

# 贝 叶 斯 统 计

韦 来 生 编 著

高 等 教 育 出 版 社

第一版, 2016

# 贝 叶 斯 统 计

韦 来 生 编 著

高 等 教 育 出 版 社

第一版, 2016

## 第3章 贝叶斯统计推断

### 1 3.1 后验分布与充分性

- 3.1.1 后验分布的计算公式
- 3.1.2 后验分布与充分性

### 2 3.2 正态总体参数的后验分布

- 3.2.1 引言
- 3.2.2 正态总体无信息先验下的后验分布
- 3.2.3 正态总体参数在共轭先验分布下的后验分布

### 3 3.3 一类离散分布和多项分布参数的后验分布

- 3.3.1 一类离散分布参数的后验分布
- 3.3.2 多项分布中参数的后验分布

### 4 3.4 寿命分布参数的后验分布

- 3.4.1 伽玛分布情形
- 3.4.2 指数分布及其定数截尾情形时参数的后验分布

### 5 3.5 泊松分布和均匀分布参数的后验分布

- 3.5.1 泊松分布参数的后验分布
- 3.5.2 均匀分布参数的后验分布

## 1 3.1 后验分布与充分性

- 3.1.1 后验分布的计算公式
- 3.1.2 后验分布与充分性

## 2 3.2 正态总体参数的后验分布

- 3.2.1 引言
- 3.2.2 正态总体无信息先验下的后验分布
- 3.2.3 正态总体参数在共轭先验分布下的后验分布

## 3 3.3 一类离散分布和多项分布参数的后验分布

- 3.3.1 一类离散分布参数的后验分布
- 3.3.2 多项分布中参数的后验分布

## 4 3.4 寿命分布参数的后验分布

- 3.4.1 伽玛分布情形
- 3.4.2 指数分布及其定数截尾情形时参数的后验分布

## 5 3.5 泊松分布和均匀分布参数的后验分布

- 3.5.1 泊松分布参数的后验分布
- 3.5.2 均匀分布参数的后验分布

# 1. 当先验分布有密度时后验分布的计算

- 在公式 (1.2.1) 式中,  $m(x)$  是  $X$  的边缘密度. 由于  $m(x)$  与  $\theta$  无关, 故可将  $1/m(x)$  看成与  $\theta$  无关的常数, 因此有

$$\pi(\theta|x) = f(x|\theta)\pi(\theta)/m(x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta).$$

- 对共轭先验分布情形, 求后验密度可按下列步骤:
  - 写出似然函数  $l(\theta|x)$  的核, 即  $l(\theta|x)$  中与  $\theta$  有关的因子. 再写出先验密度  $\pi(\theta)$  的核, 即  $\pi(\theta)$  中与  $\theta$  有关的因子.
  - 类似公式 (2.5.4), 写出后验密度的核, 即

$$\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta) \propto \{l(\theta|x) \text{ 的核}\} \cdot \{\pi(\theta) \text{ 的核}\}.$$

即“后验密度核”是“似然函数核与先验密度核之积”.

- 将上式右边添加一个正则化常数因子 (可以与  $x$  有关), 即可得到后验密度.

# 1. 当先验分布有密度时后验分布的计算

- 在公式 (1.2.1) 式中,  $m(x)$  是  $X$  的边缘密度. 由于  $m(x)$  与  $\theta$  无关, 故可将  $1/m(x)$  看成与  $\theta$  无关的常数, 因此有

$$\pi(\theta|x) = f(x|\theta)\pi(\theta)/m(x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta).$$

- 对共轭先验分布情形, 求后验密度可按下列步骤:
  - 写出似然函数  $l(\theta|x)$  的核, 即  $l(\theta|x)$  中与  $\theta$  有关的因子. 再写出先验密度  $\pi(\theta)$  的核, 即  $\pi(\theta)$  中与  $\theta$  有关的因子.
  - 类似公式 (2.5.4), 写出后验密度的核, 即

$$\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta) \propto \{l(\theta|x) \text{ 的核}\} \cdot \{\pi(\theta) \text{ 的核}\}.$$

即“后验密度核”是“似然函数核与先验密度核之积”.

- 将上式右边添加一个正则化常数因子 (可以与  $x$  有关), 即可得到后验密度.

# 1. 当先验分布有密度时后验分布的计算

- 在公式 (1.2.1) 式中,  $m(x)$  是  $X$  的边缘密度. 由于  $m(x)$  与  $\theta$  无关, 故可将  $1/m(x)$  看成与  $\theta$  无关的常数, 因此有

$$\pi(\theta|x) = f(x|\theta)\pi(\theta)/m(x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta).$$

- 对共轭先验分布情形, 求后验密度可按下列步骤:
  - 写出似然函数  $l(\theta|x)$  的核, 即  $l(\theta|x)$  中与  $\theta$  有关的因子. 再写出先验密度  $\pi(\theta)$  的核, 即  $\pi(\theta)$  中与  $\theta$  有关的因子.
  - 类似公式 (2.5.4), 写出后验密度的核, 即

$$\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta) \propto \{l(\theta|x) \text{ 的核}\} \cdot \{\pi(\theta) \text{ 的核}\}.$$

即“后验密度核”是“似然函数核与先验密度核之积”.

- 将上式右边添加一个正则化常数因子 (可以与  $x$  有关), 即可得到后验密度.

# 1. 当先验分布有密度时后验分布的计算

- 在公式 (1.2.1) 式中,  $m(x)$  是  $X$  的边缘密度. 由于  $m(x)$  与  $\theta$  无关, 故可将  $1/m(x)$  看成与  $\theta$  无关的常数, 因此有

$$\pi(\theta|x) = f(x|\theta)\pi(\theta)/m(x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta).$$

- 对共轭先验分布情形, 求后验密度可按下列步骤:
  - 写出似然函数  $l(\theta|x)$  的核, 即  $l(\theta|x)$  中与  $\theta$  有关的因子. 再写出先验密度  $\pi(\theta)$  的核, 即  $\pi(\theta)$  中与  $\theta$  有关的因子.
  - 类似公式 (2.5.4), 写出后验密度的核, 即

$$\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta) \propto \{l(\theta|x) \text{ 的核}\} \cdot \{\pi(\theta) \text{ 的核}\}.$$

即“后验密度核”是“似然函数核与先验密度核之积”.

- 将上式右边添加一个正则化常数因子 (可以与  $x$  有关), 即可得到后验密度.



# 1. 当先验分布有密度时后验分布的计算

- 在公式 (1.2.1) 式中,  $m(x)$  是  $X$  的边缘密度. 由于  $m(x)$  与  $\theta$  无关, 故可将  $1/m(x)$  看成与  $\theta$  无关的常数, 因此有

$$\pi(\theta|x) = f(x|\theta)\pi(\theta)/m(x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta).$$

- 对共轭先验分布情形, 求后验密度可按下列步骤:
  - 写出似然函数  $l(\theta|x)$  的核, 即  $l(\theta|x)$  中与  $\theta$  有关的因子. 再写出先验密度  $\pi(\theta)$  的核, 即  $\pi(\theta)$  中与  $\theta$  有关的因子.
  - 类似公式 (2.5.4), 写出后验密度的核, 即

$$\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta) \propto \{l(\theta|x) \text{ 的核}\} \cdot \{\pi(\theta) \text{ 的核}\}.$$

即“后验密度核”是“似然函数核与先验密度核之积”.

- 将上式右边添加一个正则化常数因子 (可以与  $x$  有关), 即可得到后验密度.

## 2. 先验分布为离散分布时的后验分布的计算

- 当先验分布为离散分布时, 后验分布的计算公式就是贝叶斯公式. 贝叶斯公式定义见 §1.1, 下面通过具体例子说明当先验分布为离散分布时如何计算后验分布.
- 例 3.1.1** 通过血液可以帮助说明一个人是否患有某种疾病, 化验结果为阳性 (以  $X = 1$  表示) 或者为阴性 (以  $X = 0$  表示). 令  $\theta_1$  表示患病状态,  $\theta_2$  表示无病状态. 记  $P(X = x|\theta) = p(x|\theta)$ , 则有

$$p(1|\theta_1) = 0.8, \quad p(0|\theta_1) = 0.2, \quad p(1|\theta_2) = 0.3, \quad p(0|\theta_2) = 0.7,$$

设先验信息为  $\pi(\theta_1) = 0.05$ ,  $\pi(\theta_2) = 0.95$ , 此即该地区患病和不患病的比例. 求  $X$  的边缘分布和  $\theta$  的后验分布.

## 2. 先验分布为离散分布时的后验分布的计算

- 当先验分布为离散分布时, 后验分布的计算公式就是贝叶斯公式. 贝叶斯公式定义见 §1.1, 下面通过具体例子说明当先验分布为离散分布时如何计算后验分布.
- 例 3.1.1** 通过血液可以帮助说明一个人是否患有某种疾病, 化验结果为阳性 (以  $X = 1$  表示) 或者为阴性 (以  $X = 0$  表示). 令  $\theta_1$  表示患病状态,  $\theta_2$  表示无病状态. 记  $P(X = x|\theta) = p(x|\theta)$ , 则有

$$p(1|\theta_1) = 0.8, \quad p(0|\theta_1) = 0.2, \quad p(1|\theta_2) = 0.3, \quad p(0|\theta_2) = 0.7,$$

设先验信息为  $\pi(\theta_1) = 0.05$ ,  $\pi(\theta_2) = 0.95$ , 此即该地区患病和不患病的比例. 求  $X$  的边缘分布和  $\theta$  的后验分布.

# 后验分布与充分性

- 在贝叶斯方法中, 计算后验分布时充分性概念常有帮助, 使问题简化.
- 引理 3.1.1 设  $X \sim f(x|\theta)$ ,  $\theta \in \Theta$ , 此处  $f(x|\theta)$  为随机变量  $X$  的概率函数,  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  是从总体  $X$  中抽取的简单样本,  $T = T(\mathbf{X})$  是一统计量, 它的密度函数是  $q(t|\theta)$ ; 设  $\pi(\theta) \in \Gamma$ , 此处  $\Gamma$  是  $\theta$  的先验分布的类. 若  $T$  为  $\theta$  的充分统计量, 则对  $\forall \pi \in \Gamma$ , 有

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \tilde{\pi}(\theta|t),$$

- 例 3.1.2 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  是从  $N(\theta, \sigma^2)$  中抽取的简单样本, 其中  $\sigma^2$  已知. 假定  $\theta \sim N(\mu, \tau^2)$ , 求  $\theta$  的后验密度.
- 由例 3.1.2, 可见  $\theta$  的后验分布  $\pi(\theta|\mathbf{x})$  和  $\tilde{\pi}(\theta|t)$  相同.

## 后验分布与充分性

- 在贝叶斯方法中, 计算后验分布时充分性概念常有帮助, 使问题简化.
- 引理 3.1.1** 设  $X \sim f(x|\theta)$ ,  $\theta \in \Theta$ , 此处  $f(x|\theta)$  为随机变量  $X$  的概率函数,  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  是从总体  $X$  中抽取的简单样本,  $T = T(\mathbf{X})$  是一统计量, 它的密度函数是  $q(t|\theta)$ ; 设  $\pi(\theta) \in \Gamma$ , 此处  $\Gamma$  是  $\theta$  的先验分布的类. 若  $T$  为  $\theta$  的充分统计量, 则对  $\forall \pi \in \Gamma$ , 有

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \tilde{\pi}(\theta|t),$$

- 例 3.1.2** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  是从  $N(\theta, \sigma^2)$  中抽取的简单样本, 其中  $\sigma^2$  已知. 假定  $\theta \sim N(\mu, \tau^2)$ , 求  $\theta$  的后验密度.
- 由例 3.1.2, 可见  $\theta$  的后验分布  $\pi(\theta|\mathbf{x})$  和  $\tilde{\pi}(\theta|t)$  相同.

## 后验分布与充分性

- 在贝叶斯方法中, 计算后验分布时充分性概念常有帮助, 使问题简化.
- 引理 3.1.1** 设  $X \sim f(x|\theta)$ ,  $\theta \in \Theta$ , 此处  $f(x|\theta)$  为随机变量  $X$  的概率函数,  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  是从总体  $X$  中抽取的简单样本,  $T = T(\mathbf{X})$  是一统计量, 它的密度函数是  $q(t|\theta)$ ; 设  $\pi(\theta) \in \Gamma$ , 此处  $\Gamma$  是  $\theta$  的先验分布的类. 若  $T$  为  $\theta$  的充分统计量, 则对  $\forall \pi \in \Gamma$ , 有

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \tilde{\pi}(\theta|t),$$

- 例 3.1.2** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  是从  $N(\theta, \sigma^2)$  中抽取的简单样本, 其中  $\sigma^2$  已知. 假定  $\theta \sim N(\mu, \tau^2)$ , 求  $\theta$  的后验密度.
- 由例 3.1.2, 可见  $\theta$  的后验分布  $\pi(\theta|\mathbf{x})$  和  $\tilde{\pi}(\theta|t)$  相同.

## 后验分布与充分性

- 在贝叶斯方法中, 计算后验分布时充分性概念常有帮助, 使问题简化.
- 引理 3.1.1** 设  $X \sim f(x|\theta)$ ,  $\theta \in \Theta$ , 此处  $f(x|\theta)$  为随机变量  $X$  的概率函数,  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  是从总体  $X$  中抽取的简单样本,  $T = T(\mathbf{X})$  是一统计量, 它的密度函数是  $q(t|\theta)$ ; 设  $\pi(\theta) \in \Gamma$ , 此处  $\Gamma$  是  $\theta$  的先验分布的类. 若  $T$  为  $\theta$  的充分统计量, 则对  $\forall \pi \in \Gamma$ , 有

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \tilde{\pi}(\theta|t),$$

- 例 3.1.2** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  是从  $N(\theta, \sigma^2)$  中抽取的简单样本, 其中  $\sigma^2$  已知. 假定  $\theta \sim N(\mu, \tau^2)$ , 求  $\theta$  的后验密度.
- 由例 3.1.2, 可见  $\theta$  的后验分布  $\pi(\theta|\mathbf{x})$  和  $\tilde{\pi}(\theta|t)$  相同.

### 1 3.1 后验分布与充分性

- 3.1.1 后验分布的计算公式
- 3.1.2 后验分布与充分性

### 2 3.2 正态总体参数的后验分布

- 3.2.1 引言
- 3.2.2 正态总体无信息先验下的后验分布
- 3.2.3 正态总体参数在共轭先验分布下的后验分布

### 3 3.3 一类离散分布和多项分布参数的后验分布

- 3.3.1 一类离散分布参数的后验分布
- 3.3.2 多项分布中参数的后验分布

### 4 3.4 寿命分布参数的后验分布

- 3.4.1 伽玛分布情形
- 3.4.2 指数分布及其定数截尾情形时参数的后验分布

### 5 3.5 泊松分布和均匀分布参数的后验分布

- 3.5.1 泊松分布参数的后验分布
- 3.5.2 均匀分布参数的后验分布



# 引言

- 设  $\mathbf{X} = X_1, \dots, X_n$  为从  $N(\theta, \sigma^2)$  中抽取的 i.i.d. 样本, 则给定  $\varphi = (\theta, \sigma^2)$  时样本  $\mathbf{X}$  的联合概率密度为

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}|\varphi) &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 \right\} \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \theta)^2 \right] \right\}, \quad (3.2.1) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

- 在本节中我们将用到广义一元  $t$  分布的概念, 现将其定义给出如下:

# 引言

- 设  $\mathbf{X} = X_1, \dots, X_n$  为从  $N(\theta, \sigma^2)$  中抽取的 i.i.d. 样本, 则给定  $\varphi = (\theta, \sigma^2)$  时样本  $\mathbf{X}$  的联合概率密度为

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}|\varphi) &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 \right\} \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \theta)^2 \right] \right\}, \quad (3.2.1) \end{aligned}$$

其中  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

- 在本节中我们将用到广义一元  $t$  分布的概念, 现将其定义给出如下:

# 引言

- **定义 3.2.1** 若随机变量  $Y$  具有下列概率密度函数

$$p(y|\mu, \tau^2, \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\nu\pi}} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \left[1 + \frac{1}{\nu} \left(\frac{y-\mu}{\tau}\right)^2\right]^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad (3.2.2)$$

则称  $Y$  服从广义一元  $t$  分布. 其中  $\nu > 0$  为自由度,  $\mu$  是均值参数,  $\tau > 0$  为刻度参数, 记为  $Y \sim \mathcal{T}_1(\nu, \mu, \tau^2)$ .

- 特别, 当  $\mu = 0, \tau = 1$  时,  $\mathcal{T}_1(\nu, 0, 1)$  称为标准的  $t$  分布, 简记为  $Y \sim t_\nu$ , 这就是我们在初等概率统计中所见的自由度为  $\nu$  的  $t$  分布.

# 引言

- **定义 3.2.1** 若随机变量  $Y$  具有下列概率密度函数

$$p(y|\mu, \tau^2, \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\nu\pi}} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \left[1 + \frac{1}{\nu} \left(\frac{y-\mu}{\tau}\right)^2\right]^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad (3.2.2)$$

则称  $Y$  服从广义一元  $t$  分布. 其中  $\nu > 0$  为自由度,  $\mu$  是均值参数,  $\tau > 0$  为刻度参数, 记为  $Y \sim \mathcal{T}_1(\nu, \mu, \tau^2)$ .

- 特别, 当  $\mu = 0$ ,  $\tau = 1$  时,  $\mathcal{T}_1(\nu, 0, 1)$  称为标准的  $t$  分布, 简记为  $Y \sim t_\nu$ , 这就是我们在初等概率统计中所见的自由度为  $\nu$  的  $t$  分布.

# 1. 当 $\sigma^2$ 已知时, 均值参数 $\theta$ 的后验分布

- 令  $T = \bar{X}$  是  $\theta$  的充分统计量, 易见  $\bar{X} \sim N(\theta, \sigma^2/n)$ , 故  $\theta$  的似然函数为

$$l(\theta|t) \propto \exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} (\bar{x} - \theta)^2 \right\}.$$

- 由  $\pi(\theta) \equiv 1, \theta \in \mathcal{R}$ , 可知  $\theta$  的后验密度

$$\pi(\theta|t) = \pi(\theta|\bar{x}) \propto l(\theta|t)\pi(\theta) \propto \exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} (\theta - \bar{x})^2 \right\},$$

- 这是正态密度  $N(\bar{x}, \sigma^2/n)$ , 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|t) = \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} (\theta - \bar{x})^2 \right\}, \quad \theta \in \mathcal{R}, \quad (3.2.3)$$

即  $\theta$  的后验分布为  $N(\bar{x}, \sigma^2/n)$ .

# 1. 当 $\sigma^2$ 已知时, 均值参数 $\theta$ 的后验分布

- 令  $T = \bar{X}$  是  $\theta$  的充分统计量, 易见  $\bar{X} \sim N(\theta, \sigma^2/n)$ , 故  $\theta$  的似然函数为

$$l(\theta|t) \propto \exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} (\bar{x} - \theta)^2 \right\}.$$

- 由  $\pi(\theta) \equiv 1, \theta \in \mathcal{R}$ , 可知  $\theta$  的后验密度

$$\pi(\theta|t) = \pi(\theta|\bar{x}) \propto l(\theta|t)\pi(\theta) \propto \exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} (\theta - \bar{x})^2 \right\},$$

- 这是正态密度  $N(\bar{x}, \sigma^2/n)$ , 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|t) = \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} (\theta - \bar{x})^2 \right\}, \quad \theta \in \mathcal{R}, \quad (3.2.3)$$

即  $\theta$  的后验分布为  $N(\bar{x}, \sigma^2/n)$ .

# 1. 当 $\sigma^2$ 已知时, 均值参数 $\theta$ 的后验分布

- 令  $T = \bar{X}$  是  $\theta$  的充分统计量, 易见  $\bar{X} \sim N(\theta, \sigma^2/n)$ , 故  $\theta$  的似然函数为

$$l(\theta|t) \propto \exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} (\bar{x} - \theta)^2 \right\}.$$

- 由  $\pi(\theta) \equiv 1, \theta \in \mathcal{R}$ , 可知  $\theta$  的后验密度

$$\pi(\theta|t) = \pi(\theta|\bar{x}) \propto l(\theta|t)\pi(\theta) \propto \exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} (\theta - \bar{x})^2 \right\},$$

- 这是正态密度  $N(\bar{x}, \sigma^2/n)$ , 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|t) = \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} (\theta - \bar{x})^2 \right\}, \quad \theta \in \mathcal{R}, \quad (3.2.3)$$

即  $\theta$  的后验分布为  $N(\bar{x}, \sigma^2/n)$ .

## 2. 当 $\theta$ 已知时, 刻度参数 $\sigma^2$ 的后验分布

- 令  $T = \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2$ , 则  $T$  为  $\sigma^2$  的充分统计量,  $T/\sigma^2 \sim \chi_n^2$ .

