对《从正多边形中的有理比到 $\tan\frac{\pi}{n}$ 的极小多项式》一文之补充与更正

林开亮

2021 年 12 月 24 日

文 [2] 在本刊发表以后, 作者发现了前人相关的工作与该文出现的错误, 特在此做一补充与更正.

在文 [2] 中, 作者从几何角度推广了 $\sqrt{2}$ 是无理数这一事实, 证明了对任意的正 n 边形 $(n \geq 4)$, 其任意两条不等长的广义对角线 (包括边长在内) 之比都是无理数, 唯一的例外是正 $6m$ 边形中出现的有理比值 2(参见 [2, p. 54] 定理 2.1). 事实上, 该结果已经为 R. J. Evans 和 I. M. Isaacs([1, p. 257]) 与 C. T. McMullen([3, p.7]) 各自独立得到. 而且, McMullen[3, p. 7] 定理 2.3 还确定了所有的二次无理比值, 从而确立了 [2, p. 73] 猜想 8.4, 进而由此可以得出 [2, p. 73] 问题 8.1 的回答.

作者注意到, [2, p. 74] 猜想 8.5–8.7 均有错 (作者对由此给各位读者带来的不便表示歉意). 现更正如下:

猜想 0.1. 设 n 是正整数, 整数 k_1, k_2 满足

$$\gcd(n, k_1, k_2) = 1, \qquad \sin\frac{k_1\pi}{n}, \sin\frac{k_2\pi}{n} \neq 0, \pm 1.$$

令

$$\alpha = \frac{\sin\frac{k_2\pi}{n}}{\sin\frac{k_1\pi}{n}} \neq \pm 1, \tag{0.1}$$

$$D = \frac{n}{\gcd(n, k_1)\gcd(n, k_2)}. \tag{0.2}$$

则有

- 若 n 是奇数, 则

$$\deg_{\mathbb{Q}}(\alpha) = \frac{\varphi(2n)}{2} = \frac{\varphi(n)}{2}. \tag{0.3}$$

- 若 n 是偶数且 k_1, k_2 都是奇数, 则

$$\deg_{\mathbb{Q}}(\alpha) = \begin{cases} \frac{\varphi(2n)}{8} = \frac{\varphi(n)}{4}, & \text{若 } D = 2 \\ \frac{\varphi(2n)}{4} = \frac{\varphi(n)}{2}, & \text{其它情况} \end{cases}. \tag{0.4}$$

- 若 n 是偶数且 k_1, k_2 一奇一偶, 则

$$\deg_{\mathbb{Q}}(\alpha) = \begin{cases} \frac{\varphi(2n)}{4} = \frac{\varphi(n)}{2}, & \text{若 } D = 1 \text{ 或 } D = 2 \\ \frac{\varphi(2n)}{2} = \varphi(n), & \text{其它情况} \end{cases}. \tag{0.5}$$

猜想 0.2. 设 n 是正整数, 整数 k_1, k_2 满足

$$\gcd(n, k_1, k_2) = 1, \qquad \cos\frac{k_1\pi}{n}, \cos\frac{k_2\pi}{n} \neq 0, \pm 1.$$

令

$$\beta = \frac{\cos\frac{k_2\pi}{n}}{\cos\frac{k_1\pi}{n}} \neq \pm 1, \tag{0.6}$$

$$D = \frac{n}{\gcd(n, k_1)\gcd(n, k_2)}. \tag{0.7}$$

则有

- 若 n 是奇数, 则

$$\deg_{\mathbb{Q}}(\beta) = \begin{cases} \frac{\varphi(n)}{4}, & \text{若 } D = 1 \\ \frac{\varphi(n)}{2}, & \text{其它情况} \end{cases} \tag{0.8}$$

- 若 n 是偶数且 k_1, k_2 都是奇数, 则

$$\deg_{\mathbb{Q}}(\beta) = \frac{\varphi(2n)}{4} = \frac{\varphi(n)}{2}. \tag{0.9}$$

