USTC, School of Mathematical Sciences *Winter semester 2018/11/30*
Algebraic topology by Prof. Mao Sheng *Hints to exercise sheet 6*
MA04311 Tutor: Lihao Huang, Han Wu *Posted online by Dr. Muxi Li*

Hint1. 我们先来说明商和 (强) 形变收缩可以交换，具体地，设 A 是 X 的形变收缩核，$\sim$ 是 A 中的一个等价关系，那么 $A/\sim$ 是 $X/\sim$ 的形变收缩核。这是因为下面的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[dl] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
(X/\sim) \times I \arrow[r, "\iota"] & (X \times I)/\approx \arrow[r, "\widetilde{H}"] & A/\sim
\end{tikzcd}$$

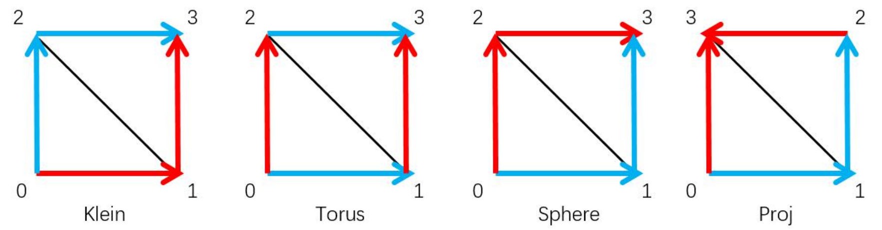
其中 $(x,s) \approx (y,t)$ 是指 $x \sim y$ 且 $s=t$，竖直的箭头表示商映射，H 表示形变收缩，$\widetilde{H}$ 存在是由于商空间的泛性质。我们知道 $\iota : ([x],t) \mapsto [(x,t)]$ 是连续的，然后容易验证 $\widetilde{H} \circ \iota$ 给出了从 $(X/\sim) \times I$ 到 $A/\sim$ 的形变收缩。

现在我们知道题中的商空间可以形变收缩到

$$[v_0,v_1,v_2] \cup [v_1,v_2,v_3]/\{[v_0,v_1] \sim [v_1,v_3],\ [v_0,v_1] \sim [v_1,v_3]\},$$

容易看出后者是一个 Klein 瓶，因为我们可以把 $[v_0,v_1,v_2] \cup [v_1,v_2,v_3]$ 当作一个正方形。

反过来，先按照我们熟知的方法，将正方形的两对边各自等同得到一个闭曲面，然后给顶点标上正确的 (使得每对边的等同是保持顶点顺序的) 序号 v_0,v_1,v_2,v_3，然后总可以把这个正方形当作 Δ^3 的两个面的并，这样就知道，将 Δ^3 的两对 1 维子单形等同得到的空间，可以形变收缩到这个闭曲面。具体作法如下图。



Hint2.令 $\{e_i\}_{i=0}^n$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的单位正交基。以 $2^{\overline{n}}$ 记从 $\{0,1,...,n\}$ 到 $\{1,-1\}$ 的所有映射构成的集合，以 $[f]$ 记 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单形 $[f_0e_0, f_1e_1, ..., f_ne_n]$, $\forall f \in 2^{\overline{n}}$. 在不交并 $\coprod_{f \in 2^{\overline{n}}}[f]$ 中，若 $f_i = -g_i$ 且 $f_j \neq g_j$, $\forall j \neq i$，我们保持顶点

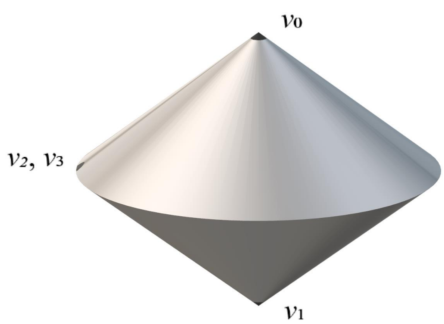
顺序地等同 $[f]$ 和 $[g]$ 的第 i 个面，这样得到的商空间 $\coprod_{f\in 2^{\overline{n}}}[f]/\sim$ 显然同胚于 $\bigcup_{f\in 2^{\overline{n}}}[f]$，而后者同胚于 S^n. 这就得到题要求的 S^n 的 Δ 复形结构。

