

小波包

Xin Li (李新)

Email: lixustc@ustc.edu.cn

Phone: [0551-63607202](tel:0551-63607202)

A simple example

56	48	32	35
40	16	38	-3
8	48	16	
24	28	10	
48	8		
48	-8		
40	0		
16	12		

56	48	32	35
40	16	38	-3
8	48	16	13
24	28	10	3
48	8	0	3
48	-8	6	-3
40	0	8	1
16	12	-6	7

56	48	32	35
40	16	38	-3
8	48	16	13
24	28	10	3
48	8	0	3
48	-8	6	-3
40	0	8	1
16	12	-6	7

56	48	32	35
40	16	38	-3
8	48	16	13
24	28	10	3
48	8	0	3
48	-8	6	-3
40	0	8	1
16	12	-6	7

56	48	32	35
40	16	38	-3
8	48	16	13
24	28	10	3
48	8	0	3
48	-8	6	-3
40	0	8	1
16	12	-6	7

基本想法

- 小波变换只对信号的低频部分做分解，而对高频部分也即信号的细节部分不再继续分解，
- 小波变换能够很好地表征一大类以低频信息为主要成分的信号，但它不能很好地分解和表示包含大量细节信息（细小边缘或纹理）的信号，如非平稳机械振动信号、遥感图象、地震信号和生物医学信号等。
- **想法：**对高频部分提供更精细的分解，而且这种分解既无冗余，也无疏漏，所以对包含大量中、高频信息的信号能够进行更好的时频局部化分析。

想法

小波包分解：对信号高频部分的再分解

小波分解：

$$L^2 = \cdots \oplus W_{j-1} \oplus W_j \oplus W_{j+1} \cdots$$
$$\begin{array}{c} \swarrow H \quad \searrow G \\ U_{j,1} \oplus U_{j,2} \end{array}$$

定义



1/2

$$\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad \{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad g_n = (-1)^n h_{1-n}$$

$$\begin{cases} \phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k) \\ \psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2t - k) \end{cases}$$

记号

- 为便于表示小波包函数，引入以下新的记号：

$$\begin{cases} \mu_0(t) := \phi(t) \\ \mu_1(t) := \psi(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_0(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \mu_0(2t - k) \\ \mu_1(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \mu_0(2t - k) \end{cases}$$

定义

- 通过 μ_0, μ_1, h, g 在固定尺度下可定义一组称为小波包的函数。定义递推关系如下：
$$\begin{cases} \mu_{2n}(t) = \sum_k h_k \mu_n(2t - k) \\ \mu_{2n+1}(t) = \sum_k g_k \mu_n(2t - k) \end{cases}$$
- 由上式递归定义的函数 μ_n , $n=0, 1, 2, \dots$ 称为由正交尺度函数确定的小波包。

性质

- 双尺度关系

$$\begin{cases} H(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\lambda} \\ G(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{-ik\lambda} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\mu}_{2n}(\lambda) = H\left(\frac{\lambda}{2}\right) \hat{\mu}_n\left(\frac{\lambda}{2}\right) \\ \hat{\mu}_{2n+1}(\lambda) = G\left(\frac{\lambda}{2}\right) \hat{\mu}_n\left(\frac{\lambda}{2}\right) \end{cases}$$

性质

- 平移正交性：

$$\langle \mu_n(t-j), \mu_n(t-k) \rangle = \delta_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}$$

性质

- μ_{2n} 与 μ_{2n+1} 之间具有正交性：

$$\langle \mu_{2n}(t-j), \mu_{2n+1}(t-k) \rangle = \delta_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}$$

