

第五章 紧支撑正交小波的构造

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 1 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

■ 多分辨分析构造正交小波的基本过程

[Home Page](#)

$$\phi(\rightarrow \phi^*) \rightarrow h \rightarrow g \rightarrow \psi$$

Haar, Shannon, Battle-Lemarie

■ 构造小波的另一种思路

$$h \rightarrow \phi \rightarrow \psi$$

问题: 序列 $h = \{h_k, k \in \mathbb{Z}\}$ 满足什么条件时, 双尺度方程

$$\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k),$$

存在解 $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, 并且它是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的正交尺度函数.

[Title Page](#)

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

■ 紧支撑正交小波的构造 (Daubechies, Mallat, Choen, Lawton)

问题: 序列 $h = \{h_0, h_1, \dots, h_L\}$ 满足什么条件时, 双尺度方程

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^L h_k \phi(2t - k),$$

存在解 $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, ϕ 具有紧支撑且是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的正交尺度函数.

• 迭代法

任取具有紧支撑的函数 ϕ_0 , 令

$$\phi_1(t) = \sum_{k=0}^L h_k \phi_0(2t - k),$$

$$\phi_2(t) = \sum_{k=0}^L h_k \phi_1(2t - k),$$

⋮ ,

$$\phi_n(t) = \sum_{k=0}^L h_k \phi_{n-1}(2t - k),$$

⋮ .

如果当 $n \rightarrow +\infty$ 时, ϕ_n 收敛到 ϕ , 则由上式可得

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^L h_k \phi(2t - k),$$

即 ϕ 是双尺度方程的解. 此时, 称双尺度方程迭代可解.

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 4 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

• 充分条件 (Daubechies, 1988)

设有限实序列 $h = \{h_0, h_1, \dots, h_L\}$ 满足

$$(1) \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k-2n} = 2\delta_{0n};$$

$$(2) \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = 2;$$

(3) 存在正整数 N , 使得

$$H(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N Q_N(e^{-i\omega}),$$

其中 $Q_N(z)$ 是 $L - N$ 次实系数多项式, 且满足

$$Q_N(-1) \neq 0, \quad \sup_{|z| \leq 1} |Q_N(z)| < 2^{N-1}.$$

则双尺度方程迭代可解. 在条件 $\hat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 下, 其解连续唯一且是具有紧支撑的正交尺度函数.

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 5 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

Daubechies 小波的构造

问题 构造实系数多项式 $Q_N(z)$, 使得

(1) $H(\omega) = \left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^N Q_N(e^{-i\omega})$ 满足

$$\begin{cases} |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1; \\ H(0) = 1. \end{cases}$$

(2) $Q_N(-1) \neq 0$, $\sup_{|z| \leq 1} |Q_N(z)| < 2^{N-1}$.

[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 6 of 47

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

具体构造

- $|Q_N(e^{i\omega})|^2$ 可表示为 $\cos \omega$ 的多项式, 从而可表示为

$$\sin^2 \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \omega)$$

的多项式, 即存在代数多项式 P , 使得

$$|Q_N(e^{i\omega})|^2 = P\left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right).$$

将 $H(\omega) = (\frac{1+e^{-i\omega}}{2})^N Q_N(e^{-i\omega})$ 代入条件

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1$$

得

$$\left(\cos^2 \frac{\omega}{2}\right)^N P\left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right) + \left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right)^N P\left(\cos^2 \frac{\omega}{2}\right) = 1.$$

令 $y = \sin^2 \frac{\omega}{2}$, 则有

$$(1 - y)^N P(y) + y^N P(1 - y) = 1, \quad y \in [0, 1]. \quad (*)$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 7 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

- 求满足 (*) 式的多项式 P .