如果还要等同 $[f]$ 和 $[-f]$, $\forall f\in 2^{\overline{n}}$, 那么我们自然也得到一个 Δ 复形，它同胚于 $\mathbb{R}P^n$，因为通过 $\coprod_f[f]$ 和 $\bigcup_f[f]$ 的同胚，等同 $[f]$ 和 $[-f]$, $\forall f$ 相当于等同 $\bigcup_f[f]$ 的每对对径点。这就得到题要求的 $\mathbb{R}P^n$ 的 Δ 复形结构。

Hint5. 我们说明对 Δ^3 的面作等同 $[v_0,v_1,v_2]\sim[v_0,v_1,v_3]$ 和 $[v_0,v_2,v_3]\sim[v_1,v_2,v_3]$，得到的商空间 X 同胚于 S^3. 首先考虑

$$Y:=\Delta^3/[v_0,v_1,v_2]\sim[v_0,v_1,v_3],$$

在 Y 中将 $q([v_0,v_2,v_3])$ 和 $q([v_1,v_2,v_3])$ 等同就得到 X，其中 q 表示 Δ^3 到 Y 的商映射。易见 Y 同胚于圆盘上的双角锥，



不妨就把它当作 Y，于是 X 是将 Y 的边界上水平坐标相同的每对点等同而得的商空间。我们把双角锥 Y 的上半和下半部分看作两个实心球 D^3, 那么 X 是通过边界 S^2 上的一个同胚粘合两个 D^3 而得的空间。我们来说明对 S^2 上的任意的同胚 h，这样的空间一定同胚于 S^3. 首先把 D^3 看作 S^2 上的锥，作 $\widetilde{h}([(x,t)])=[h(x),t]$，那么 $\widetilde{h}$ 是 h 在 D^3 上的扩张，并且是 D^3 上的同胚。我们知道通过 S^2 上的恒等映射粘合两个 D^3 而得的空间同胚于 S^3，再通过下面的交换图就说明了 $D^3\cup_h D^3$ 同胚于 S^3,

$$\begin{tikzcd}
D^3\coprod D^3 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}\coprod\widetilde{h}"', "\cong"] & D^3\cup_{\mathrm{id}_{S^2}} D^3 \arrow[d, "\cong"] \\
D^3\coprod D^3 \arrow[r] & D^3\cup_h D^3,
\end{tikzcd}$$

其中右边的竖直箭头及其逆都由商空间的泛性质给出。

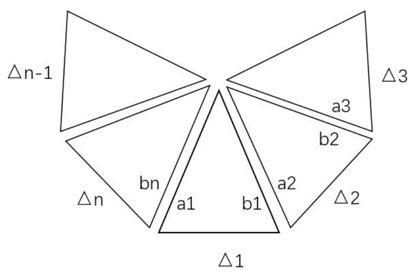
计算 $S^3\cong X$ 的单纯同调完全是按照例行程序，这里略去了。

Hint7. (a) 以 q 记商映射，我们证明对任意 x, $q(x)$ 有同胚于 $\mathbb{R}^2$ 的邻域。先考虑 x 是一个 2-单形的内点的情况。一个 2-单形的每个内点没有与之等价的其他点，因此商映射在这个 2-单形的内部是单的开映射，其中开是由于 2-单形的内部的任意开子集是它 (在商空间中) 的像的原像，这说明商映射在这单形的内部是同胚，所以当 x 是内点时，$q(x)$ 有同胚于 $\mathbb{R}^2$ 的邻域。

其次我们考虑 x 在 2-单形的边上但不是顶点的情况。这时我们先沿 x 所在的这条边粘合两个 2-单形，得到一个带边的曲面，再将把剩下的边粘合起来。和上面的情况一样，x 是这个曲面的内点，而这个曲面的每个内点都没有与之等价的其他点，所以 $q(x)$ 有一个同胚于这个曲面的内部的邻域，于是有同胚于 $\mathbb{R}^2$ 的邻域。

