有理角三角函数比值的次数与极小多项式

林开亮

2021 年 11 月 15 日

摘 要

作为文 [11] 的续篇, 本文通过考虑有理角的三角函数比值在伽罗瓦群作用下的稳定子群, 研究了其次数与极小多项式. 指出了前人更早的相关工作, 更正了旧的猜想, 并给出部分证明. 对于未解决的情形, 建议了一个猜想.

1 引言

在文 [11] 中, 作者从几何角度推广了 $\sqrt{2}$ 是无理数这一事实, 证明了对任意的正 n 边形 ($n \geq 4$), 其任意两条不等长的广义对角线 (包括边长在内) 之比都是无理数, 唯一的例外是正 $6m$ 边形中出现的有理比值 2. 作者后来了解到, 该结果已经为 R. J. Evans 和 I. M. Isaacs([6, p. 257]) 与 C. T. McMullen([12, p.7]) 各自独立得到, 它可表述如下 ([11, p. 54]), :

定理 1.1 (Evans–Isaacs, 1977; McMullen, 2006). 设正整数 k_1, k_2, n 满足 $k_1 < k_2 \leq \frac{n}{2}$ 且 $\gcd(n, k_1, k_2) = 1$, 则

$$\alpha = \frac{\sin \frac{k_2\pi}{n}}{\sin \frac{k_1\pi}{n}} \in \mathbb{Q} \iff (n, k_2, k_1) = (6, 3, 1),$$

而且此时比值 $\alpha = 2$.

文 [11] 还指出, 与之等价的正切、余弦结果曾分别为 D. B. Shapiro [17], A. Berger[2] 和蔡进一等 [5] 得到, 我们引述如下.

定理 1.2 (Shapiro,1984; 蔡进一等人, 2018). 设正整数 k_1, k_2, n 满足 $k_1 < k_2 < \frac{n}{2}$ 且 $\gcd(n, k_1, k_2) = 1$, 则

$$\gamma = \frac{\tan \frac{k_2\pi}{n}}{\tan \frac{k_1\pi}{n}} \in \mathbb{Q} \iff (n, k_2, k_1) = (6, 2, 1),$$

而且此时比值 $\gamma = 3$.

定理 1.3 (Berger,2017)**.** 设正整数 n, k_1, k_2 满足 $k_1 < k_2 < \frac{n}{2}$, 则 $\dfrac{\cos\frac{k_2\pi}{n}}{\cos\frac{k_1\pi}{n}}$ 为无理数.

Berger 的推理基于 [3] 中一个更强的结果, 如下:

定理 1.4. 设 $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, 使得 $r_1 + r_2 \notin \mathbb{Z}, r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$. 对 $i = 1, 2$, 令 $N(r_j)$ 表示 r_j 的既约分数表示中的正分母, 则以下条件等价

(i) $1, \cos(r_1\pi), \cos(r_2\pi)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关;

(ii) 对 $j = 1, 2$, $N(r_j) \geq 4$ 且 $(N(r_1), N(r_2)) \neq (5, 5)$.

顺便指出, Berger [3] 用定理 1.4 确定了全部的“有理中学三角形”. 某三角形称为一个有理中学三角形, 若它的三个角都是有理角, 且三边长 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 满足关系

$$\ell_1 : \ell_2 : \ell_3 = x_1 : x_2 : x_3,$$

其中 $x_j \in \mathbb{Q}(\sqrt{d_j})$, 这里 d_j 是一个正整数. Berger 的结果可简单表述为: 一个三角形为有理中学三角形当且仅当它的每一个角是 15° 或 36° 的整数倍. 在相似意义下, 有理中学三角形只有 14 个（其中 7 个等腰三角形, 3 个直角三角形）, 其内角分别为:

60-60-60	45-45-90	30-60-90	15-75-90	30-30-120
30-75-75	15-15-150	30-45-105	40-60-75	15-45-120
15-60-105	15-30-135	36-36-108	36-72-72	

这一结果曾经由 J. C. Parnami 等 [15] 得到.

E. J. Barbeau 在 1983 年的文章 [1] 中考虑了正多边形广义对角线比值的有理性问题, 得到部分结果. 2020 年, G. Vincenzi [19] 证明了当 $6 \nmid n$ 时, 正 n 边形任意两条不等长的广义对角线之比值为无理数. 虽然 McMullen2006 年的文章 [12] 看来是第一次对 Barbeau 的问题作出完整的回答 (McMullen 似乎并不知道 Barbeau 的文章), 但 Evans–Isaacs 1977 年的文章 [6] 已经蕴含这个问题的回答. Evans–Isaacs 是用一种等价的方式表述的: 若一个三内角全部为有理角的三角形至少有两条有理边, 则它或者是等腰三角形, 或者是角度为 $\pi/2, \pi/3, \pi/6$ 的直角三角形. 两位作者曾将这个结果在《美国数学月刊》问题征解栏目给出, 但是他们所提供的解答是有问题的,[1] 见 [7]. G. Vincenzi 等在最

[1]其解答中有这样一条推理：设正整数 s_1, s_2 满足 $\varphi(s_1) = \varphi(s_2)$ 且 $s_2 \geq s_1$, 则有 $s_2 = s_1$ 或 $s_2 = 2s_1$, 其中 s_1 是奇数. 反例有 $s_1 = 4, s_2 = 3$. 事实上, 与此相关的, 有一个著名的公开问题, 称为 Carmichael 猜想：对任意的正整数 n, 存在正整数 $m \neq n$ 使得 $\varphi(m) = \varphi(n)$.

近的文章 [20] 中仅援引了这篇征解文章而未提及两位作者更早的文章 [6], 是欠考虑的.

Barbeau 在 1983 年的文章中还建议研究广义对角线比值 (在有理数域上) 的次数, 这一问题与相关的问题曾被许多作者讨论过, 如 [2, 3, 8, 12]. 特别地, McMullen[12, p. 7] 定理 2.3 确定了所有二次无理比值, 结果如下:

定理 1.5 (McMullen, 2006). 设正整数 n, k_1, k_2 满足 $k_1 < k_2 \le \frac{n}{2}$ 且 $\gcd(n, k_1, k_2) = 1$. 则比值 $\dfrac{\sin\frac{k_2\pi}{n}}{\sin\frac{k_1\pi}{n}}$ 为二次无理数当且仅当 (n, k_2, k_1) 取值于下表第一列 (共 15 种可能), 而对应的比值与极小多项式分别由第二、三列给出:

(n, k_2, k_1)	$\dfrac{\sin\frac{k_2\pi}{n}}{\sin\frac{k_1\pi}{n}}$	极小多项式
$(4, 2, 1)$	$\sqrt{2}$	$x^2 - 2 = 0$
$(5, 2, 1)$	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\boldsymbol{x^2 - x - 1 = 0}$
$(6, 3, 2)$	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	$x^2 - \dfrac{4}{3} = 0$
$(6, 2, 1)$	$\sqrt{3}$	$x^2 - 3 = 0$
$(8, 3, 1)$	$1+\sqrt{2}$	$\boldsymbol{x^2 - 2x - 1 = 0}$
$(10, 5, 3)$	$-1+\sqrt{5}$	$x^2 + 2x - 4 = 0$
$(10, 5, 1)$	$1+\sqrt{5}$	$x^2 - 2x - 4 = 0$
$(10, 3, 1)$	$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$	$x^2 - 3x + 1 = 0$
$(12, 5, 3)$	$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$	$x^2 - x - \dfrac{1}{2} = 0$
$(12, 5, 1)$	$2+\sqrt{3}$	$x^2 - 4x + 1 = 0$
$(12, 4, 3)$	$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$x^2 - \dfrac{3}{2} = 0$
$(12, 3, 2)$	$\sqrt{2}$	$x^2 - 2 = 0$
$(12, 3, 1)$	$1+\sqrt{3}$	$x^2 - 2x - 2 = 0$
$(30, 9, 5)$	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\boldsymbol{x^2 - x - 1 = 0}$
$(30, 5, 3)$	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\boldsymbol{x^2 - x - 1 = 0}$

这意味着 [11] 中的猜想 8.4 已然是定理, 进而 Perez-Giz 于 2018 年提出的问题 (见 [16], 即 [11, p.73] 问题 8.1) 之解答也蕴含在 McMullen 2006 年的文章中. 即有 (参见上表第三列中出现的 4 行黑体):

推论 1.6. 设 k 是正整数, 则 $\phi_k = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ 可以实现为某个正多边形的两条广义对角线之比当且仅当 $k=1$ 或 $k=2$.

