中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

10.14 解析几何

三维欧氏空间.

向量几何 和向量代数。

(概念) 位移向量. $\xleftarrow{\text{决定}}$ 长度+方向. (表示方法) $\overrightarrow{AB}$,

我们认为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$, 如果 $\overline{AB}$、$\overline{A'B'}$ 平行同向且等长。

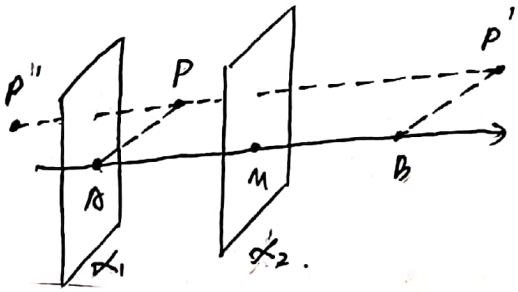
(定义1) 若空间中的一个变化 τ 满足如下条件:

$\overline{P\tau(P)}$ 和 $\overline{Q\tau(Q)}$ 恒为平行、同向且等长.

则称 τ 为平移。($\tau(P)$, $\tau(Q)$ 为 P, Q 经 τ 变换后的点).

(定理2) 设 A、B 为空间中两点, $\exists$ 唯一的平移 τ 使得 $\tau(A)=B$。

证明: (i) 存在性: 若 $A=B$, 取 $\tau=id$, (id 表示恒等变换, 其显然为平移)



若 $A\neq B$, 定义 $\tau(P)=R_{\alpha_2}(R_{\alpha_1}(P))=R_{\alpha_2}\circ R_{\alpha_1}$

其中 R_{α_i} 是指以 α_i 为反射平面的反射. (具体以左侧图表示, M 为 AB 中点, α_1 过 A 且垂直 AB, α_2 过 M 且垂直于 AB)

验证 τ 符合题意:

对 A, $\tau(A)=R_{\alpha_2}(R_{\alpha_1}(A))=R_{\alpha_2}(A)=B$

对 $\forall P$, $\tau(P)=R_{\alpha_2}(R_{\alpha_1}(P))=R_{\alpha_2}(P')=P''$ (如图)

易证得 $ABP''P$ 为平四, 则 $\overline{AB}=\overline{PP''}$

即 $\overline{A\tau(A)}=\overline{P\tau(P)}$ 且平行同向、等长.

再由传递, 对 $\forall P$, Q, 有 $\overline{P\tau(P)}$ 与 $\overline{Q\tau(Q)}$ 平行同向且等长

故 τ 符合题意.

(ii) 唯一性: 假设 $\exists$ 异于 τ 的平移 τ' 使 $\tau'(A)=B$,

对 $\forall P\neq A$, $\tau(P)\neq\tau'(P)$。

而 $\overline{P\tau(P)}$ 和 $\overline{P\tau'(P)}$ 均与 AB 平行,

与平行公理矛盾! 故 τ 唯一。

扫描全能王 创建

中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

(定理3) 设 τ_1, τ_2 为空间上两平移，则有：

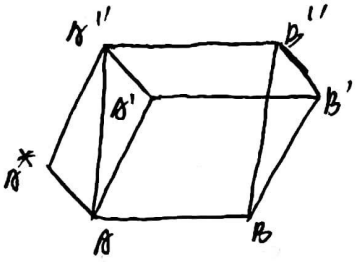
(i) $\tau_2 \circ \tau_1$ 仍为平移

(ii) $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$

证明：A, B 为空间任意两点

记：$A' = \tau_1(A)$　$A'' = \tau_2(A') = \tau_2(\tau_1(A))$

$B' = \tau_2(B)$　$B'' = \tau_2(B') = \tau_2(\tau_1(B))$.



有：$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$　$\overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{B'B''}$

(i) 因 A, B 任取，且易证得 $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''}$（这里有三组平行四边形）

故 $\tau_2 \circ \tau_1$ 仍为平移.

(ii) 对 $\forall A, B$，可以找到 $A^* = \tau_2(A)$，

$\because \tau_2$ 为平移，$\therefore \overrightarrow{AA^*} = \overrightarrow{A'A''}$

得 $AA^*A''A'$ 为平行四边形.

故 $\overrightarrow{A^*A''} = \overrightarrow{AA'}$，

即 $\tau_1(A^*) = A''$

$\therefore \tau_1(\tau_2(A)) = A''$

即 $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$（公理2唯一性）.

我们考察下面两个集合：

集合 $V = \{$空间中所有位移向量 $\overrightarrow{AB}\}$

集合 $T = \{$空间中所有的平移 $\tau\}$

扫描全能王 创建

(定理4)：存在集合T到集合V的一个自然双射Φ

Φ：$T \to V$ 使得：

(i) $\Phi(Id) = \vec{0}$ → 即 $\overrightarrow{AA}$，A任意.

↓ 恒等映射

(ii) $\Phi(\tau) = \overrightarrow{AB}$，则 $\Phi(\tau的逆) = \overrightarrow{BA}$。

证明：设 $\tau \in T$，令 $\Phi(\tau) = \overrightarrow{A\tau(A)}$（A为空间内一点..）

由平移定义，$\overrightarrow{A\tau(A)}$ 不依赖A点选取.

则得到单射Φ。

再定义 Ψ：$V \to T$

对 $\forall \overrightarrow{AB} \in V$，由定理2

∃唯一τ使 $\tau(A) = B$，则令 $\Psi(\overrightarrow{AB}) = \tau$

Ψ也为单射.

