部分习题参考答案

习题 1 部分解答

2. $\pi(\lambda_1|3)=0.2457$; $\pi(\lambda_2|3)=0.7543$, 其中 $\lambda_1=1.0$; $\lambda_2=1.5$.

4. 将前一步中的后验作为下一步的先验，按后验密度的公式易求.

6 (1) $\pi(\theta|12)=\begin{cases}1, & 11.5<\theta<12.5,\\ 0, & \text{其它};\end{cases}$

(2) $\pi(\theta|\boldsymbol{x})=\begin{cases}10, & 11.5<\theta<11.6,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ 其中 $\boldsymbol{x}=(11.1,\cdots,12)$

8. θ 的后验分布为：$\pi(\theta|\boldsymbol{x})=420\,\theta(1-\theta)^{19}$ $(0<\theta<1)$, 其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_{20})$, x_i 为 0-1 变量, $\sum\limits_{i=1}^{20}x_i=1$.

10. 提示：由于

$$1=\int_{\mathscr{X}}f_\theta(x)dx=C(\theta)\int_{\mathscr{X}}\exp\Big\{\sum_{j=1}^{k}\theta_jT_j(x)\Big\}h(x)dx\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{C(\theta)}=\int_{\mathscr{X}}\exp\Big\{\sum_{j=1}^{k}\theta_jT_j(x)\Big\}h(x)dx.$$

将上式两边对变量 θ 分别求一阶和二阶导数，整理易证。

12. 从定义出发证明条件概率与参数 θ 无关. 用因子分解定理很简单，只要注意 $h(\boldsymbol{x})=1\Big/\prod\limits_{i=1}^{n}x_i$.

14. 提示：令 $T(\boldsymbol{X})=(X_{(1)},X_{(n)})$, 注意到

$$f(\boldsymbol{x},\theta)=\begin{cases}1 & \theta-\frac{1}{2}<x_{(1)}\leqslant x_{(n)}<\theta+\frac{1}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

用因子分解定理易证.

16. 用因子分解定理易证 T 是充分统计量，将 $f(\boldsymbol{x},\theta)$ 表示成指数族的自然形式，利用定理 1.4.2 易证 T 为完全统计量.

18. 令

$$\overline{Z}=\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{m}X_i+\sum_{j=1}^{n}Y_j\right),\quad S^2=\frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\overline{Y})^2\right]$$

则 $\overline{Z}$ 和 S^2 分别为 a 和 σ^2 的 UMVUE.

20. $\hat{\theta}=\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 为 θ 的 UMVUE.

22. 令 $T(\boldsymbol{X})=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$, 则所求问题的检验水平为 α 的检验函数为

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & \text{当 } T(\boldsymbol{x})<\sigma_0^2\chi_{n-1}(1-\alpha/2), \text{ 或 } T(\boldsymbol{x})>\sigma_0^2\chi_{n-1}(\alpha/2),\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

其中 $\chi_{n-1}(\alpha)$ 为自由度 $n-1$ 的卡方分布的上侧 α 分位数.

24. 令 $T(\boldsymbol{X})=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, 则所求问题的检验水平为 α 的检验函数为

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1 & \text{当 } T(\boldsymbol{x})<\dfrac{1}{2\lambda_0}\chi_{2n}(1-\alpha/2), \text{ 或 } T(\boldsymbol{x})>\dfrac{1}{2\lambda_0}\chi_{2n}(\alpha/2),\\ 0 & \text{其它},\end{cases}$$

其中 $\chi_{2n}(\alpha)$ 为自由度 $2n$ 的卡方分布的上侧 α 分位数.

习题 2 部分解答

2. 类似于 2.2.2 节中的 “相对似然法”，可求先验密度.

4. 类似于例 2.2.3 中利用先验分布的分位数确定超参数的方法，可求得结果.

6. 先验分布为 $\Gamma(20,2)$.

8. $m(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}\left[\dfrac{\lambda^r\,\Gamma(x_i+r)}{\Gamma(r)\,x_i!\,(\lambda+1)^{x_i+r}}\right]$.

10. 类似例 2.3.3 中利用边缘密度选择先验分布的矩方法，可证得结果.

12 (2) 刻度参数族，$\pi(\beta)=1/\beta$;

(4) x_0 为刻度参数，$\pi(x_0)=1/x_0,\ 0<x_0<x$.