故  $\sigma^2$  的似然函数为

$$l(\sigma^2|t) \propto (\sigma^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{t}{2\sigma^2} \right\}.$$

- 刻度参数  $\sigma^2$  的无信息先验为

$$\sigma^2 \propto 1/\sigma^2,$$

- 因此  $\sigma^2$  的后验分布

$$\pi(\sigma^2|t) \propto l(\sigma^2|t)\pi(\sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-(\frac{n}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{t}{2\sigma^2} \right\}$$

- 添加正则化常数因子得到后验分布

$$\pi(\sigma^2|t) = \frac{(t/2)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)} (\sigma^2)^{-(\frac{n}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{t}{2\sigma^2} \right\}, \sigma^2 > 0. \quad (3.2.6)$$

即  $\sigma^2$  的后验分布是逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n/2, t/2)$ .



## 2. 当 $\theta$ 已知时, 刻度参数 $\sigma^2$ 的后验分布

- 令  $T = \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2$ , 则  $T$  为  $\sigma^2$  的充分统计量,  $T/\sigma^2 \sim \chi_n^2$ .  
故  $\sigma^2$  的似然函数为

$$l(\sigma^2|t) \propto (\sigma^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{t}{2\sigma^2} \right\}.$$

- 刻度参数  $\sigma^2$  的无信息先验为

$$\sigma^2 \propto 1/\sigma^2,$$

- 因此  $\sigma^2$  的后验分布

$$\pi(\sigma^2|t) \propto l(\sigma^2|t)\pi(\sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-(\frac{n}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{t}{2\sigma^2} \right\}$$

- 添加正则化常数因子得到后验分布

$$\pi(\sigma^2|t) = \frac{(t/2)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)} (\sigma^2)^{-(\frac{n}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{t}{2\sigma^2} \right\}, \sigma^2 > 0. \quad (3.2.6)$$

即  $\sigma^2$  的后验分布是逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n/2, t/2)$ .

## 2. 当 $\theta$ 已知时, 刻度参数 $\sigma^2$ 的后验分布

- 令  $T = \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2$ , 则  $T$  为  $\sigma^2$  的充分统计量,  $T/\sigma^2 \sim \chi_n^2$ .

故  $\sigma^2$  的似然函数为

$$l(\sigma^2|t) \propto (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{t}{2\sigma^2}\right\}.$$

- 刻度参数  $\sigma^2$  的无信息先验为

$$\sigma^2 \propto 1/\sigma^2,$$

- 因此  $\sigma^2$  的后验分布

$$\pi(\sigma^2|t) \propto l(\sigma^2|t)\pi(\sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-(\frac{n}{2}+1)} \exp\left\{-\frac{t}{2\sigma^2}\right\}$$

- 添加正则化常数因子得到后验分布

$$\pi(\sigma^2|t) = \frac{(t/2)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)} (\sigma^2)^{-(\frac{n}{2}+1)} \exp\left\{-\frac{t}{2\sigma^2}\right\}, \sigma^2 > 0. \quad (3.2.6)$$

即  $\sigma^2$  的后验分布是逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n/2, t/2)$ .

## 2. 当 $\theta$ 已知时, 刻度参数 $\sigma^2$ 的后验分布

- 令  $T = \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2$ , 则  $T$  为  $\sigma^2$  的充分统计量,  $T/\sigma^2 \sim \chi_n^2$ .

故  $\sigma^2$  的似然函数为

$$l(\sigma^2|t) \propto (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{t}{2\sigma^2}\right\}.$$

- 刻度参数  $\sigma^2$  的无信息先验为

$$\sigma^2 \propto 1/\sigma^2,$$

- 因此  $\sigma^2$  的后验分布

$$\pi(\sigma^2|t) \propto l(\sigma^2|t)\pi(\sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-(\frac{n}{2}+1)} \exp\left\{-\frac{t}{2\sigma^2}\right\}$$

- 添加正则化常数因子得到后验分布

$$\pi(\sigma^2|t) = \frac{(t/2)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)} (\sigma^2)^{-(\frac{n}{2}+1)} \exp\left\{-\frac{t}{2\sigma^2}\right\}, \sigma^2 > 0. \quad (3.2.6)$$

即  $\sigma^2$  的后验分布是逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n/2, t/2)$ .

### 3. 当 $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知时的后验分布

- 令  $S^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  和  $T = (\bar{X}, S^2)$ , 则  $T$  是关于  $(\theta, \sigma^2)$  的联合充分统计量;  $\bar{X} \sim N(\theta, \sigma^2/n)$ ,  $\nu S^2/\sigma^2 \sim \chi_\nu^2$ ,  $\nu = n - 1$  且  $\bar{X}$  和  $S^2$  是相互独立的.

- 因此易知  $(\theta, \sigma^2)$  的似然函数为

$$\begin{aligned}
 l(\theta, \sigma^2 | t) &= p_1(\bar{x} | \theta, \sigma^2) p_2(s^2 | \sigma^2) \\
 &= \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x} - \theta)^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot c\left(\frac{\nu}{\sigma^2}\right) \left(\frac{\nu s^2}{\sigma^2}\right)^{\frac{\nu}{2}-1} \exp\left\{-\frac{\nu s^2}{2\sigma^2}\right\} \\
 &\propto \sigma^{-1} (\sigma^2)^{-\nu/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [\nu s^2 + n(\theta - \bar{x})^2]\right\}, \quad (3.2.8)
 \end{aligned}$$

此处  $c = [2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)]^{-1}$ .

### 3. 当 $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知时的后验分布

- 令  $S^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  和  $T = (\bar{X}, S^2)$ , 则  $T$  是关于  $(\theta, \sigma^2)$  的联合充分统计量;  $\bar{X} \sim N(\theta, \sigma^2/n)$ ,  $\nu S^2/\sigma^2 \sim \chi_\nu^2$ ,  $\nu = n - 1$  且  $\bar{X}$  和  $S^2$  是相互独立的.

- 因此易知  $(\theta, \sigma^2)$  的似然函数为

$$\begin{aligned}
 l(\theta, \sigma^2 | t) &= p_1(\bar{x} | \theta, \sigma^2) p_2(s^2 | \sigma^2) \\
 &= \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x} - \theta)^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot c\left(\frac{\nu}{\sigma^2}\right) \left(\frac{\nu s^2}{\sigma^2}\right)^{\frac{\nu}{2}-1} \exp\left\{-\frac{\nu s^2}{2\sigma^2}\right\} \\
 &\propto \sigma^{-1} (\sigma^2)^{-\nu/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [\nu s^2 + n(\theta - \bar{x})^2]\right\}, \quad (3.2.8)
 \end{aligned}$$

此处  $c = [2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)]^{-1}$ .

## 当 $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知时的后验分布

- 设  $(\theta, \sigma^2)$  的联合先验分布为  $\pi(\theta, \sigma^2) = \pi_1(\theta)\pi_2(\sigma^2)$ , 其中
$$\pi_1(\theta) \equiv 1, \quad \pi_2(\sigma^2) \propto \sigma^{-2}. \quad (3.2.9)$$

- 由 (3.2.8), (3.2.9) 可知  $(\theta, \sigma^2)$  的联合后验密度为

$$\pi(\theta, \sigma^2 | t) = K(\sigma^2)^{-(\frac{\nu+1}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [\nu s^2 + n(\theta - \bar{x})^2] \right\}, \quad (3.2.10)$$

其中  $K = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} [\Gamma(\frac{\nu}{2})]^{-1} (\frac{\nu S^2}{2})^{\nu/2}$ .

- 在 (3.2.10) 式中  $\pi(\theta, \sigma^2 | t)$  可以改写成下列形式

$$\pi(\theta, \sigma^2 | t) = \pi_1(\theta | \sigma^2, \bar{x}) \pi_2(\sigma^2 | s^2)$$

## 当 $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知时的后验分布

- 设  $(\theta, \sigma^2)$  的联合先验分布为  $\pi(\theta, \sigma^2) = \pi_1(\theta)\pi_2(\sigma^2)$ , 其中

$$\pi_1(\theta) \equiv 1, \quad \pi_2(\sigma^2) \propto \sigma^{-2}. \quad (3.2.9)$$

- 由 (3.2.8), (3.2.9) 可知  $(\theta, \sigma^2)$  的联合后验密度为

$$\pi(\theta, \sigma^2 | t) = K(\sigma^2)^{-(\frac{\nu+1}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [\nu s^2 + n(\theta - \bar{x})^2] \right\}, \quad (3.2.10)$$

其中  $K = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} [\Gamma(\frac{\nu}{2})]^{-1} (\frac{\nu S^2}{2})^{\nu/2}$ .

- 在 (3.2.10) 式中  $\pi(\theta, \sigma^2 | t)$  可以改写成下列形式

$$\pi(\theta, \sigma^2 | t) = \pi_1(\theta | \sigma^2, \bar{x}) \pi_2(\sigma^2 | s^2)$$

## 当 $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知时的后验分布

- 设  $(\theta, \sigma^2)$  的联合先验分布为  $\pi(\theta, \sigma^2) = \pi_1(\theta)\pi_2(\sigma^2)$ , 其中

$$\pi_1(\theta) \equiv 1, \quad \pi_2(\sigma^2) \propto \sigma^{-2}. \quad (3.2.9)$$

- 由 (3.2.8), (3.2.9) 可知  $(\theta, \sigma^2)$  的联合后验密度为

$$\pi(\theta, \sigma^2 | t) = K(\sigma^2)^{-(\frac{\nu+1}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [\nu s^2 + n(\theta - \bar{x})^2] \right\}, \quad (3.2.10)$$

其中  $K = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} [\Gamma(\frac{\nu}{2})]^{-1} (\frac{\nu S^2}{2})^{\nu/2}$ .

- 在 (3.2.10) 式中  $\pi(\theta, \sigma^2 | t)$  可以改写成下列形式

$$\pi(\theta, \sigma^2 | t) = \pi_1(\theta | \sigma^2, \bar{x}) \pi_2(\sigma^2 | s^2)$$



## 当 $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知时的后验分布

- 给定  $\sigma^2$  和  $\bar{x}$  时,  $\theta$  的条件后验密度是

$$\pi_1(\theta|\sigma^2, \bar{x}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - \bar{x})^2\right\},$$

- 给定  $s^2$  时  $\sigma^2$  的条件后验密度为

$$\pi_2(\sigma^2|s^2) = \frac{\pi(\theta, \sigma^2|t)}{\pi(\theta|\sigma^2, \bar{x})} = K'(\sigma^2)^{-(\nu/2+1)} \exp\left\{-\frac{\nu s^2}{2\sigma^2}\right\},$$

此处  $\sigma^2 > 0$ , 正则化常数为  $K' = [\Gamma(\frac{\nu}{2})]^{-1}(\frac{\nu S^2}{2})^{\nu/2}$ .

- 因此  $\theta$  和  $\sigma^2$  的联合后验密度是两部分的乘积, 第一部分是给定  $\sigma^2$  和  $\mathbf{x}$  时  $\theta$  的条件密度  $N(\bar{x}, \sigma^2/n)$ , 另一部分是给定  $s^2$  时  $\sigma^2$  的条件后验密度  $\Gamma^{-1}(\nu/2, \nu s^2/2)$ .

## 当 $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知时的后验分布

- 给定  $\sigma^2$  和  $\bar{x}$  时,  $\theta$  的条件后验密度是

$$\pi_1(\theta|\sigma^2, \bar{x}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - \bar{x})^2\right\},$$

- 给定  $s^2$  时  $\sigma^2$  的条件后验密度为

$$\pi_2(\sigma^2|s^2) = \frac{\pi(\theta, \sigma^2|t)}{\pi(\theta|\sigma^2, \bar{x})} = K'(\sigma^2)^{-(\nu/2+1)} \exp\left\{-\frac{\nu s^2}{2\sigma^2}\right\},$$

此处  $\sigma^2 > 0$ , 正则化常数为  $K' = [\Gamma(\frac{\nu}{2})]^{-1}(\frac{\nu S^2}{2})^{\nu/2}$ .

- 因此  $\theta$  和  $\sigma^2$  的联合后验密度是两部分的乘积, 第一部分是给定  $\sigma^2$  和  $\mathbf{x}$  时  $\theta$  的条件密度  $N(\bar{x}, \sigma^2/n)$ , 另一部分是给定  $s^2$  时  $\sigma^2$  的条件后验密度  $\Gamma^{-1}(\nu/2, \nu s^2/2)$ .

## 当 $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知时的后验分布

- 给定  $\sigma^2$  和  $\bar{x}$  时,  $\theta$  的条件后验密度是

$$\pi_1(\theta|\sigma^2, \bar{x}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - \bar{x})^2\right\},$$

- 给定  $s^2$  时  $\sigma^2$  的条件后验密度为

$$\pi_2(\sigma^2|s^2) = \frac{\pi(\theta, \sigma^2|t)}{\pi(\theta|\sigma^2, \bar{x})} = K'(\sigma^2)^{-(\nu/2+1)} \exp\left\{-\frac{\nu s^2}{2\sigma^2}\right\},$$

此处  $\sigma^2 > 0$ , 正则化常数为  $K' = [\Gamma(\frac{\nu}{2})]^{-1}(\frac{\nu S^2}{2})^{\nu/2}$ .

- 因此  $\theta$  和  $\sigma^2$  的联合后验密度是两部分的乘积, 第一部分是给定  $\sigma^2$  和  $\mathbf{x}$  时  $\theta$  的条件密度  $N(\bar{x}, \sigma^2/n)$ , 另一部分是给定  $s^2$  时  $\sigma^2$  的条件后验密度  $\Gamma^{-1}(\nu/2, \nu s^2/2)$ .

## 当 $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知时的后验分布

- 对联合后验密度 (3.2.10) 关于  $\theta$  积分, 得  $\sigma^2$  的边缘后验密度

$$\begin{aligned}\pi(\sigma^2|\mathbf{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta, \sigma^2|\mathbf{x}) d\theta = \pi_2(\sigma^2|\mathbf{x}) \int_{-\infty}^{\infty} \pi_1(\theta|\sigma^2, \mathbf{x}) d\theta \\ &= \frac{(\nu s^2/2)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\nu/2)} \cdot (\sigma^2)^{-(\frac{\nu}{2}+1)} \exp\left\{-\frac{\nu s^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad \sigma^2 > 0. \quad (3.2.11)\end{aligned}$$

即  $\sigma^2$  的边缘后验密度也是  $\Gamma^{-1}(\nu/2, \nu s^2/2)$  与  $\sigma^2$  的条件后验密度相同.

- 对联合后验密度 (3.2.10) 关于  $\sigma^2$  积分, 得  $\theta$  的边缘后验密度

$$\begin{aligned}\pi(\theta|\mathbf{x}) &= \int_0^{\infty} \pi(\theta, \sigma^2|\mathbf{x}) d\sigma^2 \\ &\propto [\nu s^2 + n(\theta - \bar{x})^2]^{-\frac{\nu+1}{2}} \propto \left[1 + \frac{1}{\nu} \cdot \frac{(\theta - \bar{x})^2}{s^2/n}\right]^{-\frac{\nu+1}{2}}.\end{aligned}$$

## 当 $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知时的后验分布

- 对联合后验密度 (3.2.10) 关于  $\theta$  积分, 得  $\sigma^2$  的边缘后验密度

$$\begin{aligned}\pi(\sigma^2|\mathbf{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta, \sigma^2|\mathbf{x}) d\theta = \pi_2(\sigma^2|\mathbf{x}) \int_{-\infty}^{\infty} \pi_1(\theta|\sigma^2, \mathbf{x}) d\theta \\ &= \frac{(\nu s^2/2)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\nu/2)} \cdot (\sigma^2)^{-(\frac{\nu}{2}+1)} \exp\left\{-\frac{\nu s^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad \sigma^2 > 0. \quad (3.2.11)\end{aligned}$$

即  $\sigma^2$  的边缘后验密度也是  $\Gamma^{-1}(\nu/2, \nu s^2/2)$  与  $\sigma^2$  的条件后验密度相同.

- 对联合后验密度 (3.2.10) 关于  $\sigma^2$  积分, 得  $\theta$  的边缘后验密度

$$\begin{aligned}\pi(\theta|\mathbf{x}) &= \int_0^{\infty} \pi(\theta, \sigma^2|\mathbf{x}) d\sigma^2 \\ &\propto [\nu s^2 + n(\theta - \bar{x})^2]^{-\frac{\nu+1}{2}} \propto \left[1 + \frac{1}{\nu} \cdot \frac{(\theta - \bar{x})^2}{s^2/n}\right]^{-\frac{\nu+1}{2}}.\end{aligned}$$

## 当 $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知时的后验分布

- 上式是广义一元  $t$  分布的核. 添加正则化常数因子得到

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu}} \cdot \left(\frac{s^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{\nu} \left(\frac{\theta - \bar{x}}{s/\sqrt{n}}\right)^2\right]^{-\frac{\nu+1}{2}}. \quad (3.2.12)$$

- 这是广义的一元  $t$  分布  $\mathcal{T}_1(\nu, \bar{x}, s^2/n)$  的密度函数, 其中  $\nu = n - 1$  为自由度,  $\bar{x}$  是其均值,  $s/\sqrt{n}$  为刻度参数.

## 当 $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知时的后验分布

- 上式是广义一元  $t$  分布的核. 添加正则化常数因子得到

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu}} \cdot \left(\frac{s^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{\nu} \left(\frac{\theta - \bar{x}}{s/\sqrt{n}}\right)^2\right]^{-\frac{\nu+1}{2}}. \quad (3.2.12)$$

- 这是广义的一元  $t$  分布  $\mathcal{T}_1(\nu, \bar{x}, s^2/n)$  的密度函数, 其中  $\nu = n - 1$  为自由度,  $\bar{x}$  是其均值,  $s/\sqrt{n}$  为刻度参数.

## 正态总体参数在无信息先验下后验分布的主要结论

**定理 3.2.1** 设样本分布为正态分布 (3.2.1), 对参数的后验分布有下列结论:

(1) 若  $\sigma^2$  已知, 当均值参数  $\theta$  的无信息先验  $\pi(\theta) \equiv 1$  时, 则  $\theta$  后验分布为由 (3.2.3) 给出的正态分布  $N(\bar{x}, \sigma^2/n)$ .

(2) 若  $\theta$  已知, 当刻度参数  $\sigma^2$  的无信息先验为  $\pi(\sigma^2) = 1/\sigma^2$  时, 则  $\sigma^2$  后验分布为由 (3.2.6) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n/2, t/2)$ , 其中  $t = \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2$ .

(3) 若  $(\theta, \sigma^2)$  的联合无信息先验由 (3.2.9) 给出, 则  $(\theta, \sigma^2)$  的联合后验分布由 (3.2.10) 给出;  $\sigma^2$  的边缘后验分布为由公式 (3.2.11) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(\nu/2, \nu s^2/2)$ ,  $\theta$  的边缘后验分布为由公式 (3.2.12) 给出的广义一元  $t$  分布  $\mathcal{T}_1(\nu, \bar{x}, s^2/n)$ , 其中

$$\nu = n - 1, \quad s^2/n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$



## 正态总体参数在无信息先验下后验分布的主要结论

**定理 3.2.1** 设样本分布为正态分布 (3.2.1), 对参数的后验分布有下列结论:

(1) 若  $\sigma^2$  已知, 当均值参数  $\theta$  的无信息先验  $\pi(\theta) \equiv 1$  时, 则  $\theta$  后验分布为由 (3.2.3) 给出的正态分布  $N(\bar{x}, \sigma^2/n)$ .

(2) 若  $\theta$  已知, 当刻度参数  $\sigma^2$  的无信息先验为  $\pi(\sigma^2) = 1/\sigma^2$  时, 则  $\sigma^2$  后验分布为由 (3.2.6) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n/2, t/2)$ , 其中  $t = \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2$ .

(3) 若  $(\theta, \sigma^2)$  的联合无信息先验由 (3.2.9) 给出, 则  $(\theta, \sigma^2)$  的联合后验分布由 (3.2.10) 给出;  $\sigma^2$  的边缘后验分布为由公式 (3.2.11) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(\nu/2, \nu s^2/2)$ ,  $\theta$  的边缘后验分布为由公式 (3.2.12) 给出的广义一元  $t$  分布  $\mathcal{T}_1(\nu, \bar{x}, s^2/n)$ , 其中

$$\nu = n - 1, \quad s^2/n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

## 正态总体参数在无信息先验下后验分布的主要结论

**定理 3.2.1** 设样本分布为正态分布 (3.2.1), 对参数的后验分布有下列结论:

(1) 若  $\sigma^2$  已知, 当均值参数  $\theta$  的无信息先验  $\pi(\theta) \equiv 1$  时, 则  $\theta$  后验分布为由 (3.2.3) 给出的正态分布  $N(\bar{x}, \sigma^2/n)$ .

