第一次作业部分解答

2. 证明同伦等价 $f: X \to Y$ 诱导 X 和 Y 的道路连通分支的集合之间的双射，并且 f 限制在 X 的每个道路连通分支上是到 Y 的相应连通分支的同伦等价。将前述中的道路连通分支换成连通分支也得到一个陈述，证明之。由此导出，如果 X 的连通分支和道路连通分支一致，那么每个与 X 同伦等价的空间 Y 也如此。

$\Diamond$ 我们使用标准的记号，用 $\pi_0(X)$ 表示 X 的道路连通分支的集合。对任意 $A \in \pi_0(X)$，$f(A)$ 是道路连通的，所以可以令 $f_\pi(A)$ 为包含 $f(A)$ 的道路连通分支，这就定义了映射 $f_\pi: \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$.

我们先证明对任意 $f \overset{H}{\simeq} g$，有 $f_\pi = g_\pi$. 对 X 的任意道路连通分支 A，$A \times I$ 道路连通，所以 $f(A) = H(A \times \{0\})$ 和 $g(A) = H(A \times \{1\})$ 在 Y 的同一个道路连通分支中，这就说明了 $f_\pi = g_\pi$.

当 f 是同伦等价，可以设 $gf \overset{H}{\simeq} 1_X$，$fg \overset{T}{\simeq} 1_Y$，于是根据刚才的讨论有 $g_\pi f_\pi = 1_{\pi_0(X)}$，$f_\pi g_\pi = 1_{\pi_0(Y)}$，因此 f_π 是双射，其逆是 g_π. 对任意 $A \in \pi_0(X)$，把 H 和 T 分别限制在 $A \times I$ 和 $f_\pi(A) \times I$ 上，就说明了 $f|_A$ 也是同伦等价。因为我们也有连通空间的连续像连通，以此代替上面证明的开头，就证明了一个关于连通分支的相应的命题。

我们暂时记 X 的连通分支的集合为 $\mathrm{cc}(X)$，记包含 $f(A)$ 的 Y 的连通分支为 $f_{\mathrm{c}}(A)$，其中 A 是 X 的连通分支。显然有交换图

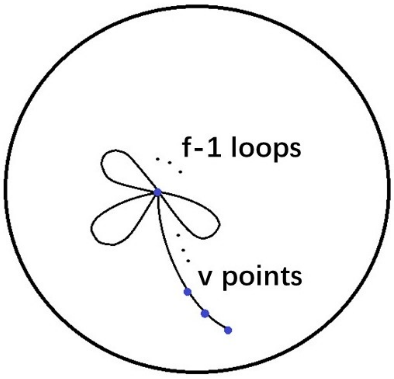
$$\begin{tikzcd}
\pi_0(X) \arrow[r, "f_\pi"] \arrow[d] & \pi_0(Y) \arrow[d] \\
\mathrm{cc}(X) \arrow[r, "f_{\mathrm{c}}"] & \mathrm{cc}(Y),
\end{tikzcd}$$

竖直箭头表示对每个道路连通分支给出包含它的连通分支，其中左边的是恒等。根据前面的讨论，水平箭头都是双射，所以右边的竖直箭头也是双射，即 Y 的每个连通分支都包含一个 Y 的道路连通分支，但所有连通分支的并和所有道路连通分支的并都是整个空间，并且连通分支两两不相交，

所以每个道路连通分支都必须是包含它的那个连通分支。

3. 对任意满足 $v-e+f=2$ 的正整数 v, e, 和 f , 构造 S^2 的一个胞腔结构，它有 v 个 0 维胞腔，e 个 1 维胞腔和 f 个 2 维胞腔。

◊ 如下图。



4. 证明道路的复合满足下面的消去性质：如果 $f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$ 并且 $g_0 \simeq g_1$, 那么 $f_0 \simeq f_1$.

◊ 这里不给出证明，只列举证明所需的基本实事，并指出它们构成一个一般的结论——道路的定端同伦等价类构成一个广群 (groupoid).

对一条道路取逆和对首尾相连的两条道路作乘积都是我们所熟知的，等价类的相应运算通过先取代表来给出，其中 $[f][g]$ 有定义是指 f 和 g 首尾相连。当然要验证运算结果和代表选取无关，对取逆的验证很容易，对乘积的验证为了简单可以分成 $f \simeq f' \Rightarrow fg \simeq f'g$ 和 $g \simeq g' \Rightarrow fg \simeq fg'$. 定义运算后依次验证 'associativity', 'invese' 和 'identity', 其中 'inverse' 在我们的情况中是显然的，对其余两者可以取合适的代表从而验证也比较简单。

5. $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间 X 是星形的，是指有 $x_0 \in X$ 使得对任意 $x \in X$, 从 x_0 到 x 的直线段包含于 X. 证明如果一个子空间 $X \subset \mathbb{R}^n$ 是局部星形的，即 X 的每一点有一个星形的邻域，那么 X 中的每条道路都同伦与一条 X 中的分段线性道路。说明这个命题可以用于 X 是开集或者 X 是有限个闭凸集的并的情形。

◊ 对每个 $x \in X$, 取其星形邻域 U_x, 并设 $x \in V_x \subset U_x$, 其中 V_x 是 X 中的开集。对任意道路 $f: I \to X$, $\{f^{-1}(V_x)\}_{x \in X}$ 是 I 的开覆盖，取正整

