Cor 7.6.2 (1) 准对角阵 $A(\lambda)=\operatorname{diag}(A_1(\lambda),\dots,A_m(\lambda))$ 的初等因子组由它的各对角块 $A_i(\lambda)$ $(1\le i\le m)$ 的初等因子组合并得到

(2) 设 $J=\operatorname{diag}(J_1,\dots,J_s)$ 是 Jordan 形矩阵，其中每个

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}_{m_i\times m_i}.$$

是特征值为 λ_i 的 m_i 所 Jordan 块，则 $\lambda I-J$ 作为 λ 的矩阵的初等因子组与 J 作为复方阵的初等因子组相同，等于 $\{(\lambda-\lambda_i)^{m_i}\mid 1\le i\le s\}$.

Proof: (1) $A_i(\lambda)\sim S_i(\lambda)=\begin{pmatrix}D_i(\lambda) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $i=1,\dots,r$.

$A(\lambda)\sim\operatorname{diag}(S_1(\lambda),\dots,S_r(\lambda))\sim\operatorname{diag}(D_1(\lambda),\dots,D_r(\lambda),0,\dots,0)$

$A(\lambda)$ 初等因子组为 $D_i(\lambda)$ 的初等因子的组合并，也就是 $A_i(\lambda)$ 初等因子组的合并.

(2) $\lambda I-J$ 的初等因子组为 $\lambda I-J_{t_{ij}}(\lambda_i)$ 的初等因子组之并.

$\lambda I-J_{t_{ij}}(\lambda_i)=\begin{pmatrix}\lambda-\lambda_i & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1\\ & & & \lambda-\lambda_i\end{pmatrix}$ 的初等因子组 $(\lambda-\lambda_i)^{t_{ij}}$.

扫描全能王 创建

§7.7 特征方阵与相似标准形

Lem 7.7.1 设$\mathcal{A}$是数域F上n维空间V上的线性变换，$A=(a_{ij})_{n\times n}$是$\mathcal{A}$在V的基$M=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$下的矩阵.

设λ矩阵$A(\lambda)=\lambda I-A$相抵于对角阵.

$$D(\lambda)=\operatorname{diag}(1,\dots,1,f_{s+1}(\lambda),\dots,f_n(\lambda)).$$

其中$\forall 1\le i\le n$，$f_i(\lambda)$首项系数为1，$\deg f_i(\lambda)\ge 1$，则

(1) V可以分解为$n-s$个循环子空间$F[\mathcal{A}]\beta_i$ $(s+1\le i\le n)$的直和，其中每个β_i的最小多项式等于$f_i(\lambda)$，生成的循环子空间$F[\mathcal{A}]\beta_i$的维数为d_i.

(2) 对$\forall s+1\le i\le n$，$B_i=\{\beta_i,\mathcal{A}\beta_i,\mathcal{A}^2\beta_i,\dots,\mathcal{A}^{d_i-1}\beta_i\}$是$F[\mathcal{A}]\beta_i$的一组基，$B=B_{s+1}\cup\dots\cup B_n$是$V$的一组基.

设$f_i(\lambda)=\lambda^{d_i}+a_{id_i-1}\lambda^{d_i-1}+\dots+a_{i1}\lambda+a_0$.

则$\mathcal{A}$在基B下的矩阵$B=\operatorname{diag}(B_{s+1},B_{s+2},\dots,B_n)$

$$B_i=\begin{pmatrix} 0 & & & -a_{i0}\\ 1 & \ddots & & -a_{i1}\\ & \ddots & 0 & \vdots\\ & & 1 & -a_{id_i-1}\end{pmatrix}_{d_i\times d_i}\quad \text{对}\ \forall\, s+1\le i\le n\ \text{成立}.$$

Proof: A是$\mathcal{A}$在基$M=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$下的矩阵，故有

$$\mathcal{A}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)A.$$

即 $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)(\mathcal{A}I_{(n)}-A)=(0,\dots,0)$.