为了更方便地讨论 x 是一个 2-单形的顶点的情况，我们假设每个顶点不会与同一个 2-单形中的另一个顶点等同。我们对每个 2-单形作重心重分，然后考虑小的 2-单形来代替原来的 2-单形，这些小的 2-单形的边也是成对地被等同，并且还满足上面的假设，所以我们总可以做这样的假设。

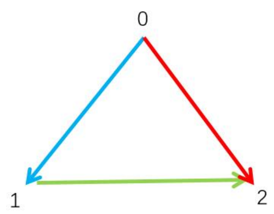
我们考虑 $q(x)$ 的原像 $\{y_1, ..., y_m\}$, 由于做了上面的假设，每个 y_i 分别位于不同的 2-单形，暂时记相应的 2-单形为 $\triangle' i$. 现在把 y_1 改记作 x_1, $\triangle' 1$ 改为 $\triangle 1$, 其中以 x_1 为端点的两条边被记作 a_1 和 b_1. 与 b_1 等同的边的一个端点是 $p(x)$ 的某个原像 y_i, 因此这条边在 $\triangle' i$ 中，我们把这个 y_i 改为 x_2, $\triangle' i$ 改为 $\triangle 2$, 称与 b_1 等同的边为 a_2, $\triangle 2$ 中另一条以 x_2 为顶点的边为 b_2. 继续寻找与 b_2 等同的边，并不断重复这样的过程，则至少到穷尽 $\{\triangle' 1, ..., \triangle' m\}$ 为止，一定有一个 $\triangle' i = \triangle n$, 使得 b_n 等同于 a_1, 因为与 a_1 等同的边也在这些 2-单形中。



于是我们先粘合 b_i 与 a_{i+1}, $i = 1, ..., n-1$, 以及 b_n 与 a_1, 得到一个同胚于闭圆盘的空间，$x_1, ..., x_n$ 被等同为其中的一个内点。同样这个闭圆盘的每个内点没有与之等价的其他点，因为每个 a_i, b_i 都已经与应等同于它们的边粘合了，这也说明了 $\{\triangle 1, ..., \triangle n\}$ 实际上穷尽了 $\{\triangle' 1, ..., \triangle' m\}$. 还是和

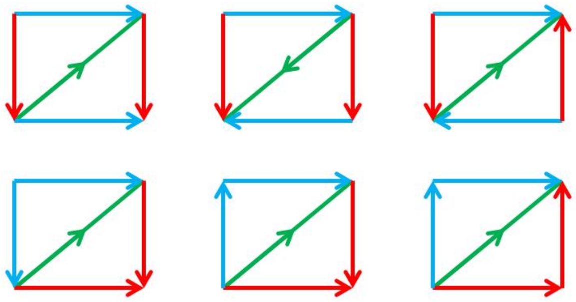
上面的情况相同，我们说明了 $q(x)$ 有同胚于 $\mathbb{R}^2$ 的邻域。

(b) 一个有序单形的面的定向要与其本身的定向一致，即面的顶点排序要保持他们原来指标的大小顺序。于是在 2-单形中，各边的定向可以看作从指标小的顶点指向指标大的顶点的箭头，这样的三个箭头不形成一个圈。反过来，沿着一个 2-单形的边给出三个不形成圈的箭头，可以给顶点重新标号，使得每个箭头从指标小的顶点指向指标大的顶点。