性质

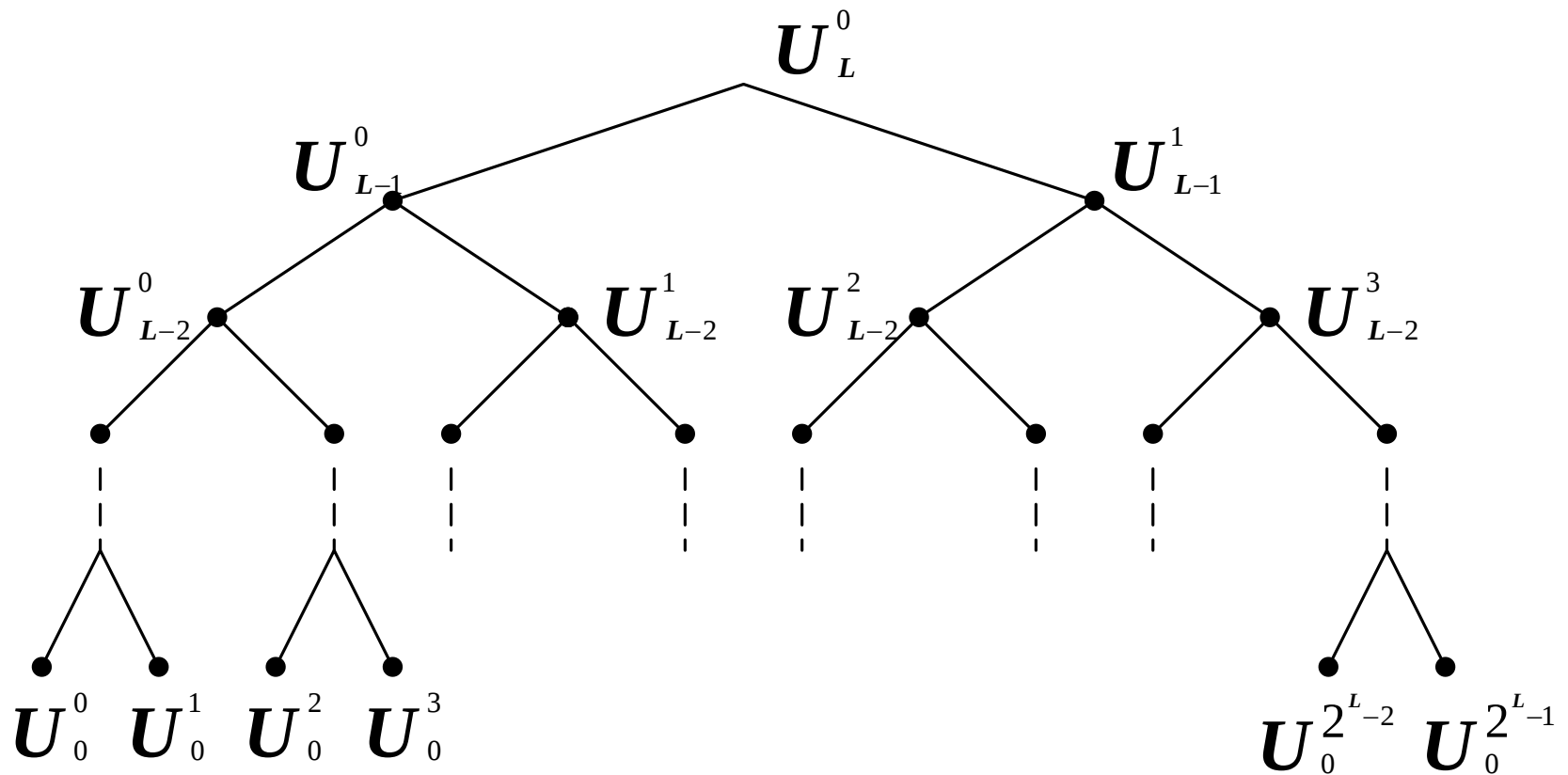
- 小波包平移系 $\{\mu_n(t-k), n \in \mathbb{Z}_+, k \in \mathbb{Z}\}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组规范正交基。

小波包的分解

- 小波多分辨分析中：

$$L^2(R) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j, W_j = \text{span}\{\psi_{j,k}(t)\}$$

- 随着j的增大，相应小波基函数的空间局部性越好即空间分辨率越高，而其频谱的局部性变得越差即频谱分辨率越粗。



- 记 $U_j^n = \text{span}\{2^{j/2} \mu_n(2^j t - k), k \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{cases} U_j^0 = V_j, j \in \mathbb{Z} \\ U_j^1 = W_j, j \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, j \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} U_{j+1}^0 &= U_j^0 \oplus U_j^1, j \in \mathbb{Z} \\ U_{j+1}^n &= U_j^{2n} \oplus U_j^{2n+1}, j \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

于是对每个 $j = 1, 2, \dots$, 有

$$\begin{aligned}
 W_j &= U_{j-1}^2 \oplus U_{j-1}^3 \\
 &= U_{j-1}^4 \oplus U_{j-1}^5 \oplus U_{j-1}^6 \oplus U_{j-1}^7 \\
 &= \dots \\
 &= U_{j-k}^{2^k} \oplus U_{j-k}^{2^k+1} \oplus \dots \oplus U_{j-k}^{2^{k+1}-1} \\
 &= \dots \\
 &= U_0^{2^j} \oplus U_0^{2^j+1} \oplus \dots \oplus U_0^{2^{j+1}-1}
 \end{aligned}$$