Bezout 定理 设 p_1, p_2 是两个没有公共根, 且次数分别为 n_1, n_2 的多项式. 则存在唯一的次数分别不超过 $n_2 - 1, n_1 - 1$ 的多项式对 q_1, q_2 , 使得

$$p_1(y)q_1(y) + p_2(y)q_2(y) = 1.$$

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

利用 Bezout 定理, 可知存在唯一的次数不超过 $N - 1$ 的多项式对 q_1, q_2 , 使得

$$(1 - y)^N q_1(y) + y^N q_2(y) = 1.$$

将 y 替换成 $1 - y$, 则有

$$y^N q_1(1 - y) + (1 - y)^N q_2(1 - y) = 1.$$

由 q_1, q_2 的唯一性可得

$$q_2(y) = q_1(1 - y).$$

从而有

$$(1 - y)^N q_1(y) + y^N q_1(1 - y) = 1. \quad (**)$$

由 (** 式可得

$$q_1(y) = (1 - y)^{-N} (1 - y^N q_1(1 - y)).$$

利用 $(1 - y)^{-N}$ 在 $y = 0$ 处的 Taylor 展开式，并注意到多项式 $q_1(y)$ 的次数不超过 $N - 1$ ，于是有

$$q_1(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k.$$

从而 (*) 式的唯一的具有最低次数的解为

$$P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k.$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[«](#) [»](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 10 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

对于 (*) 式的更高次多项式的解 $P(y)$ 有

$$(1 - y)^N(P(y) - P_N(y)) + y^N(P(1 - y) - P_N(1 - y)) = 0.$$

从而存在多项式 $U(y)$, 使得

$$P(y) - P_N(y) = y^N U(y).$$

代入上式可得

$$U(y) + U(1 - y) = 0.$$

令 $R(y) = U(\frac{1}{2} - y)$, 则 $R(-y) = -R(y)$, 即 R 是一个奇多项式. 从而有

定理 形如 $H(\omega) = (\frac{1+e^{-i\omega}}{2})^N Q_N(e^{-i\omega})$ 的实系数三角多项式满足

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1$$

的充要条件是

$$|Q_N(e^{i\omega})|^2 = P\left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right),$$

其中多项式 P 满足

$$P(y) = P_N(y) + y^N R\left(\frac{1}{2} - y\right),$$

$$P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k,$$

R 是一个可选择的奇多项式, 使得 $P(y) \geq 0, \forall y \in [0, 1]$.

- 取 $R(y) = 0$, 即 $P(y) = P_N(y)$.

定理 对任意的自然数 $N \geq 2$ 和一切 $\omega \in \mathbb{R}$ 有

$$P_N \left(\sin^2 \frac{\omega}{2} \right) \leq \binom{2N-1}{N} < 2^{2N-2}.$$

证明 由 P_N 的定义可知

$$P_N \left(\sin^2 \frac{\omega}{2} \right) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} \left(\sin^2 \frac{\omega}{2} \right)^k \leq \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k}.$$

利用组合公式

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} &= \binom{2N-1}{N-1} \\ &= \frac{1}{2} \left[\binom{2N-1}{N-1} + \binom{2N-1}{N} \right] \\ &< \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2N-1} \binom{2N-1}{k} = 2^{2N-2}. \end{aligned}$$

- 求 $Q_N(e^{i\omega})$.

定理 (Riesz 引理) 设 A 是一个实系数余弦多项式,

$$A(\omega) = \sum_{k=0}^N a_k \cos k\omega,$$

其中, $a_N \neq 0$, 且满足对任意的 $\omega \in \mathbb{R}$ 有, $A(\omega) \geq 0$. 则存在 N 次实系数代数多项式

$$B(z) = \sum_{k=0}^N b_k z^k,$$

满足 $|B(e^{i\omega})|^2 = A(\omega)$, 且 $B(1) > 0$.

构造 Daubechies 小波的主要步骤

(1) 选取正整数 $N \geq 2$; 从而确定

$$P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k.$$

(2) 利用

$$|Q_N(e^{i\omega})|^2 = P_N \left(\sin^2 \frac{\omega}{2} \right)$$

解得 $Q_N(z)$ 的系数 q_0, \dots, q_{N-1} , 进而求得 $Q_N(z)$, 满足 $Q_N(1) = 1$.

(3) 利用

$$H(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N Q_N(e^{-i\omega})$$

求出 $\{h_k\}_{k=0}^{2N-1}$.

(4) 求出双尺度方程的迭代解 ϕ .

(5) 利用 $\{h_k\}_{k=0}^{2N-1}$ 和 ϕ 构造正交小波 ψ .