存在可逆矩阵$P(\lambda)$，$Q(\lambda)$. s.t $P(\lambda)(\lambda I-A)Q(\lambda)=\operatorname{diag}(1,\dots,1,f_{s+1}(\lambda),\dots,f_n(\lambda))$

则 $\det(P(\lambda))\det(\lambda I-A)\det(Q(\lambda))=\prod_{i=1}^{n-s}f_{s+i}(\lambda)$.

记 $\det(P(\lambda))=c_1$，$\det(Q(\lambda))=c_2$. $P(\lambda)$，$Q(\lambda)\Rightarrow c_1,c_2$均为常数.

$$c_1c_2\cdot\varphi_A(\lambda)=\prod_{i=1}^{n-s}f_{s+i}(\lambda).$$

$\Rightarrow \deg f_{s+1}(\lambda)+\deg f_{s+2}(\lambda)+\dots+\deg f_n(\lambda)=\deg\varphi_A(\lambda)=n$.

即 $d_{s+1}+\dots+d_n=n$.

再根据$\varphi_A(\lambda)$，$f_{s+i}(\lambda)$均为首一多项式 $\overset{\forall 1\le i\le n-s}{\Rightarrow}$ $c_1c_2=1$.

于是 $f_{s+1}(\lambda)\cdot f_{s+2}(\lambda)\cdots f_n(\lambda)=\varphi_A(\lambda)$.

将(1)中多项式中的λ改为$\mathcal{A}$有 $P(\mathcal{A})(\mathcal{A}I_{(n)}-A)Q(\mathcal{A})=\operatorname{diag}(1,\dots,1,f_{s+1}(\mathcal{A}),\dots,f_n(\mathcal{A}))$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)P^{-1}(\mathcal{A})\cdot P(\mathcal{A})(\mathcal{A}I_{(n)}-A)Q(\mathcal{A})=(0,0,\dots,0).$$

则 $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)P^{-1}(\mathcal{A})\cdot\operatorname{diag}(1,1,\dots,1,f_{s+1}(\mathcal{A}),\dots,f_n(\mathcal{A}))=(0,0,\dots,$

扫描全能王 创建

记 $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)P^{-1}(\mathcal{A})$.

则 $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)P(\mathcal{A})$.

记 $P(\lambda)=(p_{ij}(\lambda))_{n\times n}$，则 $\alpha_j=p_{1j}(\mathcal{A})\beta_1+p_{2j}(\mathcal{A})\beta_2+\dots+p_{nj}(\mathcal{A})\beta_n$.

对 $1\le j\le n$ 成立.

又 $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)\,\mathrm{diag}(1,\dots,1,f_{s+1}(\mathcal{A}),\dots,f_n(\mathcal{A}))=(0,\dots,0)$

知：$\begin{cases}1\beta_i=0, & \forall 1\le i\le s\\ f_i(\mathcal{A})\beta_i=0, & \forall s+1\le i\le n.\end{cases}\Rightarrow \beta_i=0 \quad \forall 1\le i\le s.$

得 $\alpha_j=p_{s+1,j}(\mathcal{A})\beta_{s+1}+\dots+p_{nj}(\mathcal{A})\beta_n$. $\forall 1\le j\le n$.

V 的基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ 含于 $F[\mathcal{A}]\beta_{s+1}+\dots+F[\mathcal{A}]\beta_n=U$.

故 $V=F[\mathcal{A}]\beta_{s+1}+\dots+F[\mathcal{A}]\beta_n$.

$\forall s+1\le i\le n$. 设 $f_i(\lambda)=\lambda^{d_i}+a_{id_i-1}\lambda^{d_i-1}+\dots+a_{i1}\lambda+a_{i0}$.

有 $f(\mathcal{A})\beta_i=0$. $\Rightarrow f_i(\lambda)$ 是 β_i 关于 $\mathcal{A}$ 的零化多项式.

$\mathcal{A}^{d_i}\beta_i=-a_{id_i-1}\mathcal{A}^{d_i-1}\beta_i-\dots-a_{i1}\mathcal{A}\beta_i-a_{i0}\beta_i$

$\Rightarrow$ 因 $\beta_i,\mathcal{A}\beta_i,\dots,\mathcal{A}^{d_i-1}\beta_i$ 生成的子空间是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

就是 β_i 生成的循环子空间 $F[\mathcal{A}]\beta_i$，其维数 $\dim F[\mathcal{A}]\beta_i\le d_i$.