根据余弦比与正弦比之间的基本关系

$$\frac{\cos\frac{k_2\pi}{n}}{\cos\frac{k_1\pi}{n}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k_2\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k_1\pi}{n}\right)},$$

我们不难得到定理 1.4 的等价余弦版本:

定理 1.7. 设正整数 n, k_1, k_2 满足 $k_1 < k_2 < \frac{n}{2}$ 且 $\gcd(n, k_1, k_2) = 1$. 则比值 $\frac{\cos\frac{k_2\pi}{n}}{\cos\frac{k_1\pi}{n}}$ 为二次无理数当且仅当 (n, k_2, k_1) 取值于下表第一列 (共 11 种可能), 而对应的比值与极小多项式分别由第二、三列给出:

(n,k_2,k_1)	$\frac{\cos\frac{k_2\pi}{n}}{\cos\frac{k_1\pi}{n}}$	极小多项式
$(5,2,1)$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$x^2-3x+1=0$
$(6,2,1)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$x^2-\frac{1}{3}=0$
$(8,3,1)$	$-1+\sqrt{2}$	$x^2+2x-1=0$
$(10,3,1)$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$x^2+x-1=0$
$(12,5,3)$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$2x^2+2x-1=0$
$(12,5,1)$	$2-\sqrt{3}$	$x^2-4x+1=0$
$(12,4,3)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x^2-\frac{1}{2}=0$
$(12,3,2)$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$x^2-\frac{2}{3}=0$
$(12,3,1)$	$-1+\sqrt{3}$	$x^2+2x-2=0$
$(15,6,5)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$x^2+x-1=0$
$(15,5,3)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$x^2+x-1=0$

类似地, 根据正切比与正弦比之间的关系 (蒙山东大学李良攀教授指出)

$$\frac{\tan\frac{k_2\pi}{n}}{\tan\frac{k_1\pi}{n}}=\frac{\sin\frac{k_2\pi}{n}\cos\frac{k_1\pi}{n}}{\cos\frac{k_2\pi}{n}\sin\frac{k_1\pi}{n}}=\frac{2\sin\frac{k_2\pi}{n}\cos\frac{k_1\pi}{n}}{2\cos\frac{k_2\pi}{n}\sin\frac{k_1\pi}{n}}=\frac{\sin\frac{(k_2+k_1)\pi}{n}+\sin\frac{(k_2-k_1)\pi}{n}}{\sin\frac{(k_2+k_1)\pi}{n}-\sin\frac{(k_2-k_1)\pi}{n}}=\frac{\frac{\sin\frac{(k_2+k_1)\pi}{n}}{\sin\frac{(k_2-k_1)\pi}{n}}+1}{\frac{\sin\frac{(k_2+k_1)\pi}{n}}{\sin\frac{(k_2-k_1)\pi}{n}}-1},$$

不难得到定理 1.4 的等价正切版本:

定理 1.8. 设正整数 n,k_1,k_2 满足 $k_1<k_2<\frac{n}{2}$ 且 $\gcd(n,k_1,k_2)=1$. 则比值 $\dfrac{\tan\frac{k_2\pi}{n}}{\tan\frac{k_1\pi}{n}}$ 为二次无理数当且仅当 (n,k_2,k_1) 取值于下表第一列 (共 22 种可能), 而对应的比值与极小多项式分别由第二、三列给出:

(n,k_2,k_1)	$\dfrac{\tan\frac{k_2\pi}{n}}{\tan\frac{k_1\pi}{n}}$	极小多项式
$(5,2,1)$	$2+\sqrt{5}$	$x^2-4x-1=0$
$(8,3,2)$	$1+\sqrt{2}$	$x^2-2x-1=0$
$(8,3,1)$	$3+2\sqrt{2}$	$x^2-6x+1=0$
$(8,2,1)$	$1+\sqrt{2}$	$x^2-2x-1=0$
$(10,4,3)$	$\sqrt{5}$	$x^2-5=0$
$(10,4,1)$	$5+2\sqrt{5}$	$x^2-10x+5=0$
$(10,3,2)$	$\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}$	$5x^2-10x+1=0$
$(10,3,1)$	$2+\sqrt{5}$	$x^2-4x-1=0$
$(10,2,1)$	$\sqrt{5}$	$x^2-5=0$
$(12,5,4)$	$\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$	$3x^2-6x-1=0$
$(12,5,3)$	$2+\sqrt{3}$	$x^2-4x+1=0$
$(12,5,2)$	$3+2\sqrt{3}$	$x^2-6x-3=0$
$(12,5,1)$	$7+4\sqrt{3}$	$x^2-14x+1=0$
$(12,4,3)$	$\sqrt{3}$	$x^2-3=0$
$(12,4,1)$	$3+2\sqrt{3}$	$x^2-6x-3=0$
$(12,3,2)$	$\sqrt{3}$	$x^2-3=0$
$(12,3,1)$	$2+\sqrt{3}$	$x^2-4x+1=0$
$(12,2,1)$	$\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$	$3x^2-6x-1=0$
$(24,7,1)$	$5+2\sqrt{6}$	$x^2-10x+1=0$
$(24,5,1)$	$3+2\sqrt{2}$	$x^2-6x+1=0$
$(30,7,2)$	$2+\sqrt{5}$	$x^2-4x-1=0$
$(30,4,1)$	$2+\sqrt{5}$	$x^2-4x-1=0$

T. Grubb 和 C. Woll 在 2021 年发表的文章 [9, p. 3] 中给出以下结果 (其定理 2).

命题 1.9. 设正整数 n, k_1, k_2 满足 $k_1 < k_2 \le \frac{n}{2}$ 且 $\gcd(k_1, k_2) = 1$. φ 是欧拉函数. 则

- 若 n 是奇数, 则
$$\deg_{\mathbb{Q}}\left(\frac{\sin\frac{k_2\pi}{n}}{\sin\frac{k_1\pi}{n}}\right) = \frac{\varphi(4n)}{4} = \frac{\varphi(n)}{2}. \tag{1.1}$$
- 若 n 是偶数, 则
$$\deg_{\mathbb{Q}}\left(\frac{\sin\frac{k_2\pi}{n}}{\sin\frac{k_1\pi}{n}}\right) \ge \frac{\varphi(4n)}{10} = \frac{\varphi(2n)}{5}. \tag{1.2}$$

之所以我们将这个结果改称为命题, 是因为它不全对. (1.1) 是成立的, 但 (1.2) 不成立. 一个反例是 $(n, k_2, k_1) = (30, 5, 3)$(定理 1.4 中的表最后一行), 此时
$$\frac{\sin\frac{k_2\pi}{n}}{\sin\frac{k_1\pi}{n}} = \frac{\sin\frac{5\pi}{30}}{\sin\frac{3\pi}{30}} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{10}} = \frac{1}{2\cos\frac{2\pi}{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{1.3}$$
其次数为 2. 而
$$\frac{\varphi(2n)}{5} = \frac{\varphi(60)}{5} = \frac{\varphi(3\cdot 4\cdot 5)}{5} = \frac{\varphi(3)\varphi(4)\varphi(5)}{5} = \frac{2\cdot 2\cdot 4}{5} = \frac{16}{5} = 3.2 > 2.$$

对于有理角三角函数的比值之次数, 本文作者在 [11, pp. 74–75] 中也提出了一些猜想 (猜想 8.5,8.6,8.7). 但后来发现, 这些猜想也欠考虑. 本文将重新考虑这些问题. 特别地, 定理 3.1 将给出上述命题 1.9 的修正.