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 16 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

Daubechies 小波实例

• D4 小波

取 $N = 2$, 则

$$P_2(y) = \sum_{k=0}^1 \binom{k+1}{k} y^k = 1 + 2y.$$

假设

$$Q_2(e^{i\omega}) = \sum_{k=0}^1 q_k e^{ik\omega} = q_0 + q_1 e^{i\omega}.$$

于是有

$$\begin{aligned} |Q_2(e^{i\omega})|^2 &= (q_0 + q_1 e^{i\omega})(q_0 + q_1 e^{-i\omega}) \\ &= q_0^2 + q_1^2 + q_0 q_1 (e^{i\omega} + e^{-i\omega}) \\ &= q_0^2 + q_1^2 + 2q_0 q_1 \cos \omega \\ &= (q_0 + q_1)^2 - 4q_0 q_1 \sin^2 \frac{\omega}{2}. \end{aligned}$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 17 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

由

$$|Q_2(e^{i\omega})|^2 = P_2 \left(\sin^2 \frac{\omega}{2} \right)$$

及对比系数可得

$$(q_0 + q_1)^2 = 1, \quad q_0 q_1 = -\frac{1}{2}.$$

由此解得

$$\begin{cases} q_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ q_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} q_0 = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ q_1 = -\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_0 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \\ q_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} q_0 = -\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \\ q_1 = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

取 $q_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $q_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, 则

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^2 \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} e^{-i\omega} \right) \\ &= \frac{1}{4} (1 + 2e^{-i\omega} + e^{-2i\omega}) \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} e^{-i\omega} \right) \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{8} + \frac{3 + \sqrt{3}}{8} e^{-i\omega} + \frac{3 - \sqrt{3}}{8} e^{-2i\omega} + \frac{1 - \sqrt{3}}{8} e^{-3i\omega}. \end{aligned}$$

从而

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}, \quad h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}, \quad h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}, \quad h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4}.$$

• D6 小波

取 $N = 3$, 则

$$P_3(y) = \sum_{k=0}^2 \binom{k+2}{k} y^k = 1 + 3y + 6y^2.$$

假设

$$Q_3(e^{i\omega}) = q_0 + q_1 e^{i\omega} + q_2 e^{2i\omega}.$$

于是

$$\begin{aligned} & |Q_3(e^{i\omega})|^2 \\ &= (q_0 + q_1 e^{i\omega} + q_2 e^{2i\omega})(q_0 + q_1 e^{-i\omega} + q_2 e^{-2i\omega}) \\ &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + (q_0 q_1 + q_1 q_2)(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) + q_0 q_2 (e^{2i\omega} + e^{-2i\omega}) \\ &= (q_0 + q_1 + q_2)^2 - 4(q_0 q_1 + 4q_0 q_2 + q_1 q_2) \sin^2 \frac{\omega}{2} + 16q_0 q_2 \sin^4 \frac{\omega}{2}. \end{aligned}$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 20 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

由

$$|Q_3(e^{i\omega})|^2 = P_3 \left(\sin^2 \frac{\omega}{2} \right)$$

及对比系数可得

$$(q_0 + q_1 + q_2)^2 = 1, \quad -4(q_0q_1 + 4q_0q_2 + q_1q_2) = 3, \quad 8q_0q_2 = 3.$$

由此解得一组解为

$$\begin{cases} q_0 = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}), \\ q_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{10}), \\ q_2 = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}). \end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^3 Q_3(e^{-i\omega}) \\ &= \frac{1}{8}(1 + 3e^{-i\omega} + 3e^{-2i\omega} + e^{-3i\omega})(q_0 + q_1e^{-i\omega} + q_2e^{-2i\omega}) \\ &= \frac{1}{8}[q_0 + (3q_0 + q_1)e^{-i\omega} + (3q_0 + 3q_1 + q_2)e^{-2i\omega}] \\ &\quad + \frac{1}{8}[(q_0 + 3q_1 + 3q_2)e^{-3i\omega} + (q_1 + 3q_2)e^{-4i\omega} + q_2e^{-5i\omega}]. \end{aligned}$$

从而

$$\left\{ \begin{array}{l} h_0 = \frac{1}{16}(1 + \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}), \\ h_1 = \frac{1}{16}(5 + \sqrt{10} + 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}), \\ h_2 = \frac{1}{16}(10 - 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}), \\ h_3 = \frac{1}{16}(10 - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}) \\ h_4 = \frac{1}{16}(5 + \sqrt{10} - 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}) \\ h_5 = \frac{1}{16}(1 + \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}). \end{array} \right.$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 22 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Daubechies 小波的性质

• Daubechies 小波的支集

取

$$\phi_0(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 2 - t, & 1 \leq t < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

由迭代过程

$$\phi_n(t) = \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \phi_{n-1}(2t - k)$$

求解尺度函数 ϕ .