分解

- 且对给定的 $m = 0, \dots, 2^k - 1, k = 1, \dots, j$ 以及函数系 $\left\{ 2^{\frac{j-k}{2}} \mu_{2^k+m} (2^{j-k} t - l), l \in \mathbb{Z} \right\}$ 是空间 $U_{j-k}^{2^k+m}$

的一组规范正交基。

小波包具有划分较高频率频带的能力，可得到比较好的频率局部化。

分解重构算法

- 若已知 $f(t)$ 在子空间 U_{j+1}^n 上的小波包系数是

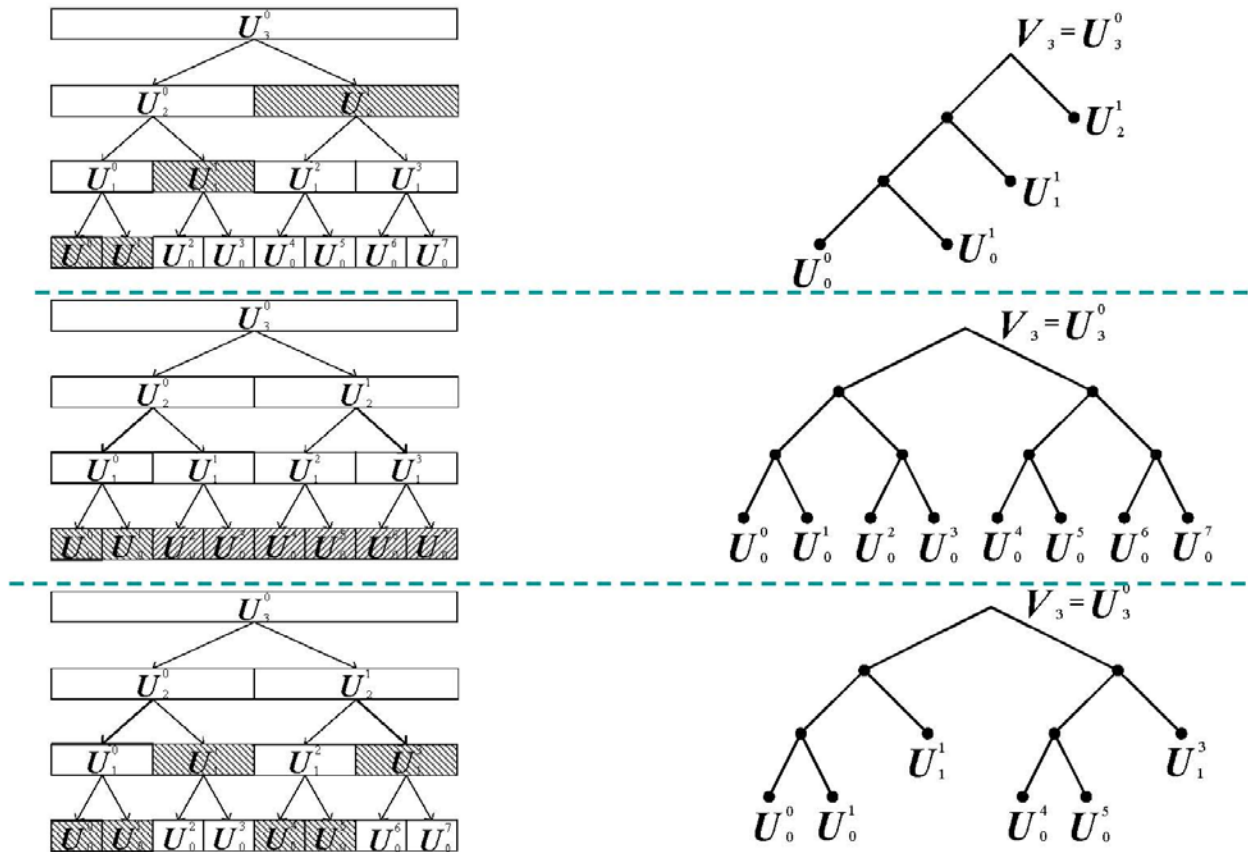
$$d_{j+1}^n[k] = \left\langle f(t), 2^{(j+1)/2} \mu_n(2^{j+1}t - k) \right\rangle$$