$n=\dim V\le \dim F[\mathcal{A}]\beta_{s+1}+\dots+\dim F[\mathcal{A}]\beta_n\le d_{s+1}+\dots+d_n\le n$.

$\Rightarrow \forall s+1\le i\le n$. $\dim F[\mathcal{A}]\beta_i=d_i$ 且 $F[\mathcal{A}]\beta_{s+1},\dots,F[\mathcal{A}]\beta_n$ 是直和.

$\Rightarrow \beta=\beta_{s+1}\cup\beta_{s+2}\cup\dots\beta_n$ 是 V 的一组基.

对 $s+1\le i\le n$. 因 $\mathcal{A}(\mathcal{A}^{j-1}\beta_i)=\mathcal{A}^j\beta_i$. $\forall 1\le j\le d_i-1$.

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}^{d_i-1}\beta_i)=-a_{id_i-1}\mathcal{A}^{d_i-1}\beta_i-\dots-a_{i0}\beta_i.$$

知 $\mathcal{A}|_{F[\mathcal{A}]\beta_i}$ 在 β_i 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}0 & & & -a_{i0}\\ 1 & \ddots & & -a_{i1}\\ & \ddots & 0 & \vdots\\ & & 1 & -a_{id_i-1}\end{pmatrix}_{d_i\times d_i}=B_i$.

而 $\mathcal{A}$ 在基 β 下的矩阵为 $B=\mathrm{diag}(B_{s+1},B_{s+2},\dots,B_n)$.

Def 7.7.1 设 $A\in F^{n\times n}$，则矩阵 $\lambda I-A$ 称为 A 的特征方阵.

扫描全能王 创建

Thm 7.7.2 设 $\mathcal{A}$ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是 $\mathcal{A}$ 在 V 的基 $M=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 下的矩阵. 设数域 F 上的 n 阶方阵的特征方阵 $\lambda I-A$ 的前 s 个不变因子 $d_i(\lambda)=1$. 后 $n-s$ 个不变因子 $d_i(\lambda)=\lambda^{d_i}+a_{id_i-1}\lambda^{d_i-1}+\cdots+a_{i1}\lambda+a_0$ ($\forall s+1\le i\le n$). 且有 $d_n\ge d_{n-1}\ge\cdots\ge d_{s+1}\ge 1$. 则

(1) $V=F[\mathcal{A}]\beta_{s+1}\oplus F[\mathcal{A}]\beta_{s+2}\oplus\cdots\oplus F[\mathcal{A}]\beta_n$.

β_i 相对于 $\mathcal{A}$ 的最小生成元为 $d_i(\lambda)$, $i\in[s+1,n]$

(2) A 在 F 上相似于标准形 $B=\mathrm{diag}(B_{s+1},\cdots,B_n)$

(其中 $B_i=\begin{pmatrix} 0 & & & -a_{i0}\\ 1 & \ddots & & -a_{i1}\\ & \ddots & 0 & \vdots\\ & & 1 & -a_{id_i-1}\end{pmatrix}_{d_i\times d_i}$, $\forall s+1\le i\le n$. □.

称为 A 的有理标准形 (rational canonical form).

Thm 7.7.3 设 A,B 都是数域 F 上的 n 阶方阵，则

A 与 B 在 F 上相似 $\Leftrightarrow$ 特征方阵 $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 在 F 上相抵.

Proof: "$\Rightarrow$": A 与 B 在 F 上相似 $\Rightarrow\exists$ 可逆方阵 $P\in F^{n\times n}$, $B=P^{-1}AP$.

于是 $\lambda I-B=P^{-1}(\lambda I-A)P$ $\Rightarrow$ $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 在 F 上相抵.

"$\Leftarrow$": $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 相抵 $\Rightarrow$ 它们具有相同的不变因子.

因此，A,B 相似于同一个有理标准形 $\Rightarrow$ A 与 B 相似.