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[!\[\]\(8992432513afb96f45a69bb5f0f74668_img.jpg\)](#) [!\[\]\(419bdabe89357d973a7d75a1c51ef8f0_img.jpg\)](#)

[!\[\]\(a81f8d41ac7696d4fce540895b15f10f_img.jpg\)](#) [!\[\]\(896c17244d4c8f2a570e779335ab23dd_img.jpg\)](#)

Page **24** of **47**

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\text{supp}\phi_0 \subseteq [0, 2],$$

$$\text{supp}\phi_1 \subseteq \left[0, \frac{2N - 1 + 2}{2}\right],$$

$$\text{supp}\phi_2 \subseteq \left[0, \frac{3(2N - 1) + 2}{2^2}\right],$$

...

$$\text{supp}\phi_n \subseteq \left[0, \frac{(2^n - 1)(2N - 1) + 2}{2^n}\right].$$

因此有

$$\text{supp } \phi_n \subseteq [0, 2N - 1],$$

从而

$$\text{supp } \phi \subseteq [0, 2N - 1],$$

对于小波

$$\psi(t) = \sum_{k=2-2N}^1 (-1)^k \overline{h_{1-k}} \phi(2t - k),$$

有

$$\text{supp } \psi \subseteq [-(N - 1), N].$$

● Daubechies 小波的消失矩特性

■ 小波消失矩

$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt \longrightarrow \psi$ 的矩

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} t^m \psi(t) dt \neq 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \psi \text{ 有 } m \text{ 阶消失矩}$$

ψ 有 m 阶消失矩 $\Rightarrow \langle \psi, p \rangle = 0, \quad \forall p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{m-1} t^{m-1}.$

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 26 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

■ 小波消失矩的作用

f 是 m 次连续可微的函数, ψ 是具有 m 阶消失矩的实正交小波,
其支撑为 $[c, d]$.

$$\begin{aligned}\langle f, \psi_{j,k} \rangle &= 2^{j/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi(2^j t - k) dt \\ &= 2^{j/2} \int_{\mathbb{R}} f(t + 2^{-j}k) \psi(2^j t) dt \\ &= 2^{j/2} \int_{2^{-j}c}^{2^{-j}d} f(t + 2^{-j}k) \psi(2^j t) dt\end{aligned}$$

[Title Page](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

Page 27 of 47

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Taylor 展开近似

$$f(t+2^{-j}k) \approx f(2^{-j}k) + tf'(2^{-j}k) + \frac{1}{2!}t^2f''(2^{-j}k) + \cdots + \frac{1}{m!}t^m f^{(m)}(2^{-j}k).$$

对充分大的 j ,

$$\begin{aligned}\langle f, \psi_{j,k} \rangle &\approx 2^{j/2} \int_{2^{-j}c}^{2^{-j}d} (f(2^{-j}k) + tf'(2^{-j}k) + \frac{1}{2!}t^2f''(2^{-j}k) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{m!}t^m f^{(m)}(2^{-j}k)) \psi(2^j t) dt \\ &= \frac{2^{j/2}}{m!} f^{(m)}(2^{-j}k) \int_{2^{-j}c}^{2^{-j}d} t^m \psi(2^j t) dt \\ &= \frac{2^{-j/2}}{m!} 2^{-jm} f^{(m)}(2^{-j}k) \int_{\mathbb{R}} t^m \psi(t) dt\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle f, \psi_{j,k} \rangle \rightarrow 0, \quad j \rightarrow +\infty$$

