微分几何习题 03 *

2016年 9月 20日

1. 设曲线

$$\boldsymbol{r}(t)=\begin{cases}(e^{-\frac{1}{t^2}},t,0), & t<0,\\ (0,0,0) & t=0,\\ (0,t,e^{-\frac{1}{t^2}}), & t>0,\end{cases}$$

(1). 证明: $\boldsymbol{r}(t)$ 是一条正则曲线， 且在 $t=0$ 处曲率 $\kappa=0$;

(2). 求 $\boldsymbol{r}(t)(t\neq 0)$ 时的 Frenet 标架，并讨论 $t\to 0$ 时 Frenet 标架的极限.

2. 设平面正则曲线 $C:\ \boldsymbol{r}(t)$ 不过 P_0 点，$\boldsymbol{r}(t_0)$ 是 C 与 P_0 距离最近的点，证明:向量 $\boldsymbol{r}(t_0)-\boldsymbol{p}_0$ 与 $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 垂直.

3. (1). 设 E^3 的曲线 C 的所有切线过一个定点，证明 C 是直线;

(2). 证明：所有主法线过定点的曲线是圆。

4. 设 $\mathcal{T}(X)=X\boldsymbol{T}+\boldsymbol{P}$ 是 E^3 的一个合同变换，$\det\boldsymbol{T}=-1$.$\boldsymbol{r}(t)$ 是 E^3 的正则曲线.求曲线 $\tilde{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{T}\circ\boldsymbol{r}$ 与曲线 $\boldsymbol{r}$ 的弧长参数、曲率、挠率间的关系.

5. 设弧长参数曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的的曲率 $\kappa>0$ ，挠率 $\tau>0$ ，$\boldsymbol{b}(s)$ 是 C 的副法向量，定义曲线 $\tilde{C}$:

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(s)=\int_0^s\boldsymbol{b}(u)du,$$

(1). 证明 s 是曲线 $\tilde{C}$ 的弧长参数且 $\tilde{\kappa}=\tau$, $\tilde{\tau}=\kappa$;

(2). 求 $\tilde{C}$ 的 Frenet 标架.

6. 证明:对 E^3 的弧长参数曲线 $\boldsymbol{r}(s)$,有

(1). $\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2},\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right)=\kappa^2\tau$;

(2). $\left(\frac{d\boldsymbol{t}}{dt},\frac{d^2\boldsymbol{t}}{dt^2},\frac{d^3\boldsymbol{t}}{dt^3}\right)=\kappa^3(\kappa\dot{\tau}-\dot{\kappa}\tau)=\kappa^5\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)$.

7. 设 P_0 是 E^3 的曲线 C 上一点，P 是 C 上 P_0 的邻近点，l 是 P_0 处的切线;证明:

$$\lim_{P\to P_0}\frac{2d(P,l)}{d^2(P_0,P)}=\kappa(P_0),$$

这里 d 表示 E^3 的距离.

8. 求满足 $\tau=c\kappa$ （c为常数， $\kappa>0$）的曲线.

*本次作业在下周四下课后上交,与上周作业一起

9. (1). 设 $\boldsymbol{r}(t)$ 是平面曲线，曲率为 $\kappa(t)$,求曲线 $\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}(-t)$ 的曲率;
   (2). 当 $\boldsymbol{r}(t)$ 是 E^3 的曲线时，求曲线 $\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}(-t)$ 的曲率和挠率.

10. 求沿曲线的向量场 $\boldsymbol{v}(s)$,同时满足以下各式:

$$\dot{\boldsymbol{t}}(s) = \boldsymbol{v}(s) \wedge \boldsymbol{t}(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{n}}(s) = \boldsymbol{v}(s) \wedge \boldsymbol{n}(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{b}}(s) = \boldsymbol{v}(s) \wedge \boldsymbol{b}(s).$$

11. 证明以下为光滑曲面:

   (1). $x^2 + y^2 + z^4 = 1$;
   (2). $(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)(a > b > 0)$.