我们将首先余弦比值的情况 (第 2 节), 接着据此推出正弦比值的结果 (第 3 节), 进而导出关于正切的定理与猜想 (第 4 节), 最后提出了一个可以解决整个问题的新猜想 (猜想 5.1) 以及相关的结果. 需要指出的是, 本文尚未完全解决这些问题, 对于未解决的 $6 \mid n$ 的情形, 期待有兴趣的读者彻底解决.

2 有理角余弦比值的次数与极小多项式

相比于正弦, 余弦更简单. 我们将证明的主要定理如下:

定理 2.1. 设 n 是正整数且 $6 \nmid n$, 整数 k_1, k_2 满足
$$\gcd(n, k_1, k_2) = 1$$

且

$$\cos\frac{k_1\pi}{n}, \cos\frac{k_2\pi}{n} \neq 0, \pm 1.$$

令

$$\beta = \frac{\cos\frac{k_2\pi}{n}}{\cos\frac{k_1\pi}{n}} \neq \pm 1, \tag{2.1}$$

$$D = \frac{n}{\gcd(n,k_1)\cdot\gcd(n,k_2)}. \tag{2.2}$$

则有

- 若 n 是奇数, 则

$$\deg_{\mathbb{Q}}(\beta) = \begin{cases} \frac{\varphi(n)}{4}, & \text{若 } D = 1 \\ \frac{\varphi(n)}{2}, & \text{其它情况} \end{cases} \tag{2.3}$$

- 若 n 是偶数且 k_1, k_2 都是奇数, 则

$$\deg_{\mathbb{Q}}(\beta) = \frac{\varphi(2n)}{4} = \frac{\varphi(n)}{2}. \tag{2.4}$$

- 若 n 是偶数且 k_1, k_2 一奇一偶, 则

$$\deg_{\mathbb{Q}}(\beta) = \begin{cases} \frac{\varphi(2n)}{4} = \frac{\varphi(n)}{2}, & \text{若 } D = 1 \text{ 或 } D = 2 \\ \frac{\varphi(2n)}{2} = \varphi(n), & \text{其它情况} \end{cases}. \tag{2.5}$$

如文 [11], 我们将从分圆域入手. β 落在一个天然的域中:

$$\beta = \frac{\cos\frac{k_2\pi}{n}}{\cos\frac{k_1\pi}{n}} = \frac{\zeta_{2n}^{k_2} + \zeta_{2n}^{-k_2}}{\zeta_{2n}^{k_1} + \zeta_{2n}^{-k_1}} \in \mathbb{Q}(\zeta_{2n}), \tag{2.6}$$

这里 $\zeta_{2n} = e^{\frac{2\pi i}{2n}}$. 基本的事实是, 分圆域 $\mathbb{Q}(\zeta_{2n})$ 是 $\mathbb{Q}$ 的 Galois 扩张, 具有 Galois 群 $G_{2n} \approx (\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z})^{\times}$. 对任意的 $m \in (\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z})^{\times}$, 我们用 σ_m 表示它在 G_{2n} 中的同构像, 即 $\sigma_m : \zeta_{2n} \mapsto \zeta_{2n}^m$.

根据 Galois 理论的基本结果, 有

$$\deg_{\mathbb{Q}}(\beta) = \frac{|G_{2n}|}{|G_\beta|} \tag{2.7}$$

其中 G_β 是 β 在 G_{2n} 作用下的固定子群, 即

$$G_\beta = \{\sigma \in G_{2n} \,|\, \sigma(\beta) = \beta\}. \tag{2.8}$$

由于 $|G_{2n}| = |(\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z})^\times| = \varphi(2n)$, 因此我们的目标就是确定 G_β(甚至只要确定其阶数 $|G_\beta|$). 手算可以发现, 对于较小的 n, $\sigma \in G_\beta$ 总满足

$$\sigma(\cos\frac{k_i\pi}{n}) = \cos\frac{k_i\pi}{n}, \qquad i = 1, 2$$

或

$$\sigma(\cos\frac{k_i\pi}{n}) = -\cos\frac{k_i\pi}{n}, \qquad i = 1, 2.$$

事实上, 我们将证明, 当 $6 \nmid n$ 时, 总有

$$G_\beta = S_\beta, \tag{2.9}$$

其中 S_β 定义为

$$S_\beta = \left\{\sigma \in G_{2n} \,\middle|\, \sigma(\cos\frac{k_i\pi}{n}) = \cos\frac{k_i\pi}{n}(i = 1, 2) \text{ 或 } \sigma(\cos\frac{k_i\pi}{n}) = -\cos\frac{k_i\pi}{n}(i = 1, 2)\right\}. \tag{2.10}$$

如此一来, 为确定 G_β, 就只需要确定 S_β, 而后者可以转化为同余方程组解决.

接下来我们先证明关键的 (2.9), 然后求解集合 (2.10).

首先注意到, 我们有以下观察:

引理 2.2. 设 β 由 (2.1) 式给出, 其中 n, k_1, k_2 满足定理 2.1 的条件但不限定 $6 \nmid n$, G_β, S_β 分别如 (2.8),(2.10) 给出. 则以下三条等价

(i) $G_\beta = S_\beta$;

(ii) $G_\beta \subseteq S_\beta$;

(iii) $\cos\frac{k_1\pi}{n}\cos\frac{k_2\pi}{n} \in \mathbb{Q}(\beta)$.

证明. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) 成立, 是因为有 $S_\beta \subseteq G_\beta$. 下面证明 (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). 只要证明 G_β 固定 $\cos\frac{k_1\pi}{n}\cos\frac{k_2\pi}{n}$, 由于 $G_\beta \subseteq S_\beta$ 而 S_β 显然固定 $\cos\frac{k_1\pi}{n}\cos\frac{k_2\pi}{n}$, 得证.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii). 设 $\sigma \in G_\beta$, 于是有

$$\frac{\sigma(\cos\frac{k_2\pi}{n})}{\cos\frac{k_2\pi}{n}} = \frac{\sigma(\cos\frac{k_1\pi}{n})}{\cos\frac{k_1\pi}{n}}.$$

记这个公共比值为 r, 于是有

$$\sigma(\cos\frac{k_i\pi}{n}) = r\cos\frac{k_i\pi}{n}, \qquad i = 1, 2.$$

注意 $\cos\frac{k_1\pi}{n}\cos\frac{k_2\pi}{n}\in\mathbb{Q}(\beta)$, 从而被 $\sigma\in G_\beta$ 固定, 即有

$$\sigma(\cos\frac{k_1\pi}{n}\cos\frac{k_2\pi}{n})=\cos\frac{k_1\pi}{n}\cos\frac{k_2\pi}{n}.$$

于是我们得到

$$r^2(\cos\frac{k_1\pi}{n}\cos\frac{k_2\pi}{n})=\cos\frac{k_1\pi}{n}\cos\frac{k_2\pi}{n},$$

从而 $r^2=1$, $r=\pm1$. 这就意味着 $\sigma\in S_\beta$. □

接下来我们证明 (2.9), 考虑到它的重要作用, 我们将它表述成一个定理.

