小波框架重构

框架算子

$$Tf = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \psi_{b_0;j,k}, \ \ f \in L^2(\mathbb{R})$$

对偶框架

$$\widetilde{\psi}_{b_0;j,k} = T^{-1}(\psi_{b_0;j,k}), \ \ j,k \in \mathbb{Z}.$$

重构公式

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \widetilde{\psi}_{b_0;j,k}$$

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \widetilde{\psi}_{b_0;j,k} \rangle \psi_{b_0;j,k}.$$

重构计算

- 紧框架, 即 $A = B$.

框架算子

$$T = AI$$

对偶框架

$$\widetilde{\psi}_{b_0;j,k} = T^{-1}(\psi_{b_0;j,k}) = \frac{1}{A}\psi_{b_0;j,k}, \quad j,k \in \mathbb{Z}.$$

重构公式

$$f = \frac{1}{A}\sum_{j,k}\langle f, \psi_{b_0;j,k}\rangle \psi_{b_0;j,k} = \frac{2}{A+B}\sum_{j,k}\langle f, \psi_{b_0;j,k}\rangle \psi_{b_0;j,k}.$$

- 非紧框架，$A \approx B$.

框架算子

$$T \approx \frac{A+B}{2} I$$

$$T^{-1} \approx \frac{2}{A+B} I$$

对偶框架

$$\widetilde{\psi}_{b_0;j,k} \approx \frac{2}{A+B} \psi_{b_0;j,k}, \quad j,k \in \mathbb{Z}.$$

重构公式

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \widetilde{\psi}_{b_0;j,k} \approx \frac{2}{A+B} \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \psi_{b_0;j,k}.$$

具体地,

令 $R = I - \frac{2}{A+B}T$, 则有

$$\frac{A-B}{A+B}I \le R \le \frac{B-A}{A+B}I.$$

于是可得 $\|R\| \le \frac{B-A}{A+B} < 1$, 从而

$$T^{-1} = \frac{2}{A+B}(I-R)^{-1} = \frac{2}{A+B}\sum_{n=0}^{+\infty} R^n.$$

进一步, 对偶框架可表示为

$$\widetilde{\psi}_{b_0;j,k} = T^{-1}(\psi_{b_0;j,k}) = \frac{2}{A+B}\sum_{n=0}^{+\infty} R^n \psi_{b_0;j,k}, \quad j,k \in \mathbb{Z}. \quad (*)$$

在 $(*)$ 式中, 取近似

$$\widetilde{\psi}_{b_0;j,k} \approx \frac{2}{A+B}\psi_{b_0;j,k}, \quad j,k \in \mathbb{Z},$$

则其余项为

$$r_{j,k} = \frac{2}{A+B}\sum_{n=1}^{+\infty} R^n \psi_{b_0;j,k}.$$

从而

$$\begin{aligned}\|r_{j,k}\| &\le \frac{2}{A+B}\sum_{n=1}^{+\infty}\|R\|^n\|\psi_{b_0;j,k}\| \\ &= \frac{2}{A+B}\|\psi_{b_0;j,k}\|\frac{\|R\|}{1-\|R\|} \\ &= \frac{B-A}{A(A+B)}\|\psi_{b_0;j,k}\|.\end{aligned}$$

f 的展开为

$$
\begin{aligned}
f &= \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \widetilde{\psi}_{b_0;j,k} \\
&= \frac{2}{A+B} \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \psi_{b_0;j,k} + \frac{2}{A+B} \sum_{n=1}^{+\infty} R^n \Big(\sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \psi_{b_0;j,k} \Big) \\
&= \frac{2}{A+B} \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \psi_{b_0;j,k} + \Big(T^{-1} - \frac{2}{A+B} I \Big) T f \\
&= \frac{2}{A+B} \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \psi_{b_0;j,k} + R f,
\end{aligned}
$$

并且

$$
\|Rf\| \le \|R\| \|f\| \le \frac{B-A}{A+B} \|f\|.
$$

可见, 如果 $A \approx B$, 则 $\|Rf\|$ 很小, 于是得到对 f 的精确近似.

- 非紧框架, 不满足 $A \approx B$.

在 $(*)$ 式中, 取前 $N+1$ 项作为近似

$$\widetilde{\psi}^N_{b_0;j,k} = \frac{2}{A+B}\sum_{n=0}^{N} R^n \psi_{b_0;j,k}.$$

则其余项为

$$\begin{aligned} r^N_{j,k} &= \frac{2}{A+B}\sum_{n=N+1}^{+\infty} R^n \psi_{b_0;j,k} \\ &= \frac{2}{A+B} R^{N+1} \sum_{n=0}^{+\infty} R^n \psi_{b_0;j,k} \\ &= R^{N+1}\widetilde{\psi}_{b_0;j,k}. \end{aligned}$$

f 的近似展开为

$$f_N = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \widetilde{\psi}^N_{b_0;j,k}.$$

并且误差估计为

$$\|f - f_N\| \le \|R^{N+1}\| \le \|R\|^{N+1} \|f\| \le (\frac{B-A}{A+B})^{N+1} \|f\|.$$

可见, 随着 N 的增加, 误差指数减少.

5 正交小波

定义 函数 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ 称为正交小波, 如果

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的标准正交基. 称 $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ 为 $L^2(\mathbb{R})$ 的正交小波基.

若 $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的正交小波基, 则对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 有展开式

$$f(t) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} c_{j,k}\psi_{j,k}(t),$$

其中

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k}\rangle.$$

问题: 这样的正交小波 ψ 是否存在？怎样构造？