Thm 7.7.4. 设 A,B 都是数域 F 上的 n 阶方阵. K 是数域且 $K\supset F$. 则 A,B 在 F 上相似 $\Leftrightarrow$ A,B 在 K 上相似.

Proof: $\Rightarrow$: A,B 在 F 上相似，存在 F 上可逆方阵 P 使 $B=P^{-1}AP$. P 亦是 K 上可逆方阵，因此 A,B 在 K 上相似.

$\Leftarrow$: A,B 在 K 上相似，根据 Thm 7.7.3，$\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 在 K 上相抵. 因而 $\lambda I-A$, $\lambda I-B$ 具有相同的不变因子 $d_i(\lambda)$ $(1\le i\le n)$. 这些不变因子都可以由 $\lambda I-A$, $\lambda I-B$ 的元经过有限次辗转相除法得出来，因此 $d_i(\lambda)$ $(i\in[1,n])$ 也都是 F 上多项式. 故 $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 在 F 上相抵. 由 Thm 7.7.3 知道 A 与 B 上 F 上相似.

扫描全能王 创建

Thm 7.7.5 设n阶复方阵A的特征方阵的初等因子组为

$$E=\{(\lambda-\lambda_i)^{m_{ij}} \mid 1\le i\le t,\ 1\le j\le k_i\}$$

则A在复数域上相似于由各个初等因子 $(\lambda-\lambda_i)^{m_{ij}}$ 对应的Jordan块.

$$J_{m_{ij}}(\lambda_i)=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}_{m_{ij}\times m_{ij}} \quad (\forall 1\le i\le t,\ 1\le j\le k_i).$$

的全体组成的Jordan标准形 $J=\begin{pmatrix}\ddots & & \\ & J_{m_{ij}}(\lambda_i) & \\ & & \ddots\end{pmatrix}$

Proof: J的特征方阵 $\lambda I-J=\begin{pmatrix}\ddots & & \\ & \lambda I-J_{m_{ij}}(\lambda_i) & \\ & & \ddots\end{pmatrix}$

是由对角块 $\lambda I_{(m_{ij})}-J_{m_{ij}}(\lambda_i)$ 组成的准对角矩阵. 每个准对角块只有唯一的一个初等因子 $(\lambda-\lambda_i)^{m_{ij}}$. 表明E也是 $\lambda I-J$ 的初等因子组

$\Rightarrow$ $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-J$ 相抵 $\Leftrightarrow$ A与J相似. □.

EG2: n阶复方阵A与它的转置方阵 A^T 相似.

EG3: 设A是F上n维线性空间V上线性变换, 求证:

(1) $\varphi_A(\lambda)=d_1(\lambda)\cdot d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda)$. $(d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda))$.

$d_A(\lambda)=d_n(\lambda)$.

(2) $d_A(\lambda)=\varphi_A(\lambda)\Leftrightarrow V=F[A]\alpha$. $\alpha\in V$.

Proof: (1). 设A在V的基M下矩阵为A. 则 $d_A(\lambda)=d_A(\lambda)$, $\varphi_A(\lambda)=\varphi_A(\lambda)$

设A在复数域内全部不同特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_t$, A的初等因子组记为

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_{11}},(\lambda-\lambda_1)^{m_{12}},\ldots,(\lambda-\lambda_1)^{m_{1k_1}}$$

$$(\lambda-\lambda_2)^{m_{21}},(\lambda-\lambda_2)^{m_{22}},\ldots,(\lambda-\lambda_2)^{m_{2k_2}}$$

$$\cdots\cdots$$

$$(\lambda-\lambda_t)^{m_{t1}},(\lambda-\lambda_t)^{m_{t2}},\ldots,(\lambda-\lambda_t)^{m_{tk_t}}$$

其中 $m_{i1}\ge m_{i2}\ge\cdots\ge m_{ik_i}$ $\forall i\in[1,t]$.

每个初等因子就是A的Jordan标准形的各Jordan块的特征多项式, 和最小多项式. 且A的初等因子组就是矩阵 $\lambda I-A$ 的初等因子组.