(2) 若  $\theta$  已知, 当刻度参数  $\sigma^2$  的无信息先验为  $\pi(\sigma^2) = 1/\sigma^2$  时, 则  $\sigma^2$  后验分布为由 (3.2.6) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n/2, t/2)$ , 其中  $t = \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2$ .

(3) 若  $(\theta, \sigma^2)$  的联合无信息先验由 (3.2.9) 给出, 则  $(\theta, \sigma^2)$  的联合后验分布由 (3.2.10) 给出;  $\sigma^2$  的边缘后验分布为由公式 (3.2.11) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(\nu/2, \nu s^2/2)$ ,  $\theta$  的边缘后验分布为由公式 (3.2.12) 给出的广义一元  $t$  分布  $\mathcal{T}_1(\nu, \bar{x}, s^2/n)$ , 其中

$$\nu = n - 1, \quad s^2/n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

# 1. 当 $\sigma^2$ 已知时, 均值参数 $\theta$ 的后验分布

- 由于  $\bar{X}$  为  $\theta$  的充分统计量, 且  $\bar{X} \sim N(\theta, \sigma^2/n)$ , 故  $\theta$  的似然函数为

$$l(\theta|\bar{x}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x} - \theta)^2}{2\sigma^2}\right\} \propto \exp\left\{-\frac{n(\bar{x} - \theta)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

- $\theta$  的先验分布为  $N(\mu, \tau^2)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} \exp\left\{-\frac{(\theta - \mu)^2}{2\tau^2}\right\} \propto \exp\left\{-\frac{(\theta - \mu)^2}{2\tau^2}\right\}. \quad (3.2.13)$$

- 因此  $\theta$  的后验分布

$$\pi(\theta|\bar{x}) \propto f(\bar{x}|\theta)\pi(\theta) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\bar{x} - \theta)^2}{\sigma_n^2} + \frac{(\theta - \mu)^2}{\tau^2}\right]\right\}.$$

# 1. 当 $\sigma^2$ 已知时, 均值参数 $\theta$ 的后验分布

- 由于  $\bar{X}$  为  $\theta$  的充分统计量, 且  $\bar{X} \sim N(\theta, \sigma^2/n)$ , 故  $\theta$  的似然函数为

$$l(\theta|\bar{x}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{n(\bar{x} - \theta)^2}{2\sigma^2} \right\} \propto \exp \left\{ -\frac{n(\bar{x} - \theta)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

- $\theta$  的先验分布为  $N(\mu, \tau^2)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} \exp \left\{ -\frac{(\theta - \mu)^2}{2\tau^2} \right\} \propto \exp \left\{ -\frac{(\theta - \mu)^2}{2\tau^2} \right\}. \quad (3.2.13)$$

- 因此  $\theta$  的后验分布

$$\pi(\theta|\bar{x}) \propto f(\bar{x}|\theta)\pi(\theta) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{(\bar{x} - \theta)^2}{\sigma_n^2} + \frac{(\theta - \mu)^2}{\tau^2} \right] \right\}.$$

# 1. 当 $\sigma^2$ 已知时, 均值参数 $\theta$ 的后验分布

- 由于  $\bar{X}$  为  $\theta$  的充分统计量, 且  $\bar{X} \sim N(\theta, \sigma^2/n)$ , 故  $\theta$  的似然函数为

$$l(\theta|\bar{x}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x} - \theta)^2}{2\sigma^2}\right\} \propto \exp\left\{-\frac{n(\bar{x} - \theta)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

- $\theta$  的先验分布为  $N(\mu, \tau^2)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} \exp\left\{-\frac{(\theta - \mu)^2}{2\tau^2}\right\} \propto \exp\left\{-\frac{(\theta - \mu)^2}{2\tau^2}\right\}. \quad (3.2.13)$$

- 因此  $\theta$  的后验分布

$$\pi(\theta|\bar{x}) \propto f(\bar{x}|\theta)\pi(\theta) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\bar{x} - \theta)^2}{\sigma_n^2} + \frac{(\theta - \mu)^2}{\tau^2}\right]\right\}.$$

## 3.2 正态总体参数的后验分布

## 3.2.3 正态总体参数在共轭先验分布下的后验分布

当  $\sigma^2$  已知时, 均值参数  $\theta$  的后验分布

- 记

$$A = \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}, \quad B = \frac{x}{\sigma^2} + \frac{\mu_\pi}{\tau^2}, \quad C = \frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{\mu_\pi^2}{\tau^2},$$

- 则有

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{(x - \theta)^2}{\sigma^2} + \frac{(\theta - \mu_\pi)^2}{\tau^2} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{A}{2} \left( \theta - \frac{B}{A} \right)^2 \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( C - \frac{B^2}{A} \right) \right\}. \end{aligned}$$

- 其中  $C - B^2/A$  为常数, 而

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \frac{\sigma^2/n}{\sigma^2/n + \tau^2} \mu + \frac{\tau^2}{\sigma^2/n + \tau^2} \bar{x} = \mu_n(\bar{x}), \\ \frac{1}{A} &= \frac{\sigma_n^2 \tau^2}{\sigma_n^2 + \tau^2} = \frac{\tau^2 \cdot \sigma^2/n}{\sigma^2/n + \tau^2} = \frac{\sigma^2 \tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2} = \eta_n^2. \quad (3.2.15) \end{aligned}$$

## 3.2 正态总体参数的后验分布

## 3.2.3 正态总体参数在共轭先验分布下的后验分布

当  $\sigma^2$  已知时, 均值参数  $\theta$  的后验分布

- 记

$$A = \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}, \quad B = \frac{x}{\sigma^2} + \frac{\mu_\pi}{\tau^2}, \quad C = \frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{\mu_\pi^2}{\tau^2},$$

- 则有

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{(x - \theta)^2}{\sigma^2} + \frac{(\theta - \mu_\pi)^2}{\tau^2} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{A}{2} \left( \theta - \frac{B}{A} \right)^2 \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( C - \frac{B^2}{A} \right) \right\}. \end{aligned}$$

- 其中  $C - B^2/A$  为常数, 而

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \frac{\sigma^2/n}{\sigma^2/n + \tau^2} \mu + \frac{\tau^2}{\sigma^2/n + \tau^2} \bar{x} = \mu_n(\bar{x}), \\ \frac{1}{A} &= \frac{\sigma_n^2 \tau^2}{\sigma_n^2 + \tau^2} = \frac{\tau^2 \cdot \sigma^2/n}{\sigma^2/n + \tau^2} = \frac{\sigma^2 \tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2} = \eta_n^2. \quad (3.2.15) \end{aligned}$$

## 3.2 正态总体参数的后验分布

## 3.2.3 正态总体参数在共轭先验分布下的后验分布

当  $\sigma^2$  已知时, 均值参数  $\theta$  的后验分布

- 记

$$A = \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}, \quad B = \frac{x}{\sigma^2} + \frac{\mu_\pi}{\tau^2}, \quad C = \frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{\mu_\pi^2}{\tau^2},$$

- 则有

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{(x - \theta)^2}{\sigma^2} + \frac{(\theta - \mu_\pi)^2}{\tau^2} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{A}{2} \left( \theta - \frac{B}{A} \right)^2 \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( C - \frac{B^2}{A} \right) \right\}. \end{aligned}$$

- 其中  $C - B^2/A$  为常数, 而

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \frac{\sigma^2/n}{\sigma^2/n + \tau^2} \mu + \frac{\tau^2}{\sigma^2/n + \tau^2} \bar{x} = \mu_n(\bar{x}), \\ \frac{1}{A} &= \frac{\sigma_n^2 \tau^2}{\sigma_n^2 + \tau^2} = \frac{\tau^2 \cdot \sigma^2/n}{\sigma^2/n + \tau^2} = \frac{\sigma^2 \tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2} = \eta_n^2. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$



## 3.2 正态总体参数的后验分布

## 3.2.3 正态总体参数在共轭先验分布下的后验分布

当  $\sigma^2$  已知时, 均值参数  $\theta$  的后验分布

- 因此有

$$\begin{aligned}\pi(\theta|\bar{x}) &\propto l(\theta|\bar{x})\pi(\theta) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\theta)^2}{\sigma^2} + \frac{(\theta-\mu_\pi)^2}{\tau^2}\right]\right\} \\ &\propto \exp\left\{-\frac{A}{2}\left(\theta - \frac{B}{A}\right)^2\right\} = \exp\left\{-\frac{(\theta - \mu_n(\bar{x}))^2}{2\eta_n^2}\right\}\end{aligned}$$

- 添加正则化常数因子,  $\theta$  的后验密度为

$$\pi(\theta|\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\eta_n} \exp\left\{-\frac{(\theta - \mu_n(\bar{x}))^2}{2\eta_n^2}\right\}. \quad (3.2.16)$$

- 与例 2.3.1 类似, 可知  $\bar{X}$  的边缘密度为

$$m(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_n^2 + \tau^2)}} \exp\left\{-\frac{(\bar{x} - \mu)^2}{2(\sigma_n^2 + \tau^2)}\right\}. \quad (3.2.17)$$

## 3.2 正态总体参数的后验分布

## 3.2.3 正态总体参数在共轭先验分布下的后验分布

当  $\sigma^2$  已知时, 均值参数  $\theta$  的后验分布

- 因此有

$$\begin{aligned}\pi(\theta|\bar{x}) &\propto l(\theta|\bar{x})\pi(\theta) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\theta)^2}{\sigma^2} + \frac{(\theta-\mu_\pi)^2}{\tau^2}\right]\right\} \\ &\propto \exp\left\{-\frac{A}{2}\left(\theta - \frac{B}{A}\right)^2\right\} = \exp\left\{-\frac{(\theta - \mu_n(\bar{x}))^2}{2\eta_n^2}\right\}\end{aligned}$$

- 添加正则化常数因子,  $\theta$  的后验密度为

$$\pi(\theta|\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\eta_n} \exp\left\{-\frac{(\theta - \mu_n(\bar{x}))^2}{2\eta_n^2}\right\}. \quad (3.2.16)$$

- 与例 2.3.1 类似, 可知  $\bar{X}$  的边缘密度为

$$m(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_n^2 + \tau^2)}} \exp\left\{-\frac{(\bar{x} - \mu)^2}{2(\sigma_n^2 + \tau^2)}\right\}. \quad (3.2.17)$$

## 3.2 正态总体参数的后验分布

## 3.2.3 正态总体参数在共轭先验分布下的后验分布

当  $\sigma^2$  已知时, 均值参数  $\theta$  的后验分布

- 因此有

$$\begin{aligned}\pi(\theta|\bar{x}) &\propto l(\theta|\bar{x})\pi(\theta) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\theta)^2}{\sigma^2} + \frac{(\theta-\mu_\pi)^2}{\tau^2}\right]\right\} \\ &\propto \exp\left\{-\frac{A}{2}\left(\theta - \frac{B}{A}\right)^2\right\} = \exp\left\{-\frac{(\theta - \mu_n(\bar{x}))^2}{2\eta_n^2}\right\}\end{aligned}$$

- 添加正则化常数因子,  $\theta$  的后验密度为

$$\pi(\theta|\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\eta_n} \exp\left\{-\frac{(\theta - \mu_n(\bar{x}))^2}{2\eta_n^2}\right\}. \quad (3.2.16)$$

- 与例 2.3.1 类似, 可知  $\bar{X}$  的边缘密度为

$$m(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_n^2 + \tau^2)}} \exp\left\{-\frac{(\bar{x} - \mu)^2}{2(\sigma_n^2 + \tau^2)}\right\}. \quad (3.2.17)$$

## 2. 当 $\theta$ 已知时, $\sigma^2$ 的后验分布

- 令  $T = \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2$ , 则  $T/\sigma^2 \sim \chi_n^2$ , 且  $T$  为  $\sigma^2$  的充分统计量, 故  $\sigma^2$  的似然函数为

$$l(\sigma^2|t) = \frac{(\frac{1}{2\sigma^2})^{n/2}}{\Gamma(n/2)} t^{\frac{n}{2}-1} \exp\left\{-\frac{t}{2\sigma^2}\right\} \propto (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{t}{2\sigma^2}\right\}.$$

- $\sigma^2$  的共轭先验分布为  $\Gamma^{-1}(r/2, \lambda/2)$ , 其密度函数为

$$\begin{aligned} \pi(\sigma^2) &= \frac{(\lambda/2)^{r/2}}{\Gamma(r/2)} (\sigma^2)^{-(r/2+1)} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right\} \\ &\propto (\sigma^2)^{-(r/2+1)} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right\}, \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

## 2. 当 $\theta$ 已知时, $\sigma^2$ 的后验分布

- 令  $T = \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2$ , 则  $T/\sigma^2 \sim \chi_n^2$ , 且  $T$  为  $\sigma^2$  的充分统计量, 故  $\sigma^2$  的似然函数为

$$l(\sigma^2|t) = \frac{(\frac{1}{2\sigma^2})^{n/2}}{\Gamma(n/2)} t^{\frac{n}{2}-1} \exp\left\{-\frac{t}{2\sigma^2}\right\} \propto (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{t}{2\sigma^2}\right\}.$$

- $\sigma^2$  的共轭先验分布为  $\Gamma^{-1}(r/2, \lambda/2)$ , 其密度函数为

$$\begin{aligned} \pi(\sigma^2) &= \frac{(\lambda/2)^{r/2}}{\Gamma(r/2)} (\sigma^2)^{-(r/2+1)} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right\} \quad (3.2.19) \\ &\propto (\sigma^2)^{-(r/2+1)} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right\}, \end{aligned}$$

## 3.2 正态总体参数的后验分布

## 3.2.3 正态总体参数在共轭先验分布下的后验分布

当  $\theta$  已知时,  $\sigma^2$  的后验分布•  $\sigma^2$  的后验密度

$$\pi(\sigma^2|t) \propto l(\sigma^2|t)\pi(\sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-\left(\frac{n+r}{2}+1\right)} \exp\left\{-\frac{t+\lambda}{2\sigma^2}\right\},$$

• 添加正则化常数因子,  $\sigma^2$  的后验分布为

$$\pi(\sigma^2|t) = \frac{\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{n+r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+r}{2}\right)} (\sigma^2)^{-\left(\frac{n+r}{2}+1\right)} \exp\left\{-\frac{A}{2\sigma^2}\right\}, \quad \sigma^2 > 0. \quad (3.2.20)$$

此处  $A = t + \lambda = \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 + \lambda$ , 即  $\sigma^2$  的后验分布服从逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}\left(\frac{n+r}{2}, \frac{A}{2}\right)$ .

## 3.2 正态总体参数的后验分布

## 3.2.3 正态总体参数在共轭先验分布下的后验分布

当  $\theta$  已知时,  $\sigma^2$  的后验分布

- $\sigma^2$  的后验密度

$$\pi(\sigma^2|t) \propto l(\sigma^2|t)\pi(\sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-\left(\frac{n+r}{2}+1\right)} \exp\left\{-\frac{t+\lambda}{2\sigma^2}\right\},$$

- 添加正则化常数因子,  $\sigma^2$  的后验分布为

$$\pi(\sigma^2|t) = \frac{\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{n+r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+r}{2}\right)} (\sigma^2)^{-\left(\frac{n+r}{2}+1\right)} \exp\left\{-\frac{A}{2\sigma^2}\right\}, \quad \sigma^2 > 0. \quad (3.2.20)$$

此处  $A = t + \lambda = \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 + \lambda$ , 即  $\sigma^2$  的后验分布服从逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}\left(\frac{n+r}{2}, \frac{A}{2}\right)$ .

### 3. $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知的情形

- 令  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ,  $T = (\bar{X}, S^2)$ ,  $\varphi = (\theta, \sigma^2)$ . 易知  $\bar{X}|\varphi \sim N(\theta, \sigma^2/n)$ ,  $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2$ , 且  $\bar{X}$  和  $S^2$  独立.

- 由因子分解定理知  $T$  是  $\varphi$  的充分统计量.  $\varphi$  的似然函数为
 
$$f(t|\varphi) = c\sigma^{-n}(s^2)^{\frac{n-1}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(n-1)s^2 + n(\bar{x} - \theta)^2] \right\},$$

$$\propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(n-1)s^2 + n(\bar{x} - \theta)^2] \right\}.$$

- $(\theta, \sigma^2)$  联合先验为正态-逆伽玛先验:  $\theta | \sigma^2 \sim N(\mu, \sigma^2/k)$ , 及  $\sigma^2 \sim \Gamma^{-1}(r/2, \lambda/2)$ , 其联合密度为

$$\begin{aligned} \pi(\theta, \sigma^2) &= \pi_1(\theta|\sigma^2)\pi_2(\sigma^2) \\ &\propto (\sigma^2)^{-(\frac{r+1}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [k(\theta - \mu)^2 + \lambda] \right\}. \quad (3.2.22) \end{aligned}$$



### 3. $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知的情形

- 令  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ,  $T = (\bar{X}, S^2)$ ,  $\varphi = (\theta, \sigma^2)$ . 易知  $\bar{X}|\varphi \sim N(\theta, \sigma^2/n)$ ,  $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2$ , 且  $\bar{X}$  和  $S^2$  独立.

- 由因子分解定理知  $T$  是  $\varphi$  的充分统计量.  $\varphi$  的似然函数为

$$\begin{aligned} f(t|\varphi) &= c\sigma^{-n}(s^2)^{\frac{n-1}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(n-1)s^2 + n(\bar{x} - \theta)^2] \right\}, \\ &\propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(n-1)s^2 + n(\bar{x} - \theta)^2] \right\}. \end{aligned}$$

- $(\theta, \sigma^2)$  联合先验为正态-逆伽玛先验:  $\theta | \sigma^2 \sim N(\mu, \sigma^2/k)$ , 及  $\sigma^2 \sim \Gamma^{-1}(r/2, \lambda/2)$ , 其联合密度为

$$\begin{aligned} \pi(\theta, \sigma^2) &= \pi_1(\theta|\sigma^2)\pi_2(\sigma^2) \\ &\propto (\sigma^2)^{-(\frac{r+1}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [k(\theta - \mu)^2 + \lambda] \right\}. \quad (3.2.22) \end{aligned}$$

### 3. $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知的情形

- 令  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ,  $T = (\bar{X}, S^2)$ ,  $\varphi = (\theta, \sigma^2)$ . 易知  $\bar{X}|\varphi \sim N(\theta, \sigma^2/n)$ ,  $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2$ , 且  $\bar{X}$  和  $S^2$  独立.

- 由因子分解定理知  $T$  是  $\varphi$  的充分统计量.  $\varphi$  的似然函数为
 
$$f(t|\varphi) = c\sigma^{-n}(s^2)^{\frac{n-1}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(n-1)s^2 + n(\bar{x} - \theta)^2] \right\},$$

$$\propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(n-1)s^2 + n(\bar{x} - \theta)^2] \right\}.$$

- $(\theta, \sigma^2)$  联合先验为正态-逆伽玛先验:  $\theta | \sigma^2 \sim N(\mu, \sigma^2/k)$ , 及  $\sigma^2 \sim \Gamma^{-1}(r/2, \lambda/2)$ , 其联合密度为

$$\begin{aligned} \pi(\theta, \sigma^2) &= \pi_1(\theta|\sigma^2)\pi_2(\sigma^2) \\ &\propto (\sigma^2)^{-(\frac{r+1}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [k(\theta - \mu)^2 + \lambda] \right\}. \quad (3.2.22) \end{aligned}$$

## $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知的情形

- 因此  $\theta$  和  $\sigma^2$  的联合后验密度为

$$\begin{aligned}\pi(\theta, \sigma^2 | t) &\propto l(\theta, \sigma^2 | t) \pi(\theta, \sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-(\frac{r+n+1}{2}+1)} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(n-1)s^2 + n(\bar{x} - \theta)^2 + k(\theta - \mu)^2 + \lambda] \right\} \\ &\propto (\sigma^2)^{-(\frac{r+n+1}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(n-1)s^2 + H + \lambda] \right\},\end{aligned}$$

- 其中

$$\begin{aligned}H &= n(\bar{x} - \theta)^2 + k(\theta - \mu)^2 \\ &= (n+k)\theta^2 - 2(n\bar{x} + k\mu)\theta + n\bar{x}^2 + k\mu^2 \\ &= (n+k) \left( \theta - \frac{n\bar{x} + k\mu}{n+k} \right)^2 + \frac{nk}{n+k} (\bar{x} - \mu)^2.\end{aligned}$$

## $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知的情形

- 因此  $\theta$  和  $\sigma^2$  的联合后验密度为

$$\begin{aligned}\pi(\theta, \sigma^2 | t) &\propto l(\theta, \sigma^2 | t) \pi(\theta, \sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-(\frac{r+n+1}{2}+1)} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(n-1)s^2 + n(\bar{x} - \theta)^2 + k(\theta - \mu)^2 + \lambda] \right\} \\ &\propto (\sigma^2)^{-(\frac{r+n+1}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(n-1)s^2 + H + \lambda] \right\},\end{aligned}$$

- 其中

$$\begin{aligned}H &= n(\bar{x} - \theta)^2 + k(\theta - \mu)^2 \\ &= (n+k)\theta^2 - 2(n\bar{x} + k\mu)\theta + n\bar{x}^2 + k\mu^2 \\ &= (n+k) \left( \theta - \frac{n\bar{x} + k\mu}{n+k} \right)^2 + \frac{nk}{n+k} (\bar{x} - \mu)^2.\end{aligned}$$

## $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知的情形

- 因此有

$$\pi(\theta, \sigma^2 | t) \propto (\sigma^2)^{-(\frac{\nu_n+1}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [\beta_n + k_n(\theta - \tilde{\mu}_n(\bar{x}))^2] \right\},$$

- 此处  $\nu_n = n + r$ ,  $k_n = n + k$ , 而

$$\tilde{\mu}_n(\bar{x}) = \frac{n\bar{x} + k\mu}{n + k}, \quad \beta_n = (n-1)s^2 + \frac{nk}{n+k}(\bar{x} - \mu)^2 + \lambda.$$

- 添加正则化常数得到联合后验密度

$$\pi(\theta, \sigma^2 | t) = c' (\sigma^2)^{-(\frac{\nu_n+1}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [\beta_n + k_n(\theta - \tilde{\mu}_n(\bar{x}))^2] \right\},$$

其中  $-\infty < \theta < \infty$ ,  $\sigma^2 > 0$ , 而  $c' = \sqrt{\frac{k_n}{2\pi}} \cdot \frac{(\beta_n)^{\nu_n/2}}{2^{\nu_n/2} \Gamma(\nu_n/2)}$ .