数据压缩

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 29 of 47

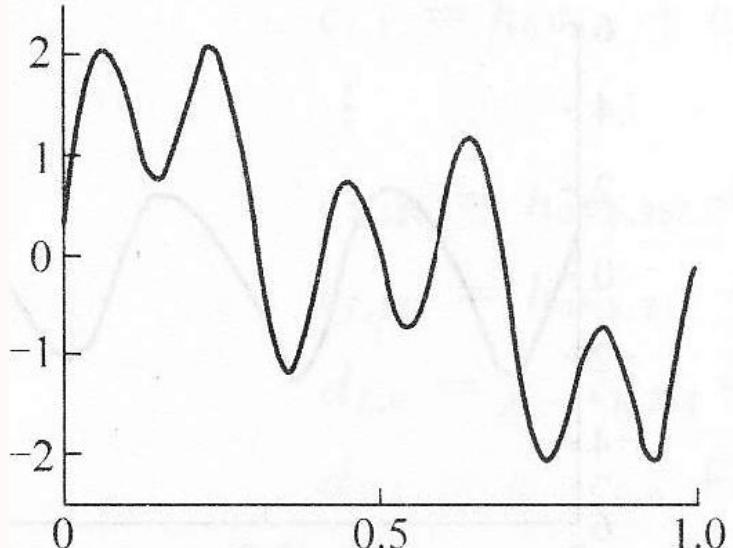
[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$f(t) = \sin(2\pi t) + \sin(4\pi t) + \sin(10\pi t).$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀ ▶

◀ ▶

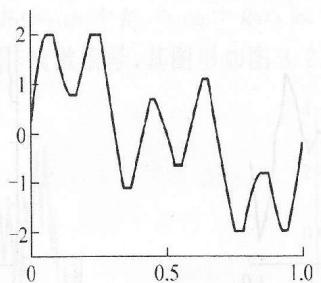
Page 30 of 47

[Go Back](#)

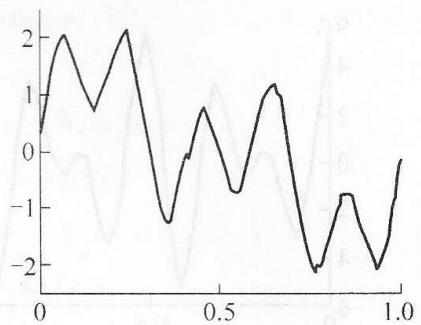
[Full Screen](#)

[Close](#)

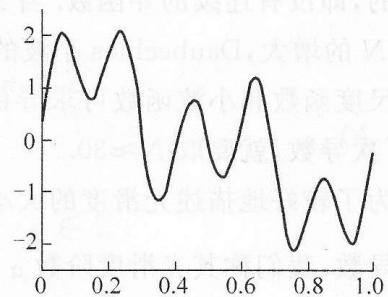
[Quit](#)



Haar(29.30%)



D4(17.97%)



D8(11.72%)

信号奇异性检测

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 31 of 47

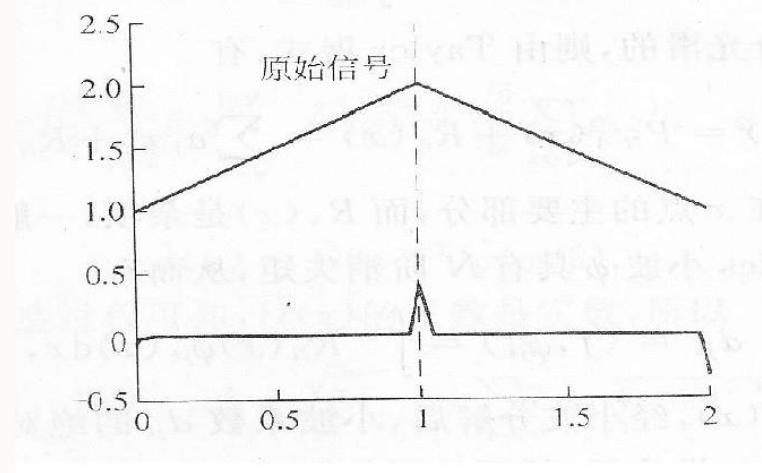
Go Back

Full Screen

Close

Quit

$$f(t) = \begin{cases} 1 + t, & 0 \leq t < 1, \\ 3 - t, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$



D4

■ 小波消失矩的等价条件

$\phi, \psi \rightarrow$ 正交尺度函数与正交小波; $\widehat{\phi}, \widehat{\psi} \rightarrow m$ 次连续可微.