13 (2) $\pi(\theta)\propto 1/[\theta(1-\theta)^{\frac{1}{2}}]\quad(0<\theta<1)$.

(4) $\pi(\lambda)\propto 1/\lambda,\ \lambda>0$.

14. 提示：求出 Fisher 信息阵，Jeffreys 先验是 Fisher 信息阵的平方根.

16. 提示：用类似于第 2.4.2 和 2.4.3 节中的证明方法.

18. 令 p 的先验分布为 $Be(a,b)$, 则后验分布为 $Be(x+a,x-k+b)$, 它们是同一分布族.

20. 提示：求出后验分布，说明它和先验分布是同一分布族.

22. 易求得 θ 的后验分布是 $(\alpha+n)\theta_1^{\alpha+n}/\theta^{\alpha+n+1},\ \theta>\theta_1=\max\{\theta_0,x_{(n)}\}$, 显然它与先验分布是同一分布族.

24. 提示：用类似于例 2.6.3 的方法，注意令

$$g_1(\theta)=I_{(a,z)}(\theta),\ g_2(\theta)=I_{(z,b)}(\theta),$$

则约束条件为：$E^\pi(g_1(\theta) = E^\pi(\theta) = 1/2$.

26. 其分层贝叶斯模型为

$$\begin{cases} \text{样本分布：}\ X_i|\theta_i \sim N(\theta_i, 30^2) \quad (i=1,\cdots,n) \\ \theta_i|\boldsymbol{\lambda} \sim N(\mu, \tau^2) \quad (i=1,\cdots,n), \quad \boldsymbol{\lambda} = (\mu, \tau^2) \\ \mu \sim N(100, 20^2),\ \pi(\tau^2) \equiv 1, \quad \mu,\ \tau^2 \text{ 的先验分布独立.} \end{cases}$$

习题 3 部分解答

2. θ 的后验分布为 $N(174.05, 1.265)$.

4 (2). $n \geqslant 36$.

6. $\pi(\theta_1, \theta_2, |\boldsymbol{x}) = \pi_1(\theta_1|\theta_2, \boldsymbol{x})\pi_2(\theta_2|\boldsymbol{x})$, 其中 $\pi_1(\theta_1|\theta_2, \boldsymbol{x})$ 为 $N\Big(\dfrac{n}{n+1}\bar{x}, \dfrac{1}{2(n+1)\theta_2}\Big)$,

$\pi_2(\theta_2|\boldsymbol{x})$ 为 $\Gamma(n/2+\alpha, D)$, $D = \lambda + \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \dfrac{n}{n+1}\bar{x}^2$.

8. θ 的后验分布为 $Be(5, 297)$.

10 (1) 做一次观测时 θ 的后验分布为 $Be(2,3)$;

(2) 做三次观测时 θ 的后验分布为 $Be(4,8)$.

12. 提示：类似定理 3.3.1 (2) 的证明.

14. θ 的后验分布为 $\Gamma(13/3, 37/3)$.

16 (1). λ 的先验分布为 $\Gamma(4, 20000)$; (2). λ 的后验分布为 $\Gamma(n+4, n\bar{x}+20000)$.

18. 提示：类似定理 3.5.2 (2) 的证明.

20. θ 的后验分布为 $\Gamma^{-1}(\alpha+1, \beta+x^r)$.

22. 提示：类似定理 3.2.1 (3) 的证明.

24. 提示：按后验密度的计算公式可求得 $\boldsymbol{\theta}$ 的后验密度为

$$\pi(\boldsymbol{\theta})|\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}}|\Sigma_*|^{-\frac{1}{2}} \exp\Big\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{t})^T\Sigma_*^{-1}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{t})\Big\},$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}_* = (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \boldsymbol{A}^{-1})^{-1}$, $\boldsymbol{t} = \big(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \boldsymbol{A}^{-1}\big)^{-1}\big(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mu}\big)$. 对 $\boldsymbol{t}$ 的表达式加以整理可证得所要结果.

习题 4 部分解答

1. 习题 3 中下列各题后验期望估计、相应的后验方差如下：

9 (2). $\mu^\pi(x) = \dfrac{1+\alpha}{\alpha+\beta+x}$, $V^\pi(x) = \dfrac{(1+\alpha)(x+\beta-1)}{(\alpha+\beta+x)^2(\alpha+\beta+x+1)}$.