数 n 使得 $1/n$ 小于覆盖的 Lebesgue 数，则每个 $f([t_k,t_{k+1}])$ 都在一个星形邻域中，其中 t_k 表示 k/n, $\forall k$. 我们将证明星形空间中的任意道路都定端同伦于一条分段线性道路，将这用于上面的情况，就有 $f\big|_{[t_k,t_{k+1}]}$ 和一条分段线性道路之间的定端同伦 H_k，因为 H_k 和 H_{k+1} 限制在 $\{t_{k+1}\}\times I$ 都是点 $f(t_{k+1})$, $\forall k$, 因此我们可以把这些同伦拼接起来得到 f 和一条分段线性道路之间的同伦。

现在我们来说明星形空间 Y 中的任意道路 $f: I\to Y$ 定端同伦于 $\overline{f(0)c}\,\overline{cf(1)}$, 其中 c 表示 Y 的中心，即连接 c 和 Y 中任意点的直线段都包含于 Y, 这里我们用 $\overline{xy}$ 表示连接 x 与 y 的直线段。如下：

$$\begin{aligned} f &\simeq (\overline{f(0)c}\,\overline{cf(0)})\ f\ (\overline{f(1)c}\,\overline{cf(1)}) \simeq \overline{f(0)c}\ (\overline{cf(0)}\ f\ \overline{f(1)c})\ \overline{cf(1)} \\ &\simeq \overline{f(0)c}\ \bar{c}\ \overline{cf(1)} \simeq \overline{f(0)c}\,\overline{cf(1)}, \end{aligned}$$

其中第三步用到了 Y 是星形的，这里 $\bar{c}$ 表示 c 处的常值道路。

6. 证明对任意的拓扑空间 X, 下面的三个条件是等价的:
(a) 每个映射 $S^1\to X$ 同伦于常值映射。
(b) 每个映射 $S^1\to X$ 可以被扩张成映射 $D^2\to X$.
(c) 对任意 $x_0\in X$, $\pi_1(X,x_0)=0$.
$\diamondsuit$ (a)$\Rightarrow$(b): 有 $H: S^1\times I\to X$ 使得 $H(S^1\times 1)=\{a\}$, 于是可以定义 $F: D^2\cong CS^1 \xrightarrow{\tilde{H}} X$, 其中 $\tilde{H}([z,t])\mapsto H(z,t)$, 易见 $F\big|_{S^1}=H(-,0)=f$, 并且有交换图

$$\begin{tikzcd} S^1\times I \arrow[r, "H"] \arrow[d] & X , \\ D^2 \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

其中竖直箭头是商映射，所以 F 连续，因此 F 是 f 的扩张。

(b)$\Rightarrow$(c): 对 x_0 处的任意闭路 γ, 有 $f: S^1=\{z\in\mathbb{C}|\ |z|=1\}\to X$ 使得 $\gamma(\theta)=f(e^{2\pi i\theta})$, $\forall\theta\in[0,1]$, 将 f 扩张为 $F: D^2\to X$, 可以作

$$H(\theta,t)=F((1-t)\gamma(\theta)+t\cdot 1),$$

它满足 $H(-,0)=\gamma$, $H(-,1)=1$, 因此对任意闭路 γ, $[\gamma]=0\in\pi_0(X,x_0)$, 所以 $\pi_0(X,x_0)=0$.

9. 证明 S^∞ 是可缩的。

$\Diamond$ 我们用坐标表示 S^∞，即作为集合

$$S^\infty = \{x = (x_0, x_1, ...) |\ 只有有限个 x_i 不等于0,\ |x| := \big(\sum_i x_i^2\big)^{1/2} = 1\}.$$

首先对任意 x，用直线连接 x 和 $(0, x) := (0, x_0, x_1, ...)$，因为它们一定不是对径点所以这段直线不过球心，因此可以通过球心投影到球上，得到 S^∞ 上的一条曲线 $t \mapsto f(x, t)$，从而有映射 $f : S^\infty \times I \to S^\infty$，具体地

$$f(x, t) = \frac{(1-t)x + t(0, x)}{|(1-t)x + t(0, x)|}.$$

类似地，我们再作

$$g(x, t) = \frac{(1-t)(0, x) + t(1, 0)}{|(1-t)(0, x) + t(1, 0)|},$$

对每个固定的 x，它把 $(0, x)$ 送到 $(1, 0) := (1, 0, 0, ...)$，如果我们作的 f 和 g 是连续的，那么就得到一个到点 $(1, 0)$ 的形变收缩。

现在来验证 f 和 g 是连续的。首先观察到对任意的序列 $A_1 \subset A_2 \subset ...$，$A_\infty$ 的拓扑是由自然的映射 $\amalg_k A_k \to A_\infty$ 给出的商拓扑。因为 $\amalg_n S^n \to S^\infty$ 是商映射，I 是局部紧的，所以 $\amalg_n(S^n \times I) = (\amalg_n S^n) \times I \to S^\infty \times I$ 也是商映射 (A.Hatcher, *Algebraic Topology*, Appendix, Proposition A.17.), 这说明 $S^\infty \times I$ 的拓扑与由序列 $S^0 \times I \subset S^1 \times I \subset ...$ 给出的“弱拓扑”一致，即 $S^\infty \times I$ 的一个子集是开集，当且仅当它和每个 $S^n \times I$ 的交是 $S^n \times I$ 的开集，于是从 $S^\infty \times I$ 出发的映射连续当且仅当它限制在每个 $S^n \times I$ 上连续。

对于 f，它在 $S^n \times I$ 上的限制可以写成 $S^n \times I \to S^{n+1} \subset S^\infty$，左边的箭头是

$$(x_0, x_1, ..., x_n) \mapsto \frac{(1-t)(x_0, ..., x_n, 0) + t(0, x_0, ..., x_n)}{|(1-t)(x_0, ..., x_n, 0) + t(0, x_0, ..., x_n)|},$$

它显然连续，所以 f 连续，类似地 g 也连续。