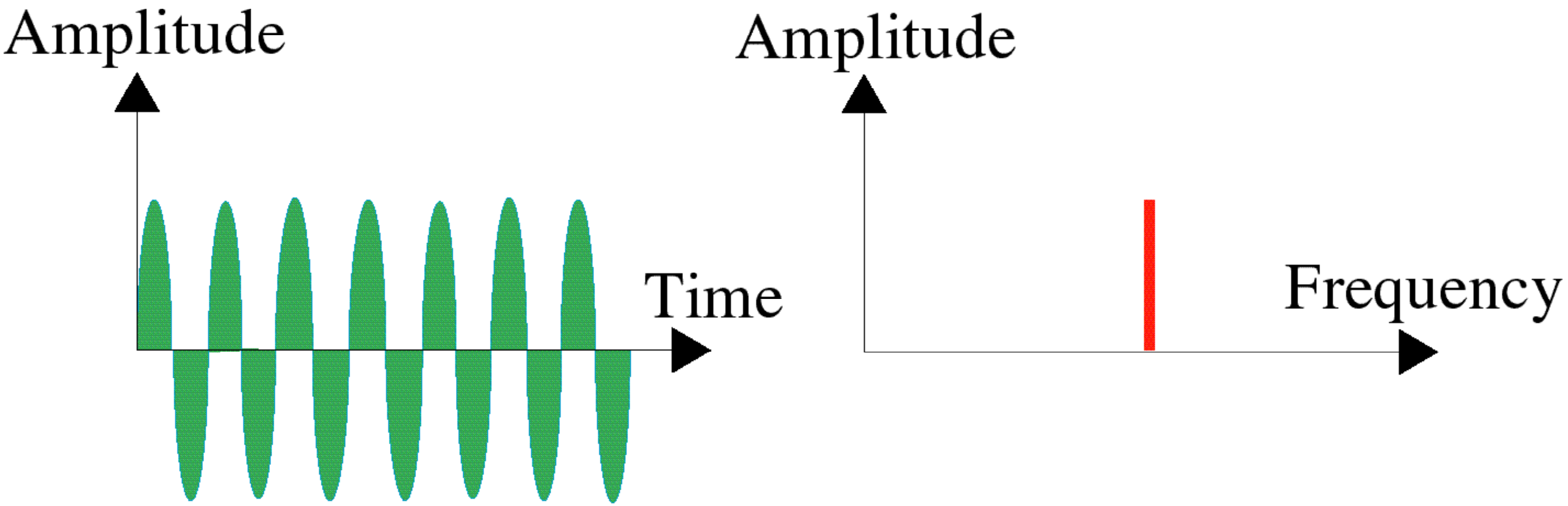
Fourier变换：

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

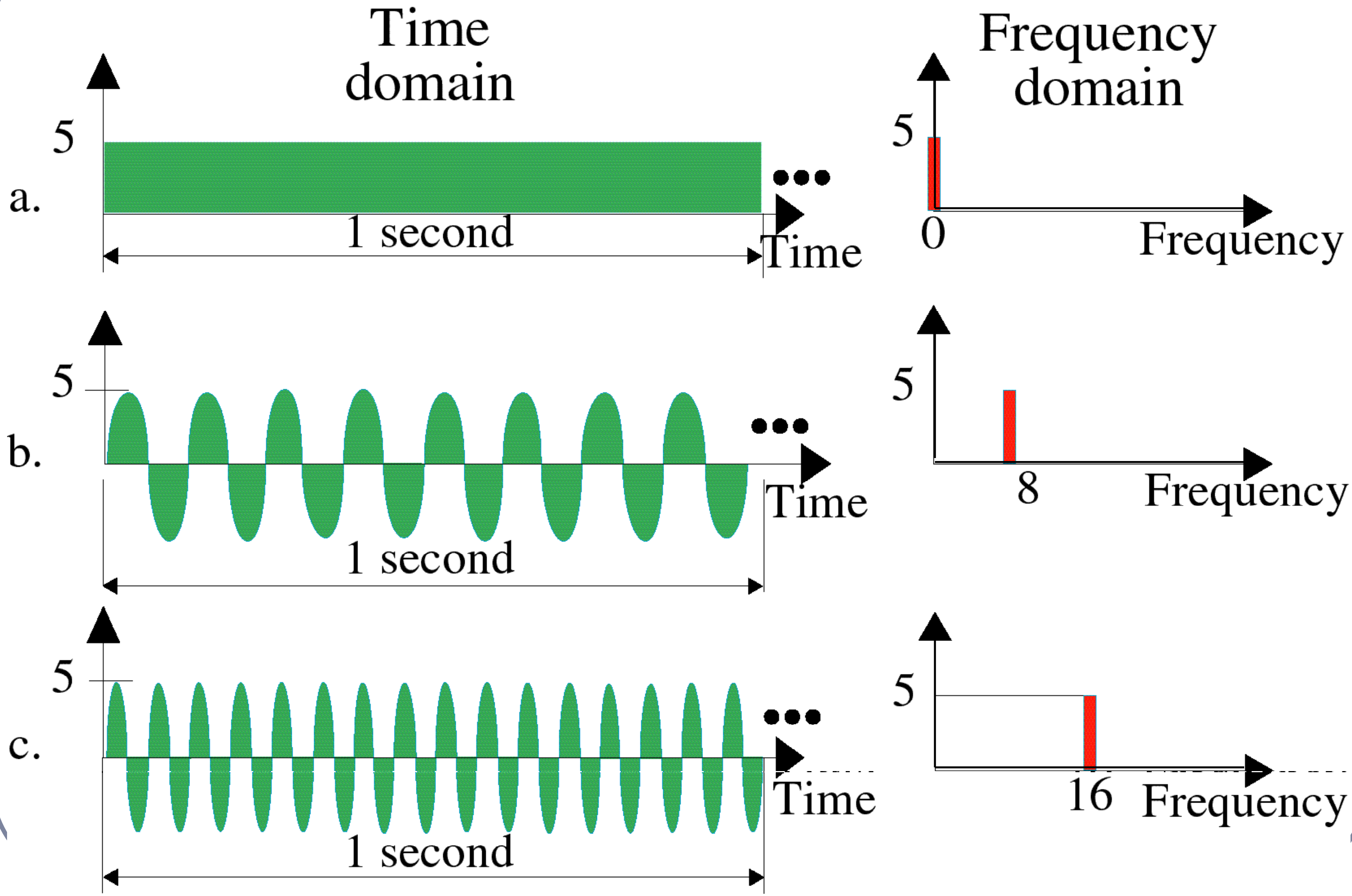
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}< f(x),e^{i\lambda x} >.$$