## $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知的情形

- 因此有

$$\pi(\theta, \sigma^2 | t) \propto (\sigma^2)^{-(\frac{\nu_n+1}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [\beta_n + k_n(\theta - \tilde{\mu}_n(\bar{x}))^2] \right\},$$

- 此处  $\nu_n = n + r$ ,  $k_n = n + k$ , 而

$$\tilde{\mu}_n(\bar{x}) = \frac{n\bar{x} + k\mu}{n + k}, \quad \beta_n = (n - 1)s^2 + \frac{nk}{n + k}(\bar{x} - \mu)^2 + \lambda.$$

- 添加正则化常数得到联合后验密度

$$\pi(\theta, \sigma^2 | t) = c' (\sigma^2)^{-(\frac{\nu_n+1}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [\beta_n + k_n(\theta - \tilde{\mu}_n(\bar{x}))^2] \right\},$$

其中  $-\infty < \theta < \infty$ ,  $\sigma^2 > 0$ , 而  $c' = \sqrt{\frac{k_n}{2\pi}} \cdot \frac{(\beta_n)^{\nu_n/2}}{2^{\nu_n/2} \Gamma(\nu_n/2)}$ .

## $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知的情形

- 因此有

$$\pi(\theta, \sigma^2 | t) \propto (\sigma^2)^{-(\frac{\nu_n+1}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [\beta_n + k_n(\theta - \tilde{\mu}_n(\bar{x}))^2] \right\},$$

- 此处  $\nu_n = n + r$ ,  $k_n = n + k$ , 而

$$\tilde{\mu}_n(\bar{x}) = \frac{n\bar{x} + k\mu}{n + k}, \quad \beta_n = (n - 1)s^2 + \frac{nk}{n + k}(\bar{x} - \mu)^2 + \lambda.$$

- 添加正则化常数得到联合后验密度

$$\pi(\theta, \sigma^2 | t) = c' (\sigma^2)^{-(\frac{\nu_n+1}{2}+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [\beta_n + k_n(\theta - \tilde{\mu}_n(\bar{x}))^2] \right\},$$

其中  $-\infty < \theta < \infty$ ,  $\sigma^2 > 0$ , 而  $c' = \sqrt{\frac{k_n}{2\pi}} \cdot \frac{(\beta_n)^{\nu_n/2}}{2^{\nu_n/2} \Gamma(\nu_n/2)}$ .

## 3.2 正态总体参数的后验分布

## 3.2.3 正态总体参数在共轭先验分布下的后验分布

 $\theta$  和  $\sigma^2$  皆未知的情形

- 对联合后验密度关于  $\sigma^2$  积分得到  $\theta$  的边缘后验密度

$$\begin{aligned}\pi(\theta|t) &= \int_0^\infty \pi(\theta, \sigma^2|t) d\sigma^2 \\ &= c' 2^{\frac{\nu_n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu_n+1}{2}\right) \left[\beta_n + k_n(\theta - \tilde{\mu}_n(\bar{x}))^2\right]^{-\frac{\nu_n+1}{2}} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_n}{2}\right) \sqrt{\pi\nu_n}} \cdot \frac{1}{\tau_n} \cdot \left[1 + \frac{1}{\nu_n} \left(\frac{\theta - \tilde{\mu}_n(\bar{x})}{\tau_n}\right)^2\right]^{-\frac{\nu_n+1}{2}}, \quad (3.2.23)\end{aligned}$$

- 这是是广义一元  $t$  分布  $\mathcal{T}_1(\nu_n, \tilde{\mu}_n(\bar{x}), \tau_n^2)$  的密度函数.



## $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知的情形

- 对联合后验密度关于  $\sigma^2$  积分得到  $\theta$  的边缘后验密度

$$\begin{aligned}\pi(\theta|t) &= \int_0^\infty \pi(\theta, \sigma^2|t) d\sigma^2 \\ &= c' 2^{\frac{\nu_n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu_n+1}{2}\right) \left[\beta_n + k_n(\theta - \tilde{\mu}_n(\bar{x}))^2\right]^{-\frac{\nu_n+1}{2}} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_n}{2}\right) \sqrt{\pi\nu_n}} \cdot \frac{1}{\tau_n} \cdot \left[1 + \frac{1}{\nu_n} \left(\frac{\theta - \tilde{\mu}_n(\bar{x})}{\tau_n}\right)^2\right]^{-\frac{\nu_n+1}{2}}, \quad (3.2.23)\end{aligned}$$

- 这是是广义一元  $t$  分布  $\mathcal{T}_1(\nu_n, \tilde{\mu}_n(\bar{x}), \tau_n^2)$  的密度函数.

## $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知的情形

- 对联合后验密度关于  $\theta$  积分得到  $\sigma^2$  的边缘后验密度

$$\begin{aligned}\pi(\sigma^2|t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta, \sigma^2|t) d\theta \\ &= \frac{(\beta_n/2)^{\nu_n/2}}{\Gamma(\nu_n/2)} (\sigma^2)^{-(\frac{\nu_n}{2}+1)} \exp\left\{-\frac{\beta_n}{2\sigma^2}\right\}, \quad \sigma^2 > 0. \quad (3.2.24)\end{aligned}$$

- 这是一个逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(\nu_n/2, \beta_n/2)$  的密度函数.
- 在公式 (3.2.23) 和 (3.2.24) 中

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_n(\bar{x}) &= \frac{n\bar{x} + k\mu}{n+k}, \quad \beta_n = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \lambda + \frac{nk}{n+k} (\bar{x} - \mu)^2, \\ \nu_n &= n+r, \quad k_n = n+k, \quad \tau_n^2 = \frac{\beta_n}{\nu_n k_n}.\end{aligned} \quad (3.2.25)$$

## $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知的情形

- 对联合后验密度关于  $\theta$  积分得到  $\sigma^2$  的边缘后验密度

$$\begin{aligned}\pi(\sigma^2|t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta, \sigma^2|t) d\theta \\ &= \frac{(\beta_n/2)^{\nu_n/2}}{\Gamma(\nu_n/2)} (\sigma^2)^{-(\frac{\nu_n}{2}+1)} \exp\left\{-\frac{\beta_n}{2\sigma^2}\right\}, \quad \sigma^2 > 0. \quad (3.2.24)\end{aligned}$$

- 这是一个逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(\nu_n/2, \beta_n/2)$  的密度函数.
- 在公式 (3.2.23) 和 (3.2.24) 中

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_n(\bar{x}) &= \frac{n\bar{x} + k\mu}{n+k}, \quad \beta_n = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \lambda + \frac{nk}{n+k} (\bar{x} - \mu)^2, \\ \nu_n &= n+r, \quad k_n = n+k, \quad \tau_n^2 = \frac{\beta_n}{\nu_n k_n}.\end{aligned} \quad (3.2.25)$$

## $\theta$ 和 $\sigma^2$ 皆未知的情形

- 对联合后验密度关于  $\theta$  积分得到  $\sigma^2$  的边缘后验密度

$$\begin{aligned}\pi(\sigma^2|t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta, \sigma^2|t) d\theta \\ &= \frac{(\beta_n/2)^{\nu_n/2}}{\Gamma(\nu_n/2)} (\sigma^2)^{-(\frac{\nu_n}{2}+1)} \exp\left\{-\frac{\beta_n}{2\sigma^2}\right\}, \quad \sigma^2 > 0. \quad (3.2.24)\end{aligned}$$

- 这是一个逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(\nu_n/2, \beta_n/2)$  的密度函数.
- 在公式 (3.2.23) 和 (3.2.24) 中

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_n(\bar{x}) &= \frac{n\bar{x} + k\mu}{n+k}, \quad \beta_n = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \lambda + \frac{nk}{n+k} (\bar{x} - \mu)^2, \\ \nu_n &= n + r, \quad k_n = n + k, \quad \tau_n^2 = \frac{\beta_n}{\nu_n k_n}.\end{aligned} \quad (3.2.25)$$

## 正态总体参数在共轭先验下后验分布的主要结论

**定理 3.2.2** 设样本分布为正态分布 (3.2.1), 其参数的后验分布有下列结论:

(1) 若  $\sigma^2$  已知, 当均值参数  $\theta$  的共轭先验由 (3.2.13) 给出时, 则  $\theta$  后验密度为由 (3.2.16) 给出的正态分布  $N(\mu_n(\bar{x}), \eta_n^2)$ , 其中  $\mu_n(\bar{x}), \eta_n$  由式 (3.2.15) 给出.

(2) 若  $\theta$  已知, 当刻度参数  $\sigma^2$  的共轭先验由 (3.2.19) 给出时, 则  $\sigma^2$  的后验密度  $\Gamma^{-1}((n+r)/2, (t+\lambda)/2)$  由 (3.2.20) 给出, 其中  $t = \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2$ .

(3) 若  $\theta$  和  $\sigma^2$  的联合先验分布为由 (3.2.22) 给出的正态-逆伽玛先验, 则  $\theta$  的边缘后验密度为由 (3.2.23) 给出的广义一元  $t$  分布  $\mathcal{T}_1(\nu_n, \tilde{\mu}_n(\bar{x}), \tau_n^2)$ ;  $\sigma^2$  的边缘后验密度为由 (3.2.24) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(\nu_n/2, \beta_n/2)$ , 其中  $\nu_n, \tilde{\mu}_n(\bar{x}), \tau_n, \beta_n$  由 (3.2.25) 式给出.

## 正态总体参数在共轭先验下后验分布的主要结论

**定理 3.2.2** 设样本分布为正态分布 (3.2.1), 其参数的后验分布有下列结论:

(1) 若  $\sigma^2$  已知, 当均值参数  $\theta$  的共轭先验由 (3.2.13) 给出时, 则  $\theta$  后验密度为由 (3.2.16) 给出的正态分布  $N(\mu_n(\bar{x}), \eta_n^2)$ , 其中  $\mu_n(\bar{x}), \eta_n$  由式 (3.2.15) 给出.

(2) 若  $\theta$  已知, 当刻度参数  $\sigma^2$  的共轭先验由 (3.2.19) 给出时, 则  $\sigma^2$  的后验密度  $\Gamma^{-1}((n+r)/2, (t+\lambda)/2)$  由 (3.2.20) 给出, 其中  $t = \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2$ .

(3) 若  $\theta$  和  $\sigma^2$  的联合先验分布为由 (3.2.22) 给出的正态-逆伽玛先验, 则  $\theta$  的边缘后验密度为由 (3.2.23) 给出的广义一元  $t$  分布  $\mathcal{T}_1(\nu_n, \tilde{\mu}_n(\bar{x}), \tau_n^2)$ ;  $\sigma^2$  的边缘后验密度为由 (3.2.24) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(\nu_n/2, \beta_n/2)$ , 其中  $\nu_n, \tilde{\mu}_n(\bar{x}), \tau_n, \beta_n$  由 (3.2.25) 式给出.

## 正态总体参数在共轭先验下后验分布的主要结论

**定理 3.2.2** 设样本分布为正态分布 (3.2.1), 其参数的后验分布有下列结论:

(1) 若  $\sigma^2$  已知, 当均值参数  $\theta$  的共轭先验由 (3.2.13) 给出时, 则  $\theta$  后验密度为由 (3.2.16) 给出的正态分布  $N(\mu_n(\bar{x}), \eta_n^2)$ , 其中  $\mu_n(\bar{x}), \eta_n$  由式 (3.2.15) 给出.

(2) 若  $\theta$  已知, 当刻度参数  $\sigma^2$  的共轭先验由 (3.2.19) 给出时, 则  $\sigma^2$  的后验密度  $\Gamma^{-1}((n+r)/2, (t+\lambda)/2)$  由 (3.2.20) 给出, 其中  $t = \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2$ .

(3) 若  $\theta$  和  $\sigma^2$  的联合先验分布为由 (3.2.22) 给出的正态-逆伽玛先验, 则  $\theta$  的边缘后验密度为由 (3.2.23) 给出的广义一元  $t$  分布  $\mathcal{T}_1(\nu_n, \tilde{\mu}_n(\bar{x}), \tau_n^2)$ ;  $\sigma^2$  的边缘后验密度为由 (3.2.24) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(\nu_n/2, \beta_n/2)$ , 其中  $\nu_n, \tilde{\mu}_n(\bar{x}), \tau_n, \beta_n$  由 (3.2.25) 式给出.

## 正态总体参数在共轭先验下后验分布的主要结论

**定理 3.2.2** 设样本分布为正态分布 (3.2.1), 其参数的后验分布有下列结论:

(1) 若  $\sigma^2$  已知, 当均值参数  $\theta$  的共轭先验由 (3.2.13) 给出时, 则  $\theta$  后验密度为由 (3.2.16) 给出的正态分布  $N(\mu_n(\bar{x}), \eta_n^2)$ , 其中  $\mu_n(\bar{x}), \eta_n$  由式 (3.2.15) 给出.

(2) 若  $\theta$  已知, 当刻度参数  $\sigma^2$  的共轭先验由 (3.2.19) 给出时, 则  $\sigma^2$  的后验密度  $\Gamma^{-1}((n+r)/2, (t+\lambda)/2)$  由 (3.2.20) 给出, 其中  $t = \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2$ .

(3) 若  $\theta$  和  $\sigma^2$  的联合先验分布为由 (3.2.22) 给出的正态-逆伽玛先验, 则  $\theta$  的边缘后验密度为由 (3.2.23) 给出的广义一元  $t$  分布  $\mathcal{T}_1(\nu_n, \tilde{\mu}_n(\bar{x}), \tau_n^2)$ ;  $\sigma^2$  的边缘后验密度为由 (3.2.24) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(\nu_n/2, \beta_n/2)$ , 其中  $\nu_n, \tilde{\mu}_n(\bar{x}), \tau_n, \beta_n$  由 (3.2.25) 式给出.



### 1 3.1 后验分布与充分性

- 3.1.1 后验分布的计算公式
- 3.1.2 后验分布与充分性

### 2 3.2 正态总体参数的后验分布

- 3.2.1 引言
- 3.2.2 正态总体无信息先验下的后验分布
- 3.2.3 正态总体参数在共轭先验分布下的后验分布

### 3 3.3 一类离散分布和多项分布参数的后验分布

- 3.3.1 一类离散分布参数的后验分布
- 3.3.2 多项分布中参数的后验分布

### 4 3.4 寿命分布参数的后验分布

- 3.4.1 伽玛分布情形
- 3.4.2 指数分布及其定数截尾情形时参数的后验分布

### 5 3.5 泊松分布和均匀分布参数的后验分布

- 3.5.1 泊松分布参数的后验分布
- 3.5.2 均匀分布参数的后验分布

# 引言

- 下列几个离散分布族皆与独立的贝努利 (Bernoulli) 试验有关, 且它们具有相同的共轭先验, 因此本节我们将它们统一处理, 而不是各自考虑它们的后验分布.
- 设离散随机变量  $X$  的概率分布有下列形式:

$$f(x|\theta) = P(X = x|\theta) = h(x) \theta^{b(x)} (1 - \theta)^{d(x)}, \quad (3.3.1)$$

其中  $b(x)$  和  $d(x)$  取值为非负整数.

- 此类分布包含下列几个常见的分布:

# 引言

- 下列几个离散分布族皆与独立的贝努利 (Bernoulli) 试验有关, 且它们具有相同的共轭先验, 因此本节我们将它们统一处理, 而不是各自考虑它们的后验分布.
- 设离散随机变量  $X$  的概率分布有下列形式:

$$f(x|\theta) = P(X = x|\theta) = h(x) \theta^{b(x)} (1 - \theta)^{d(x)}, \quad (3.3.1)$$

其中  $b(x)$  和  $d(x)$  取值为非负整数.

- 此类分布包含下列几个常见的分布:

# 引言

- 下列几个离散分布族皆与独立的贝努利 (Bernoulli) 试验有关, 且它们具有相同的共轭先验, 因此本节我们将它们统一处理, 而不是各自考虑它们的后验分布.
- 设离散随机变量  $X$  的概率分布有下列形式:

$$f(x|\theta) = P(X = x|\theta) = h(x) \theta^{b(x)} (1 - \theta)^{d(x)}, \quad (3.3.1)$$

其中  $b(x)$  和  $d(x)$  取值为非负整数.

- 此类分布包含下列几个常见的分布:

# 引言

(1) 两点分布  $B(1, \theta)$ :  $h(x) = 1$ ,  $b(x) = x$ ,  $d(x) = 1 - x$ , 即

$$f(x|\theta) = P(X = x|\theta) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

(2) 二项分布  $B(n, \theta)$ :  $h(x) = \binom{n}{x}$ ,  $b(x) = x$ ,  $d(x) = n - x$ , 即

$$f(x|\theta) = P(X = x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

(3) 几何分布  $Ge(\theta)$ :  $h(x) = 1$ ,  $b(x) = 1$ ,  $d(x) = x - 1$ , 即

$$f(x|\theta) = P(X = x|\theta) = \theta(1 - \theta)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots.$$

(4) 负二项分布  $Nb(r, \theta)$ :  $h(x) = \binom{x-1}{r-1}$ ,  $b(x) = r$ ,  $d(x) = x - r$ , 即

$$f(x|\theta) = P(X = x|\theta) = \binom{x-1}{r-1} \theta^r (1 - \theta)^{x-r}, \quad x = r, r+1, \dots.$$

# 引言

(1) 两点分布  $B(1, \theta)$ :  $h(x) = 1$ ,  $b(x) = x$ ,  $d(x) = 1 - x$ , 即

$$f(x|\theta) = P(X = x|\theta) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

(2) 二项分布  $B(n, \theta)$ :  $h(x) = \binom{n}{x}$ ,  $b(x) = x$ ,  $d(x) = n - x$ , 即

$$f(x|\theta) = P(X = x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

(3) 几何分布  $Ge(\theta)$ :  $h(x) = 1$ ,  $b(x) = 1$ ,  $d(x) = x - 1$ , 即

$$f(x|\theta) = P(X = x|\theta) = \theta(1 - \theta)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots.$$

(4) 负二项分布  $Nb(r, \theta)$ :  $h(x) = \binom{x-1}{r-1}$ ,  $b(x) = r$ ,  $d(x) = x - r$ , 即

$$f(x|\theta) = P(X = x|\theta) = \binom{x-1}{r-1} \theta^r (1 - \theta)^{x-r}, \quad x = r, r+1, \dots.$$

# 引言

(1) 两点分布  $B(1, \theta)$ :  $h(x) = 1$ ,  $b(x) = x$ ,  $d(x) = 1 - x$ , 即

$$f(x|\theta) = P(X = x|\theta) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

(2) 二项分布  $B(n, \theta)$ :  $h(x) = \binom{n}{x}$ ,  $b(x) = x$ ,  $d(x) = n - x$ , 即

$$f(x|\theta) = P(X = x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

(3) 几何分布  $Ge(\theta)$ :  $h(x) = 1$ ,  $b(x) = 1$ ,  $d(x) = x - 1$ , 即

$$f(x|\theta) = P(X = x|\theta) = \theta(1 - \theta)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots.$$

(4) 负二项分布  $Nb(r, \theta)$ :  $h(x) = \binom{x-1}{r-1}$ ,  $b(x) = r$ ,  $d(x) = x - r$ , 即

$$f(x|\theta) = P(X = x|\theta) = \binom{x-1}{r-1} \theta^r (1 - \theta)^{x-r}, \quad x = r, r+1, \dots.$$

# 引言

(1) 两点分布  $B(1, \theta)$ :  $h(x) = 1$ ,  $b(x) = x$ ,  $d(x) = 1 - x$ , 即

$$f(x|\theta) = P(X = x|\theta) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

(2) 二项分布  $B(n, \theta)$ :  $h(x) = \binom{n}{x}$ ,  $b(x) = x$ ,  $d(x) = n - x$ , 即

$$f(x|\theta) = P(X = x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

(3) 几何分布  $Ge(\theta)$ :  $h(x) = 1$ ,  $b(x) = 1$ ,  $d(x) = x - 1$ , 即

$$f(x|\theta) = P(X = x|\theta) = \theta(1 - \theta)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots.$$

(4) 负二项分布  $Nb(r, \theta)$ :  $h(x) = \binom{x-1}{r-1}$ ,  $b(x) = r$ ,  $d(x) = x - r$ , 即

$$f(x|\theta) = P(X = x|\theta) = \binom{x-1}{r-1} \theta^r (1 - \theta)^{x-r}, \quad x = r, r+1, \dots.$$



# 1. 参数的先验分布为无信息先验时的后验分布

- 由 (3.3.1) 可知  $\theta$  的似然函数

$$l(\theta|x) \propto \theta^{b(x)}(1-\theta)^{d(x)}, \quad b(x) \text{ 和 } d(x) \text{ 取值为非负整数}$$

- 令  $\theta$  的先验为  $\pi(\theta) \equiv 1$  时可知  $\theta$  的后验密度为

$$\pi(\theta|x) \propto \theta^{b(x)}(1-\theta)^{d(x)}, \quad b(x) \text{ 和 } d(x) \text{ 取值为非负整数}.$$

- 上式为贝塔分布  $Be(b(x)+1, d(x)+1)$  的核, 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|x) = \frac{\Gamma(b(x) + d(x) + 2)}{\Gamma(b(x) + 1) \Gamma(d(x) + 1)} \theta^{b(x)}(1-\theta)^{d(x)}, \quad (3.3.3)$$

即  $\theta$  的后验分布是贝塔分布  $Be(b(x)+1, d(x)+1)$ .