定理 2.3. 设 β 由 (2.1) 式给出, 其中 n,k_1,k_2 满足定理 2.1 的条件, G_β,S_β 分别如 (2.8),(2.10) 给出. 则 $G_\beta=S_\beta$.

证明. 我们将证明分成两种情况.

第一种情况 $2\nmid n$. 即 n 是奇数, 此时不妨设 k_1,k_2 都是偶数, 当 k_i 是奇数时, 转而考虑 $n-k_i$, 只要注意到 $\cos\frac{k\pi}{n}=-\cos\frac{(n-k)\pi}{n}$. 令 $k_1=2\ell_1,k_2=2\ell_2$, 于是

$$\beta=\frac{\cos\frac{k_2\pi}{n}}{\cos\frac{k_1\pi}{n}}=\frac{\cos\frac{2\ell_2\pi}{n}}{\cos\frac{2\ell_1\pi}{n}}\in\mathbb{Q}(\zeta_n).$$

由于 $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ 是 Galois 扩张且其 Galois 群为 Abel 群, 因此其子域 $\mathbb{Q}(\beta)/\mathbb{Q}$ 也是 Galois 扩张. 于是, 对任意的 $\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$, 有 $\sigma(\beta)\in\mathbb{Q}(\beta)$. 特别地, 取 $\sigma=\sigma_2$, 就有

$$\sigma_2(\beta)=\frac{\cos\frac{2k_2\pi}{n}}{\cos\frac{2k_1\pi}{n}}\in\mathbb{Q}(\beta).$$

由二倍角公式, 我们有

$$\frac{\cos\frac{2k_2\pi}{n}+\cos\frac{2k_1\pi}{n}}{\cos\frac{2k_2\pi}{n}-\cos\frac{2k_1\pi}{n}}=\frac{(\cos\frac{k_2\pi}{n})^2+(\cos\frac{k_1\pi}{n})^2-1}{(\cos\frac{k_2\pi}{n})^2-(\cos\frac{k_1\pi}{n})^2}.$$

于是我们有

$$\frac{\frac{\cos\frac{2k_2\pi}{n}}{\cos\frac{2k_1\pi}{n}}+1}{\frac{\cos\frac{2k_2\pi}{n}}{\cos\frac{2k_1\pi}{n}}-1}=\frac{\frac{(\cos\frac{k_2\pi}{n})^2+(\cos\frac{k_1\pi}{n})^2}{\cos\frac{k_2\pi}{n}\cos\frac{k_1\pi}{n}}-\frac{1}{\cos\frac{k_2\pi}{n}\cos\frac{k_1\pi}{n}}}{\frac{(\cos\frac{k_2\pi}{n})^2-(\cos\frac{k_1\pi}{n})^2}{\cos\frac{k_2\pi}{n}\cos\frac{k_1\pi}{n}}}.$$

即

$$\frac{\sigma_2(\beta)+1}{\sigma_2(\beta)-1}=\frac{\beta+\beta^{-1}-\frac{1}{\cos\frac{k_2\pi}{n}\cos\frac{k_1\pi}{n}}}{\beta-\beta^{-1}}.$$

由 $\beta,\sigma_2(\beta)\in\mathbb{Q}(\beta)$ 立即推出 $\cos\frac{k_2\pi}{n}\cos\frac{k_1\pi}{n}\in\mathbb{Q}(\beta)$. 根据引理 2.2, 有 $G_\beta=S_\beta$.

第二种情况 $3 \nmid n$. 证明跟第一种情况类似. 由于 $\gcd(3, 2n) = 1$, 因此对 $\sigma = \sigma_3 \in G_{2n}$ 有

$$\sigma_3(\beta) = \frac{\cos\frac{3k_2\pi}{n}}{\cos\frac{3k_1\pi}{n}} \in \mathbb{Q}(\beta).$$

由三倍角公式, 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_3(\beta)+1}{\sigma_3(\beta)-1} = \frac{\frac{\cos\frac{3k_2\pi}{n}}{\cos\frac{3k_1\pi}{n}}+1}{\frac{\cos\frac{3k_2\pi}{n}}{\cos\frac{3k_1\pi}{n}}-1} =& \frac{\cos\frac{3k_2\pi}{n}+\cos\frac{3k_1\pi}{n}}{\cos\frac{3k_2\pi}{n}-\cos\frac{3k_1\pi}{n}} \\
=& \frac{4(\cos\frac{k_2\pi}{n})^3+4(\cos\frac{k_1\pi}{n})^3-3\cos\frac{k_2\pi}{n}-3\cos\frac{k_1\pi}{n}}{4(\cos\frac{k_2\pi}{n})^3-4(\cos\frac{k_1\pi}{n})^3-3\cos\frac{k_2\pi}{n}+3\cos\frac{k_1\pi}{n}} \\
=& \frac{\cos\frac{k_2\pi}{n}+\cos\frac{k_1\pi}{n}}{\cos\frac{k_2\pi}{n}-\cos\frac{k_1\pi}{n}} \cdot \frac{4(\cos\frac{k_2\pi}{n})^2+4(\cos\frac{k_1\pi}{n})^2-4(\cos\frac{k_2\pi}{n}\cos\frac{k_1\pi}{n})-3}{4(\cos\frac{k_2\pi}{n})^2+4(\cos\frac{k_1\pi}{n})^2+4(\cos\frac{k_2\pi}{n}\cos\frac{k_1\pi}{n})-3} \\
=& \frac{\frac{\cos\frac{k_2\pi}{n}}{\cos\frac{k_1\pi}{n}}+1}{\frac{\cos\frac{k_2\pi}{n}}{\cos\frac{k_1\pi}{n}}-1} \cdot \frac{\frac{\cos\frac{k_2\pi}{n}}{\cos\frac{k_1\pi}{n}}+\frac{\cos\frac{k_1\pi}{n}}{\cos\frac{k_2\pi}{n}}-1-\frac{3}{4\cos\frac{k_2\pi}{n}\cos\frac{k_1\pi}{n}}}{\frac{\cos\frac{k_2\pi}{n}}{\cos\frac{k_1\pi}{n}}+\frac{\cos\frac{k_1\pi}{n}}{\cos\frac{k_2\pi}{n}}+1-\frac{3}{4\cos\frac{k_2\pi}{n}\cos\frac{k_1\pi}{n}}} \\
=& \frac{\beta+1}{\beta-1} \cdot \frac{\beta+\beta^{-1}-1-\frac{3}{4\cos\frac{k_2\pi}{n}\cos\frac{k_1\pi}{n}}}{\beta+\beta^{-1}+1-\frac{3}{4\cos\frac{k_2\pi}{n}\cos\frac{k_1\pi}{n}}}.
\end{aligned}$$

由上式可以推出 $\cos\frac{k_2\pi}{n}\cos\frac{k_1\pi}{n} \in \mathbb{Q}(\beta)$. 根据引理 2.2, 就有 $G_\beta = S_\beta$. □

现在我们来求 S_β. 主要结果如下：

定理 2.4. 设 β 由 (2.1) 式给出, 其中 n, k_1, k_2 满足定理 2.1 的条件但不限定 $6 \nmid n$. D 由 (2.2) 式给出, S_β 由 (2.10) 式给出. 则有

- 若 n 是奇数, 则

$$S_\beta = \begin{cases} \{\sigma_1, \sigma_{-1}, \sigma_{x_1}, \sigma_{-x_1}\}, & 若 D = 1; \\ \{\sigma_1, \sigma_{-1}\}, & 其它情况 \end{cases} \tag{2.11}$$

  其中 $x_1 = u_1 \gcd(n, k_1) - u_2 \gcd(n, k_2)$, 而 u_1, u_2 如 (2.31) 式给出.