A的特征多项式 $\varphi_A(\lambda)$ 等于A的Jordan标准形各Jordan块特征多项式

扫描全能王 创建

的乘积，也就是A所有初等因子的乘积，等于λI-A所有不变因子之积，

故 $\varphi_A(\lambda)=d_1(\lambda)\cdot d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda)$

$d_A(\lambda)$的最小多项式=A的Jordan标准形各Jordan块的最小多项式的最小公倍式，恰为$d_n(\lambda)$，故 $d_A(\lambda)=d_n(\lambda)$.

$\varphi_A(\lambda)=\varphi_A(\lambda)=\prod_{i=1}^{n} d_i(\lambda)$

$d_A(\lambda)=d_A(\lambda)=d_n(\lambda)$.

(2). "⇒": $d_A(\lambda)=d_n(\lambda)=\varphi_A(\lambda)=d_1(\lambda)\cdots d_n(\lambda)$.

$\Rightarrow d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=1$.

则 λI-A相似于 $diag(1,1,\cdots,1,d_n(\lambda))$.

由Thm7.2.2知 V是由某个向量β生成的循环子空间于$F[A]\beta$.

反过来，$\exists\beta\in V$，$V=F[A]\beta$，则β相对于A的最小多项式 $d_{A,\beta}$ 的次数为n. $d_A(A)=0\Rightarrow d_{A,\beta}(A)\beta=0$.

$\Rightarrow d_{A,\beta}(\lambda)\mid d_A(\lambda)$

$n=\deg d_{A,\beta}(\lambda)\le\deg d_A(\lambda)\le\deg\varphi_A(\lambda)=n$

$\Rightarrow d_{A,\beta}(\lambda)=d_A(\lambda)=\varphi_A(\lambda)$

习题 7.7.

2、A是循环变换 $\Leftrightarrow d_A(\lambda)=\varphi_A(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda)$.

$\Leftrightarrow d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=1$.

$\Leftrightarrow D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=\cdots=D_{n-1}(\lambda)=1$. □.

3. $\varphi_A(\lambda)=d_A(\lambda)\Leftrightarrow$A相似于 $diag(1,\cdots,1,d_A(\lambda))$.

初等因子组：$\{(\lambda-\lambda_1)^{n_1},\cdots,(\lambda-\lambda_t)^{n_t}\}$

$J=diag(d_{n_1}(\lambda_1),\cdots,d_{n_t}(\lambda_t))$

4、(1). 初等因子组：$\{(\lambda-1)^3,(\lambda-1),(\lambda+1)^2,\lambda+1,\lambda^2\}$

$J=diag(J_3(1),J_1(1),J_2(-1),J_1(-1),J_2(0))$

(2) 初等因子组可等能的情况：$\{(\lambda-1),(\lambda-1),(\lambda+1)^2,\lambda+1,(\lambda+1)^2,\lambda^2\}$

$\{(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2,(\lambda+1),(\lambda+1)^2,\lambda^2\}$

对应的Jordan标准形：$diag(J_1(1),J_1(1),J_2(1),J_1(-1),J_2(-1),J_2(0))$

$diag(J_2(1),J_2(1),J_1(-1),J_2(-1),J_2(0))$

扫描全能王 创建

§7.8 实方阵与实相似.

Prop 7.8.1 同阶实方阵A与B复相似 $\Leftrightarrow$ A与B实相似.

Proof: ① 由Thm 7.7.4. 当 $F=R$ 时, $F\subset\mathbb{C}$. 无需再证. □

② A,B实相似 $\Rightarrow$ A,B复相似是显然的.

若A,B复相似, 存在可逆矩阵P, 使得 $B=P^{-1}AP$. 即 $PB=AP$.

设 $P=(p_{ij})_{n\times n}$ 的每个元 $p_{ij}=x_{ij}+y_{ij}\cdot i$ $(x_{ij},y_{ij}\in\mathbb{R})$

令 $P_1=(x_{ij})_{n\times n}$, $P_2=(y_{ij})_{n\times n}$. 则 $P=P_1+P_2\cdot i$

$A\cdot(P_1+P_2i)=(P_1+P_2i)B \Rightarrow \begin{cases} AP_1=P_1B \\ AP_2=P_2B \end{cases}$.