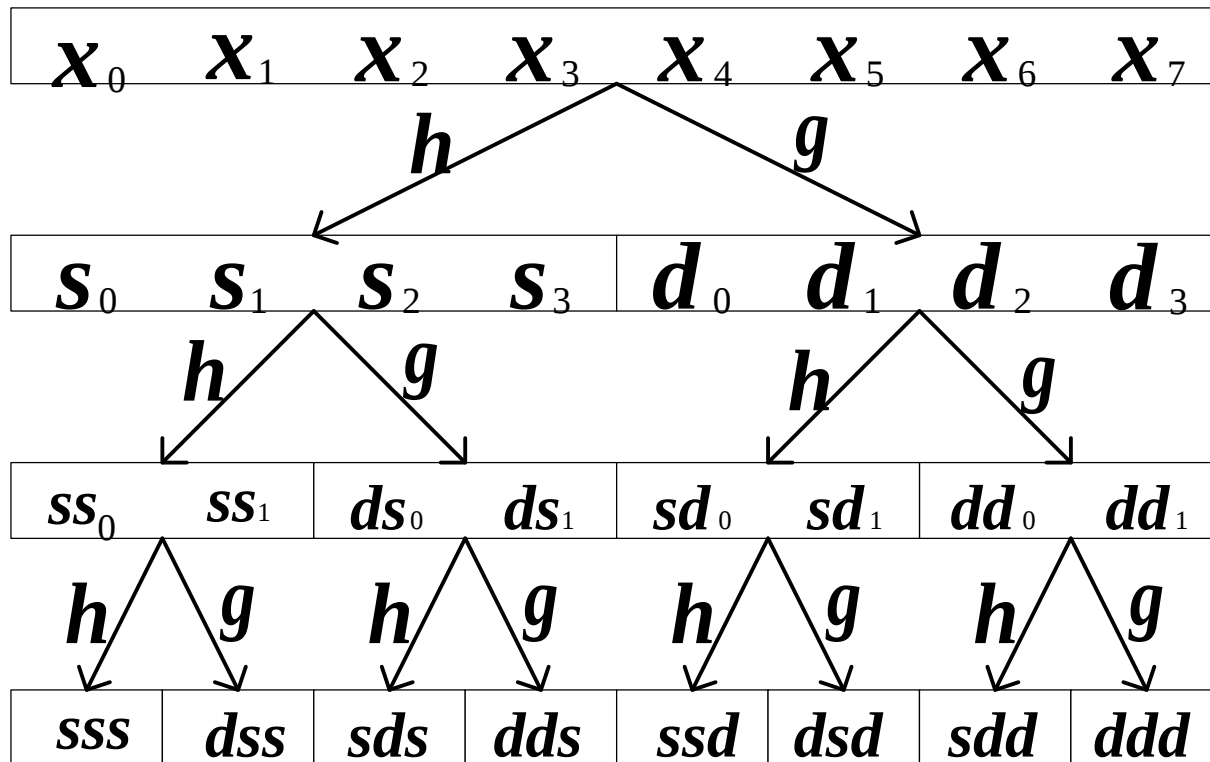
分解重构算法

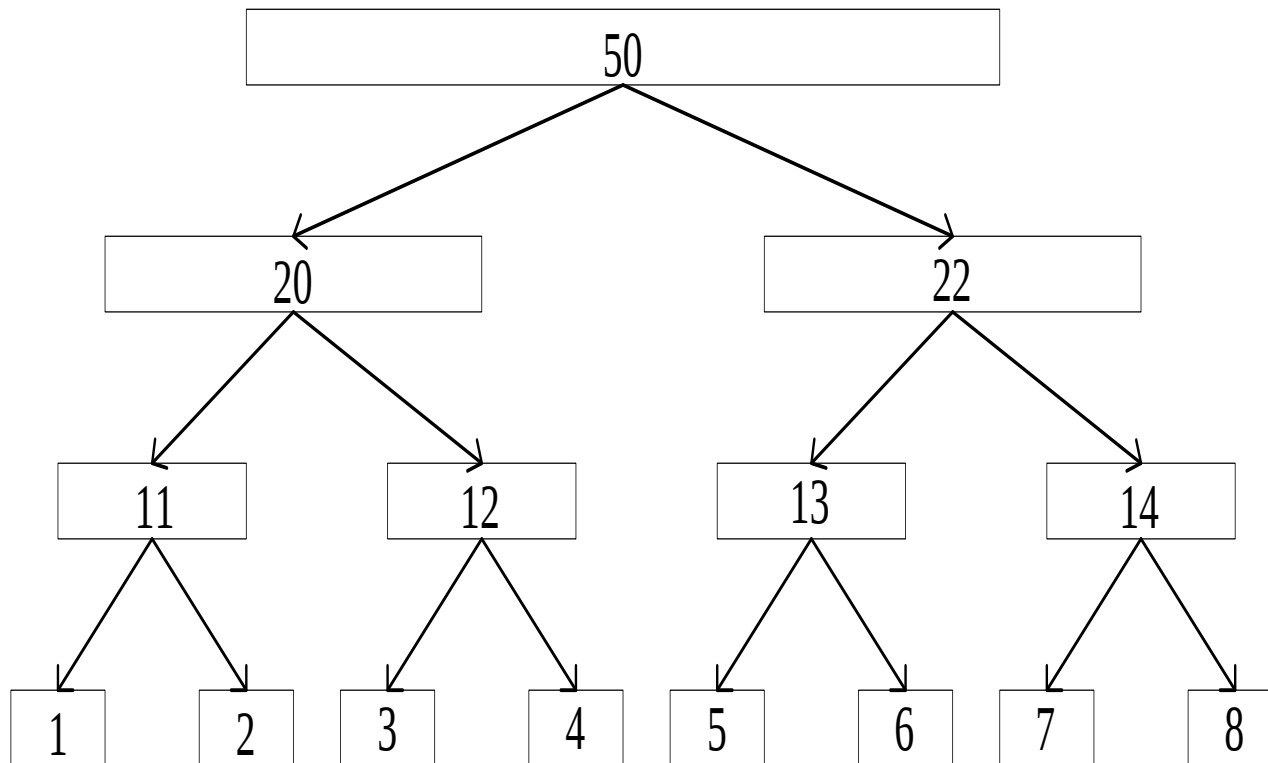
$$\begin{cases} d_j^{2n}[k] = 2^{-1/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{l-2k} d_{j+1}^n[l] \\ d_j^{2n+1}[k] = 2^{-1/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