# 1. 参数的先验分布为无信息先验时的后验分布

- 由 (3.3.1) 可知  $\theta$  的似然函数

$$l(\theta|x) \propto \theta^{b(x)}(1-\theta)^{d(x)}, \quad b(x) \text{ 和 } d(x) \text{ 取值为非负整数}$$

- 令  $\theta$  的先验为  $\pi(\theta) \equiv 1$  时可知  $\theta$  的后验密度为

$$\pi(\theta|x) \propto \theta^{b(x)}(1-\theta)^{d(x)}, \quad b(x) \text{ 和 } d(x) \text{ 取值为非负整数.}$$

- 上式为贝塔分布  $Be(b(x)+1, d(x)+1)$  的核, 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|x) = \frac{\Gamma(b(x) + d(x) + 2)}{\Gamma(b(x) + 1) \Gamma(d(x) + 1)} \theta^{b(x)}(1-\theta)^{d(x)}, \quad (3.3.3)$$

即  $\theta$  的后验分布是贝塔分布  $Be(b(x)+1, d(x)+1)$ .

# 1. 参数的先验分布为无信息先验时的后验分布

- 由 (3.3.1) 可知  $\theta$  的似然函数

$$l(\theta|x) \propto \theta^{b(x)}(1-\theta)^{d(x)}, \quad b(x) \text{ 和 } d(x) \text{ 取值为非负整数}$$

- 令  $\theta$  的先验为  $\pi(\theta) \equiv 1$  时可知  $\theta$  的后验密度为

$$\pi(\theta|x) \propto \theta^{b(x)}(1-\theta)^{d(x)}, \quad b(x) \text{ 和 } d(x) \text{ 取值为非负整数}.$$

- 上式为贝塔分布  $Be(b(x)+1, d(x)+1)$  的核, 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|x) = \frac{\Gamma(b(x) + d(x) + 2)}{\Gamma(b(x) + 1) \Gamma(d(x) + 1)} \theta^{b(x)}(1-\theta)^{d(x)}, \quad (3.3.3)$$

即  $\theta$  的后验分布是贝塔分布  $Be(b(x)+1, d(x)+1)$ .

## 2. 参数的先验分布为共轭先验时的后验分布

- 令  $\theta$  的共轭先验分布为贝塔分布  $Be(\alpha, \beta)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1} \propto \theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1}, \quad (3.3.4)$$

其中  $0 < \theta < 1$ .

- 故  $\theta$  的后验密度

$$\pi(\theta|x) \propto l(\theta|x)\pi(\theta) \propto \theta^{b(x)+\alpha-1} (1 - \theta)^{d(x)+\beta-1}, \quad 0 < \theta < 1,$$

- 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|x) = \frac{\Gamma(b(x) + d(x) + \alpha + \beta)}{\Gamma(b(x) + \alpha)\Gamma(d(x) + \beta)} \theta^{b(x)+\alpha-1} (1 - \theta)^{d(x)+\beta-1}, \quad (3.3.5)$$

其中  $0 < \theta < 1$ . 即  $\theta$  的后验分布是  $Be(b(x) + \alpha, d(x) + \beta)$ .

## 2. 参数的先验分布为共轭先验时的后验分布

- 令  $\theta$  的共轭先验分布为贝塔分布  $Be(\alpha, \beta)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1} \propto \theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1}, \quad (3.3.4)$$

其中  $0 < \theta < 1$ .

- 故  $\theta$  的后验密度

$$\pi(\theta|x) \propto l(\theta|x)\pi(\theta) \propto \theta^{b(x)+\alpha-1} (1 - \theta)^{d(x)+\beta-1}, \quad 0 < \theta < 1,$$

- 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|x) = \frac{\Gamma(b(x) + d(x) + \alpha + \beta)}{\Gamma(b(x) + \alpha)\Gamma(d(x) + \beta)} \theta^{b(x)+\alpha-1} (1 - \theta)^{d(x)+\beta-1}, \quad (3.3.5)$$

其中  $0 < \theta < 1$ . 即  $\theta$  的后验分布是  $Be(b(x) + \alpha, d(x) + \beta)$ .

## 2. 参数的先验分布为共轭先验时的后验分布

- 令  $\theta$  的共轭先验分布为贝塔分布  $Be(\alpha, \beta)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1} \propto \theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1}, \quad (3.3.4)$$

其中  $0 < \theta < 1$ .

- 故  $\theta$  的后验密度

$$\pi(\theta|x) \propto l(\theta|x)\pi(\theta) \propto \theta^{b(x)+\alpha-1} (1 - \theta)^{d(x)+\beta-1}, \quad 0 < \theta < 1,$$

- 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|x) = \frac{\Gamma(b(x) + d(x) + \alpha + \beta)}{\Gamma(b(x) + \alpha)\Gamma(d(x) + \beta)} \theta^{b(x)+\alpha-1} (1 - \theta)^{d(x)+\beta-1}, \quad (3.3.5)$$

其中  $0 < \theta < 1$ . 即  $\theta$  的后验分布是  $Be(b(x) + \alpha, d(x) + \beta)$ .

## 结论和例子

- **定理 3.3.2** 设随机变量  $X$  的分布由式 (3.3.1) 给出, 在一定的先验分布下, 关于  $\theta$  的后验分布有下列结论:
  - (1) 若  $\theta$  的无信息先验为  $\pi(\theta) \equiv 1$ , 则  $\theta$  后验密度为 (3.3.3) 给出的贝塔分布  $Be(b(x) + 1, d(x) + 1)$ .
  - (2) 若  $\theta$  的先验为 (3.3.4) 给出的贝塔分布  $Be(\alpha, \beta)$ , 则  $\theta$  的后验密度为 (3.3.5) 给出的贝塔分布  $Be(b(x) + \alpha, d(x) + \beta)$ .
- **例 3.3.1** 设随机变量  $X$  服从二项分布  $B(n, \theta)$ , 在下列先验分布下求其后验分布:
  - (1)  $\theta$  的无信息先验为  $\pi(\theta) \equiv 1$ .
  - (2)  $\theta$  的共轭先验为贝塔分布  $Be(\alpha, \beta)$ .
  - (3)  $\theta$  的无信息先验为 Jeffreys 先验  $\pi(\theta) \propto \theta^{-1/2}(1-\theta)^{-1/2}$ .

## 结论和例子

- **定理 3.3.2** 设随机变量  $X$  的分布由式 (3.3.1) 给出, 在一定的先验分布下, 关于  $\theta$  的后验分布有下列结论:
  - (1) 若  $\theta$  的无信息先验为  $\pi(\theta) \equiv 1$ , 则  $\theta$  后验密度为 (3.3.3) 给出的贝塔分布  $Be(b(x) + 1, d(x) + 1)$ .
  - (2) 若  $\theta$  的先验为 (3.3.4) 给出的贝塔分布  $Be(\alpha, \beta)$ , 则  $\theta$  的后验密度为 (3.3.5) 给出的贝塔分布  $Be(b(x) + \alpha, d(x) + \beta)$ .
- **例 3.3.1** 设随机变量  $X$  服从二项分布  $B(n, \theta)$ , 在下列先验分布下求其后验分布:
  - (1)  $\theta$  的无信息先验为  $\pi(\theta) \equiv 1$ .
  - (2)  $\theta$  的共轭先验为贝塔分布  $Be(\alpha, \beta)$ .
  - (3)  $\theta$  的无信息先验为 Jeffreys 先验  $\pi(\theta) \propto \theta^{-1/2}(1-\theta)^{-1/2}$ .



## 结论和例子

- **定理 3.3.2** 设随机变量  $X$  的分布由式 (3.3.1) 给出, 在一定的先验分布下, 关于  $\theta$  的后验分布有下列结论:
  - (1) 若  $\theta$  的无信息先验为  $\pi(\theta) \equiv 1$ , 则  $\theta$  后验密度为 (3.3.3) 给出的贝塔分布  $Be(b(x) + 1, d(x) + 1)$ .
  - (2) 若  $\theta$  的先验为 (3.3.4) 给出的贝塔分布  $Be(\alpha, \beta)$ , 则  $\theta$  的后验密度为 (3.3.5) 给出的贝塔分布  $Be(b(x) + \alpha, d(x) + \beta)$ .
- **例 3.3.1** 设随机变量  $X$  服从二项分布  $B(n, \theta)$ , 在下列先验分布下求其后验分布:
  - (1)  $\theta$  的无信息先验为  $\pi(\theta) \equiv 1$ .
  - (2)  $\theta$  的共轭先验为贝塔分布  $Be(\alpha, \beta)$ .
  - (3)  $\theta$  的无信息先验为 Jeffreys 先验  $\pi(\theta) \propto \theta^{-1/2}(1-\theta)^{-1/2}$ .

## 结论和例子

- **定理 3.3.2** 设随机变量  $X$  的分布由式 (3.3.1) 给出, 在一定的先验分布下, 关于  $\theta$  的后验分布有下列结论:
  - (1) 若  $\theta$  的无信息先验为  $\pi(\theta) \equiv 1$ , 则  $\theta$  后验密度为 (3.3.3) 给出的贝塔分布  $Be(b(x) + 1, d(x) + 1)$ .
  - (2) 若  $\theta$  的先验为 (3.3.4) 给出的贝塔分布  $Be(\alpha, \beta)$ , 则  $\theta$  的后验密度为 (3.3.5) 给出的贝塔分布  $Be(b(x) + \alpha, d(x) + \beta)$ .
- **例 3.3.1** 设随机变量  $X$  服从二项分布  $B(n, \theta)$ , 在下列先验分布下求其后验分布:
  - (1)  $\theta$  的无信息先验为  $\pi(\theta) \equiv 1$ .
  - (2)  $\theta$  的共轭先验为贝塔分布  $Be(\alpha, \beta)$ .
  - (3)  $\theta$  的无信息先验为 Jeffreys 先验  $\pi(\theta) \propto \theta^{-1/2}(1-\theta)^{-1/2}$ .

## 结论和例子

- **定理 3.3.2** 设随机变量  $X$  的分布由式 (3.3.1) 给出, 在一定的先验分布下, 关于  $\theta$  的后验分布有下列结论:
  - (1) 若  $\theta$  的无信息先验为  $\pi(\theta) \equiv 1$ , 则  $\theta$  后验密度为 (3.3.3) 给出的贝塔分布  $Be(b(x) + 1, d(x) + 1)$ .
  - (2) 若  $\theta$  的先验为 (3.3.4) 给出的贝塔分布  $Be(\alpha, \beta)$ , 则  $\theta$  的后验密度为 (3.3.5) 给出的贝塔分布  $Be(b(x) + \alpha, d(x) + \beta)$ .
- **例 3.3.1** 设随机变量  $X$  服从二项分布  $B(n, \theta)$ , 在下列先验分布下求其后验分布:
  - (1)  $\theta$  的无信息先验为  $\pi(\theta) \equiv 1$ .
  - (2)  $\theta$  的共轭先验为贝塔分布  $Be(\alpha, \beta)$ .
  - (3)  $\theta$  的无信息先验为 Jeffreys 先验  $\pi(\theta) \propto \theta^{-1/2}(1-\theta)^{-1/2}$ .

## 结论和例子

- **定理 3.3.2** 设随机变量  $X$  的分布由式 (3.3.1) 给出, 在一定的先验分布下, 关于  $\theta$  的后验分布有下列结论:
  - (1) 若  $\theta$  的无信息先验为  $\pi(\theta) \equiv 1$ , 则  $\theta$  后验密度为 (3.3.3) 给出的贝塔分布  $Be(b(x) + 1, d(x) + 1)$ .
  - (2) 若  $\theta$  的先验为 (3.3.4) 给出的贝塔分布  $Be(\alpha, \beta)$ , 则  $\theta$  的后验密度为 (3.3.5) 给出的贝塔分布  $Be(b(x) + \alpha, d(x) + \beta)$ .
- **例 3.3.1** 设随机变量  $X$  服从二项分布  $B(n, \theta)$ , 在下列先验分布下求其后验分布:
  - (1)  $\theta$  的无信息先验为  $\pi(\theta) \equiv 1$ .
  - (2)  $\theta$  的共轭先验为贝塔分布  $Be(\alpha, \beta)$ .
  - (3)  $\theta$  的无信息先验为 Jeffreys 先验  $\pi(\theta) \propto \theta^{-1/2}(1-\theta)^{-1/2}$ .

## 结论和例子

- **定理 3.3.2** 设随机变量  $X$  的分布由式 (3.3.1) 给出, 在一定的先验分布下, 关于  $\theta$  的后验分布有下列结论:
  - (1) 若  $\theta$  的无信息先验为  $\pi(\theta) \equiv 1$ , 则  $\theta$  后验密度为 (3.3.3) 给出的贝塔分布  $Be(b(x) + 1, d(x) + 1)$ .
  - (2) 若  $\theta$  的先验为 (3.3.4) 给出的贝塔分布  $Be(\alpha, \beta)$ , 则  $\theta$  的后验密度为 (3.3.5) 给出的贝塔分布  $Be(b(x) + \alpha, d(x) + \beta)$ .
- **例 3.3.1** 设随机变量  $X$  服从二项分布  $B(n, \theta)$ , 在下列先验分布下求其后验分布:
  - (1)  $\theta$  的无信息先验为  $\pi(\theta) \equiv 1$ .
  - (2)  $\theta$  的共轭先验为贝塔分布  $Be(\alpha, \beta)$ .
  - (3)  $\theta$  的无信息先验为 Jeffreys 先验  $\pi(\theta) \propto \theta^{-1/2}(1-\theta)^{-1/2}$ .

# 1. 无信息先验下多项分布参数的后验分布

- 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  服从多项分布  $M(n, \boldsymbol{\theta})$ , 其中  $X_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^k X_i = n$ ,  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ ,  $\theta_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \theta_i = 1$ , 故独立参数只有  $k-1$  个. 因此  $\mathbf{X}$  的概率分布为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta}) &= P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k | \boldsymbol{\theta}) \\ &= c \cdot \left( \prod_{i=1}^{k-1} \theta_i^{x_i} \right) \left( 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \right)^{x_k}, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

其中  $c = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!}$ . 上述概率函数即  $\boldsymbol{\theta}$  的似然函数, 记为  $l(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x})$ .

- 对数似然函数为

$$\begin{aligned} \ln l(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^k x_i \ln \theta_i + \ln c \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} x_i \ln \theta_i + \left( n - \sum_{i=1}^{k-1} x_i \right) \ln \left( 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \right) + \ln c. \end{aligned}$$

# 1. 无信息先验下多项分布参数的后验分布

- 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  服从多项分布  $M(n, \boldsymbol{\theta})$ , 其中  $X_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^k X_i = n$ ,  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ ,  $\theta_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \theta_i = 1$ , 故独立参数只有  $k-1$  个. 因此  $\mathbf{X}$  的概率分布为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta}) &= P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k | \boldsymbol{\theta}) \\ &= c \cdot \left( \prod_{i=1}^{k-1} \theta_i^{x_i} \right) \left( 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \right)^{x_k}, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

其中  $c = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!}$ . 上述概率函数即  $\boldsymbol{\theta}$  的似然函数, 记为  $l(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x})$ .

- 对数似然函数为

$$\begin{aligned} \ln l(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^k x_i \ln \theta_i + \ln c \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} x_i \ln \theta_i + \left( n - \sum_{i=1}^{k-1} x_i \right) \ln \left( 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \right) + \ln c. \end{aligned}$$

## 无信息先验下多项分布参数的后验分布

$\theta$  的无信息先验分布由 Fisher 信息阵  $[\det I(\theta)]^{1/2}$  确定. 下面计算 Fisher 信息阵的每个元素

$$\frac{\partial^2 \ln l}{\partial \theta_i^2} = -\frac{x_i}{\theta_i^2} - \frac{x_k}{\theta_k^2}, \quad i = 1, \dots, k-1$$

$$\frac{\partial^2 \ln l}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = -\frac{x_k}{\theta_k^2}, \quad i, j = 1, \dots, k-1, i \neq j$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln l}{\partial \theta_i^2}\right) = \frac{n}{\theta_i} + \frac{n}{\theta_k}, \quad i = 1, \dots, k-1$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln l}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right) = \frac{n}{\theta_k}, \quad i, j = 1, \dots, k-1, i \neq j$$



## 无信息先验下多项分布参数的后验分布

$\theta$  的无信息先验分布由 Fisher 信息阵  $[\det I(\theta)]^{1/2}$  确定. 下面计算 Fisher 信息阵的每个元素

$$\frac{\partial^2 \ln l}{\partial \theta_i^2} = -\frac{x_i}{\theta_i^2} - \frac{x_k}{\theta_k^2}, \quad i = 1, \dots, k-1$$

$$\frac{\partial^2 \ln l}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = -\frac{x_k}{\theta_k^2}, \quad i, j = 1, \dots, k-1, i \neq j$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln l}{\partial \theta_i^2}\right) = \frac{n}{\theta_i} + \frac{n}{\theta_k}, \quad i = 1, \dots, k-1$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln l}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right) = \frac{n}{\theta_k}, \quad i, j = 1, \dots, k-1, i \neq j$$

# 无信息先验下多项分布参数的后验分布

- 故有

$$\det I(\theta) = \begin{vmatrix} n(\theta_1^{-1} + \theta_k^{-1}) & n\theta_k^{-1} & \cdots & n\theta_k^{-1} \\ n\theta_k^{-1} & n(\theta_2^{-1} + \theta_k^{-1}) & \cdots & n\theta_k^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n\theta_k^{-1} & n\theta_k^{-1} & \cdots & n(\theta_{k-1}^{-1} + \theta_k^{-1}) \end{vmatrix}$$

$$\propto (\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_k)^{-1}$$

- 从而  $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_k)$  的 Jeffreys 先验为

$$\pi(\theta) = [\det I(\theta)]^{1/2} \propto (\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_k)^{-1/2} \quad (3.3.7)$$

## 无信息先验下多项分布参数的后验分布

- 故有

$$\begin{aligned} \det I(\theta) &= \begin{vmatrix} n(\theta_1^{-1} + \theta_k^{-1}) & n\theta_k^{-1} & \cdots & n\theta_k^{-1} \\ n\theta_k^{-1} & n(\theta_2^{-1} + \theta_k^{-1}) & \cdots & n\theta_k^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n\theta_k^{-1} & n\theta_k^{-1} & \cdots & n(\theta_{k-1}^{-1} + \theta_k^{-1}) \end{vmatrix} \\ &\propto (\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_k)^{-1} \end{aligned}$$

- 从而  $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_k)$  的 Jeffreys 先验为

$$\pi(\theta) = [\det I(\theta)]^{1/2} \propto (\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_k)^{-1/2} \quad (3.3.7)$$

## 无信息先验下多项分布参数的后验分布

- 因此  $\theta$  的后验分布

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto p(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) \propto \theta_1^{x_1-1/2} \dots \theta_k^{x_k-1/2}.$$

- 添加正则化常数得到后验密度为

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(n + k/2)}{\Gamma(x_1 + 1/2) \dots \Gamma(x_k + 1/2)} \theta_1^{x_1 - \frac{1}{2}} \dots \theta_k^{x_k - \frac{1}{2}}. \quad (3.3.8)$$

这是一个 Dirichlet 分布  $D(x_1 + 1/2, \dots, x_k + 1/2)$ .