P可逆 $\Rightarrow \det P=\det(P_1+P_2i)\neq 0$.

考虑 $f(\lambda)=\det(P_1+P_2\lambda)$.

$f(i)\neq 0 \Rightarrow$ ~~deg~~ $f(\lambda)$ 不为零多项式.

设 $\deg f(\lambda)=m$. 则 $f(\lambda)$ 至多只有m个实根.

取 $c\in\mathbb{R}$. $f(c)\neq 0$.

$$\begin{cases} AP_1=P_1B \\ AP_2=P_2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AP_1=P_1B \\ A(cP_2)=(cP_2)B \end{cases} \Rightarrow A(P_1+cP_2)=(P_1+cP_2)B.$$

$\det(P_1+P_2c)\neq 0$. 故 $Q=P_1+P_2\cdot c$ 可逆且 $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

$\Rightarrow$ A,B实相似. □.

Lem 7.8.2 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 则以A的虚特征值为根的初等因子成对共轭出现.

Proof: 设 $d_k(\lambda)$ 是 $\lambda I-A$ 的任何一个不为常数的不变因子, 则

$d_k(\lambda)\in\mathbb{R}[\lambda]$. 设 γ 是 $d_k(\lambda)$ 的虚根, 重数为 m_k.

则 $(\lambda-\gamma)^{m_k}$ 是 $d_k(\lambda)$ 唯一一个以 γ 为根的初等因子.

$$d_k(\lambda)=f(\lambda)\cdot(\lambda-\gamma)^{m_k} \qquad \lambda-\gamma\nmid f(\lambda)$$

两边取共轭, 则 $d_k(\lambda)=\bar{f}(\lambda)(\lambda-\bar{\gamma})^{m_k}$

$\Rightarrow$ $(\lambda-\bar{\gamma})^{m_k}$ 是 $d_k(\lambda)$ 的因式且 $\lambda-\bar{\gamma}\nmid\bar{f}(\lambda)$.

故 $(\lambda-\bar{\gamma})^{m_k}$ 是 $d_k(\lambda)$ 的唯一一个以 $\bar{\gamma}$ 为根的初等因子.

再对每个不变因子讨论即得结论. □.

扫描全能王 创建

~~EG1: 设 r=~~

EG1: 设 $r=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $b\neq 0$.

$$A=\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \bar{r} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{pmatrix}$$

试求与 A 相似的实方阵.

解: $A=a\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}i&\\&-i\end{pmatrix}$

记 $D=\begin{pmatrix}i&\\&-i\end{pmatrix}$ $D^2=-I$

而 $K=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ $K^2=-I$. 且 K 的特征值为 i 与 -i.

K 与 D 相似 属于 i, -i 的特征向量分别为 $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$

记 $P=\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}$, $KP=PD$. 故 $PDP^{-1}=K$.

$PAP^{-1}=P(aI+bD)P^{-1}=aI+bK=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$. □

EG2: 设 r 为不为 0 的任意复数, 求证:

$J_m(r)$ 相似于 $\begin{pmatrix} r & r & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & r \\ & & & r \end{pmatrix}=r\cdot J_m(1)$.

Proof: 取对角阵 $\Lambda=\mathrm{diag}(1,r,r^2,\cdots,r^{m-1})$.

$\Lambda^{-1}=\mathrm{diag}(1,\frac{1}{r},(\frac{1}{r})^2,\cdots,\frac{1}{r^{m-1}})$

$\mathrm{diag}(1,\frac{1}{r},(\frac{1}{r})^2,\cdots,(\frac{1}{r})^{m-1})\cdot J_m(r)\cdot\Lambda$

$$=\begin{pmatrix}1&&&\\&\frac{1}{r}&&\\&&\ddots&\\&&&(\frac{1}{r})^{m-1}\end{pmatrix}(1,r,r^2,\cdots,r^{m-1})=\begin{pmatrix}r&r&&\\&r&\ddots&\\&&\ddots&r\\&&&r\end{pmatrix}=rJ_m(1).$$

EG3. 设 $a,b\in\mathbb{R}$. 且 $b\neq 0$. 证

$D=\begin{pmatrix}J_m(a+bi)&\\&J_m(a-bi)\end{pmatrix}$ 与 $L=\begin{pmatrix}aJ_m(1)&bJ_m(1)\\-bJ_m(1)&aJ_m(1)\end{pmatrix}$ 相似.