f(x)和不同频率的三角函数做内积，就能求出不同频率处的相关值，值越大的地方，相关性越大，就说明原信号中有该频率的信号

时域和频域

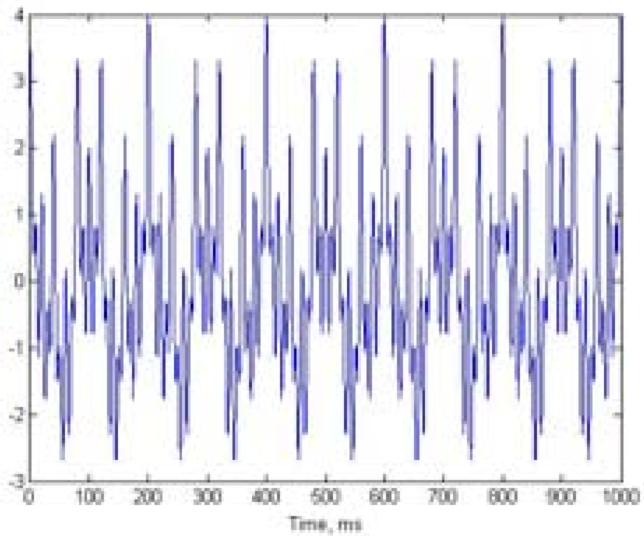


a. Time domain b. Frequency domain

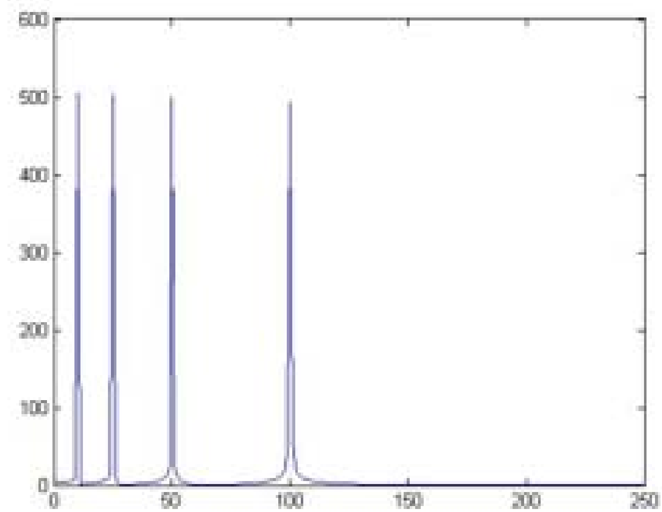


Time domain
Frequency domain
a.
5
1 second
Time
5
0
Frequency
b.
5
1 second
Time
5
8
Frequency
c.
5
1 second
Time
5
16
Frequency

平稳信号



FFT



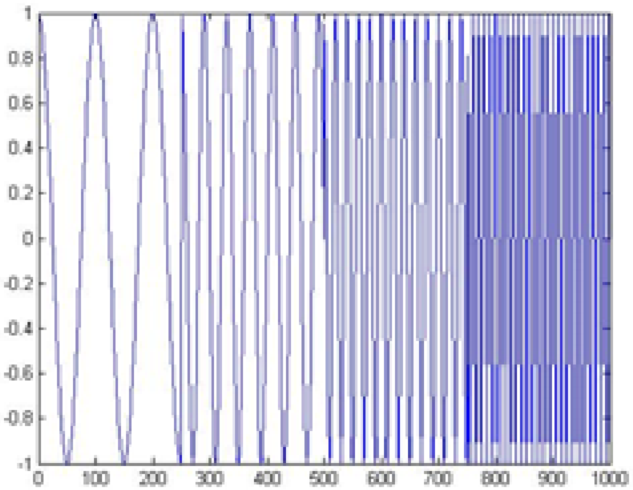
$$x(t)=\cos(2\pi*10t)+\cos(2\pi*25t)+\cos(2\pi*50t)+\cos(2\pi*100t)$$

10, 25, 50, 100Hz

傅里叶变换

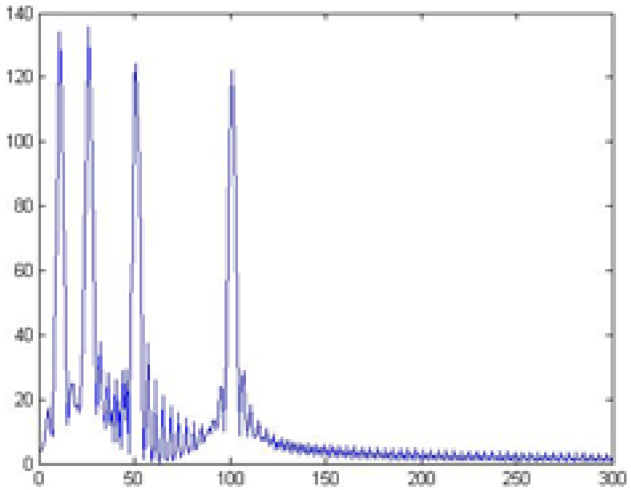
- 给出一个信号总体上包含哪些频率的成分；
- 不能给出各成分出现的时刻；
- 适合平稳信号的分析
  - 分布参数和分布律不随时间变化
  - 大多是人为制造的
  - 自然界的大量信号几乎都是非平稳的