# 无信息先验下多项分布参数的后验分布

- 因此  $\theta$  的后验分布

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto p(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) \propto \theta_1^{x_1-1/2} \dots \theta_k^{x_k-1/2}.$$

- 添加正则化常数得到后验密度为

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(n + k/2)}{\Gamma(x_1 + 1/2) \dots \Gamma(x_k + 1/2)} \theta_1^{x_1 - \frac{1}{2}} \dots \theta_k^{x_k - \frac{1}{2}}. \quad (3.3.8)$$

这是一个 Dirichlet 分布  $D(x_1 + 1/2, \dots, x_k + 1/2)$ .

## 2. 共轭先验下多项分布参数的后验分布

- 由 (3.3.6) 可知  $\theta$  的似然函数为

$$l(\theta|\mathbf{x}) \propto \left( \prod_{i=1}^{k-1} \theta_i^{x_i} \right) \left( 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \right)^{x_k}.$$

- $\theta$  的先验分布为 Dirichlet 分布  $D(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_k)} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \theta_i^{\alpha_i-1} \left( 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \right)^{\alpha_k-1}, \quad (3.3.10)$$

此处  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$  已知.

- 注意 Dirichlet 分布是贝塔分布的推广, 当  $k = 2$  时它就是 Beta 分布  $Be(\alpha_1, \alpha_2)$ .

## 2. 共轭先验下多项分布参数的后验分布

- 由 (3.3.6) 可知  $\theta$  的似然函数为

$$l(\theta|\mathbf{x}) \propto \left( \prod_{i=1}^{k-1} \theta_i^{x_i} \right) \left( 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \right)^{x_k}.$$

- $\theta$  的先验分布为 Dirichlet 分布  $D(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_k)} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \theta_i^{\alpha_i-1} \left( 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \right)^{\alpha_k-1}, \quad (3.3.10)$$

此处  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$  已知.

- 注意 Dirichlet 分布是贝塔分布的推广, 当  $k = 2$  时它就是 Beta 分布  $Be(\alpha_1, \alpha_2)$ .

## 2. 共轭先验下多项分布参数的后验分布

- 由 (3.3.6) 可知  $\theta$  的似然函数为

$$l(\theta|\mathbf{x}) \propto \left( \prod_{i=1}^{k-1} \theta_i^{x_i} \right) \left( 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \right)^{x_k}.$$

- $\theta$  的先验分布为 Dirichlet 分布  $D(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_k)} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \theta_i^{\alpha_i-1} \left( 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \right)^{\alpha_k-1}, \quad (3.3.10)$$

此处  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$  已知.

- 注意 Dirichlet 分布是贝塔分布的推广, 当  $k = 2$  时它就是 Beta 分布  $Be(\alpha_1, \alpha_2)$ .



## 2. 共轭先验下多项分布参数的后验分布

- 由 (3.3.6) 可知  $\theta$  的似然函数为

$$l(\theta|\mathbf{x}) \propto \left( \prod_{i=1}^{k-1} \theta_i^{x_i} \right) \left( 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \right)^{x_k}.$$

- $\theta$  的先验分布为 Dirichlet 分布  $D(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_k)} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \theta_i^{\alpha_i-1} \left( 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \right)^{\alpha_k-1}, \quad (3.3.10)$$

此处  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$  已知.

- 注意 Dirichlet 分布是贝塔分布的推广, 当  $k = 2$  时它就是 Beta 分布  $Be(\alpha_1, \alpha_2)$ .

# 共轭先验下多项分布参数的后验分布

- $\theta$  的后验分布

$$\pi(\theta | \mathbf{x}) \propto l(\theta | \mathbf{x})\pi(\theta) \propto \prod_{i=1}^{k-1} \theta^{x_i + \alpha_i - 1} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i\right)^{x_k + \alpha_k - 1},$$

- 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta | \mathbf{x}) = c \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \theta^{x_i + \alpha_i - 1} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i\right)^{\alpha_k + x_k - 1}. \quad (3.3.11)$$

- 其中

$$c = \Gamma\left(\sum_{i=1}^k (\alpha_i + x_i)\right) / \prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i + x_i).$$

显然  $\theta$  的后验分布为 Dirichlet 分布  $D(\alpha_1 + x_1, \dots, \alpha_k + x_k)$ .

# 共轭先验下多项分布参数的后验分布

- $\theta$  的后验分布

$$\pi(\theta | \mathbf{x}) \propto l(\theta | \mathbf{x})\pi(\theta) \propto \prod_{i=1}^{k-1} \theta^{x_i + \alpha_i - 1} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i\right)^{x_k + \alpha_k - 1},$$

- 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta | \mathbf{x}) = c \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \theta^{x_i + \alpha_i - 1} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i\right)^{\alpha_k + x_k - 1}. \quad (3.3.11)$$

- 其中

$$c = \Gamma\left(\sum_{i=1}^k (\alpha_i + x_i)\right) / \prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i + x_i).$$

显然  $\theta$  的后验分布为 Dirichlet 分布  $D(\alpha_1 + x_1, \dots, \alpha_k + x_k)$ .

# 共轭先验下多项分布参数的后验分布

- $\theta$  的后验分布

$$\pi(\theta | \mathbf{x}) \propto l(\theta | \mathbf{x})\pi(\theta) \propto \prod_{i=1}^{k-1} \theta^{x_i + \alpha_i - 1} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i\right)^{x_k + \alpha_k - 1},$$

- 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta | \mathbf{x}) = c \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \theta^{x_i + \alpha_i - 1} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i\right)^{\alpha_k + x_k - 1}. \quad (3.3.11)$$

- 其中

$$c = \Gamma\left(\sum_{i=1}^k (\alpha_i + x_i)\right) / \prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i + x_i).$$

显然  $\theta$  的后验分布为 Dirichlet 分布  $D(\alpha_1 + x_1, \dots, \alpha_k + x_k)$ .

## 多项分布参数后验分布的主要结论

总结以上内容我们得到如下的结果：

**定理 3.3.2** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  服从多项分布  $M(n, \theta)$ , 在适当的先验分布下, 关于  $\theta$  的后验分布有下列结论:

(1) 若  $\theta$  的先验为由 (3.3.7) 给出的 Jeffreys 先验, 则  $\theta$  后验密度为由 (3.3.8) 给出的狄利克雷分布  $D(x_1+1/2, \dots, x_k+1/2)$ .

(2) 若  $\theta$  的共轭先验分布为由 (3.3.10) 给出的狄利克雷分布  $D(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , 则  $\theta$  的后验密度为由 (3.3.11) 给出的狄利克雷分布  $D(\alpha_1 + x_1, \dots, \alpha_k + x_k)$ .

## 多项分布参数后验分布的主要结论

总结以上内容我们得到如下的结果：

**定理 3.3.2** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  服从多项分布  $M(n, \theta)$ , 在适当的先验分布下, 关于  $\theta$  的后验分布有下列结论:

(1) 若  $\theta$  的先验为由 (3.3.7) 给出的 Jeffreys 先验, 则  $\theta$  后验密度为由 (3.3.8) 给出的狄利克雷分布  $D(x_1+1/2, \dots, x_k+1/2)$ .

(2) 若  $\theta$  的共轭先验分布为由 (3.3.10) 给出的狄利克雷分布  $D(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , 则  $\theta$  的后验密度为由 (3.3.11) 给出的狄利克雷分布  $D(\alpha_1 + x_1, \dots, \alpha_k + x_k)$ .

## 多项分布参数后验分布的主要结论

总结以上内容我们得到如下的结果：

**定理 3.3.2** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  服从多项分布  $M(n, \theta)$ , 在适当的先验分布下, 关于  $\theta$  的后验分布有下列结论:

(1) 若  $\theta$  的先验为由 (3.3.7) 给出的 Jeffreys 先验, 则  $\theta$  后验密度为由 (3.3.8) 给出的狄利克雷分布  $D(x_1+1/2, \dots, x_k+1/2)$ .

(2) 若  $\theta$  的共轭先验分布为由 (3.3.10) 给出的狄利克雷分布  $D(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , 则  $\theta$  的后验密度为由 (3.3.11) 给出的狄利克雷分布  $D(\alpha_1 + x_1, \dots, \alpha_k + x_k)$ .

### 1 3.1 后验分布与充分性

- 3.1.1 后验分布的计算公式
- 3.1.2 后验分布与充分性

### 2 3.2 正态总体参数的后验分布

- 3.2.1 引言
- 3.2.2 正态总体无信息先验下的后验分布
- 3.2.3 正态总体参数在共轭先验分布下的后验分布

### 3 3.3 一类离散分布和多项分布参数的后验分布

- 3.3.1 一类离散分布参数的后验分布
- 3.3.2 多项分布中参数的后验分布

### 4 3.4 寿命分布参数的后验分布

- 3.4.1 伽玛分布情形
- 3.4.2 指数分布及其定数截尾情形时参数的后验分布

### 5 3.5 泊松分布和均匀分布参数的后验分布

- 3.5.1 泊松分布参数的后验分布
- 3.5.2 均匀分布参数的后验分布



# 伽玛分布

- 设随机变量  $X$  服从伽玛分布  $\Gamma(r, \lambda)$ , 其密度函数为

$$f(x|\lambda) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} \exp\{-\lambda x\}, \quad 0 < x < 1, \quad (3.4.1)$$

其中  $r$  已知. 当  $r = 1$  时上式分布就变为指数分布  $Exp(\lambda)$ .

- 本节以下将分别讨论刻度参数服从无信息先验和共轭先验时的后验分布问题.

# 伽玛分布

- 设随机变量  $X$  服从伽玛分布  $\Gamma(r, \lambda)$ , 其密度函数为

$$f(x|\lambda) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} \exp\{-\lambda x\}, \quad 0 < x < 1, \quad (3.4.1)$$

其中  $r$  已知. 当  $r = 1$  时上式分布就变为指数分布  $Exp(\lambda)$ .

- 本节以下将分别讨论刻度参数服从无信息先验和共轭先验时的后验分布问题.

# 1. 伽玛分布参数服从无信息先验时的后验分布

- 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从总体  $\Gamma(r, \lambda)$  中抽取的随机样本. 由式 (3.4.1) 可知  $\lambda$  的似然函数为

$$l(\lambda|\mathbf{x}) \propto \lambda^{nr} \exp \{ - n\bar{x}\lambda \}. \quad (3.4.2)$$

- 令  $\lambda$  的 Jeffreys 无信息先验为  $\pi(\lambda) \propto 1/\lambda$ , 则  $\lambda$  的后验分布

$$\pi(\lambda|\mathbf{x}) \propto \lambda^{nr-1} \exp \{ - n\bar{x}\lambda \}.$$

这是伽玛分布  $\Gamma(nr, n\bar{x})$  的核.

- 添加正则化常数得到  $\lambda$  的后验密度

$$\pi(\lambda|\mathbf{x}) = \frac{(n\bar{x})^{nr}}{\Gamma(nr)} \lambda^{nr-1} \exp \{ - n\bar{x}\lambda \}, \quad (3.4.3)$$

其中  $0 < \lambda < \infty$ .

# 1. 伽玛分布参数服从无信息先验时的后验分布

- 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从总体  $\Gamma(r, \lambda)$  中抽取的随机样本. 由式 (3.4.1) 可知  $\lambda$  的似然函数为

$$l(\lambda|\mathbf{x}) \propto \lambda^{nr} \exp \{ - n\bar{x}\lambda \}. \quad (3.4.2)$$

- 令  $\lambda$  的 Jeffreys 无信息先验为  $\pi(\lambda) \propto 1/\lambda$ , 则  $\lambda$  的后验分布

$$\pi(\lambda|\mathbf{x}) \propto \lambda^{nr-1} \exp \{ - n\bar{x}\lambda \}.$$

这是伽玛分布  $\Gamma(nr, n\bar{x})$  的核.

- 添加正则化常数得到  $\lambda$  的后验密度

$$\pi(\lambda|\mathbf{x}) = \frac{(n\bar{x})^{nr}}{\Gamma(nr)} \lambda^{nr-1} \exp \{ - n\bar{x}\lambda \}, \quad (3.4.3)$$

其中  $0 < \lambda < \infty$ .

# 1. 伽玛分布参数服从无信息先验时的后验分布

- 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从总体  $\Gamma(r, \lambda)$  中抽取的随机样本. 由式 (3.4.1) 可知  $\lambda$  的似然函数为

$$l(\lambda|\mathbf{x}) \propto \lambda^{nr} \exp \{ - n\bar{x}\lambda \}. \quad (3.4.2)$$

- 令  $\lambda$  的 Jeffreys 无信息先验为  $\pi(\lambda) \propto 1/\lambda$ , 则  $\lambda$  的后验分布

$$\pi(\lambda|\mathbf{x}) \propto \lambda^{nr-1} \exp \{ - n\bar{x}\lambda \}.$$

这是伽玛分布  $\Gamma(nr, n\bar{x})$  的核.

- 添加正则化常数得到  $\lambda$  的后验密度

$$\pi(\lambda|\mathbf{x}) = \frac{(n\bar{x})^{nr}}{\Gamma(nr)} \lambda^{nr-1} \exp \{ - n\bar{x}\lambda \}, \quad (3.4.3)$$

其中  $0 < \lambda < \infty$ .

## 2. 伽玛分布参数服从共轭先验时的后验分布

- 设  $\lambda$  的共轭先验为伽玛分布  $\Gamma(\alpha, \beta)$ , 其密度函数为

$$\pi(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp\{-\beta\lambda\} \propto \lambda^{\alpha-1} \exp\{-\beta\lambda\}. \quad (3.4.4)$$

- 由式 (3.4.2) 和 (3.4.4) 可知  $\lambda$  的后验分布

$$\pi(\lambda|\mathbf{x}) \propto \lambda^{nr+\alpha-1} \exp\{-(n\bar{x} + \beta)\lambda\},$$

这是伽玛分布  $\Gamma(nr + \alpha, n\bar{x} + \beta)$  的核.

- 添加正则化常数得到  $\lambda$  的后验密度

$$\pi(\lambda|\mathbf{x}) = \frac{(n\bar{x} + \beta)^{nr+\alpha}}{\Gamma(nr + \alpha)} \lambda^{nr+\alpha-1} \exp\{-(n\bar{x} + \beta)\lambda\}, \quad (3.4.5)$$

其中  $0 < \lambda < \infty$ .

## 2. 伽玛分布参数服从共轭先验时的后验分布

- 设  $\lambda$  的共轭先验为伽玛分布  $\Gamma(\alpha, \beta)$ , 其密度函数为

$$\pi(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp\{-\beta\lambda\} \propto \lambda^{\alpha-1} \exp\{-\beta\lambda\}. \quad (3.4.4)$$

- 由式 (3.4.2) 和 (3.4.4) 可知  $\lambda$  的后验分布

$$\pi(\lambda|\mathbf{x}) \propto \lambda^{nr+\alpha-1} \exp\{-(n\bar{x} + \beta)\lambda\},$$

这是伽玛分布  $\Gamma(nr + \alpha, n\bar{x} + \beta)$  的核.

- 添加正则化常数得到  $\lambda$  的后验密度

$$\pi(\lambda|\mathbf{x}) = \frac{(n\bar{x} + \beta)^{nr+\alpha}}{\Gamma(nr + \alpha)} \lambda^{nr+\alpha-1} \exp\{-(n\bar{x} + \beta)\lambda\}, \quad (3.4.5)$$

其中  $0 < \lambda < \infty$ .

## 2. 伽玛分布参数服从共轭先验时的后验分布

- 设  $\lambda$  的共轭先验为伽玛分布  $\Gamma(\alpha, \beta)$ , 其密度函数为

$$\pi(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp\{-\beta\lambda\} \propto \lambda^{\alpha-1} \exp\{-\beta\lambda\}. \quad (3.4.4)$$

- 由式 (3.4.2) 和 (3.4.4) 可知  $\lambda$  的后验分布

$$\pi(\lambda|\mathbf{x}) \propto \lambda^{nr+\alpha-1} \exp\{-(n\bar{x} + \beta)\lambda\},$$

这是伽玛分布  $\Gamma(nr + \alpha, n\bar{x} + \beta)$  的核.

- 添加正则化常数得到  $\lambda$  的后验密度

$$\pi(\lambda|\mathbf{x}) = \frac{(n\bar{x} + \beta)^{nr+\alpha}}{\Gamma(nr + \alpha)} \lambda^{nr+\alpha-1} \exp\{-(n\bar{x} + \beta)\lambda\}, \quad (3.4.5)$$

其中  $0 < \lambda < \infty$ .



## 伽玛分布参数后验分布的主要结论

总结以上内容我们得到如下的结果：

**定理 3.4.1** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从伽玛分布 (3.4.1) 中抽取的随机样本, 关于  $\lambda$  的后验分布有下列结论:

(1) 当  $\lambda$  的先验为 Jeffreys 无信息先验  $\pi(\lambda) \propto 1/\lambda$  时, 则  $\lambda$  的后验密度为由 (3.4.3) 给出的伽玛分布  $\Gamma(nr, n\bar{x})$ .

(2) 当  $\lambda$  的先验为由 (3.4.4) 给出的共轭先验  $\Gamma(\alpha, \beta)$  时, 则  $\lambda$  的后验密度为由 (3.4.5) 给出的伽玛分布  $\Gamma(nr + \alpha, n\bar{x} + \beta)$ .

(3) 在式 (3.4.1) 中令  $r = 1$ , 则结论 (1) 和 (2) 给出了指数分布  $Exp(\lambda)$  中参数  $\lambda$  的后验分布的结果.

## 伽玛分布参数后验分布的主要结论

总结以上内容我们得到如下的结果：

**定理 3.4.1** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从伽玛分布 (3.4.1) 中抽取的随机样本, 关于  $\lambda$  的后验分布有下列结论:

(1) 当  $\lambda$  的先验为 Jeffreys 无信息先验  $\pi(\lambda) \propto 1/\lambda$  时, 则  $\lambda$  的后验密度为由 (3.4.3) 给出的伽玛分布  $\Gamma(nr, n\bar{x})$ .

(2) 当  $\lambda$  的先验为由 (3.4.4) 给出的共轭先验  $\Gamma(\alpha, \beta)$  时, 则  $\lambda$  的后验密度为由 (3.4.5) 给出的伽玛分布  $\Gamma(nr + \alpha, n\bar{x} + \beta)$ .

(3) 在式 (3.4.1) 中令  $r = 1$ , 则结论 (1) 和 (2) 给出了指数分布  $\text{Exp}(\lambda)$  中参数  $\lambda$  的后验分布的结果.

## 伽玛分布参数后验分布的主要结论

总结以上内容我们得到如下的结果：

**定理 3.4.1** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从伽玛分布 (3.4.1) 中抽取的随机样本, 关于  $\lambda$  的后验分布有下列结论:

- (1) 当  $\lambda$  的先验为 Jeffreys 无信息先验  $\pi(\lambda) \propto 1/\lambda$  时, 则  $\lambda$  的后验密度为由 (3.4.3) 给出的伽玛分布  $\Gamma(nr, n\bar{x})$ .
- (2) 当  $\lambda$  的先验为由 (3.4.4) 给出的共轭先验  $\Gamma(\alpha, \beta)$  时, 则  $\lambda$  的后验密度为由 (3.4.5) 给出的伽玛分布  $\Gamma(nr + \alpha, n\bar{x} + \beta)$ .
- (3) 在式 (3.4.1) 中令  $r = 1$ , 则结论 (1) 和 (2) 给出了指数分布  $\text{Exp}(\lambda)$  中参数  $\lambda$  的后验分布的结果.

## 伽玛分布参数后验分布的主要结论

总结以上内容我们得到如下的结果：

**定理 3.4.1** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从伽玛分布 (3.4.1) 中抽取的随机样本, 关于  $\lambda$  的后验分布有下列结论:

- (1) 当  $\lambda$  的先验为 Jeffreys 无信息先验  $\pi(\lambda) \propto 1/\lambda$  时, 则  $\lambda$  的后验密度为由 (3.4.3) 给出的伽玛分布  $\Gamma(nr, n\bar{x})$ .
- (2) 当  $\lambda$  的先验为由 (3.4.4) 给出的共轭先验  $\Gamma(\alpha, \beta)$  时, 则  $\lambda$  的后验密度为由 (3.4.5) 给出的伽玛分布  $\Gamma(nr + \alpha, n\bar{x} + \beta)$ .
- (3) 在式 (3.4.1) 中令  $r = 1$ , 则结论 (1) 和 (2) 给出了指数分布  $\text{Exp}(\lambda)$  中参数  $\lambda$  的后验分布的结果.