Proof: D 与 $\begin{pmatrix}(a+bi)J_m(1)&\\&(a-bi)J_m(1)\end{pmatrix}$ 相似.

取 $P=\begin{pmatrix}I_{(m)}&I_{(m)}\\iI_{(m)}&-iI_{(m)}\end{pmatrix}$ $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}I_{(m)}&-\frac{1}{2}iI_{(m)}\\\frac{1}{2}I_{(m)}&\frac{1}{2}iI_{(m)}\end{pmatrix}$ 则

$$P\begin{pmatrix}(a+bi)J_m(1)&\\&(a-bi)J_m(1)\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}aJ_m(1)&bJ_m(1)\\-bJ_m(1)&aJ_m(1)\end{pmatrix}$$

$$D=P_1\begin{pmatrix}(a+bi)J_m(1)&\\&(a-bi)J_m(1)\end{pmatrix}P_1^{-1}=P_1P^{-1}\begin{pmatrix}aJ_m(1)&bJ_m(1)\\-bJ_m(1)&aJ_m(1)\end{pmatrix}PP_1^{-1}$$

$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix}J_m(a+bi)&\\&J_m(a-bi)\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}aJ_m(1)&bJ_m(1)\\-bJ_m(1)&aJ_m(1)\end{pmatrix}$ 相似 □.

扫描全能王 创建

Thm 7.8.3 设 n 阶实方阵 A 的全部初等因子为：

$$\lambda^{n_j}\ (1\le j\le s);\quad (\lambda-\lambda_j)^{m_j}\ (1\le j\le t),$$
$$(\lambda-a_j-b_j i)^{k_j},\quad (\lambda-a_j+b_j i)^{k_j}\ (1\le j\le p).$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_t$ 是 A 的非零特征值，$a_1\pm b_1 i$，$a_2\pm b_2 i$，$\dots$，$a_p\pm b_p i$ 是 A 的虚特征值（均不一定两两不同）。则 A 实相似于如下标准形：$\mathrm{diag}(N_{n_1},\dots,N_{n_s},\lambda_1 M_{m_1},\dots,\lambda_t M_{m_t},L_{k_1}(a_1\pm b_1 i),\dots,L_{k_p}(a_p\pm b_p i))$ 其中，

$$N_{n_j}=J_{n_j}(0),\quad M_{m_i}=J_{m_i}(1)$$
$$L_{k_j}(a_j\pm b_j i)=\begin{pmatrix} aM_{k_j} & bM_{k_j}\\ -bM_{k_j} & aM_{k_j}\end{pmatrix}.$$

EG4：设 $a+bi$，$a-bi$ 为共轭虚数（$a,b\in\mathbb{R}$，但 $b\neq 0$）。

求证：$D=\begin{pmatrix} J_m(a+bi) & \\ & J_m(a-bi)\end{pmatrix}$ 相似于

$$K=\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 & & & \\ -b & a & 0 & 1 & & & \\ & & a & b & \ddots & & \\ & & -b & a & & & \\ & & & & \ddots & 1 & 0\\ & & & & & a & b\\ & & & & & -b & a\end{pmatrix}$$

Proof：$\forall\ 1\le j\le 2m$，考虑 e_j

$$\begin{cases} De_1=(a+bi)e_1\\ De_j=(a+bi)e_j+e_{j-1} & (\forall\ 2\le j\le m)\\ De_{m+1}=(a-bi)e_1\\ De_{m+j}=(a-bi)e_{m+j}+e_{m+j-1} & (\forall\ 2\le j\le m)\end{cases}$$