接下来需验证：$\Phi \circ \Psi = Id_V$，$\Psi \circ \Phi = Id_T$

即二者复合后为恒等映射，即Φ为双射。

后面证明留作课后习题

请读者自行尝试证明。

证明(续)：对 $\forall \tau \in T$，设空间一点A，以及点 $B = \tau(A)$

（注意，以此法得到的向量 $\overrightarrow{AB}$ 与A点选取无关）

则 $\Phi(\tau) = \overrightarrow{AB}$，而由Ψ定义有 $\Psi(\overrightarrow{AB}) = \tau$，即 $\Psi \circ \Phi = Id_T$.

对 $\forall \overrightarrow{AB} \in V$ ∃唯一τ使 $B = \tau(A)$，则 $\Psi(\overrightarrow{AB}) = \tau$

由Ψ定义有 $\Psi(\tau) = \overrightarrow{A\tau(A)} = \overrightarrow{AB}$ 即 $\Phi \circ \Psi = Id_V$

至此我们完成了对Φ为双射的证明.

扫描全能王 创建

下面对集合 V 引入运算:(为了方便,我们将向量记为 u, v, w)

定义: $u+v = \Phi(u)+\Phi(v)$

由于定理3(i),我们知道这是一个良好的定义的 V 上的二元运算(即 $V\times V \xrightarrow{+} V$)

同样的,由于定理3(iii),我们有上述运算的

$\boxed{\text{交换律}}$: $u+v=v+u$ (对 $\forall u, v \in V$)

由于映射的复合具有结合律,我们有上述运算的

$\boxed{\text{结合律}}$: $(u+v)+w = u+(v+w)$ (对任意 $u, v, w \in V$)

特别地,我们有元素 $\vec{0}$,记为 0,对于它我们有

$\boxed{\text{中心元}}$: $u+0=0+u=u$ (对 $\forall u \in V$).

以及对 $u=\overrightarrow{AB}$,令 $\overrightarrow{BA}=-u \in V$

$\boxed{\text{逆元}}$: $u+(-u)=(-u)+u=0$

由此定义"$-$": $u-v=u+(-v)$

扫描全能王 创建

我们接着定义另一种运算：

数乘(倍积)　$\mathbb{R}\times V \xrightarrow{\cdot} V$

运算时：(其中 $\lambda\in\mathbb{R}$, $u\in V$)

① 情形一：若 $\lambda>0$，则 $\lambda\cdot u$ 为方向与 u 同向

长度为 u 长度的 λ 倍的位移向量.

② 情形二：若 $\lambda=0$，则令 $0\cdot u=0$

(注意，这里前面的 $0\in\mathbb{R}$，后面的 $0\in V$，为中心元)

③ 情形三：若 $\lambda<0$，则令 $\lambda\cdot u=-((-\lambda)\cdot u)$.

这里括号外负号表示括号内向量的逆元.

(定理5)　上述向量运算

$$V\times V\longrightarrow V$$
$$(u,\ v)\longmapsto u+v$$

和运算

$$\mathbb{R}\times V\longrightarrow V$$
$$(\lambda,\ u)\longmapsto \lambda\cdot u$$

满足以下三条法则.

扫描全能王 创建

中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

数乘结合律：$\lambda\cdot(\mu\cdot u)=(\lambda\cdot\mu)\cdot u$ （对 $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}, u\in V$）.

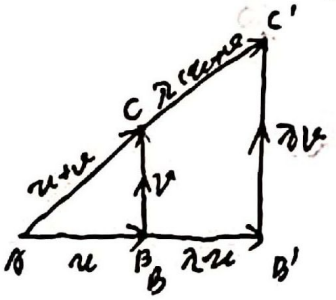
向量加法和数乘分配律：（以下为不同的两种分配）

(I) $\lambda\cdot u+\mu\cdot u=(\lambda+\mu)\cdot u$ （对 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}, u\in V$）

(II) $\lambda\cdot(u+v)=\lambda u+\lambda\cdot v$ （对 $\lambda\in\mathbb{R}, u,v\in V$）

证明：对于(I)，当 λ 与 μ 均为非负时，直接由定义导出。
而当 λ 与 μ 小于0时，可用逆元将其转换为加法。
值得注意的是(II)，下证：

不妨设 $\lambda>0$，$u=\overrightarrow{AB}$，$v=\overrightarrow{BC}$，则 $\lambda u=\overrightarrow{AB'}$，$\lambda\cdot v=\overrightarrow{B'C'}$



则由于 $\dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}=\lambda=\dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$ $\triangle ABC\backsim\triangle AB'C'$

有 $\dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}=\lambda$ 即 $\overrightarrow{AC'}=\lambda\overrightarrow{AC}$

由于 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=u+v$ 得证.

接下来，说明勾股将赋予集合 V 一个非常重要的结构：内积。

扫描全能王 创建

中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

这个符号表示"定义"

$$f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u, v) \longmapsto f(u,v) \triangleq \frac{1}{2}\{|u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2\}$$

关于f，有如下基本性质：

(定理6) (i) $f(u,v) = f(v,u)$, $u, v \in V$

(ii) $f(u, v+w) = f(u,v) + f(u,w)$, $u, v, w \in V$

(iii) $f(\lambda \cdot u, v) = f(u, \lambda v) = \lambda f(u,v)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$

证明：(i) 由交换律，将 $f(u,v) = \frac{1}{2}\{|u+v|^2 - |u|^2 + |v|^2\}$

中 u, v 位置互换得 $f(u,v) = f(v,u)$

未完待续

扫描全能王 创建