15. $\mu^\pi(x) = \bar{x}$, $V^\pi(x) = \bar{x}/n \quad (n\bar{x} > 0)$.

17. $\mu^\pi(x) = \dfrac{n\bar{x}+\beta}{nr+\alpha-1}$, $V^\pi(x) = \dfrac{(n\bar{x}+\beta)^2}{(nr+\alpha-1)^2(nr+\alpha-2)}$, $nr+\alpha > 2$.

19. $\mu^\pi(x)=\dfrac{x+\beta}{n+2\alpha-2},\ V^\pi(x)=\dfrac{2(x+\beta)^2}{(n+2\alpha-2)(n+2\alpha-4)},\ \dfrac{n}{2}+\alpha>2.$

21 (2). $\mu^\pi(x)=\dfrac{B_m}{m-2},\quad V^\pi(x)=\dfrac{2B_m^2}{(m-2)^2(m-4)},\ m>4,$

$$B_m=\sum_{i=1}^m(x_i-\bar{x})^2+\frac{mk(\bar{x}-\mu)^2}{m+k}.$$

22 (3). $\mu^\pi(x)=\bar{x},\quad V^\pi(x)=\dfrac{(m+r-1)\tau_m^2}{m+r-3},\quad m+r-3>0,$

$$\tau_m^2=\frac{1}{m(m+r-1)}\left[\sum_{i=1}^m(x_i-\bar{x})^2+\lambda\right].$$

23 (3). $\mu^\pi(x)=\dfrac{\mu+n\tau\bar{x}}{1+n\tau},\quad V^\pi(x)=\dfrac{2\tau\tilde{\beta}}{(n+2\alpha-2)(1+n\tau)},$

$$\tilde{\beta}=\beta+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2+\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2(1+n\tau)}.$$

2. 习题 3 中下列各题后验众数估计、后验均方误差如下：

12. $\hat{\theta}_{MD}=\dfrac{nr+\alpha-1}{\alpha+\beta+n\bar{x}-2},$

$$PMSE(\hat{\theta}_{MD})=\frac{(nr+\alpha)(n\bar{x}-nr+\beta)}{(\alpha+\beta+n\bar{x})^2(\alpha+\beta+n\bar{x}+1)}+\frac{\big[\beta-\alpha+n(\bar{x}-2r)\big]^2}{(\alpha+\beta+n\bar{x})^2(\alpha+\beta+n\bar{x}-2)^2}$$

16. $\hat{\theta}_{MD}=\dfrac{n+3}{n\bar{x}+20000},\quad PMSE(\hat{\theta}_{MD})=\dfrac{n+5}{(n\bar{x}+20000)^2}.$

18. $\hat{\theta}_{MD}=\hat{\theta}_1=\max\{\theta_0,X_{(n)}/2\},\ PMSE(\hat{\theta}_{MD})=\dfrac{2\theta_1^2}{(\alpha+n-1)^2(\alpha+n-2)}.$

21 (3). $\hat{\theta}_{MD}=\dfrac{m\bar{x}+k\mu}{m+k},$

$$PMSE(\hat{\theta}_{MD})=\frac{1}{(m-2)(m+k)}\left[\sum_{i=1}^m(x_i-\bar{x})^2+\frac{mk(\bar{x}-\mu)^2}{m+k}\right].$$

23 (3). $\hat{\theta}_{MD}=\mu^\pi(x)=\dfrac{\mu+n\tau\bar{x}}{1+n\tau},\quad PMSE(\hat{\theta}_{MD})=V^\pi(x)=\dfrac{2\tau\tilde{\beta}}{(n+2\alpha-2)(1+n\tau)},$

$$\tilde{\beta}=\beta+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2+\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2(1+n\tau)}.$$

24. 由于 θ 的后验分布为 p 元正态分布，是对称分布，故后验众数估计与后验期望估计相同，因此有

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MD}=\big(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\big)^{-1}\big(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mu}\big)=\mathbf{X}-\boldsymbol{\Sigma}\big(\boldsymbol{\Sigma}+\boldsymbol{A}\big)^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}),$$

后验协方差阵为 $\big(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\big)^{-1}$.