- 若 n 为偶数且 k_1, k_2 都是奇数, 则

$$S_\beta = \{\sigma_1, \sigma_{-1}, \sigma_{n+1}, \sigma_{n-1}\}. \tag{2.12}$$

- 若 n 为偶数且 k_1, k_2 一奇一偶, 则

$$S_\beta = \begin{cases} \{\sigma_1, \sigma_{-1}, \sigma_{x_1}, \sigma_{-x_1}\}, & 若 D = 1; \\ \{\sigma_1, \sigma_{-1}, \sigma_{x_i}, \sigma_{-x_i}\}, & 若 D = 2; \\ \{\sigma_1, \sigma_{-1}\}, & 其它情况 \end{cases} \tag{2.13}$$

其中 x_i 是 x_1 还是 $x_2 = x_1 + n$, 取决于 $u_2 \frac{k_1}{\gcd(n,k_1)} + u_1 \frac{k_2}{\gcd(n,k_2)}$ 是否为偶数.

证明. 令整数 x 满足

$$\gcd(x, 2n) = 1. \tag{2.14}$$

设 $\sigma_x \in S_\beta$, 即有

$$\begin{cases} \cos \frac{k_1 x\pi}{n} = \cos \frac{k_1\pi}{n} \\ \cos \frac{k_2 x\pi}{n} = \cos \frac{k_2\pi}{n} \end{cases} \tag{2.15}$$

或

$$\begin{cases} \cos \frac{k_1 x\pi}{n} = -\cos \frac{k_1\pi}{n} \\ \cos \frac{k_2 x\pi}{n} = -\cos \frac{k_2\pi}{n} \end{cases} \tag{2.16}$$

注意

$$\cos \frac{kx\pi}{n} = \cos \frac{k\pi}{n} \iff k(x \pm 1) = 偶数倍 n,$$
$$\cos \frac{kx\pi}{n} = -\cos \frac{k\pi}{n} \iff k(x \pm 1) = 奇数倍 n,$$

因此 (2.15),(2.16) 均可分解为 4 个方程, 从而一共得到 8 个方程, 如下:

$$k_1(x-1) = 偶数倍 n, \qquad k_2(x-1) = 偶数倍 n \tag{2.17}$$

$$k_1(x-1) = 偶数倍 n, \qquad k_2(x+1) = 偶数倍 n \tag{2.18}$$

$$k_1(x+1) = 偶数倍 n, \qquad k_2(x-1) = 偶数倍 n \tag{2.19}$$

$$k_1(x+1) = 偶数倍 n, \qquad k_2(x+1) = 偶数倍 n \tag{2.20}$$

$$k_1(x+1) = 奇数倍 n, \qquad k_2(x+1) = 奇数倍 n \tag{2.21}$$

$$k_1(x+1) = 奇数倍 n, \qquad k_2(x-1) = 奇数倍 n \tag{2.22}$$

$$k_1(x-1) = 奇数倍 n, \qquad k_2(x+1) = 奇数倍 n \tag{2.23}$$

$$k_1(x-1) = \text{奇数倍}n, \qquad k_2(x-1) = \text{奇数倍}n \tag{2.24}$$

为求解这些方程, 我们重新组织一下.

注意到 (2.17) 与 (2.24) 含于一个更简单的方程

$$\begin{cases} k_1(x-1) \equiv 0 \pmod n \\ k_2(x-1) \equiv 0 \pmod n \end{cases} \tag{2.25}$$

注意到 $\gcd(k_1, k_2, n) = 1$, 所以以上方程的解是 $x \equiv 1 \pmod n$.

当 n 是奇数时, 满足 (2.14) 的解是唯一的, 即 $x \equiv 1 \pmod{2n}$; 此时它满足 (2.17) 或 (2.24).

当 n 是偶数时, 满足 (2.24) 的解有两个, 即 $x \equiv 1, n+1 \pmod{2n}$, 其中前一个解 $x \equiv 1 \pmod{2n}$ 满足 (2.17); 后一个解 $x \equiv n+1 \pmod{2n}$ 满足 (2.24) 当且仅当 k_1, k_2 都是奇数 (k_1, k_2 不可能都是偶数, 从而不会满足 (2.17)).

从而结论是: 当且仅当 n 为偶数且 k_1, k_2 都是奇数时, (2.17) 或 (2.24) 有两个解 $x \equiv 1, n+1 \pmod{2n}$, 否则仅有一个解 $x \equiv 1 \pmod{2n}$.

类似地, (2.18) 或 (2.23) 含于一个更简单的方程

$$\begin{cases} k_1(x-1) \equiv 0 \pmod n \\ k_2(x+1) \equiv 0 \pmod n \end{cases} \tag{2.26}$$

它等价于方程

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{\frac{n}{\gcd(n,k_1)}} \\ x \equiv -1 \pmod{\frac{n}{\gcd(n,k_2)}} \end{cases} \tag{2.27}$$

因此, 根据中国剩余定理 (参见 [14]), 以上方程组有解当且仅当

$$\gcd(m_1, m_2) \,\Big|\, 1-(-1) = 2, \tag{2.28}$$

其中

$$m_1 = \frac{n}{\gcd(n, k_1)}, \qquad m_2 = \frac{n}{\gcd(n, k_2)}. \tag{2.29}$$

不难求出

$$\begin{aligned} \gcd(m_1, m_2) &= \frac{n}{\operatorname{lcm}(\gcd(n,k_1), \gcd(n,k_2))} = \frac{n}{\frac{\gcd(n,k_1)\gcd(n,k_2)}{\gcd(\gcd(n,k_1),\gcd(n,k_2))}} = \frac{n}{\gcd(n,k_1)\gcd(n,k_2)} \\ &= D, \\ \operatorname{lcm}(m_1, m_2) &= \frac{n}{\gcd(\gcd(n,k_1), \gcd(n,k_2))} = \frac{n}{1} = n. \end{aligned}$$

从而 (2.27) 有解的充要条件为 $D \mid 2$, 且由中国剩余定理 (参见 [14]), 当 $D \mid 2$ 时, 同余方程组 (2.27), 即

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{m_1} \\ x \equiv -1 \pmod{m_2} \end{cases}$$

的解为

$$x \equiv u_1 \gcd(n, k_1) - u_2 \gcd(n, k_2) \pmod{n} \tag{2.30}$$

其中整数 u_1, u_2 使得

$$u_1 \gcd(n, k_1) + u_2 \gcd(n, k_2) = 1. \tag{2.31}$$

从而 (2.26) 具有两解

$$x \equiv u_1 \gcd(n, k_1) - u_2 \gcd(n, k_2), \quad u_1 \gcd(n, k_1) - u_2 \gcd(n, k_2) + n \pmod{2n}. \tag{2.32}$$