非平稳信号



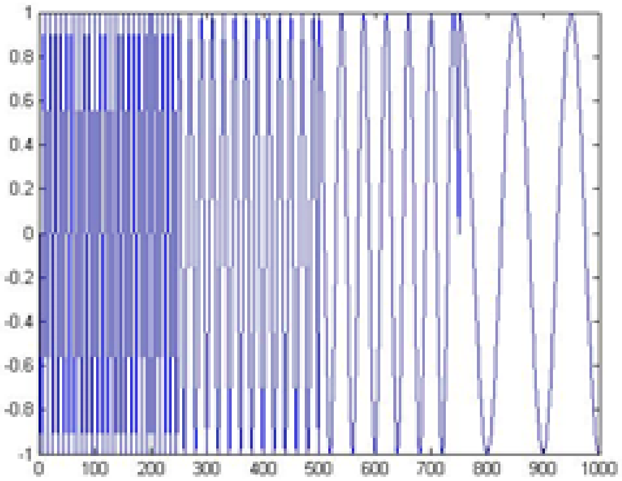
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

FFT



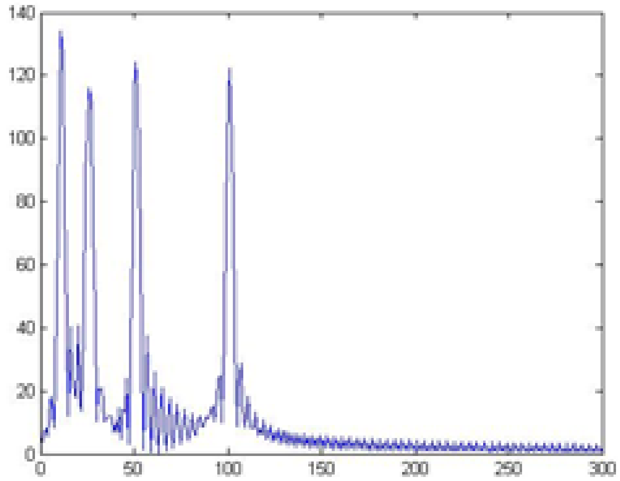
140
120
100
80
60
40
20
0
0
50
100
150
200
250
300