ψ 具有 m 阶消失矩

$$\iff \widehat{\psi}^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

$$\iff \widehat{H}^{(k)}(\pi) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

$$\iff \widehat{G}^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

$$\iff \begin{cases} h_0 - h_1 + h_2 + \dots + (-1)^L h_L = 0 \\ (-1)h_1 + 2^k(-1)^2 h_2 + \dots + L^k(-1)^L h_L = 0, \quad 1 \leq k \leq m-1. \end{cases}$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 32 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 33 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\widehat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\widehat{\psi}^{(k)}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^k \psi(t) dt$$

$$\widehat{\psi}(\omega) = G(\omega/2) \widehat{\phi}(\omega/2)$$

$$G(\omega) = -e^{-i\omega} \overline{H(\omega + \pi)}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^L h_k e^{-ik\omega}.$$

■ Daubechies 小波的消失矩

Daubechies 小波 ψ_N 具有 N 阶消失矩

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \psi_N(t) dt = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \dots, N-1, \\ -\frac{N!}{4^N} Q_N(-1), & k = N. \end{cases}$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 35 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\widehat{\psi}_N(\omega) = - \left(\frac{1 - e^{i\omega/2}}{2} \right)^N Q_N(-e^{i\omega/2}) e^{-i\omega/2} \widehat{\phi}_N(\omega/2)$$

↓

$$\widehat{\psi}_N^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$\widehat{\psi}_N^{(N)}(0) = -N!(-i/4)^N Q_N(-1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \neq 0$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 36 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\mathcal{F}[t^n \psi_N(t)](\omega) = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \mathcal{F}[\psi_N(t)](\omega),$$



$$\int_{\mathbb{R}} t^k \psi_N(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

$$\int_{\mathbb{R}} t^N \psi_N(t) dt = \sqrt{2\pi} i^N \widehat{\psi}_N^{(N)}(0) = -\frac{N!}{4^N} Q_N(-1)$$

• Daubechies 小波的光滑性

光滑度阶数 α

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{f}(\omega)|}{1 + |\omega|^\alpha} d\omega < +\infty$$

光滑度阶数 α 与 N 的关系

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α	0.5	0.915	1.275	1.596	1.888	2.158	2.415	2.611	2.902

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 37 of 47

[Go Back](#)

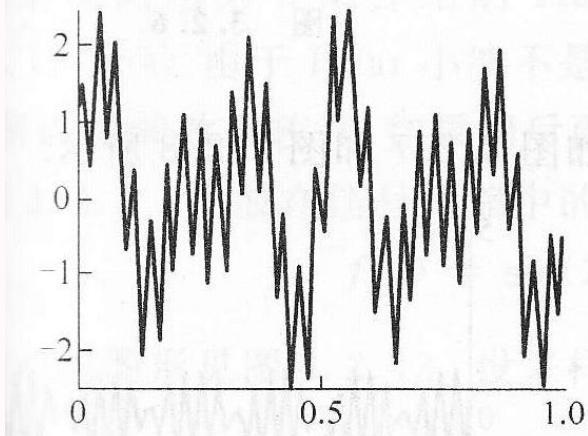
[Full Screen](#)

[Close](#)

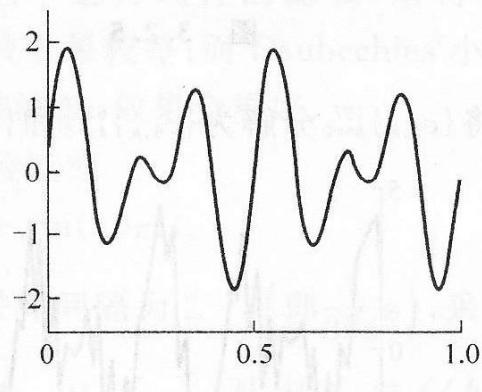
[Quit](#)

$$f(t) = \sin(8\pi t) + \sin(12\pi t) + \sin(58\pi t)$$

从 f 中滤掉 29Hz 的成分, 即求 $g(t) = \sin(8\pi t) + \sin(12\pi t)$.



f



g

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

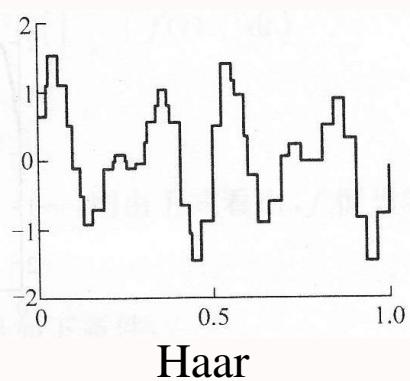
Page 39 of 47

[Go Back](#)