注意, $x_1 = u_1 \gcd(n, k_1) - u_2 \gcd(n, k_2)$ 与 $u_1 \gcd(n, k_1) + u_2 \gcd(n, k_2) = 1$ 奇偶性相同, 从而是奇数. 而 $u_1 \gcd(n, k_1) - u_2 \gcd(n, k_2) + n$ 是奇数当且仅当 n 是偶数. 为验证它们是否满足 (2.18) 或 (2.23), 先对 $x_1 = u_1 \gcd(n, k_1) - u_2 \gcd(n, k_2)$ 计算

$$\frac{k_1(x_1 - 1)}{n} = \frac{k_1(-2u_2 \gcd(n, k_2))}{n} = -u_2 \frac{2}{D} \frac{k_1}{\gcd(n, k_1)}, \tag{2.33}$$

$$\frac{k_2(x_1 + 1)}{n} = \frac{k_2(2u_1 \gcd(n, k_1))}{n} = u_1 \frac{2}{D} \frac{k_2}{\gcd(n, k_2)} \tag{2.34}$$

对 $x_2 = u_1 \gcd(n, k_1) - u_2 \gcd(n, k_2) + n = x_1 + n$, 则有

$$\frac{k_1(x_2 - 1)}{n} = \frac{k_1[(x_1 - 1) + n]}{n} = \frac{k_1(x_1 - 1)}{n} + k_1 = -u_2 \frac{2}{D} \frac{k_1}{\gcd(n, k_1)} + k_1, \tag{2.35}$$

$$\frac{k_2(x_2 + 1)}{n} = \frac{k_2[(x_1 + 1) + n]}{n} = \frac{k_2(x_1 + 1)}{n} + k_2 = u_1 \frac{2}{D} \frac{k_2}{\gcd(n, k_2)} + k_2. \tag{2.36}$$

若 $D = 1$, (2.33),(2.34) 右边都是偶数, 从而 x_1 满足 (2.18); 此时 x_2 要有意义, 必须 n 是偶数, 从而 k_1, k_2 一奇一偶. (2.35),(2.36) 右边的奇偶性分别与 k_1, k_2 一致, 因此 x_2 不满足 (2.18) 或 (2.23).

若 $D = 2$, 则 n 必定是偶数. 此时分两种情况:

若 $D = 2$ 且 k_1, k_2 都是奇数, 则 (2.33),(2.34) 右边的奇偶性分别与 u_2, u_1 相同, 而根据 (2.31), 此时 u_1, u_2 有相反的奇偶性, 因此 x_1 不满足 (2.18) 或 (2.23), 此时由于 k_1, k_2 都是奇数, x_2 也不满足 (2.18) 或 (2.23). 因此此时 (2.18) 或 (2.23) 无解.

若 $D = 2$ 且 k_1, k_2 一奇一偶. 此时容易看出 x_1, x_2 中有且仅有一个满足 (2.18) 或 (2.23), 并且 x_1 满足 (2.18) 或 (2.23) 当且仅当 $-u_2 \frac{k_1}{\gcd(n,k_1)} + u_1 \frac{k_2}{\gcd(n,k_2)}$ 是偶数.

注意到 x 满足 (2.19) 或 (2.22) 当且仅当 $-x$ 满足 (2.18) 或 (2.23). 类似地, x 满足 (2.20) 或 (2.21) 当且仅当 $-x$ 满足 (2.17) 或 (2.24). 于是我们得到 8 个方程 (2.17)–(2.24)——在条件 $\cos\frac{k_1\pi}{n}, \cos\frac{k_2\pi}{n} \neq 0, \pm 1$ 下, 这些方程的解集互不相交——的在 $(\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z})^\times$ 中的解的并集如下:

- 若 n 是奇数, 若 $D = 1$, 则解集为 $\{[1], [-1], [x_1], [-x_1]\}$, 其中
$$x_1 = u_1 \gcd(n, k_1) - u_2 \gcd(n, k_2)$$
(u_1, u_2 如 (2.41) 式给出); 否则解集为 $\{[1], [-1]\}$.
- 若 n 为偶数且 k_1, k_2 都是奇数, 则解集为 $\{[1], [-1], [n+1], [n-1]\}$.
- 若 n 为偶数且 k_1, k_2 一奇一偶, 若 $D = 1$, 则解集为 $\{[1], [-1], [x_1], [-x_1]\}$; 若 $D = 2$, 则解集为 $\{[1], [-1], [x_i], [-x_i]\}$, x_i 是 x_1 还是 $x_2 = x_1 + n$ 取决于 $u_2 \frac{k_1}{\gcd(n,k_1)} + u_1 \frac{k_2}{\gcd(n,k_2)}$ 是否为偶数; 对其它情况, 解集为 $\{[1], [-1]\}$.

定理 2.4 证毕. □

如文 [11] 所述, 相比于确定余弦比值 (2.1) 的次数, 一个更基本的问题, 是确定其极小多项式. 事实上, 关于 $\beta = \frac{\cos\frac{k_2\pi}{n}}{\cos\frac{k_1\pi}{n}}$(其中 k_1, k_2 是正整数且 $\gcd(k_1, k_2, n) = 1$) 的极小多项式 $g(x)$, 可以如下确定 [这个方法具有一般性 (参见 (2.44) 式), 因此很可能已经出现在代数数论的教材中, 还望方家指点出处.].

令 $d = \gcd(k_1, k_2)$, 则 $\gcd(d, n) = 1$. 容易看到, $2\cos\frac{d\pi}{n}$ 的极小多项式是实分圆多项式 $\Psi_{2n}(x)$(参见 [11, p. 57]), 它可视为已知的. 而根据 [11, p. 56] 引理 3.5, 有
$$2\cos\frac{k_i\pi}{n} = D_{q_i}(2\cos\frac{d\pi}{n}), \qquad i = 1, 2 \tag{2.37}$$
其中
$$q_i = \frac{k_i}{d}, \qquad i = 1, 2; \tag{2.38}$$
而 $D_n(x)$ 是 Dickson 多项式, 它的一个封闭表达式为
$$D_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \frac{n}{n-i}\binom{n-i}{i}(-1)^i x^{n-2i}, \tag{2.39}$$
其中 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 为不超过 $\frac{n}{2}$ 的最大整数. 例如 $D_1(x) = x, D_2(x) = x^2 - 2$.

设 $U(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 满足同余方程
$$D_{q_1}(x)U(x) \equiv D_{q_2}(x) \pmod{\Psi_{2n}(x)}, \tag{2.40}$$

(注意 $\gcd(D_{q_1}(x), \Psi_{2n}(x)) = 1$, 以上方程在模 $\Psi_{2n}(x)$ 的剩余域中有唯一解, 并且可以用秦九韶“求一术”的推广求解, 见 [10, 13, 18]) 则容易看到,

$$\beta = \frac{2\cos\frac{k_2\pi}{n}}{2\cos\frac{k_1\pi}{n}} = \frac{D_{q_2}\left(2\cos\frac{d\pi}{n}\right)}{D_{q_1}\left(2\cos\frac{d\pi}{n}\right)} = U(2\cos\frac{d\pi}{n}). \tag{2.41}$$

从而, 为求出 $\beta = U(2\cos\frac{d\pi}{n})$ 的极小多项式 $g(x)$, 我们先求出以

$$U(2\cos\frac{d'\pi}{n}) = U(2\cos\frac{2d'\pi}{2n}), \qquad \gcd(d', 2n) = 1, 1 \le d' \le n$$