3. 习题 3 中下列各题后验中位数估计、后验均方误差 (协方差阵) 如下：

18. $\hat{\theta}_{Me}=\theta_1\sqrt[\alpha+n]{2},\ \theta_1=\max\{\theta_0,X_{(n)}/2\},$

$$PMSE(\hat{\theta}_{Me})=\frac{(\alpha+n)\theta_1^2}{(\alpha+n-1)^2(\alpha+n-2)}+\left[\frac{(\alpha+n)\theta_1}{\alpha+n-1}-\theta_1\sqrt[\alpha+n]{2}\right]^2.$$

21 (3). 与上一题中 21 (3) 的结果相同.

23 (3). 与上一题中 23 (3) 的结果相同.

4 (1). $\mu^\pi(x)=2/5,\ V^\pi(x)=1/25$;

(2). $\mu^\pi(x)=1/3,\ V^\pi(x)=2/117$.

6 (1) (a) $\mu^\pi(x)=2.67,,\ V^\pi(x)=0.44$; (b) $\mu^\pi(x)=2.7,\ V^\pi(x)=0.54$.

(2) (a) $m_{\frac{1}{2}}=2.53,\quad PMSE(m_{\frac{1}{2}})=0.4596\quad (b)\ m_{\frac{1}{2}}=2.63,\quad PMSE(m_{\frac{1}{2}})=0.545$.

8 (1) $Be(x+2,n-x+1)$; $Be(x+4,n-x+1)$; $n=1000,x=710$.

(2) $\mu_1^\pi(x)=0.71,\ \mu_2^\pi(x)=0.7104$.

10 (1) 后验期望估计 $\mu^\pi(x)=10.93$, 其后验方差 $V^\pi(x)=9.187$;

(2) 后验众数估计 $\hat{\theta}_{MD}=9.563$, 其后验均方误差 $PMSE(\hat{\theta}_{MD})=11.056$.

12. $\hat{\theta}_{iMD}=\dfrac{x_i+\alpha_i-1}{N+\alpha-2},\ \hat{\theta}_{iE}=\dfrac{x_i+\alpha_i}{N+\alpha},\ i=1,\cdots,r.$

14. $\dfrac{2(\lambda+A)}{\chi^2_{n+2\alpha}(0.90)},\ A=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2.$

16. 彩电平均寿命的 $1-\eta$ 的可信区间为

$$\left[\frac{2(t+\beta)}{\chi_f^2(\eta/2)},\frac{2(t+\beta)}{\chi_f^2(1-\eta/2)}\right]=[13806,161263].$$

其中 $\alpha=2.9914,\beta=59741;\ t=40000,r=0;\ f=2(r+\alpha)\approx 6,\ \eta=0.05$.

18 (1) $[3.34,5.75]$; (2) $[3.32,5.78]$.

20. $[1.24,1.52]$.

22 (1) $[2.75,5.49]$; (2) $[3.95,7.35]$.

24. 接受 H_0.

26. $\alpha_0<0.005,\ \alpha_1>0.995,\ \alpha_0/\alpha_1$ 很小, 故拒绝 H_0.

28. 令 $Z=\bar{X}-\bar{Y},\ \mu(z)=\dfrac{\sigma^2\mu+\tau^2 z}{\sigma^2+\tau^2},\ \eta^2=\dfrac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}$, 其中 $\sigma^2=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n},\tau^2=\tau_1^2+\tau_2^2$, $\mu=\mu_1-\mu_2$, 则当 $-\mu(z)/\eta\geqslant 0$ 时接受 H_0, 否则拒绝 H_0.

30. 易求

$$m_1(x=3)=\int_0^1 P(X=x|\theta)\cdot g_1(\theta)d\theta=\int_0^1\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}d\theta=1/6,$$

$$B^\pi(x=3)=\frac{P\big(X=x|\theta=1/2\big)}{m_1(x)}=\frac{\binom{5}{3}(\frac{1}{2})^5}{1/6}=\frac{15}{8}\approx 2,$$

由于先验机会比为 1, 故贝叶斯因子就是后验机会比, 即 $B^\pi(x=3)=\alpha_0/\alpha_1\approx 2>1$, 故接受 H_0.

32. 接受 H_2.