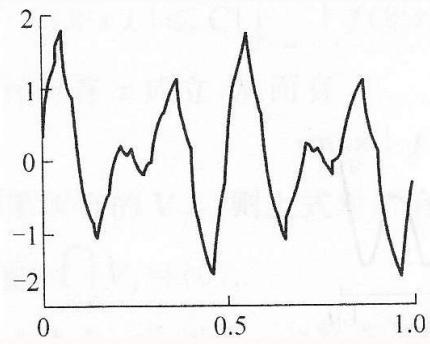
[Full Screen](#)

[Close](#)

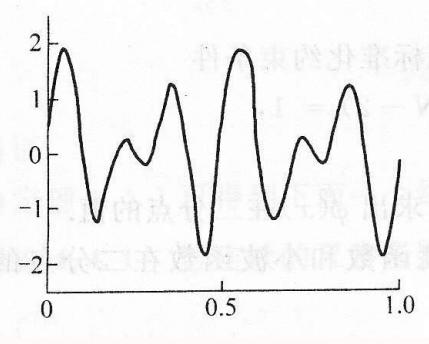
[Quit](#)



Haar



D4



D8

● Daubechies 小波的对称性

$$f(a + t) = f(a - t) \rightarrow \text{对称性}$$

$$f(a + t) = -f(a - t) \rightarrow \text{反对称性}$$

■ Daubechies 小波是高度非对称的.

■ 具有紧支撑和对称性的正交小波仅有 Haar小波 (Daubechies).

■ Daubechies 通过对 Q_N 做优化选择,构造出具有近似对称性的紧支撑小波-Symmlet 小波.

Daubechies 小波的计算

step1: 计算 $\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(2N - 2)$.

$$\begin{aligned}\phi(j) &= \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \phi(2j - k) & \mathbf{m} &= \mathbf{Mm} \\ &= \sum_{l=2j-(2N-1)}^{2j} h_{2j-l} \phi(l) & \Rightarrow \mathbf{m} &:= [\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(2N - 2)]^T \\ && \mathbf{M} &:= [h_{2j-l}]_{j,l=1}^{2N-2}\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{m} = \mathbf{Mm} \\ \phi(1) + \phi(2) + \dots + \phi(2N - 2) = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \mathbf{m}$$

step2: 计算 $\phi\left(\frac{n}{2^j}\right)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi\left(\frac{n}{2}\right) = \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \phi(n-k), \quad n \in \mathbb{Z} \\ \phi\left(\frac{n}{2^2}\right) = \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \phi\left(\frac{n}{2} - k\right), \quad n \in \mathbb{Z} \\ \dots\dots\dots \\ \phi\left(\frac{n}{2^j}\right) = \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \phi\left(\frac{n}{2^{j-1}} - k\right), \quad n \in \mathbb{Z} \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 42 of 47

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

[Home Page](#)

[Title Page](#)

step3: 计算 $\psi\left(\frac{n}{2^j}\right)$.

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^{k-1} h_k \phi(2t + k - 1)$$

$$\psi\left(\frac{n}{2^j}\right) = \sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^{k-1} h_k \phi\left(\frac{n}{2^{j-1}} + k - 1\right)$$

◀ ▶

◀ ▶

Page 43 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

例 D4 小波

$$\phi(1) = h_1\phi(1) + h_0\phi(2)$$

$$\phi(2) = h_3\phi(1) + h_2\phi(2)$$

其中

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}, \quad h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}, \quad h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}, \quad h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4}.$$

$$\begin{cases} \phi(1) = h_1\phi(1) + h_0\phi(2) \\ \phi(1) + \phi(2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi(1) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ \phi(2) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\bullet \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n) = 1 \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n/2^j) = 2^j \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(n/2^j) = 0$$

因为

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n/2^j) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(n/2^{j-1} - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n/2^{j-1} - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{n - 2^{j-1}k}{2^{j-1}}\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n/2^{j-1}). \end{aligned}$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 46 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\begin{aligned}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(n/2^j) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(n/2^{j-1} - k) \\&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n/2^{j-1} - k) \\&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{n - 2^{j-1}k}{2^{j-1}}\right) \\&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n/2^{j-1}) \\&= 2^{j-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \\&= 0\end{aligned}$$

- $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n) = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt = 1$

因为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n/2^j) \left(\frac{1}{2^j}\right) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2^j} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n/2^j) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2^j} \cdot 2^j \\ &= 1.\end{aligned}$$