非平稳信号

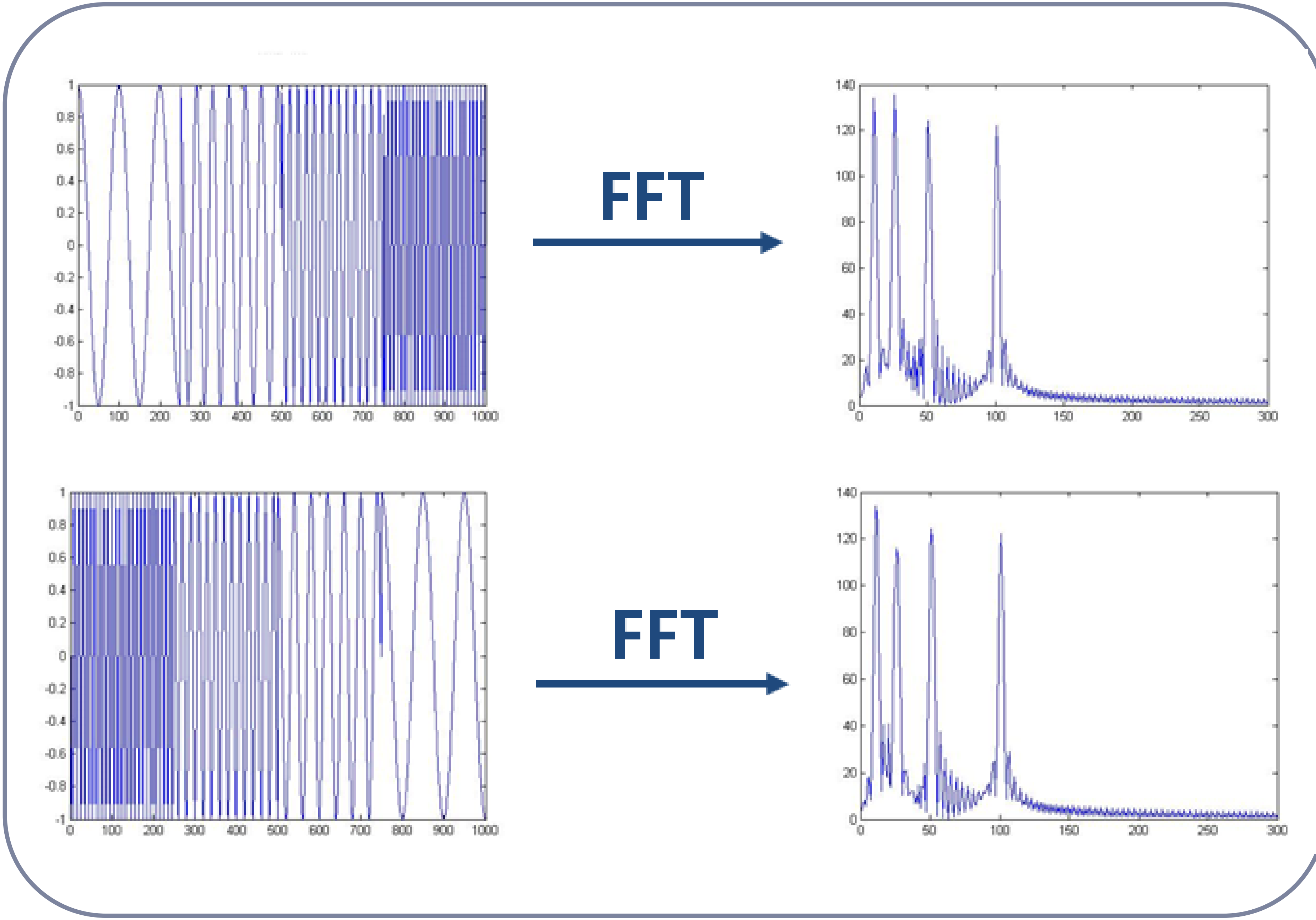


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

FFT



140
120
100
80
60
40
20
0
0
50
100
150
200
250
300

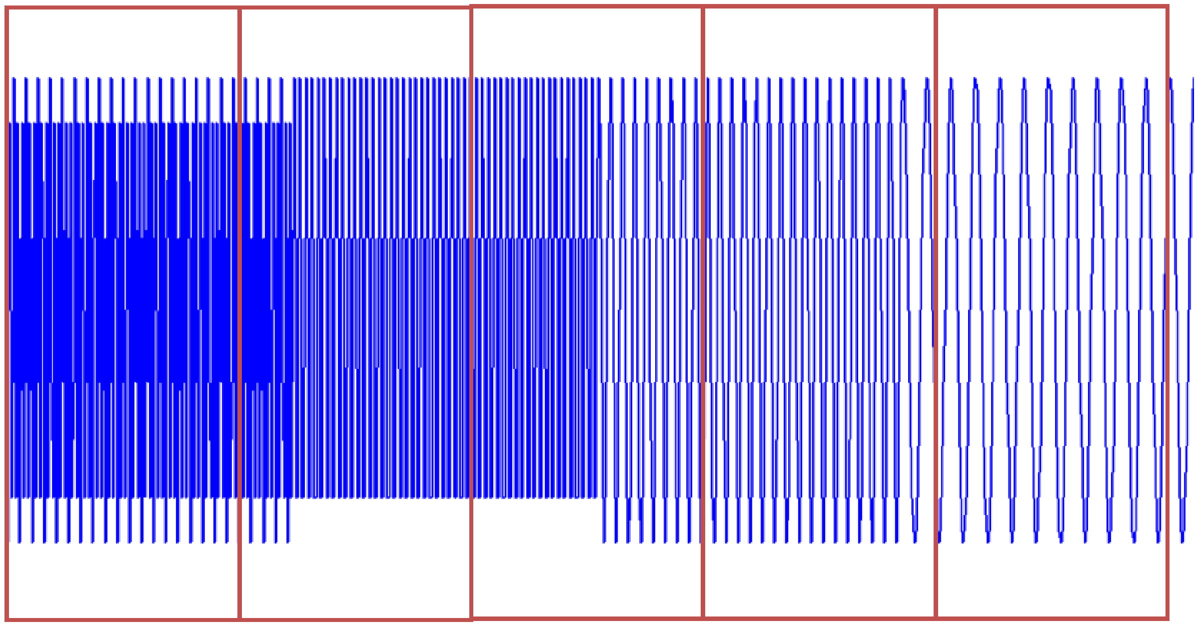

FFT
FFT

傅里叶变换

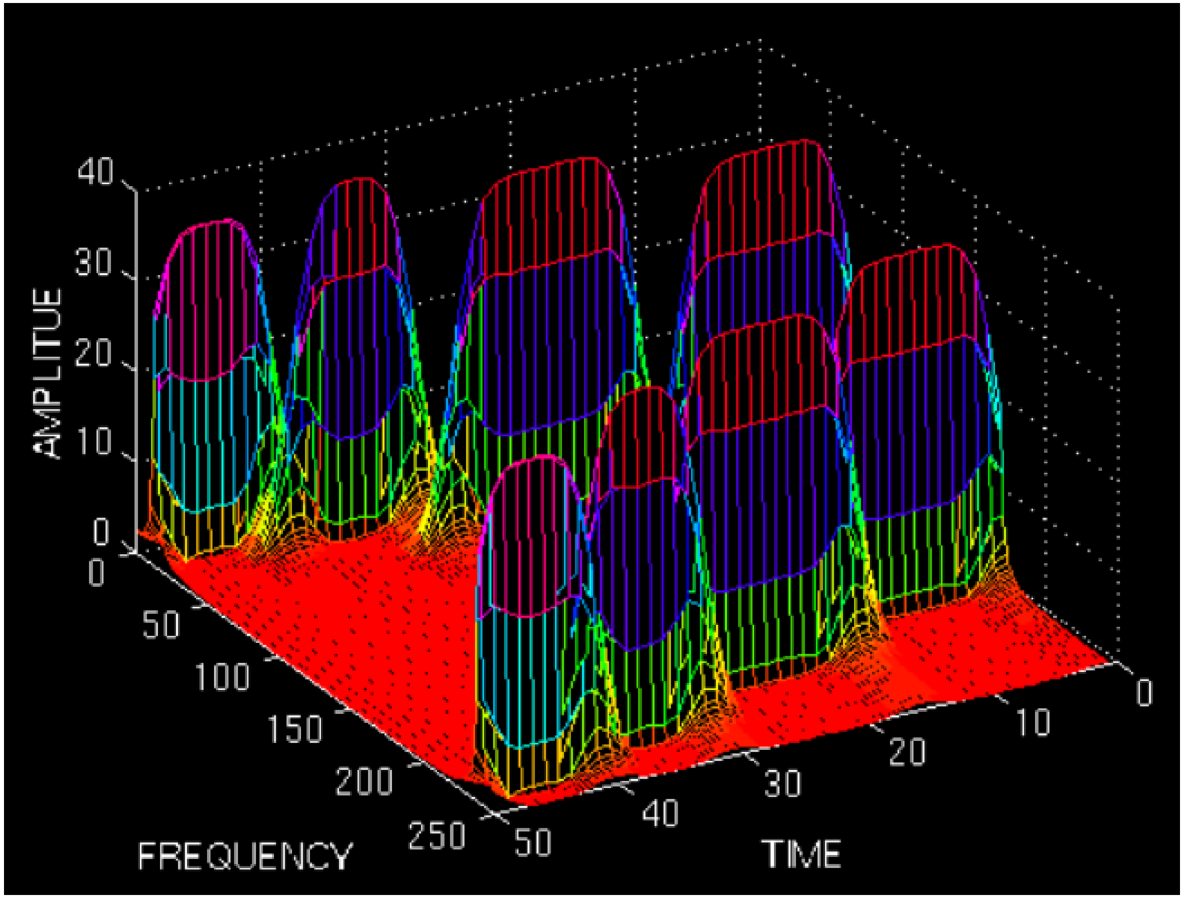
$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