于是我们要做的就是沿着这些 2-单形的每条边给出一个箭头，使得每对边的等同是按照箭头的方向，并且每个三角形中的箭头不形成一个圈。我们称这样的一些箭头是正确的。

我们对 2-单形的数目作归纳来说明一组正确的箭头总是存在的。对于两个 2-单形，我们在下图中穷举边的不同的等同方式，并对每个情况给出了正确的箭头。

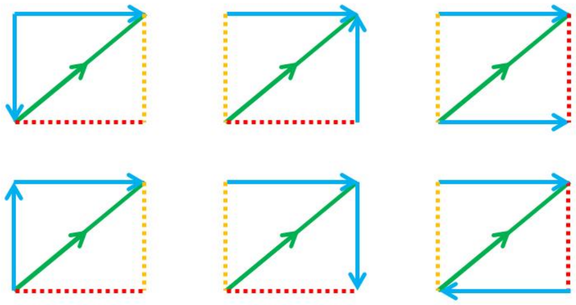


对于 $2n$ 个 2-单形，$n>1$，我们取出两个 2-单形 $\triangle 1$, $\triangle 2$, 并且至少有一对等同的边分属于两者。这样在剩下的 2-单形中，可能有 2 或 4 条边，暂时称它们为 a,b 或 a,b,c,d, 与它们等同的边在 $\triangle 1$, $\triangle 2$ 中，相应地称它们为 a',b' 或 a',b',c',d', 为方便计下面我们只说前面的情况，实际上对后面的也是同样的。我们以某种适当的方式暂时把 a,b 等同，根据归纳假设，在剩下的 2- 单形上有一组正确的箭头。于是可以沿 a',b' 作箭头，使得 a 与 a' 的等同，及 b 与 b' 的等同是按照箭头的方向给出的。如果我们

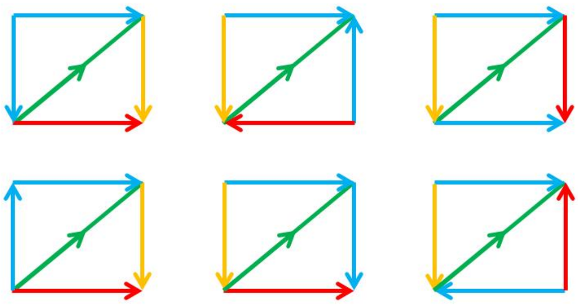
能够对 $\triangle1$, $\triangle2$ 的其余 4 条边给出箭头，使得它们与 a',b' 上的箭头一起在 $\triangle1$, $\triangle2$ 上是正确的，那么所有的箭头一起构成了所有 2-单形上的正确的箭头。下面我们做具体的讨论

首先是 $\triangle1$, $\triangle2$ 的所有边都相互等同的情况，这种情况是平凡的。因为剩下的 2-单形的边也是成对等同的，因此只要在 $\triangle1$, $\triangle2$ 上给出正确的箭头，而这是前面说说过的两个单形的情形。

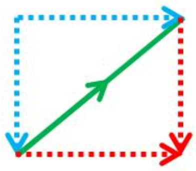
接下来是 $\triangle1$, $\triangle2$ 有两对边相互等同的情况，根据开始时的要求，其中一对边分属于两个 2-单形，我们先列举这两对边等同的方式，



其中同色的箭头只表示这对边的等同方式，所以实际给出箭头时可以把同色的两个箭头同时反向 (，但我们后面不需要这么做)，虚线表示上面所说的 a',b'. 因为暂时等同 a,b 的方式完全由我们决定，并且我们可以把由归纳假设给出的剩下的 2-单形上的箭头全部反向 (，此时虚线上的箭头也同时反向)，所以结果是我们可以随意地给出虚线上的箭头，这样就容易使得 $\triangle1$, $\triangle2$ 上的箭头是正确的，如下图。



$\triangle1$, $\triangle2$ 只有一对边相互等同时，我们假设 a',b' 在 $\triangle1$ 中，于是可以按照适当的方向暂时以等同 a 与 b, 以及等同 c 与 d, 使得对 $\triangle1$, $\triangle2$ 有下图



其中虚线表示 a', b', c', d', 同色的箭头对应于 a, b 以及 c, d 的等同方向。具体地说，我们预先对 a, b 给出一对箭头，使得上面的 a, b 的暂时等同是按照箭头的方向，接着可以给 a', b' 一对箭头，同样使得 a, a' 以及 b, b' 也是照箭头的方向，这给出了图中的一对同色的箭头，然后对 c, d 也是如此。因此实际给出箭头时，虚线上的箭头可能会被反向，因为 a', b', c', d' 的箭头由 a, b, c, d 的箭头决定，而后者是由归纳假设给出的，可能与我们预先给的箭头不一致。但是如果 a 上的箭头被反向，那么 b 上的箭头也被反向，因为归纳假设给出的箭头是正确的，须使得每对边按照箭头的方向等同，c, d 也是如此，所以结果是图上的一对同色箭头只能被同时反向，这样图上的箭头显然还是正确的。