以 $e_1,e_{m+1},e_2,e_{m+2},\dots,e_m,e_{2m}$ 为各列排成可逆矩阵 P。

则 $D(e_1,e_{m+1},e_2,e_{m+2},\dots,e_m,e_{2m})=$

$$(e_1,e_{m+1},e_2,e_{m+2},\dots,e_m,e_{2m})\begin{pmatrix} a+bi & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & a-bi & 0 & 1 & & & \\ & & a+bi & 0 & \ddots & & \\ & & 0 & a-bi & & & \\ & & & & \ddots & 1 & 0\\ & & & & & a+bi & 0\\ & & & & & 0 & a-bi\end{pmatrix}$$

$$=:B.$$

故 D 与 B 相似，而 $\begin{pmatrix} a+bi & 0\\ 0 & a-bi\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ 相似。

取 $\Lambda=\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} -i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix} -i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)$，则有 $\Lambda B\Lambda^{-1}=K$ 口。

扫描全能王 创建

Thm 7.8.4. 设 n 阶实方阵 A 的全部初等因子为 $(\lambda-\lambda_j)^{m_j}$ $(1\le j\le t)$，
$(\lambda-a_j-b_j i)^{m_j}$，$(\lambda-a_j+b_j i)^{m_j}$ $(1\le j\le p)$，
则 A 实相似于：$diag(J_{n_1}(\lambda_1),\dots,J_{n_t}(\lambda_t),K_{m_1}(a_1\pm b_1 i),\dots,K_{m_p}(a_p\pm b_p i))$

其中 $K_{m_j}(a_j\pm b_j i)=\begin{pmatrix} L(a_j\pm b_j i) & I(2) & & \\ & L(a_j\pm b_j i) & \ddots & \\ & & \ddots & I(2) \\ & & & L(a_j\pm b_j i) \end{pmatrix}$

是初等因子为 $(\lambda-a_j-b_j i)^{m_j}$，$(\lambda-a_j+b_j i)^{m_j}$ 的 $2m_j$ 阶矩阵。 $L(a_j\pm b_j i)=\begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$.

Cor 7.8.1 如果实数域 R 上线性空间 V 上线性变换 $\mathcal{A}$ 有虚特征值 $a+bi$，则 V 中存在 $\mathcal{A}$ 的 2 维不变子空间 W，$\mathcal{A}|_W$ 的特征量为 $a\pm bi$

习题 7.8.1

1. ~~考虑 e_1,e_2,e_3,e_4，设 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$~~

~~$Ae_1=e_4$，$Ae_2=e_1$，$Ae_3=e_2$，$Ae_4=e_3$.~~

~~故 $A(e_1,e_2,e_3,e_4)=(e_4,e_1,e_2,e_3)$~~

$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&i&\\&&&-i\end{pmatrix}$ 复相似但不实相似。

↳ A 的 $\lambda I-A$ 的初等因子组为 $(\lambda-1)$，$(\lambda+1)$，$(\lambda-i)$，$(\lambda+i)$.

2. 只需考虑两矩阵是否复相似。

前一个方阵与 $diag(2J_2(2+i),J_2(2-i))$ 相似

后一个方阵也与 $diag(J_2(2+i),J_2(2-i))$ 相似。

□

3. ~~$\forall X\in W$，$\exists\alpha,\beta\in\mathbb{C}$，$X=\alpha X_1+\beta X_2$.~~

~~$\mathcal{A}X=\mathcal{A}(\alpha X_1+\beta X_2)=\alpha\mathcal{A}X_1+\beta\mathcal{A}X_2=(a+bi)(\alpha X_1+\beta X_2)\in W$~~

$a-bi$ 也是 $\mathcal{A}$ 的特征值，且 $\mathcal{A}(X_1+iX_2)=(a+bi)(X_1+iX_2)$

取共轭有 $\mathcal{A}(X_1-iX_2)=(a-bi)(X_1-iX_2)$.

$\mathcal{A}X_1=aX_1-bX_2$，$\mathcal{A}X_2=aX_2+bX_1\Rightarrow$ 不变子空间。

$\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$.

扫描全能王 创建