34. 用第二架天平称此颗钻石重量 Z 的预测值为

$$\widehat{Z}=\mu_1=\frac{n\tau^2}{\sigma_1^2+n\tau^2}\bar{x}+\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+n\tau^2}\mu = \doteq 10.12$$

用第二架天平称此颗钻石重量 Z 的 95% 预测区间为

$$\left[\mu_1-u_{\alpha/2}\sqrt{\eta_1^2+\sigma_2^2},\mu_1+u_{\alpha/2}\sqrt{\eta_1^2+\sigma_2^2}\right]=[\,9.0933,11.1467\,]$$

习题 5 部分解答

2. 采取行动 a_1, 行动 a_1 表示停下来校准.

4. $\hat{\theta}_B=\dfrac{n+\alpha}{n\bar{x}+\alpha+\beta}$.

6. $\hat{\theta}_B=\dfrac{n+r}{\lambda+n\bar{x}}$, 令 $\eta=\dfrac{1}{\theta}$ 则 $\hat{\eta}_B=\dfrac{\lambda+n\bar{x}}{n+r-1}$.

8. $\hat{p}_B=\dfrac{(x+1)(N+2)}{N(n+2)}-\dfrac{1}{N}$.

10. $\hat{\tau}_B=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+2\beta}{n+2\alpha+2}$.

12. $\hat{\theta}_B=\dfrac{x+\beta}{n+2\alpha+2}$.

14. $\hat{\theta}_B=\dfrac{x}{\alpha+1}$.

16. $\hat{\theta}_B=\theta_1\cdot\sqrt[n+\alpha]{2},\ \theta_1=\max\{\theta_0,2x_{(n)}\}$.

18. $\hat{\theta}_B=115.996\approx 116$.

20. 提示：先求出 $p(x|\theta)/p(x|a)$ 的表达式，然后分别代入 L_e 和 L_H, 经复杂计算可证.

22. 提示：利用 20 题损失函数的结果计算后验风险，使后验风险达到最小, 可证得贝叶斯估计的表达式.

24. $\hat{\theta}_{jB}=\dfrac{x_j+\alpha_j}{n+\alpha}$, $V_j^{\pi}=\dfrac{(x_j+\alpha_j)[(n+\alpha)-(x_j+\alpha_j)]}{(n+\alpha)^2(n+\alpha+1)}$, $j=1,\cdots,k$, $\alpha=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\alpha_i$.

26. 采取行动 a_1, 即认为血型为 AB 型.

28. 提示：取先验分布为 $\pi(\theta)\equiv 1$, 导出贝叶斯估计的表达式，再证明它的风险函数是常数 $1/n$.

30. θ 的贝叶斯估计为 $\hat{\theta}_B=x/r$. 证明它在加权平方损失下的风险函数是常数 $1/r$.

32. 提示：只要证明此 minimax 估计和先验分布等满足定理 5.6.1 的 3 个条件即可.

34. 易求 $\hat{\theta}_n$ 的风险函数 $R(\hat{\theta}_n,\theta)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i^2$. 用求条件极值的方法易证：当 $c_1=c_2=\cdots=c_n=1/n$ 时，$R(\hat{\theta}_n,\theta)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i^2$ 在约束条件 $\sum\limits_{i=1}^{n}c_i=1$ 达到极小，即 $\hat{\theta}_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$ 时使得风险函数 $R(\hat{\theta}_n,\theta)$ 对一切 $\theta\in\mathbb{R}$ 达到最小, 故按定义它是不可容许的.

36. 按后验密度和后验风险（即后验期望损失）的定义易证.

38. C 的后验概率范围在 0.89 和 0.96 之间, 这二者差别不大, 可见 C 对 "ε- 代换类" 是稳健的.

习题 6 部分解答

2. 记第二个试验中每个灯泡到时间 t 时候是否还能点亮为 $E_i, i = 1, \cdots, m$ ($E_i = 1$ 表示能点亮, 0 表示不能), 它们的寿命为 $\mathcal{X} = (X_1, \cdots, X_m)$(其为缺失数据). 记观测数据为 $\mathcal{Y} = (y_1, \cdots, y_n, E_1, \cdots, E_m)$, 完全数据下对数似然函数为 $l_c(\theta|\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 则 E 步 $l^{(j)}(\theta) = E_{X|\mathcal{Y},\theta^{(j-1)}}[l_c(\theta; \mathcal{X}, \mathcal{Y}]$. 因此在寿命为均匀分布的假设下, 如果第二个试验中有个灯泡寿命超过 t, 不妨记为 X_m, 则 X_m 在条件 $X_m > t$ 下的分布为 $U[t, \theta^{(j)}]$. 从而对所有 $\theta < \theta^{(j)}$, $I(0 < X_m < \theta)$ 在此条件分布下会以正的概率取 0, 导致 $l^{(j)}(\theta)$ 对所有 $\theta < \theta^{(j)}$ 不存在, 最终使得 EM 算法失效.