为根的多项式 $f(x)$. 这个 $f(x)$ 可以如下求出 (这一方法作者从复旦大学邵美悦博士那里学来). 令 $\Psi_{2n}(x)$ 的友阵为 A, 则

$$f(x) = \det(xI - U(A)). \tag{2.42}$$

根据 Galois 理论的基本结果 (参见 [11, p.67] 定理 7.1), 我们有

$$f(x) = g(x)^m \tag{2.43}$$

其中正整数 $m = |G_\beta|$. 这是因为, 从 G_{2n} 到 $G_{2n}\beta$ 的自然映射 $\sigma \mapsto \sigma(\beta)$ 是 m 重覆盖, 从而 $f(x)$ 的各个根恰好是 $g(x)$ 的各个根重复 m 次. 进而有

$$\begin{aligned}\gcd(f(x), f'(x)) &= \gcd(g(x)^m, mg(x)^{m-1}g'(x)) \\ &= g(x)^{m-1}\gcd(g(x), mg'(x)) \\ &= g(x)^{m-1}\gcd(g(x), g'(x)) \\ &= g(x)^{m-1},\end{aligned}$$

于是

$$g(x) = \frac{g(x)^m}{g(x)^{m-1}} = \frac{f(x)}{\gcd(f(x), f'(x))}. \tag{2.44}$$

注 . 从 (2.41) 到 (2.44) 的推导, 给出了求 Galois 扩域 $E/F = F(\theta)$ 中某元素 $\beta = u(\theta)$ 的极小多项式的一般方法, 这里假定 F 特征为 0, $u \in F[x]$ 与 θ 的极小多项式 $\Phi \in F[x]$ 已知. 从 (2.43) 到 (2.44) 的推导, 是特征 0 域上的多项式去重根的特例 (见 [4, p. 112]).

例 2.1. 求

$$\beta = \frac{\cos\frac{2\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}$$

的极小多项式.

此时 $k_2 = 2, k_1 = 1, n = 12$. 从而 $d = \gcd(2, 1) = 1$, 显然我们有

$$\beta = \frac{2\cos\frac{2\pi}{12}}{2\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\left(2\cos\frac{\pi}{12}\right)^2 - 2}{2\cos\frac{\pi}{12}}$$

不难确定, $2\cos\frac{\pi}{12}$ 的极小多项式为 $\Psi_{24}(x) = x^4 - 4x^2 + 1$.
求解同余方程

$$xU(x) \equiv x^2 - 2 \pmod{x^4 - 4x^2 + 1}$$

得到

$$U(x) \equiv \frac{x^2 - 2}{x} \equiv x + 2(x^3 - 4x) \equiv 2x^3 - 7x \pmod{x^4 - 4x^2 + 1}$$

$\Psi_{24}(x)$ 的友阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

从而

$$U(A) = 2A^3 - 7A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ -7 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

其特征多项式为

$$f(x) = \det(xI - U(A)) = x^4 - 12x^2 + 9.$$

由于

$$\gcd(f(x), f'(x)) = \gcd(x^4 - 12x^2 + 9, 4x^3 - 24x) = 1,$$

所以

$$g(x) = \frac{f(x)}{\gcd(f(x), f'(x))} = x^4 - 12x^2 + 9$$

即为所求. 事实上, 通过解方程 $g(x) = 0$, 可进一步确定

$$\beta = \sqrt{6 - 3\sqrt{3}}.$$

3 有理角正弦比值的次数与极小多项式

根据定理 2.1, 或者用完全平行的方法论证, 容易得到正弦比值的下述结果.

定理 3.1. 设 n 是正整数且 $6 \nmid n$, 整数 k_1, k_2 满足

$$\gcd(n, k_1, k_2) = 1, \qquad \sin\frac{k_1\pi}{n}, \sin\frac{k_2\pi}{n} \neq 0, \pm 1.$$

令

$$\alpha = \frac{\sin\frac{k_2\pi}{n}}{\sin\frac{k_1\pi}{n}} \neq \pm 1, \tag{3.1}$$

$$D = \frac{n}{\gcd(n, k_1)\gcd(n, k_2)}. \tag{3.2}$$

则有

- 若 n 是奇数, 则
$$\deg_{\mathbb{Q}}(\alpha) = \frac{\varphi(2n)}{2} = \frac{\varphi(n)}{2}. \tag{3.3}$$
- 若 n 是偶数且 k_1, k_2 都是奇数, 则
$$\deg_{\mathbb{Q}}(\alpha) = \begin{cases} \frac{\varphi(2n)}{8} = \frac{\varphi(n)}{4}, & \text{若 } D = 2; \\ \frac{\varphi(2n)}{4} = \frac{\varphi(n)}{2}, & \text{其它情况.} \end{cases} \tag{3.4}$$
- 若 n 是偶数且 k_1, k_2 一奇一偶, 则
$$\deg_{\mathbb{Q}}(\alpha) = \begin{cases} \frac{\varphi(2n)}{4} = \frac{\varphi(n)}{2}, & \text{若 } D = 1 \text{ 或 } D = 2; \\ \frac{\varphi(2n)}{2} = \varphi(n), & \text{其它情况.} \end{cases} \tag{3.5}$$

α 的极小多项式, 可以归结为对应的余弦比值的极小多项式, 也可以用第二类 Dickson 多项式平行计算, 此处从略.

4 有理角正切比值的次数与极小多项式

对于有理角正切比值的次数, 根据等式 (见定理 1.7 之前的部分)

$$\frac{\tan\frac{k_2\pi}{n}}{\tan\frac{k_1\pi}{n}} = \frac{\frac{\sin\frac{(k_2+k_1)\pi}{n}}{\sin\frac{(k_2-k_1)\pi}{n}} + 1}{\frac{\sin\frac{(k_2+k_1)\pi}{n}}{\sin\frac{(k_2-k_1)\pi}{n}} - 1},$$

与定理 3.1, 我们也可以得到部分结果. 总的来说, 正切比值的次数问题归结为正弦比值的次数问题. 我们可得到以下结果.

定理 4.1. 设 n 是正整数且 $6 \nmid n$, 整数 k_1, k_2 满足

$$\gcd(n, k_1, k_2) = 1, \qquad \tan\frac{k_1\pi}{n}\tan\frac{k_2\pi}{n} \neq 0, \qquad \sin\frac{(k_1 \pm k_2)\pi}{n} \neq \pm 1.$$

若

$$\gamma = \frac{\tan\frac{k_2\pi}{n}}{\tan\frac{k_1\pi}{n}} \neq \pm 1, \tag{4.1}$$

则

- 若 n 是奇数, 则
$$\deg_{\mathbb{Q}}(\gamma) = \frac{\varphi(n)}{2}. \tag{4.2}$$
- 若 n 是偶数且 k_1, k_2 一奇一偶, 则
$$\deg_{\mathbb{Q}}(\gamma) = \begin{cases} \frac{\varphi(n)}{4}, & \text{若} \frac{n}{\gcd(n,k_1+k_2)\gcd(n,k_1-k_2)} = 2; \\ \frac{\varphi(n)}{2}, & \text{其它情况}. \end{cases} \tag{4.3}$$
- 若 n 是偶数且 k_1, k_2 都是奇数, 则
$$\deg_{\mathbb{Q}}(\gamma) = \begin{cases} \frac{\varphi(n)}{4}, & \text{若} \frac{2n}{\gcd(n,k_1+k_2)\gcd(n,k_1-k_2)} = 1, 2; \\ \frac{\varphi(n)}{2}, & \text{其它情况}. \end{cases} \tag{4.4}$$

γ 的极小多项式, 可以归结为对应的正弦比值的极小多项式, 此处从略.