- 任何一个频谱都是和所有的时间相关
- 只能给出包含的频谱成分
- 不能给出频谱出现的的时间
- 将信号分成若干段，每一段分别做傅里叶变换

加窗傅里叶变换



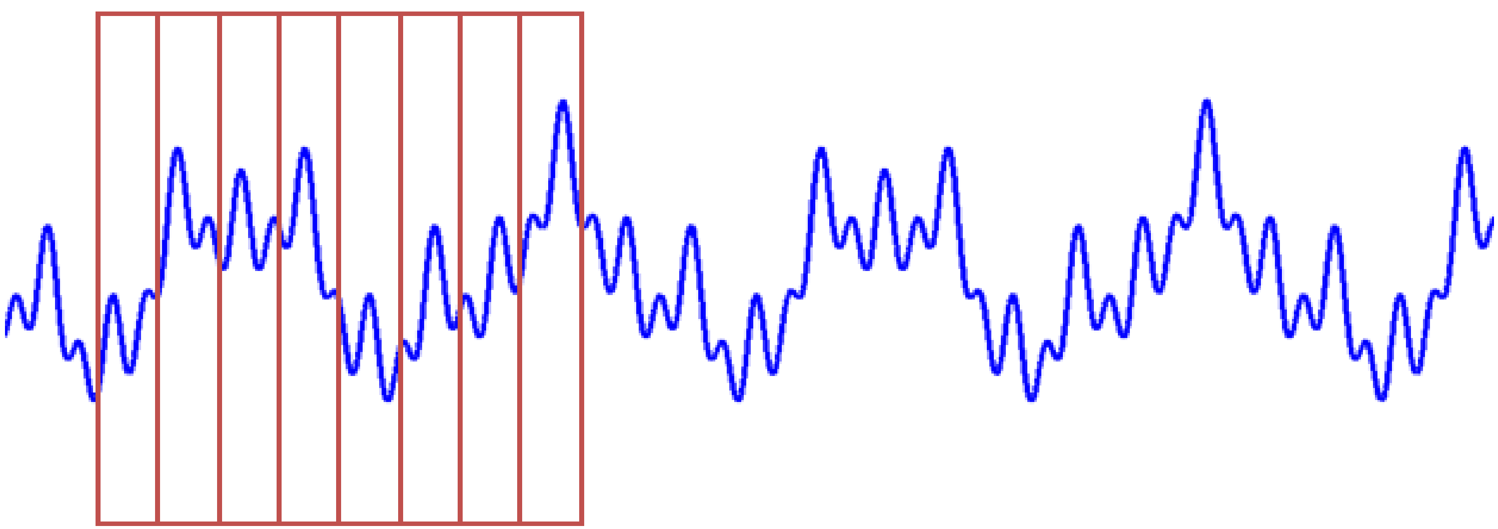
$$\hat{f}(\lambda,b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t-b)}e^{-i\lambda x}dt$$