6. 用随机游动 Metropolis 算法，生成链获得 θ 的后验期望为 0.62, 后验标准差为 0.05

10. (1) 利用 $\pi(\theta, \lambda) = \pi(\theta|\lambda)\pi(\lambda)$ 带入计算积分即证. (2) 注意 $\pi(\theta|\lambda, x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta|\lambda)$ 计算整理即得. 类似地, 利用 $\pi(\lambda|\theta, x) \propto \pi(\theta|\lambda)\pi(\lambda)$ 计算即证.

习题 7 部分解答

4. 由例 2.5.3 知 λ 的后验分布仍为伽马分布 $\Gamma(n\bar{x} + b, n + a)$, 因此 $E(\lambda|X_1, \cdots, X_n) = \frac{n\bar{x}+b}{n+a}$, $Var(\lambda|X_1, \cdots, X_n) = \frac{n\bar{x}+b}{(n+a)^2}$. 根据大数律, $\bar{x} \to 1$ 以概率 1 成立, 而后验方差区域零. 因此得证后验分布的相合性.

6. 由于 $n! = \int_0^\infty e^{-t+nlnt}dt$, 令 $s = nt$ 得到

$$n! = n^{n+1} \int_0^\infty e^{-n(lns-s)}ds = n^{n+1} \int_0^\infty e^{nf(s)}ds,$$

其中 $h(s) = ln(s) - s$. 注意到 $x_0 = 1$ 为 h 的唯一最大值点, 且 $h(x_0) = -1, h''(x_0) = -1$, 因此由拉普拉斯逼近得

$$n! \sim n^{n+1} \frac{\sqrt{2\pi}e^{nh(x_0)}}{\sqrt{-nh''(x_0)}} = n^{n+1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi}.$$

习题 8 部分解答

2. (2) 当先验分布为 $N(\theta_0, 0.148^2)$ 时候, 后验分布为 $N(0.979\theta_0 + 0.021x, 0.021)$, 故当 $x = \theta_0 + 1.97$ 时, $P(H_0|x) = \Phi((0.1 - 0.041)/\sqrt{0.021}) - \Phi(-0.1 - 0.041)/\sqrt{0.021}) = 0.49$. 而 $P(H_0) = 0.5$, 故 $BF_{01} = (P(H_0|x)/P(H_1|x))/(p(H_0)/p(H_1)) = 0.49/(1 - 0.49) = 0.96$.

当先验分布为 $U(\theta_0 - 1, \theta_0 + 1)$ 时候, 则 $P(H_0|x) = 0.07$, $P(H_0) = 0.1$, 从而 $BF_{01} = (0.07/0.93)/(0.1/0.9) = 0.675$.

4. (1) 由 BIC 定义 $BIC=-2ln[\binom{n}{t}\hat{p}_{MLE}^t(1-\hat{p}_{MLE})^{n-t}]+lnn$ 即证. (2) 略.

6. (1) 因为 μ 的后验分布为 $N(\hat{\mu}_n,\sigma_n^2)$, 其中 $\mu_n=\frac{\mu_0/\tau_0^2+\sum_{i=1}^n x_i/\sigma^2}{1/\tau_0^2+n/\sigma^2}$, $\sigma_n^2=1/(1/\tau_0^2+n/\sigma^2)$. 由 $G=N(\mu_t,\sigma^2)$, 知

$$\eta(G)=\int\int lnf(z|\mu)\pi(\mu|\mathbf{x}_n)d\theta dG(z)=-\frac{1}{2}ln(2\pi\sigma^2)-\frac{\sigma^2+(\mu_t-\hat{\mu}_n)^2+\sigma_n^2}{2\sigma^2},$$
$$\hat{\eta}(G)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\int lnf(x_i|\mu)\pi(\mu|\mathbf{x}_n)d\mu=-\frac{1}{2}ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{(x_i-\hat{\mu}_n)^2+\sigma_n^2}{2\sigma^2}.$$