{g}_{l-2k} d_{j+1}^n[l] \end{cases}$$

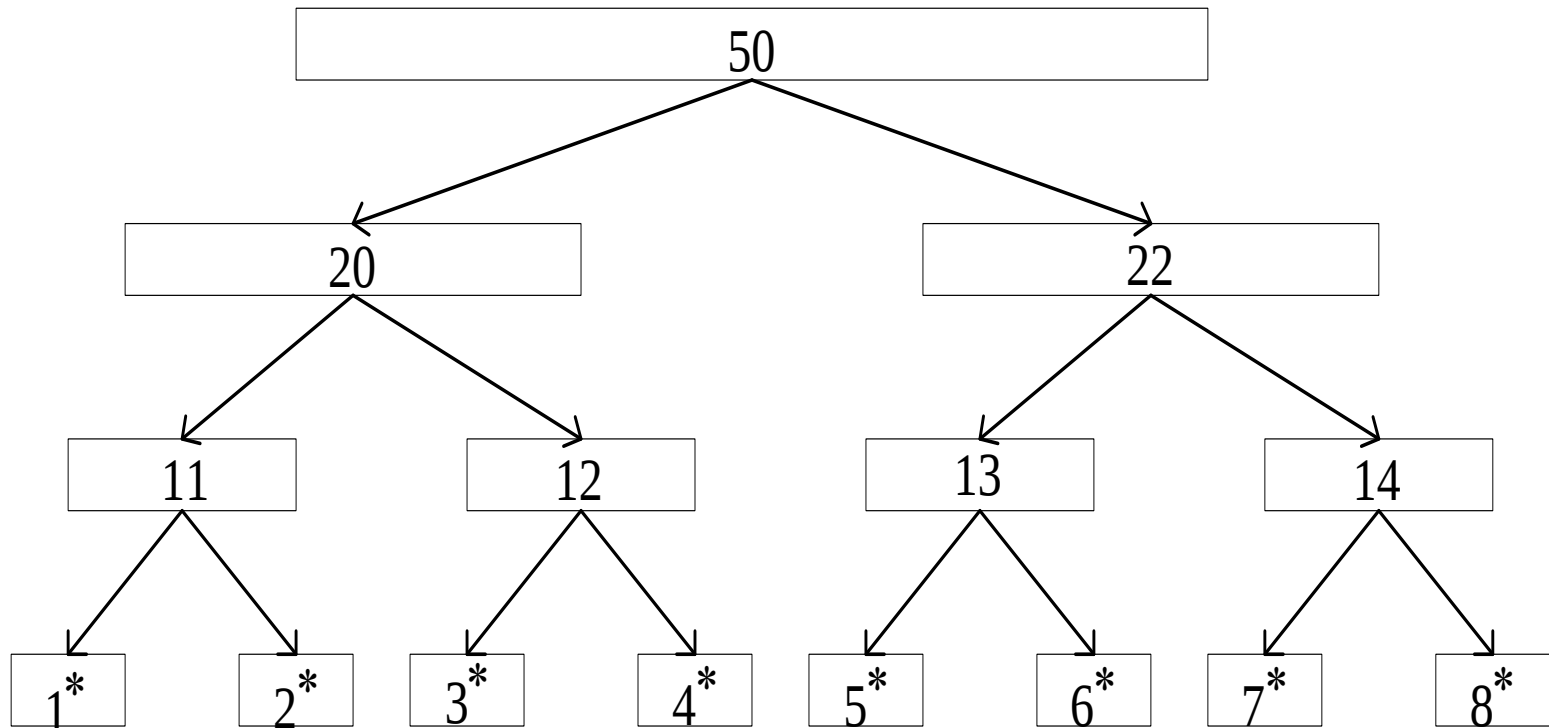
$$d_{j+1}^n[k] = 2^{-1/2} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{k-2l} d_j^{2n}[l] + \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{k-2l} d_j^{2n+1}[l] \right)$$