# 1. 无信息先验下指数分布刻度参数的后验分布

- 在式 (3.4.1) 中令  $r = 1$ ,  $\lambda = 1/\theta$ , 得到指数分布的密度函数

$$f(x|\theta) = \theta^{-1}e^{-x/\theta}, \quad 0 < x < \infty, \theta > 0. \quad (3.4.6)$$

- 由式 (3.4.6)可知, 给定  $\mathbf{X}$  时  $\theta$  的似然函数为

$$l(\theta|\mathbf{x}) \propto \theta^{-n} \exp \left\{ -\frac{n\bar{x}}{\theta} \right\},$$

- 取  $\theta$  的 Jeffreys 无信息先验  $\pi(\theta) = 1/\theta$  则  $\theta$  的后验分布为

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto \theta^{-(n+1)} \exp \left\{ -\frac{n\bar{x}}{\theta} \right\},$$

添加正则化常数,得到后验分布

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{(n\bar{x})^n}{\Gamma(n)} \theta^{-(n+1)} \exp \left\{ -\frac{n\bar{x}}{\theta} \right\}. \quad (3.4.9)$$

这是逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n, n\bar{x})$  的密度函数.

# 1. 无信息先验下指数分布刻度参数的后验分布

- 在式 (3.4.1) 中令  $r = 1$ ,  $\lambda = 1/\theta$ , 得到指数分布的密度函数

$$f(x|\theta) = \theta^{-1}e^{-x/\theta}, \quad 0 < x < \infty, \theta > 0. \quad (3.4.6)$$

- 由式 (3.4.6)可知, 给定  $\mathbf{X}$  时  $\theta$  的似然函数为

$$l(\theta|\mathbf{x}) \propto \theta^{-n} \exp \left\{ -\frac{n\bar{x}}{\theta} \right\},$$

- 取  $\theta$  的 Jeffreys 无信息先验  $\pi(\theta) = 1/\theta$  则  $\theta$  的后验分布为

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto \theta^{-(n+1)} \exp \left\{ -\frac{n\bar{x}}{\theta} \right\},$$

添加正则化常数,得到后验分布

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{(n\bar{x})^n}{\Gamma(n)} \theta^{-(n+1)} \exp \left\{ -\frac{n\bar{x}}{\theta} \right\}. \quad (3.4.9)$$

这是逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n, n\bar{x})$  的密度函数.

# 1. 无信息先验下指数分布刻度参数的后验分布

- 在式 (3.4.1) 中令  $r = 1$ ,  $\lambda = 1/\theta$ , 得到指数分布的密度函数

$$f(x|\theta) = \theta^{-1}e^{-x/\theta}, \quad 0 < x < \infty, \theta > 0. \quad (3.4.6)$$

- 由式 (3.4.6)可知, 给定  $\mathbf{X}$  时  $\theta$  的似然函数为

$$l(\theta|\mathbf{x}) \propto \theta^{-n} \exp \left\{ -\frac{n\bar{x}}{\theta} \right\},$$

- 取  $\theta$  的 Jeffreys 无信息先验  $\pi(\theta) = 1/\theta$  则  $\theta$  的后验分布为

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto \theta^{-(n+1)} \exp \left\{ -\frac{n\bar{x}}{\theta} \right\},$$

添加正则化常数,得到后验分布

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{(n\bar{x})^n}{\Gamma(n)} \theta^{-(n+1)} \exp \left\{ -\frac{n\bar{x}}{\theta} \right\}. \quad (3.4.9)$$

这是逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n, n\bar{x})$  的密度函数.

# 1. 无信息先验下指数分布刻度参数的后验分布

- 在式 (3.4.1) 中令  $r = 1$ ,  $\lambda = 1/\theta$ , 得到指数分布的密度函数

$$f(x|\theta) = \theta^{-1}e^{-x/\theta}, \quad 0 < x < \infty, \theta > 0. \quad (3.4.6)$$

- 由式 (3.4.6)可知, 给定  $\mathbf{X}$  时  $\theta$  的似然函数为

$$l(\theta|\mathbf{x}) \propto \theta^{-n} \exp \left\{ -\frac{n\bar{x}}{\theta} \right\},$$

- 取  $\theta$  的 Jeffreys 无信息先验  $\pi(\theta) = 1/\theta$  则  $\theta$  的后验分布为

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto \theta^{-(n+1)} \exp \left\{ -\frac{n\bar{x}}{\theta} \right\},$$

添加正则化常数,得到后验分布

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{(n\bar{x})^n}{\Gamma(n)} \theta^{-(n+1)} \exp \left\{ -\frac{n\bar{x}}{\theta} \right\}. \quad (3.4.9)$$

这是逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n, n\bar{x})$  的密度函数.



## 2. 共轭先验下指数分布刻度参数的后验分布

- 令  $\theta$  的似然函数如式 (3.4.8) 所示, 而  $\theta$  的共轭先验分布为  $\Gamma^{-1}(b, \lambda)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} \theta^{-(b+1)} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\theta} \right\} \propto \theta^{-(b+1)} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\theta} \right\}, \quad (3.4.10)$$

- $\theta$  的后验分布

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto l(\theta|\mathbf{x})\pi(\theta) \propto \theta^{-(n+b+1)} \exp \left\{ -\frac{n\bar{x} + \lambda}{\theta} \right\},$$

- 上式右边是逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n+b, n\bar{x} + \lambda)$  的核. 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{(n\bar{x} + \lambda)^{n+b}}{\Gamma(n+b)} \theta^{-(n+b+1)} \exp \left\{ -\frac{n\bar{x} + \lambda}{\theta} \right\}, \quad (3.4.11)$$

其中  $0 < \theta < \infty$ .

## 2. 共轭先验下指数分布刻度参数的后验分布

- 令  $\theta$  的似然函数如式 (3.4.8) 所示, 而  $\theta$  的共轭先验分布为  $\Gamma^{-1}(b, \lambda)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} \theta^{-(b+1)} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\theta} \right\} \propto \theta^{-(b+1)} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\theta} \right\}, \quad (3.4.10)$$

- $\theta$  的后验分布

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto l(\theta|\mathbf{x})\pi(\theta) \propto \theta^{-(n+b+1)} \exp \left\{ -\frac{n\bar{x} + \lambda}{\theta} \right\},$$

- 上式右边是逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n+b, n\bar{x} + \lambda)$  的核. 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{(n\bar{x} + \lambda)^{n+b}}{\Gamma(n+b)} \theta^{-(n+b+1)} \exp \left\{ -\frac{n\bar{x} + \lambda}{\theta} \right\}, \quad (3.4.11)$$

其中  $0 < \theta < \infty$ .

## 2. 共轭先验下指数分布刻度参数的后验分布

- 令  $\theta$  的似然函数如式 (3.4.8) 所示, 而  $\theta$  的共轭先验分布为  $\Gamma^{-1}(b, \lambda)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} \theta^{-(b+1)} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\theta} \right\} \propto \theta^{-(b+1)} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\theta} \right\}, \quad (3.4.10)$$

- $\theta$  的后验分布

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto l(\theta|\mathbf{x})\pi(\theta) \propto \theta^{-(n+b+1)} \exp \left\{ -\frac{n\bar{x} + \lambda}{\theta} \right\},$$

- 上式右边是逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n+b, n\bar{x} + \lambda)$  的核. 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{(n\bar{x} + \lambda)^{n+b}}{\Gamma(n+b)} \theta^{-(n+b+1)} \exp \left\{ -\frac{n\bar{x} + \lambda}{\theta} \right\}, \quad (3.4.11)$$

其中  $0 < \theta < \infty$ .

### 3. 无信息先验下定数截尾情形时的后验分布

- 若进一步假定指数分布样本  $X_1, \dots, X_n$  中仅观测到前  $r$  个, 即  $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(r)}$  为  $n$  个观测中观测到的前  $r$  个, 易知  $T = \sum_{j=1}^r X_{(j)} + (n-r)X_{(r)}$  是  $\theta$  的充分统计量.

- 由  $2T/\sigma^2 \sim \chi_{2r}^2$  可知  $T$  的密度函数为

$$g(t|\theta) = \frac{\theta^{-r}}{\Gamma(r)} t^{r-1} e^{-\frac{t}{\theta}} \propto \theta^{-r} e^{-\frac{t}{\theta}}, \quad t > 0, \theta > 0.$$

- 若取  $\theta$  的先验为无信息先验  $\pi(\theta) = 1/\theta$ , 则  $\theta$  的后验分布

$$\pi(\theta|t) \propto g(t|\theta)\pi(\theta) \propto \theta^{-(r+1)} e^{-\frac{t}{\theta}},$$

添加正则化常数, 则

$$\pi(\theta|t) = \frac{t^r}{\Gamma(r)} \theta^{-(r+1)} e^{-\frac{t}{\theta}}, \quad 0 < \theta < \infty. \quad (3.4.13)$$

这是参数为  $r, t$  的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(r, t)$  的密度函数.

### 3. 无信息先验下定数截尾情形时的后验分布

- 若进一步假定指数分布样本  $X_1, \dots, X_n$  中仅观测到前  $r$  个, 即  $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(r)}$  为  $n$  个观测中观测到的前  $r$  个, 易知  $T = \sum_{j=1}^r X_{(j)} + (n-r)X_{(r)}$  是  $\theta$  的充分统计量.

- 由  $2T/\sigma^2 \sim \chi_{2r}^2$  可知  $T$  的密度函数为

$$g(t|\theta) = \frac{\theta^{-r}}{\Gamma(r)} t^{r-1} e^{-\frac{t}{\theta}} \propto \theta^{-r} e^{-\frac{t}{\theta}}, \quad t > 0, \theta > 0.$$

- 若取  $\theta$  的先验为无信息先验  $\pi(\theta) = 1/\theta$ , 则  $\theta$  的后验分布

$$\pi(\theta|t) \propto g(t|\theta)\pi(\theta) \propto \theta^{-(r+1)} e^{-\frac{t}{\theta}},$$

添加正则化常数, 则

$$\pi(\theta|t) = \frac{t^r}{\Gamma(r)} \theta^{-(r+1)} e^{-\frac{t}{\theta}}, \quad 0 < \theta < \infty. \quad (3.4.13)$$

这是参数为  $r, t$  的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(r, t)$  的密度函数.

### 3. 无信息先验下定数截尾情形时的后验分布

- 若进一步假定指数分布样本  $X_1, \dots, X_n$  中仅观测到前  $r$  个, 即  $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(r)}$  为  $n$  个观测中观测到的前  $r$  个, 易知  $T = \sum_{j=1}^r X_{(j)} + (n-r)X_{(r)}$  是  $\theta$  的充分统计量.

- 由  $2T/\sigma^2 \sim \chi_{2r}^2$  可知  $T$  的密度函数为

$$g(t|\theta) = \frac{\theta^{-r}}{\Gamma(r)} t^{r-1} e^{-\frac{t}{\theta}} \propto \theta^{-r} e^{-\frac{t}{\theta}}, \quad t > 0, \theta > 0.$$

- 若取  $\theta$  的先验为无信息先验  $\pi(\theta) = 1/\theta$ , 则  $\theta$  的后验分布

$$\pi(\theta|t) \propto g(t|\theta)\pi(\theta) \propto \theta^{-(r+1)} e^{-\frac{t}{\theta}},$$

添加正则化常数, 则

$$\pi(\theta|t) = \frac{t^r}{\Gamma(r)} \theta^{-(r+1)} e^{-\frac{t}{\theta}}, \quad 0 < \theta < \infty. \quad (3.4.13)$$

这是参数为  $r, t$  的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(r, t)$  的密度函数.

### 3. 无信息先验下定数截尾情形时的后验分布

- 若进一步假定指数分布样本  $X_1, \dots, X_n$  中仅观测到前  $r$  个, 即  $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(r)}$  为  $n$  个观测中观测到的前  $r$  个, 易知  $T = \sum_{j=1}^r X_{(j)} + (n-r)X_{(r)}$  是  $\theta$  的充分统计量.

- 由  $2T/\sigma^2 \sim \chi_{2r}^2$  可知  $T$  的密度函数为

$$g(t|\theta) = \frac{\theta^{-r}}{\Gamma(r)} t^{r-1} e^{-\frac{t}{\theta}} \propto \theta^{-r} e^{-\frac{t}{\theta}}, \quad t > 0, \theta > 0.$$

- 若取  $\theta$  的先验为无信息先验  $\pi(\theta) = 1/\theta$ , 则  $\theta$  的后验分布

$$\pi(\theta|t) \propto g(t|\theta)\pi(\theta) \propto \theta^{-(r+1)} e^{-\frac{t}{\theta}},$$

添加正则化常数, 则

$$\pi(\theta|t) = \frac{t^r}{\Gamma(r)} \theta^{-(r+1)} e^{-\frac{t}{\theta}}, \quad 0 < \theta < \infty. \quad (3.4.13)$$

这是参数为  $r, t$  的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(r, t)$  的密度函数.

## 4. 共轭先验下定数截尾情形的后验分布

- 取  $\theta$  的先验分布由 (3.4.10) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(b, \lambda)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} \theta^{-(b+1)} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\theta} \right\}, \quad \theta > 0.$$

- 则  $\theta$  的后验分布为

$$\pi(\theta|t) \propto g(t|\theta)\pi(\theta) \propto \theta^{-(r+b+1)} \exp \left\{ -\frac{t+\lambda}{\theta} \right\}.$$

- 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|t) = \frac{(t+\lambda)^{r+b}}{\Gamma(r+b)} \theta^{-(r+b+1)} \exp \left\{ -\frac{t+\lambda}{\theta} \right\}, \quad \theta > 0. \quad (3.4.14)$$

此为逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(r+b, t+\lambda)$  的密度函数.



## 4. 共轭先验下定数截尾情形的后验分布

- 取  $\theta$  的先验分布由 (3.4.10) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(b, \lambda)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} \theta^{-(b+1)} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\theta} \right\}, \quad \theta > 0.$$

- 则  $\theta$  的后验分布为

$$\pi(\theta|t) \propto g(t|\theta)\pi(\theta) \propto \theta^{-(r+b+1)} \exp \left\{ -\frac{t+\lambda}{\theta} \right\}.$$

- 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|t) = \frac{(t+\lambda)^{r+b}}{\Gamma(r+b)} \theta^{-(r+b+1)} \exp \left\{ -\frac{t+\lambda}{\theta} \right\}, \quad \theta > 0. \quad (3.4.14)$$

此为逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(r+b, t+\lambda)$  的密度函数.

## 4. 共轭先验下定数截尾情形的后验分布

- 取  $\theta$  的先验分布由 (3.4.10) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(b, \lambda)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} \theta^{-(b+1)} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\theta} \right\}, \quad \theta > 0.$$

- 则  $\theta$  的后验分布为

$$\pi(\theta|t) \propto g(t|\theta)\pi(\theta) \propto \theta^{-(r+b+1)} \exp \left\{ -\frac{t+\lambda}{\theta} \right\}.$$

- 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|t) = \frac{(t+\lambda)^{r+b}}{\Gamma(r+b)} \theta^{-(r+b+1)} \exp \left\{ -\frac{t+\lambda}{\theta} \right\}, \quad \theta > 0. \quad (3.4.14)$$

此为逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(r+b, t+\lambda)$  的密度函数.

## 指数分布参数后验分布的主要结论

**定理 3.4.2** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从指数分布 (3.4.6) 中抽取的随机样本, 关于  $\theta$  的后验分布有下列结论:

(1) 当参数  $\theta$  的先验分布为无信息先验  $\pi(\theta) = 1/\theta$  时, 则  $\theta$  的后验密度为由 (3.4.9) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n, n\bar{x})$ .

(2) 当参数  $\theta$  的先验分布为由式 (3.4.10) 给出的共轭先验分布  $\Gamma^{-1}(b, \lambda)$  时, 则  $\theta$  的后验密度为由式 (3.4.11) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n + b, n\bar{x} + \lambda)$ .

(3) 在指数分布定数截尾情形, 当  $\theta$  的先验为无信息先验分布时, 则  $\theta$  的后验密度为由 (3.4.13) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(r, t)$ ; 当  $\theta$  的先验为由 (3.4.10) 给出的共轭先验  $\Gamma^{-1}(b, \lambda)$  时, 则  $\theta$  的后验密度为由 (3.4.14) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(r + b, t + \lambda)$ , 其

中  $t = \sum_{j=1}^r x_{(j)} + (n - r)x_{(r)}$ .

## 指数分布参数后验分布的主要结论

**定理 3.4.2** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从指数分布 (3.4.6) 中抽取的随机样本, 关于  $\theta$  的后验分布有下列结论:

(1) 当参数  $\theta$  的先验分布为无信息先验  $\pi(\theta) = 1/\theta$  时, 则  $\theta$  的后验密度为由 (3.4.9) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n, n\bar{x})$ .

(2) 当参数  $\theta$  的先验分布为由式 (3.4.10) 给出的共轭先验分布  $\Gamma^{-1}(b, \lambda)$  时, 则  $\theta$  的后验密度为由式 (3.4.11) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n + b, n\bar{x} + \lambda)$ .

(3) 在指数分布定数截尾情形, 当  $\theta$  的先验为无信息先验分布时, 则  $\theta$  的后验密度为由 (3.4.13) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(r, t)$ ; 当  $\theta$  的先验为由 (3.4.10) 给出的共轭先验  $\Gamma^{-1}(b, \lambda)$  时, 则  $\theta$  的后验密度为由 (3.4.14) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(r + b, t + \lambda)$ , 其

中  $t = \sum_{j=1}^r x_{(j)} + (n - r)x_{(r)}$ .

## 指数分布参数后验分布的主要结论

**定理 3.4.2** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从指数分布 (3.4.6) 中抽取的随机样本, 关于  $\theta$  的后验分布有下列结论:

(1) 当参数  $\theta$  的先验分布为无信息先验  $\pi(\theta) = 1/\theta$  时, 则  $\theta$  的后验密度为由 (3.4.9) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n, n\bar{x})$ .

(2) 当参数  $\theta$  的先验分布为由式 (3.4.10) 给出的共轭先验分布  $\Gamma^{-1}(b, \lambda)$  时, 则  $\theta$  的后验密度为由式 (3.4.11) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n + b, n\bar{x} + \lambda)$ .

(3) 在指数分布定数截尾情形, 当  $\theta$  的先验为无信息先验分布时, 则  $\theta$  的后验密度为由 (3.4.13) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(r, t)$ ; 当  $\theta$  的先验为由 (3.4.10) 给出的共轭先验  $\Gamma^{-1}(b, \lambda)$  时, 则  $\theta$  的后验密度为由 (3.4.14) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(r + b, t + \lambda)$ , 其

中  $t = \sum_{j=1}^r x_{(j)} + (n - r)x_{(r)}$ .

## 指数分布参数后验分布的主要结论

**定理 3.4.2** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从指数分布 (3.4.6) 中抽取的随机样本, 关于  $\theta$  的后验分布有下列结论:

(1) 当参数  $\theta$  的先验分布为无信息先验  $\pi(\theta) = 1/\theta$  时, 则  $\theta$  的后验密度为由 (3.4.9) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n, n\bar{x})$ .

(2) 当参数  $\theta$  的先验分布为由式 (3.4.10) 给出的共轭先验分布  $\Gamma^{-1}(b, \lambda)$  时, 则  $\theta$  的后验密度为由式 (3.4.11) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(n + b, n\bar{x} + \lambda)$ .

(3) 在指数分布定数截尾情形, 当  $\theta$  的先验为无信息先验分布时, 则  $\theta$  的后验密度为由 (3.4.13) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(r, t)$ ; 当  $\theta$  的先验为由 (3.4.10) 给出的共轭先验  $\Gamma^{-1}(b, \lambda)$  时, 则  $\theta$  的后验密度为由 (3.4.14) 给出的逆伽玛分布  $\Gamma^{-1}(r + b, t + \lambda)$ , 其

中  $t = \sum_{j=1}^r x_{(j)} + (n - r)x_{(r)}$ .