从而真实的偏差为

$$b(G)=E_{\mathbf{x}_n}[\hat{\eta}(G)-\eta(G)]=E_{\mathbf{x}_n}\Big[\frac{1}{2}+\frac{(\mu_t-\hat{\mu}_n)^2}{2\sigma^2}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{(x_i-\hat{\mu}_n)^2}{2\sigma^2}\Big].$$

直接计算得到 $lnf(\mathbf{x}_n|\hat{\mu}_n)-E_{\mu\mathbf{x}_n}[lnf(\mathbf{x}_n|\mu)]=n\sigma_n^2/(2\sigma^2)$, $ln\pi(\hat{\mu}_n)-E_{\mu|\mathbf{x}_n}[ln\pi(\mu)]=\sigma_n^2/(2\tau_0^2)$, 以及

$$Q_n(\hat{\mu}_n)=\sum_{i=1}^n[(x_i-\hat{\mu}_n)/\sigma^2+(\mu_0-\hat{\mu}_n)/(n\tau_0^2)]^2/n$$

和 $S_n(\hat{\mu}_n)=1/(n\sigma^2)$. 由定理 7.1 即得偏差的渐近估计为

$$n\hat{b}(\hat{G})=-\left(\frac{n\sigma_n^2}{2\sigma^2}+\frac{\sigma_n^2}{2\tau_0^2}\right)+S_n^{-1}(\hat{\mu}_n)Q_n(\hat{\mu}_n)+\frac{1}{2}.$$

(2) 根据大数律, 当 $n\to\infty$ 时候, $\hat{\mu}_n\to\mu_t$, $\sigma_n^2\to 0$, $n\sigma_n^2\to\sigma^2$, $Q_n(\hat{\mu}_n)\to\sigma^2$, 因此, $\hat{b}(\hat{G})\to 1$.

(3) $p_D=2lnf(\mathbf{x}_n|\hat{\mu}_n)-2\int lnf(\mathbf{x}|\mu)\pi(\mu|\mathbf{x}_n)d\mu=n\sigma_n^2/\sigma^2\to 1$.

习题 9 部分解答

2. 利用题 1 的结果，由下式显见：

$$0\leqslant P(|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon)\leq E|f_n(x)-f(x)|^2/\varepsilon^2\to 0,\ \ 当\ n\to\infty.$$

4. λ 的贝叶斯估计和 PEB 估计如下：

$$\hat{\lambda}_B=\frac{x+\tau}{r+\alpha+1},\quad \hat{\lambda}_{PEB}=\frac{x+\hat{\tau}_n}{r+\alpha+1},\quad \hat{\tau}_n=\frac{\alpha-1}{r}\overline{X}.$$

6. 参数 θ 的 NPEB 估计为

$$\hat{\theta}_{NPEB}=\frac{x-r+1}{x}\cdot\frac{\hat{p}_n(x+1)}{\hat{p}_n(x)},\quad \hat{p}_n(x)=\frac{\#\{i:\ 1\leqslant i\leqslant n+1,\ X_i=x\}}{n+1},$$

此处 $X=X_{n+1}$, $\#(A)$ 表示 A 中元素的个数. $\hat{p}_n(x)$ 是 X 的边缘密度 $p_G(x)=\int_0^1 p(x|\theta)dG(\theta)$ 的估计量.

8. 参数 θ 的 NPEB 估计为

$$\hat{\theta}_{NPEB} = -\frac{f_n^{(1)}(x)}{f_n^{(2)}(x)}; \quad f_n^{(j)}(x) = \frac{1}{nh_n^{1+j}} \sum_{i+1}^{n} K_j\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right),\ j = 1, 2,$$

其中 $f_n^{(j)}(x)$ $(j = 1, 2)$ 是随机变量 X 的边缘密度 $f_G(x) = \int_0^{\infty} f(x|\theta)dG(\theta)$ 的第 j $(j = 1, 2)$ 阶导数的核估计。

10. 平方损失下分层贝叶斯估计的后验方差近似为 0.082 .