40
30
20
10
0
AMPLITUE
0
50
100
150
200
250
FREQUENCY
0
10
20
30
40
50
TIME

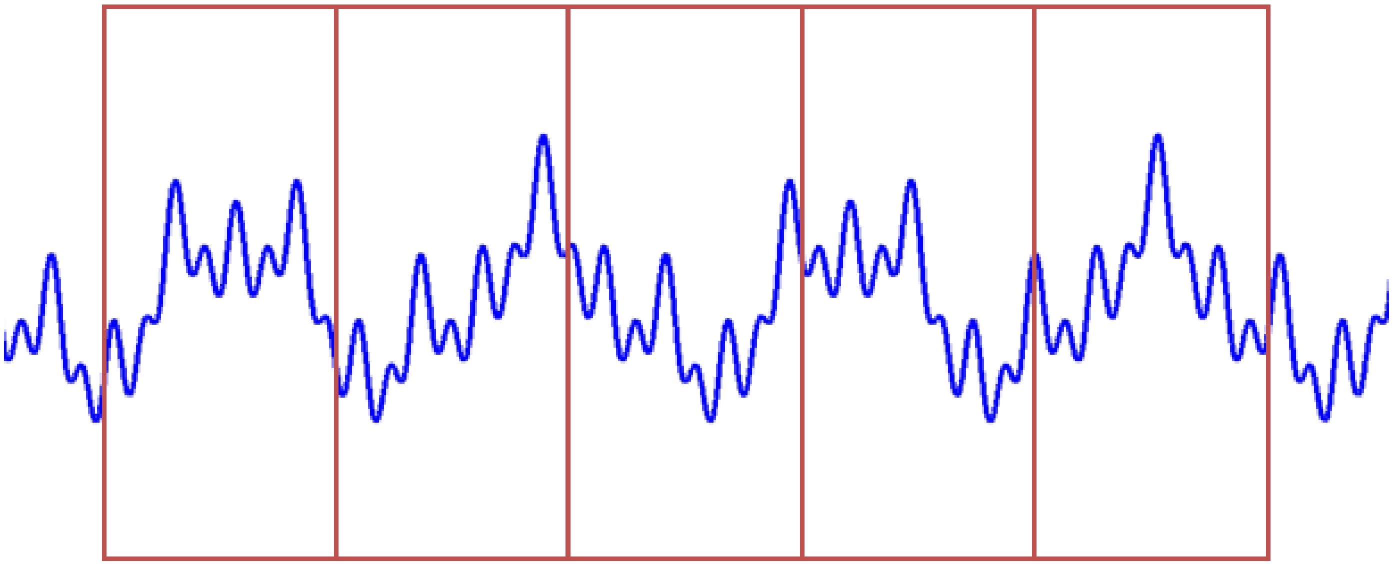
窗口大小？

- 窗太窄，窗内的信号太短，会导致频率分析不够精准，频率分辨率差。

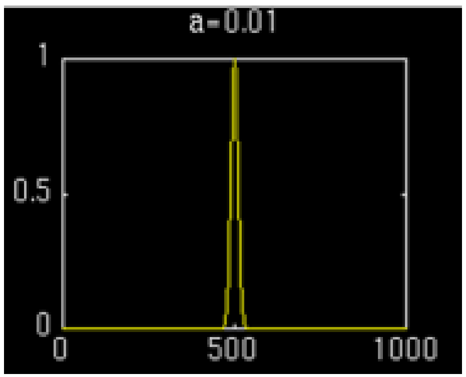


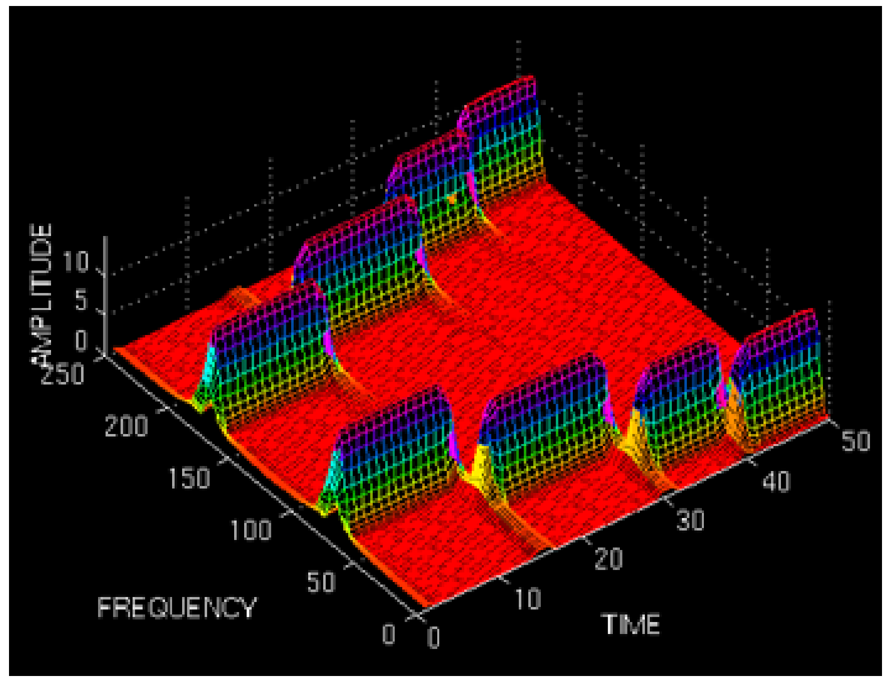
框太窄 → 频率分辨率差

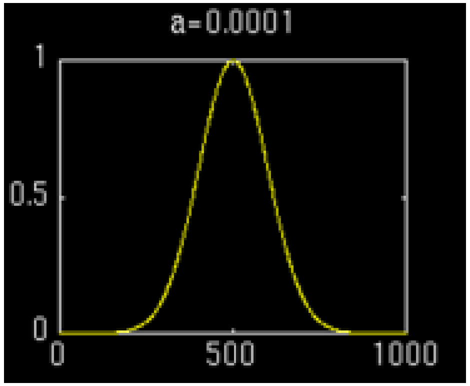
- 窗太宽，时域上又不够精细，时间分辨率低。

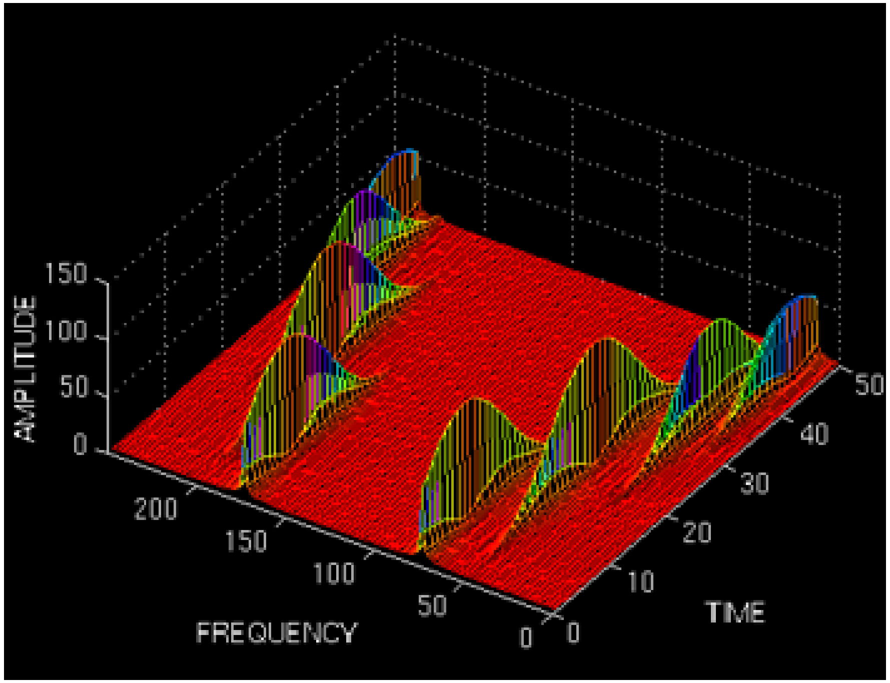


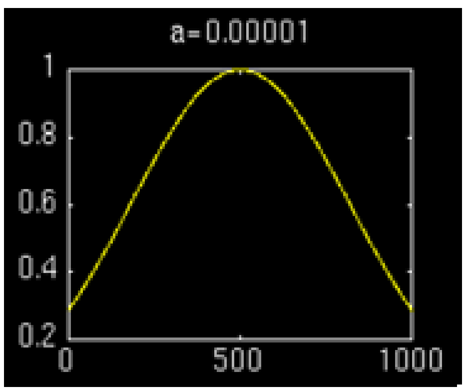
框太宽 → 时间分辨率差

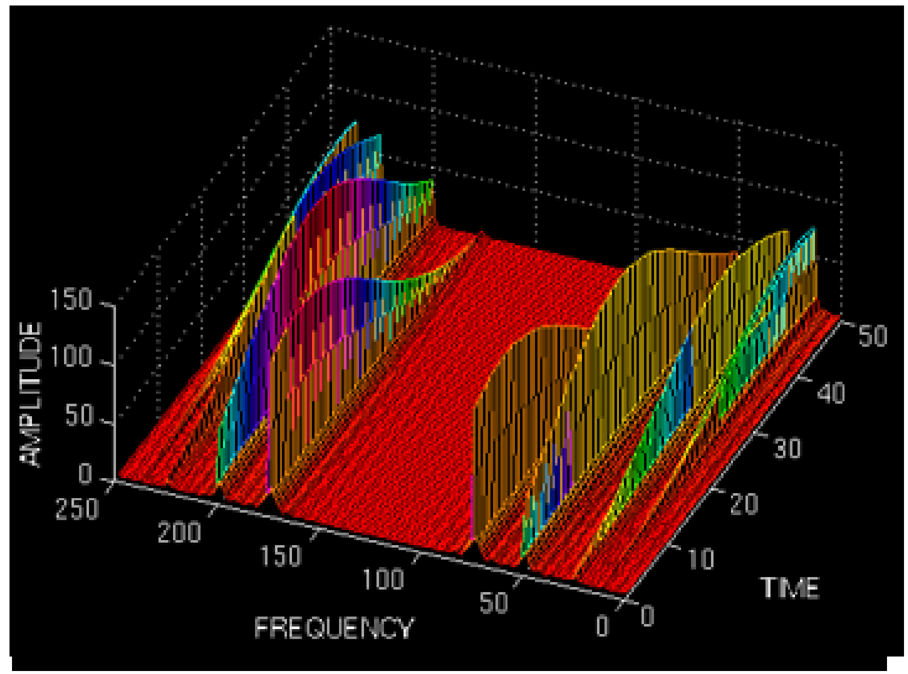

a=0.01
1
0.5
0
0
500
1000


AMPLITUDE
10
5
0
250
200
150
100