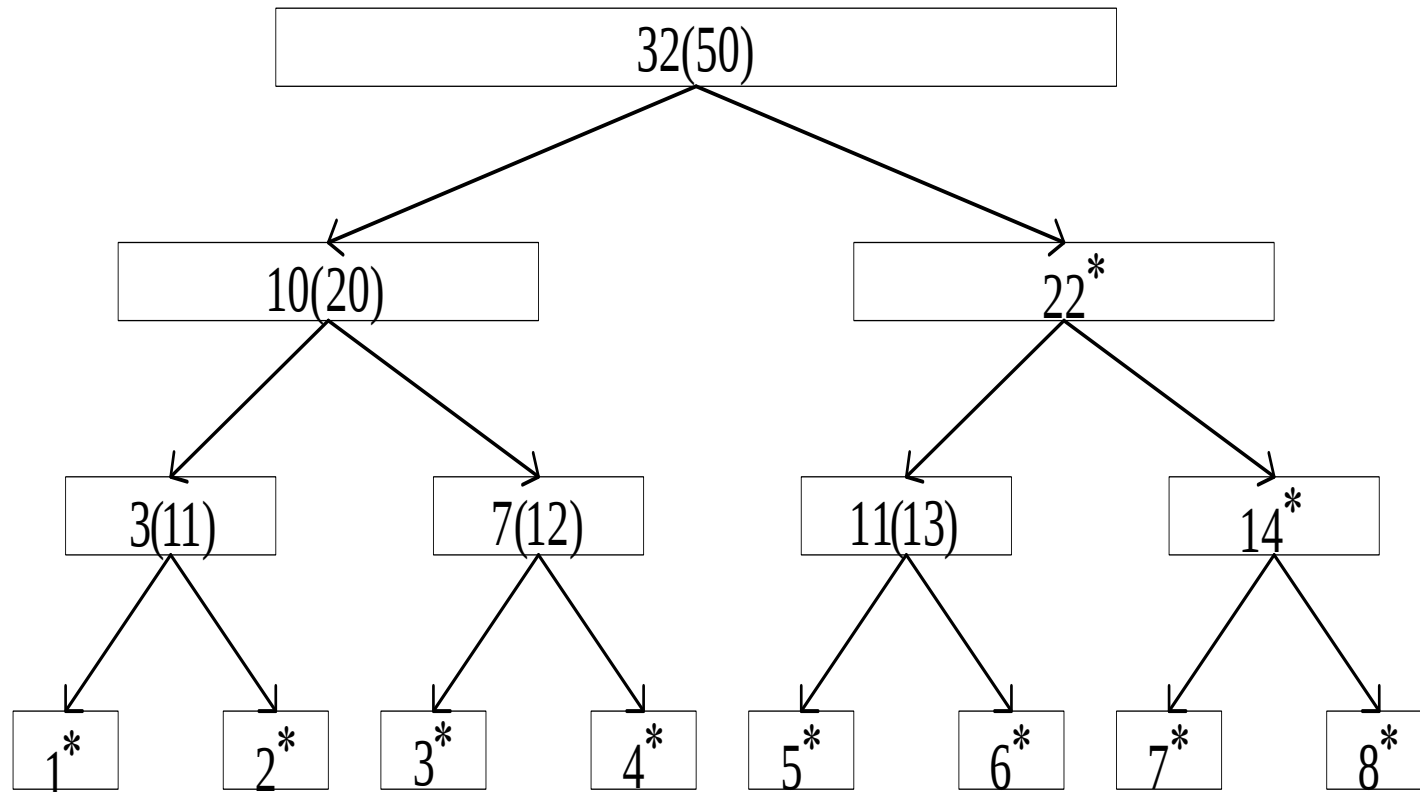
最佳小波包基的选取

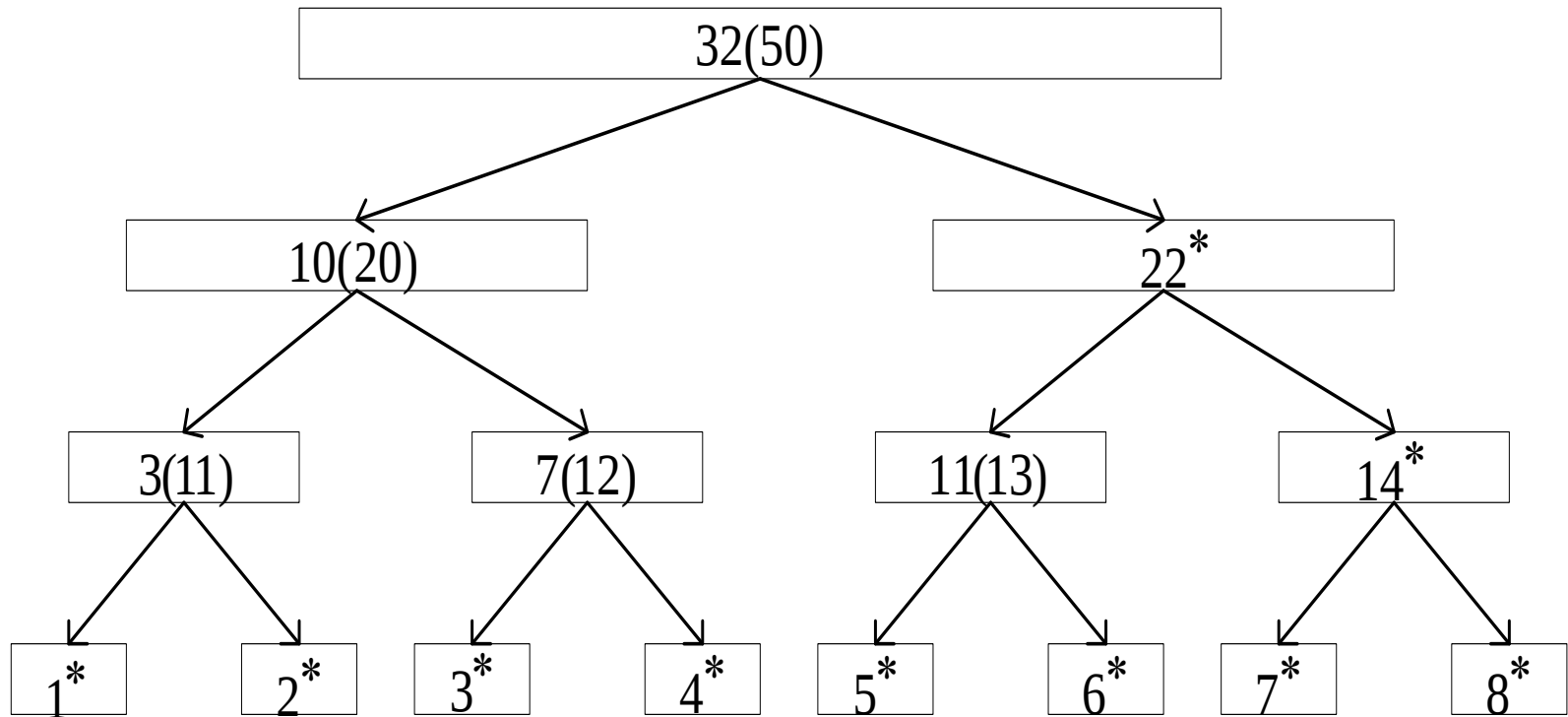


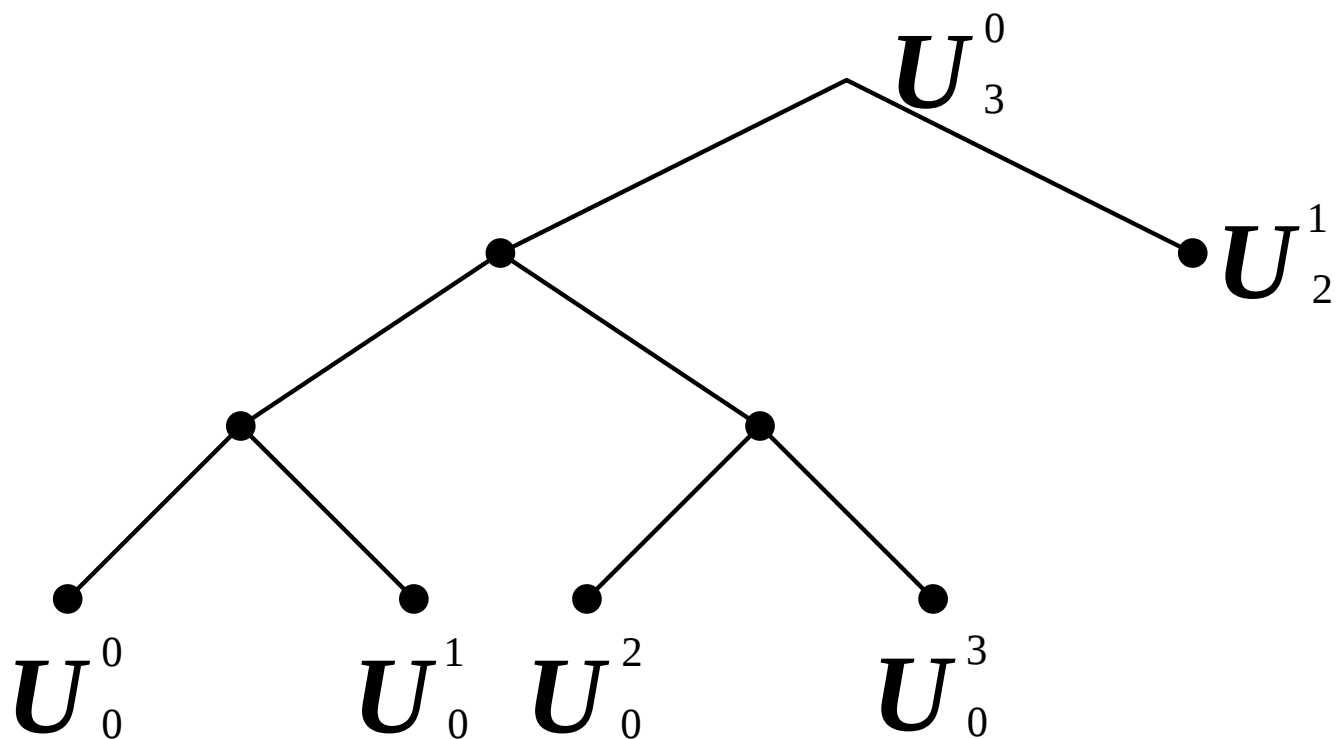












总结

- 最佳基的搜索方法如下：
 - 搜索构成最佳基的节点；
 - 抽取离根最近的最佳基节点中的小波包系数。
- 如果小波包分解采用深度优先顺序，则最佳基节点的标记过程可以在计算节点中小波包系数的同时完成。
- 由于小波包树具有有限深度，所以以深度优先的搜索算法可在有限步终止。

56	48	32	35
40	16	38	-3
8	48	16	13
24	28	10	3
48	8	0	3
48	-8	6	-3
40	0	8	1
16	12	-6	7

55	48	35	35
41	22	35	0
15	48	13	13
29	22	13	0
41	7	0	0
55	-7	0	0
29	-7	7	0
15	7	-7	7

A simple example

56	48	32	35
40	16	38	-3
8	48	16	
24	28	10	
48	8		
48	-8		
40	0		
16	12		

51	51	35	35
51	19	35	0
19	35	16	
19	35	0	
35	0		
35	0		
47	0		
23	12		