5 新的猜想

要去掉定理 2.1,3.1,4.1 中的限制 $6 \nmid n$, 根据引理 2.2, 我们只要证明以下猜想:

猜想 5.1. 设 n 是正整数, 整数 k_1, k_2 满足

$$\gcd(n, k_1, k_2) = 1, \qquad \cos\frac{k_1\pi}{n}\cos\frac{k_2\pi}{n} \neq 0.$$

若

$$\beta = \frac{\cos\frac{k_2\pi}{n}}{\cos\frac{k_1\pi}{n}} \neq \pm 1,$$

则

$$\cos\frac{k_1\pi}{n}\cos\frac{k_2\pi}{n} \in \mathbb{Q}(\beta) \tag{5.1}$$

注意, 在定理 2.3 的证明中已确认 $6 \nmid n$ 时猜想 5.1 成立, 故只需对 $6 \mid n$ 的情况进行证明或否定.

我们提请有兴趣的读者注意, 在 Evans–Isaacs[8, p. 28] 中, 两位作者曾证明一个类似的结果. 即在猜想 5.1 的条件下, 有

$$\cos\frac{k_1\pi}{n}\cos\frac{k_2\pi}{n} \in \mathbb{Q}(\cos\frac{k_1\pi}{n}+\cos\frac{k_2\pi}{n}). \tag{5.2}$$

并由此确定出 $\cos\frac{k_1\pi}{n}+\cos\frac{k_2\pi}{n}$ 的次数. 他们的结果可以表述如下:

定理 5.2. 设 n 是正整数且整数 k_1, k_2 满足

$$\gcd(n,k_1,k_2)=1, \qquad \cos\frac{k_1\pi}{n} \neq \pm\cos\frac{k_2\pi}{n}.$$

令

$$\delta = \cos\frac{k_1\pi}{n}+\cos\frac{k_2\pi}{n}, \tag{5.3}$$

$$d = \frac{2n}{\gcd(2n,k_1)\gcd(2n,k_2)}. \tag{5.4}$$

则有

$$[\mathbb{Q}(\cos\frac{k_1\pi}{n},\cos\frac{k_2\pi}{n}):\mathbb{Q}] = \begin{cases} \frac{\varphi(\frac{2n}{\gcd(2n,k_1)})\varphi(\frac{2n}{\gcd(2n,k_2)})}{2\varphi(d)}, & 若 d>2; \\ \frac{\varphi(\frac{2n}{\gcd(2n,k_1)})\varphi(\frac{2n}{\gcd(2n,k_2)})}{4}, & 若 d\le 2. \end{cases} \tag{5.5}$$

并且有

$$\deg_{\mathbb{Q}}(\delta) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\mathbb{Q}(\cos\frac{k_1\pi}{n},\cos\frac{k_2\pi}{n}):\mathbb{Q}], & 若 \gcd(2n,k_1k_2)=1 \\ & 且 k_1^2 \equiv \pm k_2^2 \pmod{2n}; \\ [\mathbb{Q}(\cos\frac{k_1\pi}{n},\cos\frac{k_2\pi}{n}):\mathbb{Q}], & 其它情况. \end{cases} \tag{5.6}$$

这两位作者还确定了 $\cos\frac{k_1\pi}{n},\cos\frac{k_2\pi}{n}$ 的任意有理系数线性组合

$$a_1\cos\frac{k_1\pi}{n}+a_2\cos\frac{k_2\pi}{n} \tag{5.7}$$

在有理数域上的次数. 此处从略, 有兴趣的读者可见 [8, p. 32] 定理 9.

注意, 用类似于本文第 2 节末尾给出的方法, 也可以计算 δ 以及一般的线性组合 (5.7) 的极小多项式. 事实上, 同样的方法可以求出任意两个有理角的三角函数的和、差、积、商的极小多项式. [8] 的两位作者在文章一开头提到, 他们的方法不能推广到三个以上线性组合的情形, 而本文第 2 节末尾给出的求极小多项式的方法, 对此依然适用.

致谢

感谢首都师范大学李克正教授、山东大学李良攀教授、南京大学朱富海教授、西安电子科技大学张哲博士、中国传媒大学陈见柯博士、中央民族大学王兢博士、中国矿业大学 (北京) 张汉雄博士、北京市朝阳区教研中心张浩博士与作者讨论交流. 感谢西安邮电大学仝秋娟老师帮忙传递文献. 感谢本刊审稿人对初稿提出宝贵意见.

参考文献

[1] E. J. Barbeau, Incommensurability proof: a pattern that peters out. Math. Mag. 56 (1983) 82–90.

[2] A. Berger, More grade school triangles. Amer. Math. Monthly 124 (2017) 324–336.

[3] A. Berger, On linear independence of trigonometric numbers. Carpathian Journal of Mathematics 34 (2018) 157–166.

[4] D. A. Cox, Galois Theory, Second Edition, Wiley, 2012.

[5] J. Y. Cai, Z. G. Fu, K. Girstmair, M. Kowalczyk, A complexity trichotomy for *k*-regular ssymmetric spin systems using number theory. Innovations in Theoretical Computer Science (2018) 2:1–2:22.

[6] R. J. Evans and I. M. Isaacs, Fields generated by linear combinations of roots of unity, Trans. Amer. Math. Soc. 229 (1977), 249-258.

[7] R. Evans, I. M. Isaacs, Problem E 2668: Special non-isosceles triangle. Amer. Math. Monthly 85 (1978) 825.

[8] R. J. Evans and I. M. Isaacs, Fields generated by linear combinations of roots of unity, Math. Scandinavica 43 (1978), 26-34.

[9] T. Grubb, C. Woll, Cyclotomic points and algebraic properties of polygon diagonals, Integers Volume 21 (2021).

[10] 林开亮, 解常系数线性微分方程和递推关系的新方法——秦九韶和亥维赛的遗产,《数学传播》, 第 43 卷第 2 期 (2019 年), 63–79.

[11] 林开亮, 从正多边形中的有理比到 $\tan\frac{\pi}{n}$ 的极小多项式, 《蛙鸣》第 64 期 (2021 年 6 月), 52–78.

[12] C. T. McMullen, Teichmüller curves in genus two: Torsion divisors and ratios of sines. Invent. Math. 165(3) (2006): 651–672.

[13] R. S. Millman, P. J. Shiue and E. B. Kahn, Problems and Proofs in Numbers and Algebra, Springer International Publishing Switzerland, 2015.

[14] O. Ore, The general Chinese remainder theorem, Amer. Math. Monthly 59 (1952) 365–370.

[15] J. C. Parnami, M. K. Agrawal, A. R. Rajwade, Triangles and cyclic quadrilaterals, with angles that are rational multiples of π and sides at most quadratic over the rationals, Math. Student 50 (1982) 79–93.

[16] G. Perez-Giz. Beyond the golden ratio. PBS Infinite Series, Youtube Channel, 2018. https://www.youtube.com/watch?v=MIxvZ6jwTuA

[17] D. B. Shapiro, A periodicity problem in plane geometry. Amer. Math. Monthly 91 (1984) 97–108.

[18] J. R. Silvester, A matrix method for solving linear congruences. Math. Mag. 53 (1980) 90–92.

[19] G. Vincenzi, A characterization of regular n-gons whose pairs of diagonals are either congruent or incommensurable. Arch. Math. 115 (2020) 467–477.

[20] G. Vincenzi, B. Paolillob, P. Rizzo, Commensurable diagonals in regular n-gons. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Published online: 01 Jul 2021.