50
0
FREQUENCY
0
10
20
30
40
50
TIME


a=0.0001
1
0.5
0
0
500
1000


AMPLITUDE
150
100
50
0
FREQUENCY
200
150
100
50
0
TIME
0
10
20
30
40
50


a=0.00001
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
500
1000


AMPLITUDE
150
100
50
0
250
200
150
100
50
0
FREQUENCY
0
10
20
30
40
50
TIME

- 窄窗口时间分辨率高、频率分辨率低，
- 宽窗口时间分辨率低、频率分辨率高
- 高频适合小窗口，低频适合大窗口
  - 窗口傅里叶变换的窗口是固定的
  - 让窗口大小变起来，多做几次STFT
  - STFT做不到正交化，效率很低

小波变换

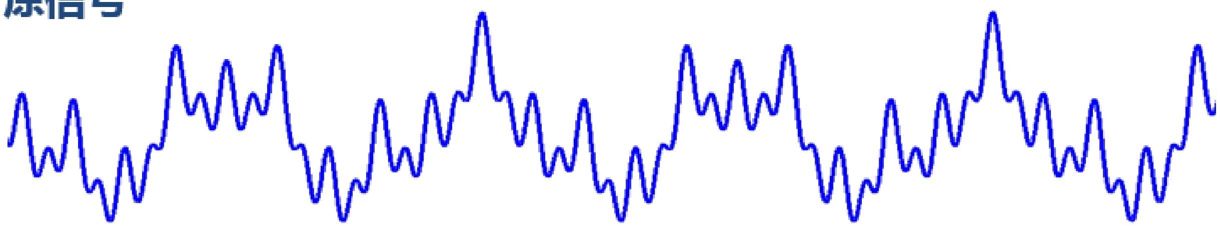
- STFT是给信号加窗，分段做FFT
- 无限长的三角函数基换成了有限长的会衰减的小波基
- 获取频率
- 定位到时间