- 若 n 是偶数且 k_1, k_2 一奇一偶, 则

$$\deg_{\mathbb{Q}}(\beta) = \begin{cases} \frac{\varphi(2n)}{4} = \frac{\varphi(n)}{2}, & \text{若 } D = 1 \text{ 或 } D = 2 \\ \frac{\varphi(2n)}{2} = \varphi(n), & \text{其它情况} \end{cases}. \tag{0.10}$$

猜想 0.3. 设 n 是正整数, 整数 k_1, k_2 满足

$$\gcd(n, k_1, k_2) = 1, \qquad \tan\frac{k_1\pi}{n}\tan\frac{k_2\pi}{n} \neq 0, \qquad \sin\frac{(k_1 \pm k_2)\pi}{n} \neq \pm 1.$$

若

$$\gamma = \frac{\tan\frac{k_2\pi}{n}}{\tan\frac{k_1\pi}{n}} \neq \pm 1, \tag{0.11}$$

则

- 若 n 是奇数, 则
$$\deg_{\mathbb{Q}}(\gamma) = \frac{\varphi(n)}{2}. \tag{0.12}$$

- 若 n 是偶数且 k_1, k_2 一奇一偶, 则
$$\deg_{\mathbb{Q}}(\gamma) = \begin{cases} \frac{\varphi(n)}{4}, & \text{若} \frac{n}{\gcd(n,k_1+k_2)\gcd(n,k_1-k_2)} = 2 \\ \frac{\varphi(n)}{2}, & \text{其它情况} \end{cases} \tag{0.13}$$

- 若 n 是偶数且 k_1, k_2 都是奇数, 则
$$\deg_{\mathbb{Q}}(\gamma) = \begin{cases} \frac{\varphi(n)}{4}, & \text{若} \frac{2n}{\gcd(n,k_1+k_2)\gcd(n,k_1-k_2)} = 1, 2 \\ \frac{\varphi(n)}{2}, & \text{其它情况} \end{cases} \tag{0.14}$$

作者证明了, 当 $6 \nmid n$ 时, 猜想 0.1–0.3 均成立. 所依据的一个关键结果如下:

引理 0.4. 设 n 是正整数且 $6 \nmid n$, 整数 k_1, k_2 满足
$$\gcd(n, k_1, k_2) = 1, \qquad \cos\frac{k_1\pi}{n}\cos\frac{k_2\pi}{n} \neq 0.$$
若
$$\beta = \frac{\cos\frac{k_2\pi}{n}}{\cos\frac{k_1\pi}{n}} \neq \pm 1,$$
则
$$\cos\frac{k_1\pi}{n}\cos\frac{k_2\pi}{n} \in \mathbb{Q}(\beta) \tag{0.15}$$

我们进一步猜测, 上述引理中的条件 $6 \nmid n$ 可以去掉, 从而猜想 0.1–0.3 恒成立.

致谢

感谢首都师范大学李克正教授、山东大学李良攀教授、南京大学朱富海教授、西安电子科技大学张哲博士、中国传媒大学陈见柯博士、中央民族大学王兢博士、中国矿业大学 (北京) 张汉雄博士、北京市朝阳区教研中心张浩博士与作者讨论交流. 感谢西安邮电大学仝秋娟老师帮忙传递文献. 感谢本刊审稿人对初稿提出宝贵意见.

参考文献

[1] R. J. Evans and I. M. Isaacs, Fields generated by linear combinations of roots of unity, Trans. Amer. Math. Soc. 229 (1977), 249-258.

[2] 林开亮, 从正多边形中的有理比到 $\tan\frac{\pi}{n}$ 的极小多项式, 《蛙鸣》第 64 期 (2021 年 6 月), 52–78.

[3] C. T. McMullen, Teichmüller curves in genus two: Torsion divisors and ratios of sines. Invent. Math. 165(3) (2006): 651–672.