### 1 3.1 后验分布与充分性

- 3.1.1 后验分布的计算公式
- 3.1.2 后验分布与充分性

### 2 3.2 正态总体参数的后验分布

- 3.2.1 引言
- 3.2.2 正态总体无信息先验下的后验分布
- 3.2.3 正态总体参数在共轭先验分布下的后验分布

### 3 3.3 一类离散分布和多项分布参数的后验分布

- 3.3.1 一类离散分布参数的后验分布
- 3.3.2 多项分布中参数的后验分布

### 4 3.4 寿命分布参数的后验分布

- 3.4.1 伽玛分布情形
- 3.4.2 指数分布及其定数截尾情形时参数的后验分布

### 5 3.5 泊松分布和均匀分布参数的后验分布

- 3.5.1 泊松分布参数的后验分布
- 3.5.2 均匀分布参数的后验分布

# 1. 无信息先验下泊松分布参数的后验分布

- 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从泊松 (Poisson) 分布  $P(\theta)$  中抽取的随机样本, 则样本  $\mathbf{X}$  的概率函数为

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} | \theta) &= P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} = \frac{\theta^{n\bar{x}} e^{-n\theta}}{x_1! \cdots x_n!} \propto \theta^{n\bar{x}} \exp\{-n\theta\}, \quad (3.5.1) \end{aligned}$$

此处  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ . 上式也是  $\theta$  的似然函数  $l(\theta | \mathbf{x})$ .

- 令  $\theta$  的先验为 Jeffreys 先验  $\pi(\theta) = \theta^{-1/2}$ , 则  $\theta$  的后验分布  $\pi(\theta | \mathbf{x}) \propto l(\theta | \mathbf{x}) \pi(\theta) \propto \theta^{n\bar{x}-1/2} \exp\{-n\theta\}$ .

- 这是伽玛分布  $\Gamma(n\bar{x} + 1/2, n)$  的核, 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta | \mathbf{x}) = \frac{n^{n\bar{x}+1/2}}{\Gamma(n\bar{x} + 1/2)} \theta^{(n\bar{x}+1/2)-1} \exp\{-n\theta\}. \quad (3.5.2)$$

即  $\theta$  的后验分布为伽玛分布  $\Gamma(n\bar{x} + 1/2, n)$ .



# 1. 无信息先验下泊松分布参数的后验分布

- 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从泊松 (Poisson) 分布  $P(\theta)$  中抽取的随机样本, 则样本  $\mathbf{X}$  的概率函数为

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} | \theta) &= P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} = \frac{\theta^{n\bar{x}} e^{-n\theta}}{x_1! \cdots x_n!} \propto \theta^{n\bar{x}} \exp\{-n\theta\}, \quad (3.5.1) \end{aligned}$$

此处  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ . 上式也是  $\theta$  的似然函数  $l(\theta | \mathbf{x})$ .

- 令  $\theta$  的先验为 Jeffreys 先验  $\pi(\theta) = \theta^{-1/2}$ , 则  $\theta$  的后验分布
- $$\pi(\theta | \mathbf{x}) \propto l(\theta | \mathbf{x}) \pi(\theta) \propto \theta^{n\bar{x}-1/2} \exp\{-n\theta\}.$$

- 这是伽玛分布  $\Gamma(n\bar{x} + 1/2, n)$  的核, 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta | \mathbf{x}) = \frac{n^{n\bar{x}+1/2}}{\Gamma(n\bar{x} + 1/2)} \theta^{(n\bar{x}+1/2)-1} \exp\{-n\theta\}. \quad (3.5.2)$$

即  $\theta$  的后验分布为伽玛分布  $\Gamma(n\bar{x} + 1/2, n)$ .

# 1. 无信息先验下泊松分布参数的后验分布

- 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从泊松 (Poisson) 分布  $P(\theta)$  中抽取的随机样本, 则样本  $\mathbf{X}$  的概率函数为

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} | \theta) &= P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} = \frac{\theta^{n\bar{x}} e^{-n\theta}}{x_1! \cdots x_n!} \propto \theta^{n\bar{x}} \exp\{-n\theta\}, \quad (3.5.1) \end{aligned}$$

此处  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ . 上式也是  $\theta$  的似然函数  $l(\theta | \mathbf{x})$ .

- 令  $\theta$  的先验为 Jeffreys 先验  $\pi(\theta) = \theta^{-1/2}$ , 则  $\theta$  的后验分布

$$\pi(\theta | \mathbf{x}) \propto l(\theta | \mathbf{x}) \pi(\theta) \propto \theta^{n\bar{x}-1/2} \exp\{-n\theta\}.$$

- 这是伽玛分布  $\Gamma(n\bar{x} + 1/2, n)$  的核, 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta | \mathbf{x}) = \frac{n^{n\bar{x}+1/2}}{\Gamma(n\bar{x} + 1/2)} \theta^{(n\bar{x}+1/2)-1} \exp\{-n\theta\}. \quad (3.5.2)$$

即  $\theta$  的后验分布为伽玛分布  $\Gamma(n\bar{x} + 1/2, n)$ .

## 2. 共轭先验下泊松分布参数的后验分布

- 样本  $\mathbf{X}$  的概率函数 (似然函数) 为由式 (3.5.1) 给出. 令  $\theta$  的先验分布是共轭先验伽玛分布  $\Gamma(r, \lambda)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \theta^{r-1} e^{-\lambda\theta} \propto \theta^{r-1} e^{-\lambda\theta}, \quad \theta > 0, \quad (3.5.4)$$

- 故  $\theta$  的后验分布

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto f(\mathbf{x}|\theta) \pi(\theta) \propto \theta^{n\bar{x}+r-1} e^{-(n+\lambda)\theta}.$$

- 这是伽玛分布  $\Gamma(n\bar{x} + r, n + \lambda)$  的核, 添加正则化常数因子得

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{(n + \lambda)^{n\bar{x}+r}}{\Gamma(n\bar{x} + r)} \theta^{n\bar{x}+r-1} e^{-(n+\lambda)\theta}, \quad \theta > 0. \quad (3.5.5)$$

## 2. 共轭先验下泊松分布参数的后验分布

- 样本  $\mathbf{X}$  的概率函数 (似然函数) 为由式 (3.5.1) 给出. 令  $\theta$  的先验分布是共轭先验伽玛分布  $\Gamma(r, \lambda)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \theta^{r-1} e^{-\lambda\theta} \propto \theta^{r-1} e^{-\lambda\theta}, \quad \theta > 0, \quad (3.5.4)$$

- 故  $\theta$  的后验分布

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto f(\mathbf{x}|\theta) \pi(\theta) \propto \theta^{n\bar{x}+r-1} e^{-(n+\lambda)\theta}.$$

- 这是伽玛分布  $\Gamma(n\bar{x} + r, n + \lambda)$  的核, 添加正则化常数因子得

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{(n + \lambda)^{n\bar{x}+r}}{\Gamma(n\bar{x} + r)} \theta^{n\bar{x}+r-1} e^{-(n+\lambda)\theta}, \quad \theta > 0. \quad (3.5.5)$$

## 2. 共轭先验下泊松分布参数的后验分布

- 样本  $\mathbf{X}$  的概率函数 (似然函数) 为由式 (3.5.1) 给出. 令  $\theta$  的先验分布是共轭先验伽玛分布  $\Gamma(r, \lambda)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \theta^{r-1} e^{-\lambda\theta} \propto \theta^{r-1} e^{-\lambda\theta}, \quad \theta > 0, \quad (3.5.4)$$

- 故  $\theta$  的后验分布

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto f(\mathbf{x}|\theta) \pi(\theta) \propto \theta^{n\bar{x}+r-1} e^{-(n+\lambda)\theta}.$$

- 这是伽玛分布  $\Gamma(n\bar{x} + r, n + \lambda)$  的核, 添加正则化常数因子得

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{(n + \lambda)^{n\bar{x}+r}}{\Gamma(n\bar{x} + r)} \theta^{n\bar{x}+r-1} e^{-(n+\lambda)\theta}, \quad \theta > 0. \quad (3.5.5)$$

## 泊松分布参数后验分布的主要结论

总结以上内容我们得到如下的结果：

**定理 3.5.1** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从泊松分布 (3.5.1) 中抽取的随机样本，关于  $\theta$  的后验分布有下列结论：

- (1) 当参数  $\theta$  的先验分布为 Jeffreys 无信息先验  $\pi(\theta) = \theta^{-\frac{1}{2}}$  时，则  $\theta$  的后验密度为由 (3.5.2) 给出的伽玛分布  $\Gamma(n\bar{x} + 1/2, n)$ .
- (2) 当参数  $\theta$  的先验为由 (3.5.4) 给出的共轭先验  $\Gamma(r, \lambda)$  时，则  $\theta$  的后验密度为由 (3.5.5) 给出的伽玛分布  $\Gamma(n\bar{x} + r, n + \lambda)$ .

## 泊松分布参数后验分布的主要结论

总结以上内容我们得到如下的结果：

**定理 3.5.1** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从泊松分布 (3.5.1) 中抽取的随机样本，关于  $\theta$  的后验分布有下列结论：

- (1) 当参数  $\theta$  的先验分布为 Jeffreys 无信息先验  $\pi(\theta) = \theta^{-\frac{1}{2}}$  时，则  $\theta$  的后验密度为由 (3.5.2) 给出的伽玛分布  $\Gamma(n\bar{x} + 1/2, n)$ .
- (2) 当参数  $\theta$  的先验为由 (3.5.4) 给出的共轭先验  $\Gamma(r, \lambda)$  时，则  $\theta$  的后验密度为由 (3.5.5) 给出的伽玛分布  $\Gamma(n\bar{x} + r, n + \lambda)$ .

## 泊松分布参数后验分布的主要结论

总结以上内容我们得到如下的结果：

**定理 3.5.1** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从泊松分布 (3.5.1) 中抽取的随机样本，关于  $\theta$  的后验分布有下列结论：

(1) 当参数  $\theta$  的先验分布为 Jeffreys 无信息先验  $\pi(\theta) = \theta^{-\frac{1}{2}}$  时，则  $\theta$  的后验密度为由 (3.5.2) 给出的伽玛分布  $\Gamma(n\bar{x} + 1/2, n)$ .

(2) 当参数  $\theta$  的先验为由 (3.5.4) 给出的共轭先验  $\Gamma(r, \lambda)$  时，则  $\theta$  的后验密度为由 (3.5.5) 给出的伽玛分布  $\Gamma(n\bar{x} + r, n + \lambda)$ .



## 泊松分布参数后验分布的主要结论

总结以上内容我们得到如下的结果：

**定理 3.5.1** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从泊松分布 (3.5.1) 中抽取的随机样本，关于  $\theta$  的后验分布有下列结论：

- (1) 当参数  $\theta$  的先验分布为 Jeffreys 无信息先验  $\pi(\theta) = \theta^{-\frac{1}{2}}$  时，则  $\theta$  的后验密度为由 (3.5.2) 给出的伽玛分布  $\Gamma(n\bar{x} + 1/2, n)$ .
- (2) 当参数  $\theta$  的先验为由 (3.5.4) 给出的共轭先验  $\Gamma(r, \lambda)$  时，则  $\theta$  的后验密度为由 (3.5.5) 给出的伽玛分布  $\Gamma(n\bar{x} + r, n + \lambda)$ .

# 1. 无信息先验下均匀分布参数的后验分布

- 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  是从均匀分布  $U(0, \theta)$  中抽取的随机样本, 记  $x_{(n)} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ . 易见  $\theta$  的似然函数为

$$l(\theta|\mathbf{x}) = \frac{1}{\theta^n}, \quad \theta > x_{(n)}, \quad (3.5.6)$$

- 由于均匀分布  $U(0, \theta)$  中参数  $\theta$  是截断型位置参数, 故假定  $\theta$  的无信息先验为  $\pi(\theta) \equiv 1$ , 则  $\theta$  的后验分布为

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto l(\theta|\mathbf{x})\pi(\theta) \propto \frac{1}{\theta^n}, \quad \theta > x_{(n)}.$$

- 这是帕雷托 (Pareto) 分布  $Pa(x_{(n)}, n-1)$  的核. 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{(n-1)\theta_*^{n-1}}{\theta^n}, \quad \theta > \theta_*, \quad (3.5.7)$$

此处  $\theta_* = x_{(n)}$ . 即  $\theta$  的后验分布为帕雷托分布  $Pa(\theta_*, n-1)$ .

# 1. 无信息先验下均匀分布参数的后验分布

- 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  是从均匀分布  $U(0, \theta)$  中抽取的随机样本, 记  $x_{(n)} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ . 易见  $\theta$  的似然函数为

$$l(\theta|\mathbf{x}) = \frac{1}{\theta^n}, \quad \theta > x_{(n)}, \quad (3.5.6)$$

- 由于均匀分布  $U(0, \theta)$  中参数  $\theta$  是截断型位置参数, 故假定  $\theta$  的无信息先验为  $\pi(\theta) \equiv 1$ , 则  $\theta$  的后验分布为

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto l(\theta|\mathbf{x})\pi(\theta) \propto \frac{1}{\theta^n}, \quad \theta > x_{(n)}.$$

- 这是帕雷托 (Pareto) 分布  $Pa(x_{(n)}, n-1)$  的核. 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{(n-1)\theta_*^{n-1}}{\theta^n}, \quad \theta > \theta_*, \quad (3.5.7)$$

此处  $\theta_* = x_{(n)}$ . 即  $\theta$  的后验分布为帕雷托分布  $Pa(\theta_*, n-1)$ .

# 1. 无信息先验下均匀分布参数的后验分布

- 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  是从均匀分布  $U(0, \theta)$  中抽取的随机样本, 记  $x_{(n)} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ . 易见  $\theta$  的似然函数为

$$l(\theta|\mathbf{x}) = \frac{1}{\theta^n}, \quad \theta > x_{(n)}, \quad (3.5.6)$$

- 由于均匀分布  $U(0, \theta)$  中参数  $\theta$  是截断型位置参数, 故假定  $\theta$  的无信息先验为  $\pi(\theta) \equiv 1$ , 则  $\theta$  的后验分布为

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto l(\theta|\mathbf{x})\pi(\theta) \propto \frac{1}{\theta^n}, \quad \theta > x_{(n)}.$$

- 这是帕雷托 (Pareto) 分布  $Pa(x_{(n)}, n-1)$  的核. 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{(n-1)\theta_*^{n-1}}{\theta^n}, \quad \theta > \theta_*, \quad (3.5.7)$$

此处  $\theta_* = x_{(n)}$ . 即  $\theta$  的后验分布为帕雷托分布  $Pa(\theta^*, n-1)$ .

## 2. 共轭先验下均匀分布参数的后验分布

- 设  $\theta$  的共轭先验为帕雷托分布  $Pa(\theta_0, \alpha)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\alpha \theta_0^\alpha}{\theta^{\alpha+1}}, \quad \theta > \theta_0, \quad (3.5.8)$$

其中  $\alpha > 0$  和  $\theta_0$  已知.

- $\theta$  的似然函数由 (3.5.6) 给出, 故由 (3.5.6) 和 (3.5.8) 可知  $\theta$  的后验密度为

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto l(\theta|\mathbf{x})\pi(\theta) \propto \frac{1}{\theta^{\alpha+n+1}}, \quad \text{当 } \theta > \max\{x_{(n)}, \theta_0\} = \theta_1,$$

- 这是帕雷托分布  $Pa(\theta_1, \alpha + n)$  的核, 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{(\alpha + n)\theta_1^{\alpha+n}}{\theta^{\alpha+n+1}}, \quad \theta > \theta_1. \quad (3.5.9)$$

即  $\theta$  的后验分布这是帕雷托分布  $Pa(\theta_1, \alpha + n)$ .

## 2. 共轭先验下均匀分布参数的后验分布

- 设  $\theta$  的共轭先验为帕雷托分布  $Pa(\theta_0, \alpha)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\alpha \theta_0^\alpha}{\theta^{\alpha+1}}, \quad \theta > \theta_0, \quad (3.5.8)$$

其中  $\alpha > 0$  和  $\theta_0$  已知.

- $\theta$  的似然函数由 (3.5.6) 给出, 故由 (3.5.6) 和 (3.5.8) 可知  $\theta$  的后验密度为

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto l(\theta|\mathbf{x})\pi(\theta) \propto \frac{1}{\theta^{\alpha+n+1}}, \quad \text{当 } \theta > \max\{x_{(n)}, \theta_0\} = \theta_1,$$

- 这是帕雷托分布  $Pa(\theta_1, \alpha + n)$  的核, 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{(\alpha + n)\theta_1^{\alpha+n}}{\theta^{\alpha+n+1}}, \quad \theta > \theta_1. \quad (3.5.9)$$

即  $\theta$  的后验分布这是帕雷托分布  $Pa(\theta_1, \alpha + n)$ .

## 2. 共轭先验下均匀分布参数的后验分布

- 设  $\theta$  的共轭先验为帕雷托分布  $Pa(\theta_0, \alpha)$ , 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\alpha \theta_0^\alpha}{\theta^{\alpha+1}}, \quad \theta > \theta_0, \quad (3.5.8)$$

其中  $\alpha > 0$  和  $\theta_0$  已知.

- $\theta$  的似然函数由 (3.5.6) 给出, 故由 (3.5.6) 和 (3.5.8) 可知  $\theta$  的后验密度为

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto l(\theta|\mathbf{x})\pi(\theta) \propto \frac{1}{\theta^{\alpha+n+1}}, \quad \text{当 } \theta > \max\{x_{(n)}, \theta_0\} = \theta_1,$$

- 这是帕雷托分布  $Pa(\theta_1, \alpha + n)$  的核, 添加正则化常数得到

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{(\alpha + n)\theta_1^{\alpha+n}}{\theta^{\alpha+n+1}}, \quad \theta > \theta_1. \quad (3.5.9)$$

即  $\theta$  的后验分布这是帕雷托分布  $Pa(\theta_1, \alpha + n)$ .

## 均匀分布参数后验分布的主要结论

总结以上内容我们得到如下的结果：

**定理 3.5.2** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从均匀分布  $U(0, \theta)$  中抽取的随机样本，关于  $\theta$  的后验分布有下列结论：

(1) 当  $\theta$  的先验分布为无信息先验  $\pi(\theta) \equiv 1$  时，则  $\theta$  的后验分布是由 (3.5.7) 给出的帕雷托分布  $Pa(x_{(n)}, n-1)$ .

(2) 当  $\theta$  的先验为由 (3.5.8) 给出的帕雷托分布  $Pa(\theta_0, \alpha)$  时，则  $\theta$  的后验分布是由 (3.5.9) 给出的帕雷托分布  $Pa(\theta_1, \alpha + n)$ ，其中  $\theta_1 = \max\{x_{(n)}, \theta_0\}$ .



## 均匀分布参数后验分布的主要结论

总结以上内容我们得到如下的结果：

**定理 3.5.2** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从均匀分布  $U(0, \theta)$  中抽取的随机样本，关于  $\theta$  的后验分布有下列结论：

(1) 当  $\theta$  的先验分布为无信息先验  $\pi(\theta) \equiv 1$  时，则  $\theta$  的后验分布是由 (3.5.7) 给出的帕雷托分布  $Pa(x_{(n)}, n-1)$ .

(2) 当  $\theta$  的先验为由 (3.5.8) 给出的帕雷托分布  $Pa(\theta_0, \alpha)$  时，则  $\theta$  的后验分布是由 (3.5.9) 给出的帕雷托分布  $Pa(\theta_1, \alpha + n)$ ，其中  $\theta_1 = \max\{x_{(n)}, \theta_0\}$ .

## 均匀分布参数后验分布的主要结论

总结以上内容我们得到如下的结果：

**定理 3.5.2** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从均匀分布  $U(0, \theta)$  中抽取的随机样本，关于  $\theta$  的后验分布有下列结论：

(1) 当  $\theta$  的先验分布为无信息先验  $\pi(\theta) \equiv 1$  时，则  $\theta$  的后验分布是由 (3.5.7) 给出的帕雷托分布  $Pa(x_{(n)}, n-1)$ .

(2) 当  $\theta$  的先验为由 (3.5.8) 给出的帕雷托分布  $Pa(\theta_0, \alpha)$  时，则  $\theta$  的后验分布是由 (3.5.9) 给出的帕雷托分布  $Pa(\theta_1, \alpha + n)$ ，其中  $\theta_1 = \max\{x_{(n)}, \theta_0\}$ .

## 均匀分布参数后验分布的主要结论

总结以上内容我们得到如下的结果：

**定理 3.5.2** 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  为从均匀分布  $U(0, \theta)$  中抽取的随机样本，关于  $\theta$  的后验分布有下列结论：

(1) 当  $\theta$  的先验分布为无信息先验  $\pi(\theta) \equiv 1$  时，则  $\theta$  的后验分布是由 (3.5.7) 给出的帕雷托分布  $Pa(x_{(n)}, n-1)$ .

(2) 当  $\theta$  的先验为由 (3.5.8) 给出的帕雷托分布  $Pa(\theta_0, \alpha)$  时，则  $\theta$  的后验分布是由 (3.5.9) 给出的帕雷托分布  $Pa(\theta_1, \alpha + n)$ ，其中  $\theta_1 = \max\{x_{(n)}, \theta_0\}$ .