傅里叶变换

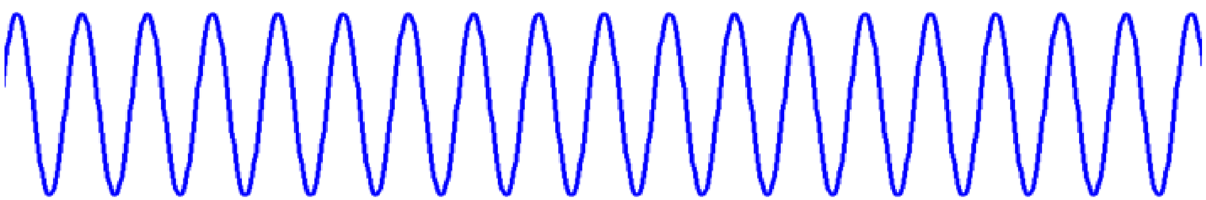
傅里叶变换

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * e^{-iwt} dt$$

原信号



基函数

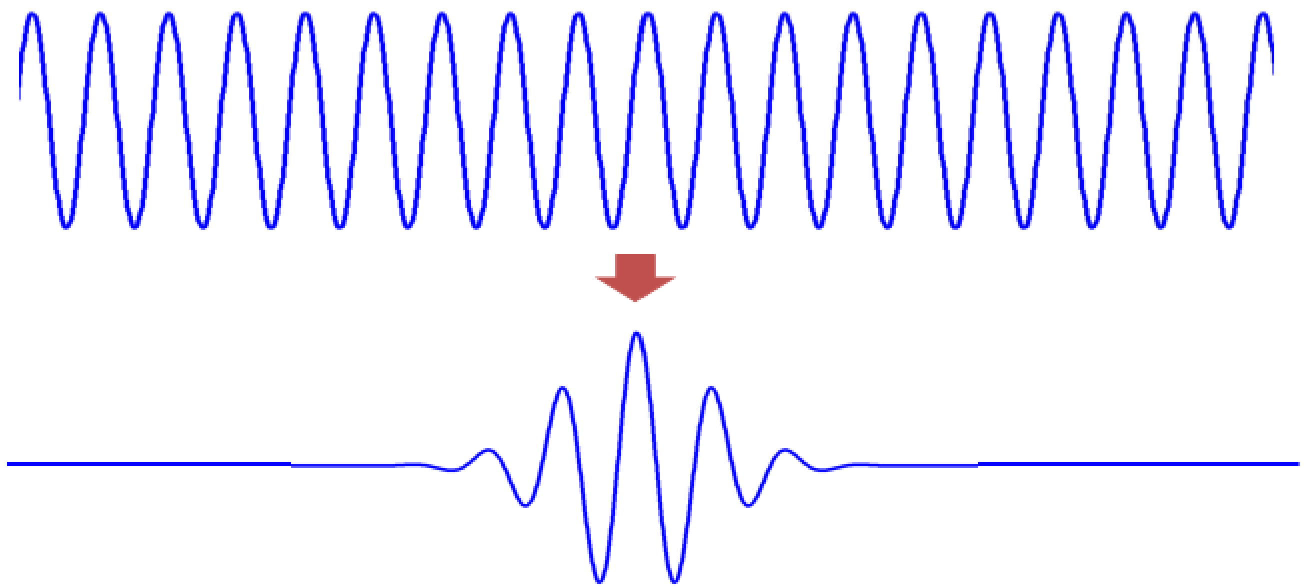


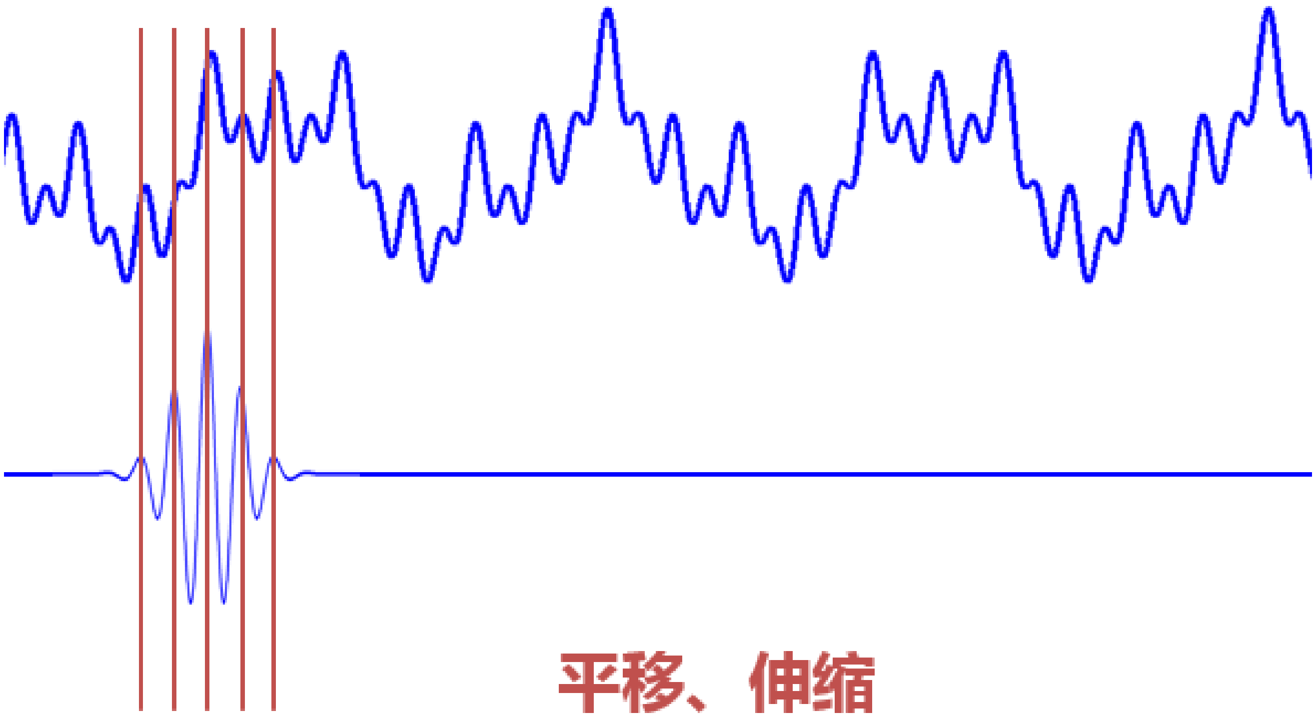
铺满了整个时域

小波变换

小波变换

$$F(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)*e^{-iwt}dt \quad \Rightarrow \quad WT(a,\tau)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)*\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)dt$$





平移、伸缩